MP* Lycée Kerichen **2023-2024**

DM n$^{\text{o}}$7

Premier exercice

Théorème de Weierstrass trigonométrique

Nous allons à travers le sujet qui suit tiré du concours Mines-Ponts montrer que toute application de $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{C}$ *continue et* 2π *périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques. Nous en déduirons une preuve de plus du théorème de Weierstrass.*

Soit $\mathbf{E}$ l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs réelles ou complexes. On le munit de la norme $\|.\|_\infty$, définie par , pour tout élément f de $\mathbf{E}$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{E}$ constitué des fonctions polynômiales.

Soit $\mathbf{F}$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, 2π-périodiques, à valeurs complexes. On le munit de la norme encore notée $\|.\|_\infty$, définie par, pour tout élément g de $\mathbf{F}$, $\|g\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |g(t)|$.

On note T le sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}$ engendré par la famille $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ où pour tout élément k de $\mathbf{Z}$, $e_k\ :\ t \mapsto \mathrm{e}^{ikt}$.

Pour tout entier naturel n, on note $_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}$ engendré par la famille $(e_k)_{k\in\{-n,\dots,n\}}$. (Les éléments de T_n sont les polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n).

1. Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\varphi_n(t) = a_n \left(\cos\dfrac{t}{2}\right)^{2n}$, le réel a_n étant tel que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$.
   (a) Montrer que φ_n est un élément de $_n$.
   (b) Prouver que, pour tout élément u de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2 u \geq 1 - \sin u$. En déduire que, pour tout entier n, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1}\ \mathrm{d}u \geq \frac{1}{n+1}$, puis que $a_n \leq \dfrac{n+1}{4}$.
   (c) Soit δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{\delta\leq t\leq\pi} \varphi_n(t) = 0$.

2. Soit g un élément de $\mathbf{F}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note Q_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par la relation :
$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) g(u-t)\ \mathrm{d}t.$$
   (a) Établir la relation :
$$Q_n(u) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u-t) g(t)\ \mathrm{d}t.$$
   En déduire que Q_n appartient à $_n$.
   (b) Soit toujours δ un réel tel que $0 < \delta < \pi$; montrer l'inégalité :
$$|g(u) - Q_n(u)| \leq \sup_{|t|\leq\delta} |g(u) - g(u-t)| + 4\pi \|g\|_\infty \sup_{\delta\leq t\leq\pi} \varphi_n(t).$$

(c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \|g - Q_n\|_\infty = 0$.

(d) On suppose que g est une fonction paire ; montrer que Q_n est une fonction paire et en déduire qu'il existe un élément P_n de $\mathcal{P}$, de degré au plus égal à n, tel que $Q_n(u) = P_n(\cos u)$.

3. (a) Soit f un élément de $\mathbf{E}$. Prouver qu'il existe une suite (P_n) d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$. On prolongera f en une fonction paire, notée $\widetilde{f}$, et on introduira $g(u) = \widetilde{f}(\cos u)$.

   En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans E relativement à la norme uniforme $\|.\|_\infty$.

   (b) Montrer que, pour tout élément f de $\mathbf{E}$, on a l'inégalité $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$. En déduire que $\mathcal{P}$ est également dense dans E relativement à la norme $\|.\|_2$.

Second exercice

Fonctions convexes

Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^n$ convexe et ouverte et non vide.

définition. *Une application f de C dans $\mathbf{R}$ est dite convexe si pour tout couple (x, y) de points de C et tout élément t de $]0, 1[$,*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Si de plus l'inégalité est stricte on dit que f est strictement convexe.

1. Soit f une application de Ω de $\mathbf{R}^n$. Pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$ on note $I_{a,\vec{x}}$ l'ensemble des réels t tels que $a + t\vec{x} \in \Omega$, et $g_{a,\vec{x}}$ l'application

$$g_{a,\vec{x}} \;:;\; I_{a,\vec{x}} \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto f(a + t\vec{x}).$$

   (a) Montrer que pour tout a point de Ω et tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$, $I_{a,\vec{x}}$ est un intervalle ouvert contenant 0.

   (b) Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ l'est.

   (c) On suppose de plus f différentiable. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.
      i. f est convexe ;
      ii. Pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $\mathrm{d}f(x) \cdot (y - x) \leq \mathrm{d}f(y) \cdot (y - x)$;
      iii. Pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $f(y) - f(x)) \geq \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)$.

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

   (a) Montrer que si $f_{|C}$ admet en un point c de C un minimum local, alors pour tout d élément de C,

$$\mathrm{d}f(c) \cdot (d - c) \geq 0.$$

   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. $f_{|C}$ atteint en un point u de C son minimum.
      ii. Pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$.

3. Soit f une application strictement convexe de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.

   On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^n$.

(a) Montrer que f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum si et seulement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle.

(b) On suppose que $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$.

Montrer que $\vec{\nabla} f$ est une bijection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.

Indications pour le DM n°7

Second exercice

Fonctions convexes

1. (a) Soient a point de Ω et un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbf{R}^n$.
Posons $\phi\ :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\ ;\ t \mapsto a + t\vec{x}$, de sorte que

$$I_{a,\vec{x}} = \phi^{-1}(\Omega).$$

Notons que ϕ, affine, est continue et qu'elle induit une bijection affine de $\mathbf{R}$ sur $a+\mathbf{R}\vec{x}$, donc un homéomorphisme ; par ψ nous désignerons l'homéomorphisem réciproque.
• $0 \in I_{a,\vec{x}}$...
• $I_{a,\vec{x}}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$...
• l'intersection de la droite $a + \mathbf{R}\vec{x}$ et de Ω est convexe comme intersection de deux convexes , donc ....donc $I_{a,\vec{x}}$ un intervalle de $\mathbf{R}$.
Nous avons prouvé : $\underline{I_{a,\vec{x}} \text{ est un intervalle ouvert contenant } 0.}$

(b) • Hypothèse : *pour tout $a \in \Omega$ et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $g_{a,\vec{x}}$ est convexe.*
Soient p et q des points de Ω et $\lambda \in [0,1]$.

$$f(\lambda p + (1-\lambda)q) = f(q + \lambda(p-q)) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda) = g_{q,\overrightarrow{qp}}(\lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 0).$$

Donc par convexité de $g_{q,\overrightarrow{qp}}$.... Doù la convexité de f.
• Hypothèse : *Supposons f convexe .*
Soient a un point quelconque de $\mathbf{R}^n$ et $\vec{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^n$.
Prenons t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ et λ un élément de $[0,1]$.

$$g_{a,\overrightarrow{x}}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f(\lambda(a + t_1\vec{x}) + (1-\lambda)(a + t_2\vec{x})).$$

.... Donc $g_{a,\overrightarrow{x}}$ est convexe.

$\underline{\text{Donc } f \text{ est convexe si et seulement si, pour tout } a \in \Omega \text{ et tout } \vec{x} \in \mathbf{R}^n,\ g_{a,\vec{x}} \text{ l'est.}}$

(c) • *Supposons i.*
Soit $(x,y) \in \Omega^2$. Par convexité de Ω, $g_{x,\vec{xy}}$ est définie sur $[0,1]$ et par (b), on sait que cette application est convexe. Mais $g_{x,\overrightarrow{xy}}$ composée de f de classe $\mathcal{C}^1$ et de l'application affine donc $\mathcal{C}^1$,

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^n\ ;\ t \mapsto x + t\overrightarrow{xy}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0,1]$

$$g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t) = \mathrm{d}f(x + ty - x) \cdot y - x.$$

Donc ....
D'où ii.
• *Supposons ii.*
Soit $(x,y) \in \Omega^2$.

$$f(y) - f(x) = g_{x,\overrightarrow{xy}}(1) - g_{x,\overrightarrow{xy}}(0) = \int_0^1 g'_{x,\overrightarrow{xy}}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}f(x + t(y-x) \cdot (y-x)\mathrm{d}t.$$

Appliquer alors ii. pur les points x et $x + t(y-y)$ ....

D'où iii.

• *Supposons iii.*

Prenons a un point de Ω et $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbf{R}^n$. Soient t_1 et t_2 des éléments de $I_{a,\vec{x}}$ tels que $t_1 < t_2$. Par iii,

$$f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x}) \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot ((t_2 - t_1)\vec{x}),$$

soit en divisant par la quantité strictement positive $t_2 - t_1$

$$\frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(a + t_2\vec{x}) - f(a + t_1\vec{x})}{t_2 - t_1} \geq \mathrm{d}f(a + t_1\vec{x}) \cdot (\vec{x}) = g'_{a,\vec{x}}(t_1)$$

Inverser alors les rôles de t_2x et t_1, on obtient :

......

Finalement

$$g'_{a,\vec{x}}(t_1) \leq \frac{g_{a,\vec{x}}(t_2) - g_{a,\vec{x}}(t_1)}{t_2 - t_1} \leq g'_{a,\vec{x}}(t_2)$$

Donc $g'_{a,\vec{x}}$ croît, et donc $g_{a,\vec{x}}$ est convexe. Comme a et $\vec{x}$ sont quelconques f est convexe (cf. (b)). Voilà i. prouvée.

Les propositions i., ii. et iii. sont équivalentes.

2. Soient f une application d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ différentiable, et C une partie convexe de U.

   (a) Supposons que $f_{|C}$ admette en $c \in C$ un minimum local. Soit d élément de C, Pour tout $t \in [0, 1]$, par convexité de C, est défini $f(c + t(d - c))$ et pour t suffisamment petit, cette quantité est supérieure à $f(c)$, si bien que :

   $$\frac{f(c + t(c - d)) - f(c)}{t} \geq 0.$$

   En laissant tendre t vers 0 par valeur strictement supérieures on a : $\mathrm{D}_{\vec{cd}}f(c) \geq 0$, ou, autrement dit

   $$\mathrm{d}f(c) \cdot (d - c) \geq 0.$$

   (b) On suppose de plus que $f_{|C}$ est convexe. Soit u un point de C.

   • Supposons que $f_{|C}$ atteigne en u son minimum. Elle atteint *a fortiori* en u un minimum local et la question précédente nous assure que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$.

   • Réciproquement supposons que pour tout $v \in C$, $\mathrm{d}f(u) \cdot (v - u) \geq 0$. utiliser et 1.(c) iii ....

   Donc $f_{|C}$ atteind en u son minimum.

   D'où l'équivalence demandée.

3. (a) • Si f atteint en un point u de $\mathbf{R}^n$ son minimum, comme $\mathbf{R}^n$ est ouvert, d'après le cours $\mathrm{d}f(u)$ est nulle. (on aurait pu aussi utiliser 2.(a)...).

   • Réciproquement si $\mathrm{d}f(u)$ est nulle alors par 1.(c) iii. f atteint en u son minimum.

   (b) • D'abbord comme $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, *a fortiori* $\|f(x)\| \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$. Donc on dispose de $R \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\|f\|$ soit strictement supérieur à $f(0_n)$ sur le complémentaire de la boule B de centre 0 et de rayon R. Mais $f_{|B}$ étant continue, elle atteind en un point x_0 du compact B son minimum, qui est aussi le minimum de f par définition de B.

Par (a), $\mathrm{d}f(x_0)$ est nul donc $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$.

L'unicité du point en lequel le gradiant est nul découle facilement de la stricte convexité (vu en exercicie cette année pour les fobnction d'une variable.

....

Concluons : $\vec{\nabla} f$ s'annule en un et un seul point de $\mathbf{R}^n$.

• A présent prenons $\vec{h}$ vecteur de $\mathbf{R}^n$. et posons $f_{\vec{h}} = f - \frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$. D'une part $f_{\vec{h}}$ est strictement convexe car f l'est et $-\frac{1}{2}\langle \vec{h} | \cdot \rangle$, lineaire est convexe, d'autre part $\frac{\|f_{\vec{h}}(x)\|}{\|x\|} \to +\infty$, lorsque $\|x\| \to \infty$, en effet, ...

Enfin $f_{\vec{h}}$ est $\mathcal{C}^1$ comme somme de telles fonctions et :

$$\nabla f_{\vec{h}} = \vec{\nabla} f - \vec{h}$$

Donc le premier point dit qu'il existe un et un seul point x de $\mathbf{R}^n$ en lequel $\vec{\nabla} f_{\vec{h}}$ s'annule donc en lequel $\vec{\nabla} f$ prend la valeur $\vec{h}$.

Donc $\underline{\nabla f \text{ est une bijection de } \mathbf{R}^n \text{ sur } \mathbf{R}^n.}$

Cf. devoir de rentrée.