

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les n -uplets de réels sont notés en colonne et désignés par des lettres grasses. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ se verra muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$.

Soit A un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{b}$ un élément non nul de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à la résolution approchée, dans $\mathbb{R}^n$, du système d'inconnue $\mathbf{x}$,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (5)$$

1. La matrice A étant inversible, puisque ses valeurs propres sont toutes non nulles, donc (5) admet une et une seule solution.
2. L'application

$$\Psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto {}^t\mathbf{x}A\mathbf{y}$$

est un produit scalaire, en effet en notant a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A ,

$$\Psi : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x} | a(\mathbf{y}) \rangle,$$

Ainsi Ψ est-elle :

- bilinéaire par bilinéarité du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et linéarité de a ;
- symétrique par symétrie de a (sa matrice dans la base orthonormée qu'est la base canonique est symétrique) ;
- définie positive, puisque il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, constituée de vecteurs propres de a (théorème spectral) et que pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2, \quad (1)$$

où x_i' est la i^{e} coordonnée de $\mathbf{x}$ dans $\mathcal{B}$, pour $i = 1, \dots, n$.

3. Pour tout $\mathbf{x}$ et $\mathbf{h}$ éléments de $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{h}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x} + \mathbf{h}\|_A^2 - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} + \mathbf{h} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_A^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle_A + \frac{1}{2} \|\mathbf{h}\|_A^2 - \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{h} \rangle \\ &= \Phi(\mathbf{x}) + \langle A\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{h} \rangle + \frac{1}{2} \|\mathbf{h}\|_A^2 \\ &= \Phi(\mathbf{x}) + \langle A\mathbf{x} - \mathbf{b}, \mathbf{h} \rangle + o_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}}(\|\mathbf{h}\|). \end{aligned} \quad (2)$$

La dernière ligne provient de l'équivalence des normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|_A$ (finie est la dimension de $\mathbb{R}^n$!). Ce calcul répond au trois sous-questions (a), (b) et (c).

- (a) Pour tout $\mathbf{x}$ élément de $\mathbb{R}^n$,

$$\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\bar{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_A.$$

- (b) Pour tout $\mathbf{x}$ élément de $\mathbb{R}^n$, $\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\bar{\mathbf{x}}) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$, donc Φ atteint son minimum en $\bar{\mathbf{x}}$ et qu'en ce point.
- (c) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\nabla\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - b$ et donc $\nabla\Phi(\mathbf{x})$ s'annule en $\bar{\mathbf{x}}$ et en nul autre point.
4. (a) Le vecteur $\nabla\Phi(a)$ dirige la demi-droite issue de a suivant laquelle, pour un déplacement infinitésimal, la fonction augmente le plus ; c'est également un vecteur normal à l'ensemble de niveau de Φ passant par a .
- (b) Donc f est un trinôme du second degré qui atteint son maximum en $\frac{\|\nabla\Phi(\mathbf{a})\|^2}{\|\nabla\Phi(\mathbf{a})\|_A^2}$ et seulement en celui-ci.
- (c) La dérivée de f s'annule en α_k , par minimalité de f , or $f'(\alpha_k) = \langle \nabla\Phi(\mathbf{x}_k + \alpha_k \nabla\Phi(\mathbf{x}_k)), \nabla\Phi(\mathbf{x}_k) \rangle$, donc

$$\langle \nabla\Phi(\mathbf{x}_{k+1}), \nabla\Phi(\mathbf{x}_k) \rangle = 0. \quad (3)$$

Concluons : la droite $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ est tangente en $\mathbf{x}_{k+1}$ à la ligne de niveau de Φ passant par ce point, puisque $\nabla\Phi(\mathbf{x}_k)$ est normal à cet ensemble en $\mathbf{x}_{k+1}$ (voir la figure 1).

Les lignes de niveau de Φ sont des sphères pour la norme $\|\cdot\|_A$, ou si l'on veut des ellipsoïdes, de centre $\bar{\mathbf{x}}$.

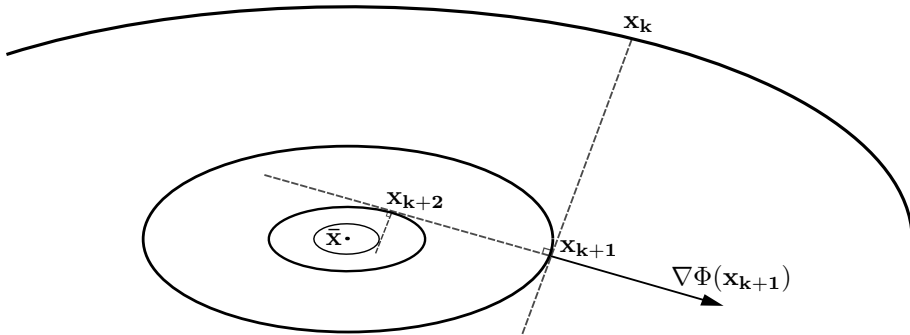


FIGURE 1. MÉTHODE DU GRADIENT À PAS OPTIMAL.

Lemme (inégalité de Kantorovitch). *Pour tout élément $\mathbf{x}$ non nul de $\mathbb{R}^n$,*

on a¹ :

$$\frac{\|\mathbf{x}\|^4}{\|\mathbf{x}\|_{A^{-1}}^2 \|\mathbf{x}\|_A^2} \geq 4 \frac{\lambda_M \lambda_m}{(\lambda_M + \lambda_m)^2}.$$

5. INÉGALITÉ DE KANTOROVITCHE.

Voir Exercices F et G.

Pour tout élément $\mathbf{x}$ non nul de $\mathbb{R}^n$, on a² :

$$\frac{\|\mathbf{x}\|^4}{\|\mathbf{x}\|_{A^{-1}}^2 \|\mathbf{x}\|_A^2} \geq 4 \frac{\lambda_M \lambda_m}{(\lambda_M + \lambda_m)^2}.$$

6. Soit $\mathbf{x} \in B_1$, alors par homogénéité de la norme $\|\cdot\|$ et définition de $|\cdot|$,

$$1 = \|\mathbf{x}\| = \|MM^{-1}\mathbf{x}\| \leq |M| \|M^{-1}\mathbf{x}\| \leq |M| |M^{-1}|,$$

soit $\text{cond}(M) \geq 1$.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Avec les notation de la question 2 et puisque $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ est orthonormée,

$$\|A\mathbf{x}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x'_i A\mathbf{u}_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x'_i \lambda_i \mathbf{u}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i'^2 \leq \lambda_M^2 \sum_{i=1}^n x_i'^2 = \lambda_M^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

Par positivité de λ_M on en déduit que $|A| \leq \lambda_M$.

Mais en prenant $\mathbf{X}$ égal à un de vecteur $\mathbf{u}$ de la base orthonormée $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ associé à la valeur propre λ_M , il vient :

$$\|A\mathbf{u}\| = \|\lambda_M \mathbf{u}\| = |\lambda_M| = \lambda_M.$$

Donc $|A| \geq \lambda_M$.

On a donc $|A| = \lambda_M$

Par ailleurs A^{-1} est symétrique (${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1} = A^{-1}$). Ses valeurs propres sont les inverse de celles de A et donc sont strictement positives. En appliquant alors à A^{-1} ce que nous fîmes pour A :

$$|A^{-1}| = \max \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right\} = \frac{1}{\lambda_m},$$

puisque les valeurs propre de A sont éléments de $\mathbb{R}_+^*$ intervalle sur lequel $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît.

1. On sait que l'inverse d'un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est également élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on peut donc définir $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ comme $\|\cdot\|_A$.

2. On sait que l'inverse d'un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est également élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on peut donc définir $\|\cdot\|_{A^{-1}}$ comme $\|\cdot\|_A$.

Au total, $\text{cond}(A) = \frac{\lambda_M}{\lambda_m}$.

7. (a) Notons pour alléger, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{g}_k = \nabla \Phi(\mathbf{x}_k)$ et considérons un élément p de $\mathbb{N}$. On a par définition de $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\|\mathbf{x}_{p+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2 = \langle A(\mathbf{x}_{p+1} - \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}_{p+1} - \mathbf{x}_p \rangle + \langle A(\mathbf{x}_{p+1} - \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}} \rangle$$

Mais d'après (3), $\langle A(\mathbf{x}_{p+1} - \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}_{p+1} - \mathbf{x}_p \rangle = -\alpha_p \langle \mathbf{r}_{p+1}, \mathbf{r}_p \rangle = 0$, et donc en utilisant la symétrie de A ,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{p+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2 &= \langle A(\mathbf{x}_{p+1} - \mathbf{x}_p), \mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}} \rangle + \langle A(\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_{p+1} - \mathbf{x}_p, A(\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}) \rangle + \|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2 \\ &= -\alpha_p \langle \mathbf{r}_p, \mathbf{r}_p \rangle + \|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2 \\ &= -\frac{\|\mathbf{r}_p\|^4}{\|\mathbf{r}_p\|_A^2} + \|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2}{\|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2} = 1 - \frac{\|\mathbf{r}_k\|^4}{\|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2 \|\mathbf{r}_k\|_A^2}$$

- (b) Par ailleurs

$$\|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2 = \langle A(\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}} \rangle = \langle A(\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}), A^{-1}A(\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}) \rangle = \|\mathbf{r}_p\|_{A^{-1}}^2,$$

et donc

$$\frac{\|\mathbf{x}_{p+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2}{\|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2} = 1 - \frac{\|\mathbf{r}_p\|^4}{\|\mathbf{r}_p\|_{A^{-1}}^2 \|\mathbf{r}_p\|_A^2}.$$

L'inégalité de Kantorovitch dit que

$$\left(1 - \frac{\|\mathbf{r}_p\|^4}{\|\mathbf{r}_p\|_A^2 \|\mathbf{r}_p\|_{A^{-1}}^2}\right) \leq \left(1 - 4 \frac{\lambda_M \lambda_m}{(\lambda_M + \lambda_m)^2}\right) = \left(\frac{(\lambda_M - \lambda_m)^2}{(\lambda_M + \lambda_m)^2}\right),$$

et donc par 6,

$$\frac{\|\mathbf{x}_{p+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2}{\|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A^2} \leq \left(\frac{\text{cond}(A) - 1}{\text{cond}(A) + 1}\right)^2.$$

- (c) Un récurrence enfantine conduit à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\mathbf{x}_{n+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_A \leq \left(\frac{\text{cond}(A) - 1}{\text{cond}(A) + 1}\right)^k \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\|_A.$$

Mais l'égalité (1) veut que pour tout élément $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_m \|\mathbf{x}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|_A \leq \lambda_M \|\mathbf{x}\|,$$

et donc

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} \left(\frac{\text{cond}(A) - 1}{\text{cond}(A) + 1} \right)^k \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\|.$$

$$\|\mathbf{x}_{p+1} - \bar{\mathbf{x}}\|_A \leq \left(\frac{\lambda_M - \lambda_m}{\lambda_M + \lambda_m} \right) \|\mathbf{x}_p - \bar{\mathbf{x}}\|_A.$$

Donc plus le conditionnement est proche de sa valeur minimale 1, plus la convergence de la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est rapide.

On peut intuitiver géométriquement ce résultat dans le cas $n = 2$. Lorsque les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A sont égales, les lignes de niveaux de Φ sont des cercles de centre $\bar{\mathbf{x}}$ et la méthode du gradient converge en une étape. Si $\lambda_2 > \lambda_1$, les lignes de niveaux deviennent des ellipses, dont l'excentricité est d'autant plus grande que le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ l'est (le demi-grand axe a comme longueur $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, le demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$). On voit bien que dans le cas d'une ellipse très excentrique, une droite passant par un de ses points et normale à l'ellipse en ce point peut passer très loin de son centre.

Lorsque l'on programme la méthode du gradient à pas optimal, se pose la question du test d'arrêt. On peut choisir d'arrêter les calculs des termes $\mathbf{x}_k$ dès que $\|\nabla \Phi(\mathbf{x}_k)\|$ est inférieur à un certain seuil ε , en effet cette condition peut s'écrire aussi :

$$\|\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}\|_A \leq \varepsilon.$$

8. Montrons pour finir que soit la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 1, soit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_{k+1}$.

Par définition de la suite si deux de ses termes successifs sont égaux alors ils sont égaux à $\bar{\mathbf{x}}$ et tous les termes suivants le seront également. Il y a donc deux possibilité : ou tous les termes de $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont distincts, ou la suite est stationnaire.

Plaçons nous dans le second cas et supposons que pour un réel $k \geq 2$ on ait $\mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}$ tandis que $\mathbf{x}_{k-1} \neq \mathbf{x}_k$. Notons qu'alors $\mathbf{x}_{k-2} \neq \mathbf{x}_{k-1}$.

Par définition de la suite $\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}$ est colinéaire à $\nabla \Phi(\mathbf{x}_{k-1})$ c'est-à-dire à $A(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}})$. Or par (3), $A(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}})$ est orthogonal à $A(\mathbf{x}_{k-2} - \bar{\mathbf{x}})$ et donc $0 = \langle \mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}, A(\mathbf{x}_{k-2} - \bar{\mathbf{x}}) \rangle = \langle A(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{x}_{k-2} - \bar{\mathbf{x}} \rangle$. Donc

$$0 = \langle \mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_{k-2} - \bar{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_{k-2} - \mathbf{x}_{k-1} + (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}) \rangle$$

mais $\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}$ est orthogonal à $\mathbf{x}_{k-2} - \mathbf{x}_{k-1}$, donc $0 = \langle \mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}} \rangle$ ce qui contredit $\mathbf{x}_{k-1} \neq \mathbf{x}_k = \bar{\mathbf{x}}$.

La suite ne peut être stationnaire qu'à partir du rang 1 ($\mathbf{a}$ est supposé distinct de $\bar{\mathbf{x}}$). Ce cas peut effectivement se produire lorsque $\mathbf{a} - \bar{\mathbf{x}}$ est un vecteur propre de A .