Exercices d'oraux 2022

Laurent BERNIS

5 juin 2023

Oral 1

A. Déterminer l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ qui commutent avec tous les endomorphismes.

A'. (ENS 2018) Déterminer les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui commutent avec tous les éléments de leur classe de conjugaison

A" (version Centrale). Soit A un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ qui commute avec tous les éléments de sa classe d'équivalence.

1. Soit λ une valeur propre de A et P un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Comparer $\mathbf{E}_\lambda(A)$ et $\mathbf{E}_\lambda(PAP^{-1})$.
2. On suppose que A laisse stable tous les espaces de dimension k, où $k \in \{2, ...n-1\}$. Montrer que A laisse stable tous les espaces de dimension 1.
3. Montrer que A est une homothétie.

B. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivables telles que $f'(x) = f(-x)$, pour tout réel x.

B'. Déterminer les applications f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ dérivables telles que $f'(x) = f(x^{-1})$, pour tout réel $x > 0$.

Oral 2

A. Déterminer les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ dérivables telles que pour tout x et tout v réels,

$$f(u+v) = f(u)f(v).$$

Reprendre la question en supposant f seulement continue.

A'. Soit $E = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} | \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)\}$.

1. Déterminer les éléments de E continus.
2. Montrer que le graphe de tout élément de E non linéaire est dense dans $\mathbf{R}^2$.
3. Soit un entier $n \geq 2$ on pose $E_n = \{f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}} | \forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x^n) = f(x)^n\}$.
4. Déterminer les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ linéaires éléments de E_n.
5. On suppose n pair. Déterminer $E \cap E_n$.
6. On suppose n impair. En calculant pour un réel $x > 0$ et un rationnel $t > 0$, la quantité $f((x+t)^n)$, déterminer $E \cap E_n$.

B.

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe T et T' produit de matrices de transvections d'ordre 3 telles que
$$TMT' = \mathrm{diag}(1, 1, \det(M)).$$
2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^+$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^-$ sont connexes par arcs.

Oral 3

A. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ il existe unematrice T semblable à M dont tous les coefficients non diagonaux ont un module inférieur ou égal à ε

A'. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dont la classe de similitude est bornée.

B. Soit f une application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ développable en série entière sur $\mathbf{C}$ entier.

Montrer que si f est bornée, alors elle est constante.

Oral 4

A. Soit u et v des endomorphisme de $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que u et v commutent.

Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{E}$ dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.

B. (Centrale 2021)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et de somme f.

1. Soit $r \in]0, R[$. On veut montrer que :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \frac{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} \mathrm{d}t,$$

   pour tout tout $z \in \mathrm{B}_0(0, r)$.

   (a) Montrer la formule pour $f \ : \ z \mapsto z^n$

   (b) Montrer la formule dans le cas général.

2. Soit g une application continue sur $\mathrm{B}_0(0, R)$.

   On suppose que pour tout $r \in]0, R[$,

$$\forall z \in \mathrm{B}_0(0, r), g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \frac{g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} \mathrm{d}t.$$

   Montrer que g est développable en séries entières.

Oral 5

A.

1. Soit u_1, u_2,..u_p des endomorphisme de $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose les u_i, $i = 1, , ..., p$, tous diagonalisables et commutant deux à deux.

   Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{E}$ dans laquelle les matrices de tous les u_i sont diagonales. On dit que les u_i sont codiagonalisables ou simultannément diagonalisables.

2. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ abélien. Montrer que tous les éléments de G sont codiagonalisables.

A'

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3. Soit l'application

$$\phi \ : \ \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}) \to \mathrm{GL}_n\left(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\right) \ ; \ M \mapsto \bar{M}.$$

On désigne par $\bar{A}$, pour tout élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, la matrice d'ordre n à valeur dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, dont le coefficient d'indice i, j est la classe *modulo* p de $a_{i,j}$.

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, montrer que $\phi_{|G}$ est injective.

B. Soit h une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $J =]-a, a[$ $(a > 0)$, telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $h^{(n)}$ soit positive sur $[0, a[$.

Pour tout entier $N \geq 0$, on note $R_N(x) = h(x) - \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

1. Pour tout couple de réels (x,y) vérifiant $0 < x < y < a$, et tout entier $N \geq 0$, montrer que :

$$0 \leq R_N(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y).$$

2. En déduire que h est somme de sa série de Taylor en 0 sur $[0,a[$.

B' Soit g l'application définie sur $I = \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan x$. Montrer que g est développable en série entière.

Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 de g.

Oral 6

A. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe un réel $R \geq 0$ tel que, pour tout entier $k \geq 0$ et tout réel $r \geq R$,

$$A^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{k+1} e^{i(k+1)\theta}\left(re^{i\theta}I_n - A\right)^{-1} \mathrm{d}\theta.$$

En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

B. Pour tout entier $n \geq 1$, notons :

$$u_n =^4\sqrt{n +^4\sqrt{n-1+ ...... +^4\sqrt{2+^4\sqrt{1}}}}$$

Donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Oral 7

A. $\mathbf{R}$ croissante, convexe et non constante. Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

A'.Soient n un entier supérieur ou égal à 2. et f une application continue de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.

1. On suppose f surjective. montrer que l'ensemble Z_f des zéros de f n'est pas compact.
2. On suppose que Z_f est compact non vide et f convexe. Montrer que $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

B. Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ strictement triangulaire supérieur est nilpotent.
2. Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, dont tous les éléments sont nilpotents.

Oral 8

A. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

A' Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ dont tous les éléments sont diagonalisables dans $\mathbf{R}$.

1. Montrer que I_2 est élément de V.
2. Donner un exemple d'un tel hyperplan V.
3. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ tel que $P^{-1}VP$ contienne toutes les matrices diagonales.
4. Montrer qu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ tel que $Q^{-1}VQ = \mathcal{S}_2$.

B. Soient a et b des réels. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a,\ u_1 = b,\ \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de a et b.

B'. On suppose a et b strictement positifs et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes. On considère la suite aléatoire $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$), définie par

$$v_0 = a, v_1 = b \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + X_n v_n.$$

Montrer que la suite v converge presque sûrement vers $+\infty$.

Oral 9

B. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{1, ..., n\}$. Pour $k = 1, 2, ..., n$, on note

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i = k}$$

et $Z = \max\{Y_k, k = 1, ..., n\}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, Montrer que $\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{E}(Z)} \leq n\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda Y_1}\right)$.
2. Montrer que
$$\mathrm{E}(Z) \leq \frac{2\ln n}{\ln(1+\ln(n))}.$$

Oral 10

Centrale Python

Pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$ on considère :

— le développement en base 2 de n,

$$n = \sum_{k=0}^{k_n} \varepsilon_{k,n} 2^k,$$

où k_n est un entier naturel et $\varepsilon_{k,n}$ un élément de $\{0,1\}$, pour $k = 0, ...k_n$, nécessairement égal à 1 pour $k = k_n$;

— le réel $L(n) := 2^{k_n}$;

— la somme $S(n) = \sum\limits_{k=0}^{k_n} \varepsilon_{k,n}$.

1. Écrire les fonctions S et L en Python.
2. Écrire en Python une fonction d'argument (N, α), élément de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{R}_+^*$ qui calcule la somme partielle d'ordre N de la série
$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{L(n)^\alpha S(n)}.$$
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose
$$b_n = 2^n a_{2^n}.$$
Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ converge.
4. Pour quelles valeurs de α la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{L(n)^\alpha S(n)}$ converge-t-telle ?

Oral 11

Centrale Python

À chacun des cinq sommets d'un pentagone est posté un jouer de discoplane. Au début du jeu, deux jouers, voisins immédiats, on entre les mains un discoplane. Ils envoient le discoplane à leur voisin de droite ou de gauche de manière équiprobable, et les receveurs font de même à l'étape suivante.

Le jeu se termine lorsque un joueur récupère les deux discoplanes.

On note T la variable aléatoire qui numérote l'étape à laquelle le jeu s'arrête.

1. Estimez numériquement $\mathrm{E}(T)$.
2. Pour tout un entier $n \geq 1$, on note a_n la probabilité que les deux discoplanes soient entre les mains de joueurs voisins immédiats (et différents !) à la n^{e} étape, b_n la probabilité que les deux discoplanes soient entre les mains de joueurs non voisins immédiats (et différents !) à la n^{e} étape.
On pose pour tout complexe z de module inférieur ou égal à 1,
$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n, \ B(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n \text{ et } G(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n) z^n.$$
Exprimer $G(z)$ en fonction de $A(z)$ et $B(z)$ pour tout complexe z de module inférieur ou égal à 1.
3. Conclure.

Oral 12

A. Pour tout entier $n \geq 0$ on pose :

$$a_n := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général de la variable réelle x, $\sum a_n x^n$. On notera S sa somme. Étudier la convergence de la série entière au points 1 et -1.
2. Calculer pour tout élément x de l'intervalle ouvert de convergence la valeur de $S(x)$.

B. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(Z)$.
Comparer le rang de M vu comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$.
B' (2018 ENS)

1. Comparer le rang de M vu comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, où p est un nombre premier.
2. Existe-t-il un nombre premier q tel que les rangs de M vu comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ soient égaux ?

ORAL 13 —

A. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ est compact et connexe par arcs.

A' Soit N une norme sur un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie. On note $\mathrm{O}(N)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{E}$ qui conservent la norme. Montrer que $\mathrm{O}(N)$ est compact.

B. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer que tout élément A de G est diagonalisable. Montrer que $\sum\limits_{A \in G} A$ est diagonalisable.

Oral 14 —

A. Soient A_1, A_2 ...A_n des élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent deux à deux. Montrer qu'elles sont cotrigonalisables.

B. Montrer la convergence et donner la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1 - t^2} \mathrm{d}t.$$

Oral 14

A. Soir $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

B. (Mines 2023) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{C})$ dérivable en 0. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est intégrable. Soient $(a, b) \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale suivante converge et donner sa valeur.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} \mathrm{d}c.$$

Oral 15

A. (Mines 2022) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$.

B. Soit un entier $n \geq 2$. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique si il existe un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $(X, MX, ..., M^{n-1}X)$ soit libre.

1. Montrer que le polynôme minimal d'une matrice cyclique est son polynôme caractéristique.
2. Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ cycliques est ouvert.
3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable et λ_1, λ_2,...,λ_n ses valeurs propres. Montrer que M est cyclique si et seulement si les λ_i, $i = 1, 2, ..n$ sont deux à deux distincts.
   Indication : on pourra considérer la somme des vecteurs d'une base de vecteurs propres.
4. Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.

B' Montrer que M est cyclique si et seulement si $\chi_M = \mu_M$.

Oral 16

A. (Mines 2022)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{C})$. On suppose que pour $k = 1, 2, ..., n$, $\int_0^1 f(t)t^k\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois.
2. On suppose que pour que $\int_0^1 f(t)t^k\mathrm{d}t = 0$, pour tout entier $k \geq 0$. Montrer que f est nulle.

B. Montrer que M est nilpotente si et seulement si 0_n est adhérente à la classe de similitude de M.

B' Déterminer les points de continuité de l'application

$$\phi \;:\; M \mapsto \mu_M$$

Oral 17 A. Soir r la rotation de $(\mathbf{E}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$, espace euclidien de dimension 3 orienté, d'axe engendré et dirigé par un vecteur $\vec{w}$ et d'angle de mesure θ. Soit s un élément du groupe orthogonal de $\mathbf{E}$, $\mathrm{O}(\mathbf{E})$. Donner la nature de l'endomorphisme $s \circ r \circ s^{-1}$.

A' Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathbf{E}$. Déduire du 1., que l'ensemble des rotations qui ont pour axe soit vect$(\vec{i})$, soit vect$(\vec{j})$, soit vect$(\vec{k})$ engendre $\mathrm{SO}(\mathbf{E})$.

B.(Mines 2022)

Étudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)\ln(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Oral 18

A. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes.

1. Les valeurs propres de M sont toutes de module strictement inférieur à 1.
2. La série $\sum_{k\geq 0} M^k$ converge.
3. La suite $(M^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers O_n.

A' (Mines 2022) Soit G un compact non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inclus dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Montrer que G est un groupe.

B. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t^3 x.$$

Oral 19

A.(Centrale 2022)

Les éléments de $\mathbf{R}^n$ seront notés en colonne et $\mathbf{R}^n$ sera muni de sa structure euclidienne canonique ; de plus on oriente $\mathbf{R}^n$ de sorte que sa base canonique soit directe.

Les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ désignent respectivement l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles et des matrices antisymétriques réelles d'ordre n. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par :

$$\Phi \ : \ (\mathcal{M}_3(\mathbf{R}))^2 \to \mathbf{R}\,;\, (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B).$$

1. Justifier que Φ définit bien un produit scalaire et montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
   Reconnaître la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

   Pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ on note S_M la projection orthogonale de M sur $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Soit $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$.
2. Notons $\mathrm{sp}(S_A)$ le spectre de S_A. Montrer que :

   $$\mathrm{sp}(S_A) \subset [-1, 1].$$

   Montrer que si n est impaire alors 1 est valeur propre de S_A
   Dans le cas $n = 3$, préciser la nature de l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à A, lorsque -1 est valeur propre de S_A.
3. Soit B un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$ tel que $S_B = S_A$. On suppose que ni A ni B ne sont égales à la matrice identité.
   (a) Montrer que pour tout élément T de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$ et tout élément X de $\mathbf{R}^3$,

   $$X \perp TX\,;$$

   (b) Montrer que les endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associés à A et B sont des rotations de même axe.
   Comparer une mesure de leurs angles.

Oral 20

A. (Mines 2023)

1. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.
2. Montrer que tout élément M de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ s'écrit

   $$M = OS,$$

   avec $O \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

3. Montrer que $SL_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

   B. Soit $f \ : \ x \mapsto \int_0^{2\pi} \exp(x \sin t) \mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que f vérifie l'équation différentielle

$$x\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy.$$

   (b) déterminer les solutions de cette équation développable en sériees entière.

   (c) Déduire pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(t) \mathrm{d}t.$$

Oral 21 — A. Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\Delta(f)$ est nul.

1. Rappeler l'équation du plan tangent P au garphe G de f au point $(a, b, f(a, b))$.
2. On note P^+ et P^- les demi-espaces ouverts de frontière P. En supposant que la matrice Hessienne de f en (a, b) est non nulle, montrer que pour tout voisinage V de (a, b) il existe un éléments m^+ et un élément m^- de V tels que :

$$(m^\pm, f(m^\pm)) \in P^\pm.$$

   B. Soit $(\mathbf{E}, (\cdot|\cdot)$ un espace euclidien.

   Montrer que l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathbf{E}$ est compact.

   L'ensemble des projecteurs l'est-il ?

Oral 22 A

Montrer que tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ s'écrit

$$M = OS,$$

avec $O \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.

Cette écriture est-elle unique ?

B.

1. L'équation différentielle

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x$$

   possède-t-elle des solutions développables en série entière ?

2. Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbf{E}$.

Oral 23 (Centrale 2022)

1. Montrer que $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{N}^2$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.
2. Un nombre complexe est dit algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients rationnels dont z est racine. On note A l'ensemble des nombres algébriques.
   — Montrer que A est dénombrable.
   — Montrer qu'un nombre complexe z est algébrique si et seulement si $\mathbf{Q}[z]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$.
   — Montrer que A est un sous-corps de $\mathbf{C}$
3. Déterminer un polynôme anulateur non nul à coefficients rationnels de $\sqrt{2}+^3\sqrt{5}$.

Oral 24 (Centrale 2022)

A. Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

Un endomorphisme de $\mathbf{E}$ est dit semi-simple si tout sous-espace de $\mathbf{E}$ stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Montrer que $\mathbf{E}$ est semi-simple si et seulement si il est diagonalisable.

A'. L'espace vectoriel $\mathbf{E}$ est maintenant un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Montrer qu'un endomorphisme u est semi-simple si et seulement si μ_u n'est divisible par aucun carré non constant de $\mathbf{R}[X]$

Oral 25 (Centrale 2022)

A.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de réels définie par la relation de récurrence

$$u_0 = a, u_{n+1} = \sin(u_n),$$

où a est un élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+\sin t}$

1. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et le comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ diverge et que la série $\sum u_n^3$ converge.
3. On considère la série entière $\sum a_n x^n$. Quel est son rayon de convergence R ? Étudier son comportement en $-R$ et $+R$

B. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbf{E})$, où $\mathbf{E}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Soit $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$. On suppose que $\mathbf{F}$ est stable par tout élément u de G. Montrer que F admet un suplémentaire stable par tous les éléments de $\mathbf{G}$.

Oral 26 (Centrale 2022)

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}*$ soit

$$f_n \;:\; \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \frac{1}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\mathbf{1}_{[0,n]}(x).$$

   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément, on précisera sa limite.
2. Énoncer et démontrer le théorème de convergence dominée pour une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de fonction numériques définies sur un intervalle I, dans le cas où la suite d'applications converge uniformément sur tout segment de l'intervalle I.
3. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ d'application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$. On suppose que pour tout $t \in \mathbf{N}$, la suite $(f(t))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un complexe noté $f(t)$ et qu'il existe une famille sommable $(\phi(t))_{t\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout $t \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|f_n(t)| \leq \phi(t).$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ la famille $(f_n(t))_{t\in\mathbf{N}}$ est sommable.

(b) Montrer que la famille $(f(t))_{t\in\mathbf{N}}$ est sommable.

(c) Montrer que :

$$\sum_{t=0}^{+\infty} f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\to} \sum_{t=0}^{+\infty} f(t).$$

Oral 27

A. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{N}$ et de même loi. On suppose que la variable aléatoires$Z$, où $Z = X+Y+1$, suit une loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$).

1. Déterminer l'espérance de X.
2. Identifier le loi de X.

B. (Centrale 2022) Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos t - \cos x}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.

Oral 28

A.(Centrale 2018)

$$\forall (x,y) \in U,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2 \tag{1}$$

1. Soit $f\ :\ U \to \mathbf{R}\,;\ (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(x+y)^2$. Montrer que f est élément de S.
2. On considère l'application

$$\Phi\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\ ;\ (x,y) \mapsto (x+y, xy).$$

   Montrer que Φ induit une bijection de U sur un ouvert V à déterminer.
3. Déterminer S en utilisant Φ.

B.

Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tels que $AB^2 - B^2A = B$. Montrer que B est nilpotente d'ordre impair.

Oral 29

B. Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension fini n. Soient un nombre complexe $\lambda \neq 0$ et u et v des éléments de $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ tels que :

$$u \circ v - v \circ u = \lambda v.$$

Montrer que u et v sont cotrigonalisables.

Oral 30

A. Soit un réel $\alpha > 0$.

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\alpha^2+t^2}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $I = 0$. Calculer J.

B.

On suppose que $\mathbf{R}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

On note $\mathrm{O}(\mathbf{E})$ l'ensembles des isométries vectorielles de $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ c'est-à-dire des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ qui conserventla norme $\|\cdot\|_\infty$.

Montrer que $\mathrm{O}(\mathbf{E})$ est un groupe. Puis détreminer le.

Oral 31 — Soit G un groupe abélien. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que pour tout élément x de G,

$$x^n = e.$$

1. On suppose que $n = ab$ avec a et b des entiers naturels premiers entre eux On pose $G_a = \{x^a, x \in G\}$. Montrer que G_a est un sous-groupe de G.
2. Montrer que pour tout élément x de G il existe un et un seul couple (u, v) de $G_a \times G_b$ tel que :

$$x = uv,$$

3. Soit un entier naturel k, premier avec n. Montrer que l'application

$$G \to G, x \mapsto x^k$$

est un automorphisme du groupe G. Préciser la bijection réciproque.

Oral D1 — Polynômes d'Hilbert —
On pose $H_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$H_n = \frac{X(X-1)...(X-n+1)}{n!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $H_n(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$.
2. Montrer que le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$.
3. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathbf{R}[X]_n$. Montrer l'équivalence des 3 propositions suivantes.
   i. $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$.
   ii. Pour $k = 0, 1, ..., n$.
   iii. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ tels que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$.

Oral D2 Soit P un polynôme à coefficients réels non constant.

1. On supose que $P(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}_+$. Montrer qu'il existe A et B éléments de $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
2. On suppose que $P(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$. Montrer que $P \in \mathbf{Q}[X]$.
3. Trouver une condition nécessaire sur P, pour que P induise une surjection de $\mathbf{Q}$ sur $\mathbf{Q}$.

Oral D3
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. On supose que $P(k), P(k+1), ..., P(k+n)$ sont dans $\mathbf{Z}$ pour un certain entier k.

1. Montrer que $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$.
2. On suppose que P est à coefficients entiers. On note N le PGCD de $P(0), P(1), ...P(n)$. Montrer que N divise $P(x)$, pour tout entier x.
3. On ne suppose plus que P est à coefficients entiers, mais que $P(0), P(1), P(4), ..., P(n^2)$ sont des entiers. Montrer que pour tout entier a, $P(a^2)$ est entier.

Oral D4 Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On suppose que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\pi P(n)))_{n\in\mathbf{N}}$ est fini. Montrer que $P - p(0)$ est à coefficients rationnels.
Indication : passer en complexe et exprimer P dans la base des polynômes de Hilbert.

Oral D5
On considère $n+1$ nombres complexes distincts $z_0, z_1, ..., z_n$, tels que pour tout élément P de $\mathbf{C}[X]_{n-1}$,

$$P(z_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P(z_k).$$

Montrer que $z_1, z_{,}..., z_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre z_0.
Oral D6 Soit l'élément de $\mathbf{R}[X]_n$,

$$P = X^n + a_1 X^1 + ... + a_n.$$

On suppose que P est simplement scindé. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$, tel que pour tout $(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbf{R}^n$, si $\|(b_1, ..., b_n) - (a_1, ..., a_n)\|_\infty < \eta$, alors le polynôme $X^n + b_1 X + ... + b_n$ est simplement scindé.

Soit $k \in \{1, ..., n\}$. Montrer que l'application de $\mathrm{B}_0((a_1, ..., a_n), \eta)$ dans $\mathbf{R}$ qui associe à $(b_1, b_2, ..., b_n)$ la k^{e} racine par ordre croissant de $X^n + b_1 X + ... + b_n$ est continue.

Oral D6

Soient p et q deux entiers naturels non nuls,

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\text{Res}(P, Q)$:

$$\text{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q + p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros.

La matrice servant à définir $\text{Res}(P, Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\text{Res}(P, Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbf{C}[X]_{q-1} \times \mathbf{C}[X]_{p-1}$ et $F = \mathbf{C}[X]_{p+q-1}$.

Soit u l'application de E dans F définie pour $(A, B) \in E$ par : $u(A, B) = PA + QB$.

1. Montrer que u est bijective si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.
2. Démontrer que $\text{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit T un polynôme de degré n simplement scindé. Montrer qu'il existe un voisinage V de T dans $\mathbf{C}[X]_n$, tel que tous ses éléments soient simplement scindés.

Oral 32

PYTHON

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X et N une variable aléatoires indépendante des X_i et également à valeurs dans $\mathbf{N}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose
$$S(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$
Soient $\mathcal{G}_X$, $\mathcal{G}_S$ et $\mathcal{G}_N$ les séries génératrices respectivement de X, S et N. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,
$$\mathcal{G}_S(t) = \mathcal{G}_N \circ \mathcal{G}_X(t).$$
2. On suppose que X et N possèdent un espérance. Montrer que S possède aussi une espérance et la calculer.
3. On suppose que X et N possèdent un moment d'ordre 2, montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer $\mathrm{E}(S^2)$.
4. On étudie la transmission du non de famille au cours des générations dans une société patriarcale. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre λ, ($\lambda \in \mathbf{R}_+^*$).On note Z_0 le nombre d'individus masculin au début de l'étude, Z_n le nombre de descendant à la n^{e} génération. On suppose $Z_0 = 1$
   (a) Ecrire une fonction PYTHON renvoyant le nombre de descendant masculins à la n^{e} génération.
   (b) Fixer λ et n. Calculer une moyenne sur un grand nombre de mesures du nombre de descendant masculin. Comparer la à $\mathrm{E}(Z)$.

Oral 33

On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$.
2. Soit
$$S \ : \ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\exp(-nt)}{n}.$$
Justifier que S est correctement définie. La série qui définit S converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}_+$?
3. Montrer la convergence de l'intégrale suivante et donner sa valeur :
$$\int_0^{+\infty} \ln(1+\exp(-t))\mathrm{d}t.$$

Oral 34

A. Soient f et g des fonctions de la variables réelle x définies par :
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t\,;\ g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t.$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f.
3. Donner une équation différentielle vérifiée par f.
4. Montrer que f et g coïncident sur $\mathbf{R}_+^*$.
5. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Oral 35

A.

1. Soit M un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ nilpotent. Montrer que M est semblable à ${}^{t}M$ et à $2M$.
2. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ semblable à $2M$. Montrer que M est nilpotent.

A'. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ nilpotent. Montrer que M est semblable à $M^\top$ et à $2M$.
B. Soit f une application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ continue, décroissantes et positive.
On suppose que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que $f(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Que pensez vous de la réciproque ?

Oral 36

A. Soit $(X_{i,j})_{1,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées qui de plus admettent une espérance m.

1. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\det((X_{i,j})_{1,j\leq n}$
2. on suppose que les variables $X_{i,j}$ suivent une loi de Radmacher. Étudier leur variance.

   B. (Mines 2022) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, convexe. Montrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes convexes sur $[0,1]$.

   B' Montrer le résultat du B. sous la seule hypothèse de continuité de f.

Oral 37 A. On dispose d'un dé équilibré comportant six faces. On suppose que

— trois faces comportent le numéro 0 ;
— deux faces comportent le numéro 1 ;
— une face comporte le numéro 2.

On effectue l'expérience suivante

On lance successivement et indépendamment le dé en question jusqu'à l'obtention d'un numéro non nul. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués dans cette expérience et on note T la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du dernier lancer.

1. Donner la loi de N. Préciser son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi du couple (T, N) puis donner la loi de T.
3. Les variables N et T sont-elles indépendantes ?

B.On définit la fonction f de la variable réelle x par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.
2. Démontrer que f est dérivable sur D.
3. Calculer f' puis en déduire une expression de f sur D sans signe intégrale.

Oral 38

A. (CENTRALE 2021)

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$, non réduit à un point, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions convexes définie sur $[a,b]$. On suppose la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers une application notée f.

1. Montrer que f est convexe.
2. Soient des réels α et β tels que $a < \alpha < \beta < b$. Montrer qu'il existe une réel $K \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $(x,y) \in [a,b]^2$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x-y|$. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$. Il y a-t-il convergence uniforme sur $[a,b]$?

B.

1. Par K on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (ou même tout corps). Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
2. Pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $[BC] = BC - CB$ (crochet de lie de B et C). Montrer qu'il existe des matrices B et C telles que $BC - CB = A$.

B'. Soit $\mathbf{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et u et v des éléments de $\mathcal{L}(E)$. On considere la propriété **(P)** :

$$u \circ v - v \circ u = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}.$$

1. Montrer que si $\mathbf{E}$ est de dimension finie, aucun couple (u, v) ne vérifie **(P)**.
2. Montrer que si $\mathbf{E}$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ aucun couple (u, v) d'endomorphismes continus ne vérifie **(P)**.
3. Sur $\mathbf{R}[X]$ considérer $u \; : \; P \mapsto P'$ et $v \; : \; p \mapsto XP$ et trouver des normes pour lesquelles soit u soit v soit continu. (X 2013)

Oral
A.

1. Montrer qu'il existe une et une seule application f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, telle que f tende vers 0 en $+\infty$ et pour tout réel $x > 0$,
$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}.$$
2. Montrer que f est continue et intégrable au voisinage de $+\infty$.
3. Calculer $\int_{[1,+\infty[} f$.

Oral 39 A. (Mines 2018)

1. Montrer qu'il existe une et une seule application f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, telle que f tende vers 0 en $+\infty$ et pour tout réel $x > 0$,
$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}.$$
2. Montrer que f est continue et intégrable au voisinage de $+\infty$.
3. Calculer $\int_{[1,+\infty[} f$.

B.

L'anneau $\mathbf{Z}[X]$ est-il principal ?

Oral 4

A. (Centrale 2022)
Soit l'application
$$f \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\, x \mapsto \frac{2x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

1. Étudier les variations de f. Soit α le réel strictement positif en lequel f admet son maximum.
2. Montrer que pour tout $x \in]0, \alpha[$ il existe un et un seul élément y de $]\alpha, +\infty[$, tel que $f(x) = f(y)$, que l'on notera $\phi(x)$.
3. Montrer que ϕ est continue sur $]0, \alpha[$.
4. Déterminer la limite de ϕ en 0^+ ainsi qu'un équivalent.

B. Soit M un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ de polynôme caractéristique $X^2 - 1$. Montrer qu'il existe en entier a et un élément P de $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{Z})$ tel que :
$$M = P \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$