

## DM bis n°3

### Sujet type Mines-Centrale

Dans tout ce problème,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels ;
- $GL_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des éléments inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ;
- $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre  $n$  ;
- $\mathcal{X}_n$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont dans  $\{0, 1\}$  ;
- $\mathcal{Y}_n$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont dans  $[0, 1]$  ;
- $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont dans  $\{0, 1\}$  et ne contenant qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne ;
- ${}^tM$  ou  $M^T$  la transposée d'une matrice  $M$ .

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_3 \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \exp(-1) & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_3$$

Ce problème aborde l'étude de matrices à coefficients dans  $\{0, 1\}$  à travers plusieurs thématiques indépendantes les unes des autres. Les deux premières parties étudient quelques propriétés algébriques et topologiques des ensembles  $\mathcal{X}_n$  et  $\mathcal{Y}_n$  définis ci-dessus. La partie 3 étudie le cas particulier des matrices de permutation. La partie 4 étudie deux modalités de génération aléatoire de matrices à coefficients dans  $\{0, 1\}$ .

## 1 Généralités

### 1.A. Propriétés élémentaires

- 1.A.1** Justifier que  $\mathcal{X}_n$  est un ensemble fini et déterminer son cardinal.
- 1.A.2** Démontrer que pour tout  $M \in \mathcal{Y}_n$ ,  $\det(M) \leq n!$  et qu'il n'y a pas égalité.
- 1.A.3** Démontrer que  $\mathcal{Y}_n$  est une partie convexe et compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- 1.A.4** Soit  $M \in \mathcal{Y}_n$  et  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $M$ . Montrer que  $|\lambda| \leq n$  et donner un exemple explicite où l'on a l'égalité.

### 1.B. Etude de $\mathcal{X}'_n = \mathcal{X}_n \cap GL_n(\mathbb{R})$

- 1.B.1** Faire la liste des éléments de  $\mathcal{X}'_2$ . Préciser (en justifiant) ceux qui sont diagonalisables sur  $\mathbb{R}$ .
- 1.B.2** Démontrer que  $\mathcal{X}'_2$  engendre l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Est-ce que, pour  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{X}'_n$  engendre l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

## 2 Deux problèmes d'optimisation

### 2.A. Etude de la distance à $\mathcal{Y}_n$

Pour tout  $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ , on note

$$(M|N) = \text{Tr}(M^T N)$$

**2.A.1** Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Expliciter  $(M|N)$  en fonction des coefficients de  $M$  et  $N$ .

On notera  $\|M\|$  la norme euclidienne associée.

**2.A.2** On fixe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , prouver qu'il existe une matrice  $M \in \mathcal{Y}_n$  telle que :

$$\forall N \in \mathcal{Y}_n, \|A - M\| \leq \|A - N\|$$

**2.A.3** Justifier l'unicité de la matrice  $M$  ci-dessus et expliciter ses coefficients en fonction de ceux de  $A$ .

## 2.B. Maximisation du déterminant sur $\mathcal{X}_n$ et $\mathcal{Y}_n$

**2.B.1** Justifier que le déterminant possède un maximum sur  $\mathcal{X}_n$  (noté  $x_n$ ) et un maximum sur  $\mathcal{Y}_n$  (noté  $y_n$ ).

**2.B.2** Démontrer que la suite  $(y_k)_{k \geq 2}$  est croissante.

**2.B.3** Soit  $J \in \mathcal{X}_n$  la matrice dont tous les coefficients valent 1. On pose  $M = J - I_n$ . Calculer  $\det(M)$  et en déduire que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = +\infty$ .

**2.B.4** Soit  $N = (n_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{Y}_n$ . Fixons  $1 \leq i, j \leq n$  et supposons que  $n_{i,j} \in ]0, 1[$ . Démontrer qu'en remplaçant  $n_{i,j}$  soit par 0 soit par 1, on peut obtenir une matrice  $N'$  de  $\mathcal{Y}_n$  telle que  $\det(N) \leq \det(N')$ . En déduire que  $x_n = y_n$ .

## 3 Matrices de permutations

On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique et on note  $(e_1, \dots, e_n)$  sa base canonique.

On note  $S_n$  l'ensemble des bijections de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  dans lui-même (appelées *permutations*).

Pour tout  $\sigma \in S_n$ , on note  $P_\sigma$  la matrice de  $\mathcal{P}_n$  dont le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  vaut 1 si  $i = \sigma(j)$  et 0 sinon. On dit que  $P_\sigma$  est la *matrice de permutation* associée à  $\sigma$ .

On note  $u_\sigma$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $P_\sigma$ .

### 3.A. Description de $\mathcal{P}_n$

**3.A.1** Donner deux définitions d'une isométrie vectorielle de  $\mathbb{R}^n$  et démontrer leur équivalence.

**3.A.2** Démontrer que si  $M \in O_n(\mathbb{R})$ , alors son déterminant vaut 1 ou  $-1$ . Que penser de la réciproque?

**3.A.3** Démontrer que  $\mathcal{P}_n = \mathcal{X}_n \cap O_n(\mathbb{R})$  et déterminer son cardinal.

### 3.B. Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{P}_n$

**3.B.1** Soient  $\sigma, \sigma' \in S_n$ . Démontrer que  $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$ .

Justifier que l'application  $k \in \mathbb{Z} \mapsto \sigma^k \in S_n$  n'est pas injective. En déduire qu'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que  $\sigma^N = \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$  (application identité de  $\{1, \dots, n\}$ ).

**3.B.2** Démontrer que tous les éléments de  $\mathcal{P}_n$  sont diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ .

**3.B.3** Déterminer les vecteurs propres communs à tous les éléments de  $\mathcal{P}_n$  dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ .

**3.B.4** On se propose de démontrer que les seuls sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  stables par tous les  $u_\sigma$ ,  $\sigma \in S_n$ , sont  $\{0\}$ ,  $\mathbb{R}^n$ , la droite  $D$  engendrée par  $e_1 + \dots + e_n$  et l'hyperplan  $H$  orthogonal à  $D$ .

(a) Vérifier que ces quatre sous-espaces vectoriels sont stables par tous les  $u_\sigma$ .

(b) Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , non contenu dans  $D$  et stable par tous les  $u_\sigma$ . Démontrer qu'il existe un couple  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  avec  $i \neq j$  tel que  $e_i - e_j \in V$ , puis que les  $n - 1$  vecteurs  $e_k - e_j$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \neq j$ ) appartiennent à  $V$ .

(c) Conclure.

### 3.C. Une caractérisation des éléments de $\mathcal{P}_n$

On se donne une matrice  $M$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont des entiers naturels et telle que l'ensemble formé par tous les coefficients de toutes les puissances successives de  $M$  est fini.

Démontrer que  $M^{-1}$  est à coefficients dans  $\mathbb{N}$  et en déduire que  $M$  est une matrice de permutation. Que dire de la réciproque ?

## 4 Matrices aléatoires de $\mathcal{X}_n$

### 4.A. Génération par une colonne aléatoire

Soit  $p \in ]0, 1[$ . Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

**4.A.1** Calculer la probabilité que  $X_1, \dots, X_n$  soient égales.

**4.A.2** Quelle est la loi de  $S = X_1 + \dots + X_n$  ? On attend une démonstration du résultat annoncé.

**4.A.3** Soient  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Donner la loi de la variable aléatoire  $X_{i,j} = X_i \times X_j$ .

**4.A.4** Si  $\omega \in \Omega$ , on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice  $M(\omega) = U(\omega)U(\omega)^T$ . L'application  $M : \omega \in \Omega \mapsto M(\omega)$  est ainsi une variable aléatoire.

(a) Si  $\omega \in \Omega$ , justifier que  $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$ .

(b) Si  $\omega \in \Omega$ , justifier que  $\text{Tr}(M(\omega)) \in \{0, \dots, n\}$ , que  $M(\omega)$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\text{rg}(M(\omega)) \leq 1$ .

(c) Si  $\omega \in \Omega$ , justifier que  $M(\omega)$  est une matrice de projection orthogonale si et seulement si  $S(\omega) \in \{0, 1\}$ .

**4.A.5** Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires  $\text{Tr}(M)$  et  $\text{rg}(M)$ .

**4.A.6** Exprimer  $M^k$  en fonction de  $S$  et  $M$ . Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices  $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$  soit convergente ? Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

**4.A.7** Quelle est la probabilité que  $M$  admette deux valeurs propres distinctes ?

### 4.B. Génération par remplissage aléatoire

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On part de la matrice nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , notée  $M_0$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on construit la matrice  $M_{k+1}$  à partir de  $M_k$  de la manière suivante

- on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité  $p$ ;
- chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les  $M_k$  sont donc des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathcal{X}_n$  et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour  $n = 2$

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow M_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour  $k \geq 1$ , le nombre de modifications réalisées lors de la  $k$ -ième vague est noté  $N_k$ . Dans l'exemple ci-dessus :  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 0$ ,  $N_3 = 1$ ,  $N_4 = 1$ ,  $N_5 = 0$ .

On s'intéresse au plus petit indice  $k$  pour lequel la matrice  $M_k$  ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est *totalement remplie*. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

On note  $q = 1 - p$  et  $m = n^2$ .

- 4.B.1** Dans toute cette question on utilise le langage Python.  $\mathbf{M}$  désigne une matrice carrée d'ordre  $n$ . Ses lignes et colonnes sont numérotées de 0 à  $n - 1$ . L'expression  $\mathbf{M}[i, j]$  permet d'accéder à l'élément situé à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  et  $\text{len}(\mathbf{M})$  donne l'ordre de la matrice  $\mathbf{M}$ .
- (a) Ecrire une fonction `Somme(M)` qui renvoie la somme des coefficients de la matrice  $\mathbf{M}$ .
  - (b) Ecrire une fonction `Bernoulli(p)` qui renvoie 1 avec la probabilité  $p$  et 0 avec la probabilité  $1 - p$ . On pourra utiliser l'expression `random()` qui renvoie un réel de l'intervalle  $[0, 1[$  selon la loi uniforme.
  - (c) A l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction `Modifie(M, p)` qui modifie aléatoirement la matrice  $\mathbf{M}$  selon le principe décrit plus haut.
  - (d) Ecrire une fonction `Simulation(n, p)` qui renvoie le plus petit entier  $k$  tel que  $M_k$  est totalement remplie à partir d'un remplissage aléatoire de la matrice nulle d'ordre  $n$  (qui peut être obtenue par `zeros((n, n))`). Il n'est pas demandé de mémoriser les  $M_k$ .
- 4.B.2** Donner la loi de  $N_1$ , puis la loi conditionnelle de  $N_2$  sachant ( $N_1 = i$ ) pour  $i$  dans un ensemble à préciser.  $N_1$  et  $N_2$  sont-elles indépendantes ?
- 4.B.3** Soient  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  de  $M_k$  vaut 1 est noté  $T_{i,j}$  (dans l'exemple ci-dessus,  $T_{1,1} = 1$  et  $T_{1,2} = 3$ ). Donner la loi de  $T_{i,j}$ .
- 4.B.4** Pour un entier  $k \geq 1$ , donner la valeur de  $\mathbb{P}(T_{i,j} \geq k)$ .
- 4.B.5** Soient  $r \geq 1$  un entier et  $S_r = N_1 + \dots + N_r$ . Que représente  $S_r$  ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).
- 4.B.6** On note  $N$  le plus petit indice  $k$  pour lequel la matrice  $M_k$  est totalement remplie.
- (a) Proposer une démarche pour approcher l'espérance de  $N$  à l'aide d'une simulation informatique utilisant les fonctions précédentes.
  - (b) Donner une expression de la valeur exacte de cette espérance faisant intervenir  $q$  et  $m$ .