

MP*

Structures algébriques

récapitulatif

GROUPE

Définition — GROUPE —

On appelle groupe tout couple $(G, *)$, où G est un ensemble, $*$ une loi interne sur G et qui jouit des propriétés suivantes :

1. La loi $*$ est **associative**.
2. La loi $*$ possède un **élément neutre**.
3. Tout élément de G possède un **symétrique**.

Si de plus la loi $*$ est commutative, on dit que le groupe est abélien.

Définition — SOUS-GROUPE —

Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle sous-groupe de $(G, *)$, tout couple $(H, *_H)$ où :

- H est une partie de G stable par la loi $*$;
- $*_H$ est la loi induite par $*$ sur H ;
- $(H, *_H)$ est un groupe.

Remarque — Abusivement on dit que H est un sous-groupe.

Proposition — CARACTÉRISATION DES SOUS-GROUPES —

Soit $(G, *)$ un groupe. Soit H une partie de G . H est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si

1. La partie H est non vide.
2. La partie H est stable par la loi $*$.
3. La partie H est stable par passage au symétrique.

Proposition — INTERSECTION DE SOUS-GROUPES —

L'intersection d'une famille, finie ou non, de sous-groupes d'un groupe $(G, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Définition — MORPHISME DE GROUPE —

Soient $(G_1, *_1)$ et $(G_2, *_2)$ des groupes. On appelle morphisme du groupe $(G_1, *_1)$ dans le groupe $(G_2, *_2)$, toute application φ de G_1 dans G_2 telle que pour tout x et tout y éléments de G , $\varphi(x *_1 y) = \varphi(x) *_2 \varphi(y)$.

Proposition — PROPRIÉTÉS DES MORPHISMES DE GROUPE —

Soit φ un morphisme d'un groupe $(G_1, *_1)$ dans un groupe $(G_2, *_2)$. Alors,

1. $\varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$.
2. Pour tout élément x de G_1 , $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.
3. Si H_1 est un sous-groupe de $(G_1, *_1)$, alors $\varphi(H_1)$, en est un de $(G_2, *_2)$.
4. Si H_2 est un sous-groupe de $(G_2, *_2)$, $\varphi^{-1}(H_2)$, en est un de $(G_1, *_1)$.

Cas particulier — $\varphi^{-1}(\{e_{G_2}\})$ est un sous-groupe de $(G_1, *_1)$; on l'appelle *noyau* de φ et on le note $\text{Ker}(\varphi)$.

Proposition — Soit φ un morphisme d'un groupe $(G_1, *_1)$ dans un groupe $(G_2, *_2)$. Alors φ est injectif si et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \{e_{G_1}\}$.

ANNEAUX

Définition — ANNEAU —

On appelle anneau tout triplet $(A, +, \times)$, où A est un ensemble, $+$ et $\times$ des lois internes sur G tels que l'on ait :

1. $(A, +)$ est un **groupe abélien**.
2. La loi $\times$ est **associative**.
3. La loi $\times$ possède un **élément neutre**.
4. La loi $\times$ est **distributive par rapport à la loi $+$** .

Si de plus la loi $\times$ est commutative, on dit que l'anneau est commutatif.

Définition — SOUS-ANNEAU —

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On appelle sous-anneau de $(A, +, \times)$, tout triplet $(B, \overset{+}{B}, \overset{\times}{B})$ où :

- B est une partie de A stable par les lois $+$ et $\times$;
- 1_A est élément de B ;
- $\overset{+}{B}$ et $\overset{\times}{B}$ sont les lois induites respectivement par $+$ et $\times$ sur B ;
- $(B, \overset{+}{B}, \overset{\times}{B})$ est un anneau.

Remarque — Par un abus on dit que B est un sous-anneau.

Proposition — CARACTÉRISATION DES SOUS ANNEAUX —

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Une partie B de A est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ si et seulement si

1. 1_A est élément de B .
2. B est stable par $+$.
3. B est stable par passage à l'opposé.
4. B est stable par $\times$.

Définition — MORPHISMES D'ANNEAUX —

On appelle morphisme d'un anneau $(A_1, \overset{+}{1}, \overset{\times}{1})$ dans un anneau $(A_2, \overset{+}{2}, \overset{\times}{2})$, toute application φ de A_1 dans A_2 telle que :

1. $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$.
2. pour tout x et tout y éléments de A_1 , $\varphi(x \overset{+}{1} y) = \varphi(x) \overset{+}{2} \varphi(y)$.
3. pour tout x et tout y éléments de A_1 , $\varphi(x \overset{\times}{1} y) = \varphi(x) \overset{\times}{2} \varphi(y)$.

Si de plus φ est une bijection de A_1 sur A_2 , on dit que φ est un isomorphisme d'anneaux.

Proposition — PROPRIÉTÉS DES MORPHISMES D'ANNEAUX —

Soit φ un morphisme de l'anneau $(A_1, \overset{+}{1}, \overset{\times}{1})$ dans l'anneau $(A_2, \overset{+}{2}, \overset{\times}{2})$.

1. φ est un morphisme du groupe $(A_1, \overset{+}{1})$ dans le groupe $(A_2, \overset{+}{2})$.
2. Pour tout élément x_1 de A_1 inversible, $\varphi(x_1^{-1}) = (\varphi(x_1))^{-1}$.
3. L'image direct d'un sous-anneau de $(A_1, \overset{+}{1}, \overset{\times}{1})$ par φ est un sous-anneau.
4. L'image réciproque d'un sous-anneau de $(A_2, \overset{+}{2}, \overset{\times}{2})$ par φ est un sous-anneau.

ANNEAUX INTÈGRES, CORPS

Définition — ANNEAU INTÈGRE —

Un anneau $(A, +, \times)$ est dit intègre si par définition,

1. L'anneau $(A, +, \times)$ est non trivial.
2. L'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif.
3. Pour tout a et tout b éléments de A , si $a \times b = 0_A$ alors $a = 0_A$ ou $b = 0_A$.

Définition — CORPS —

On appelle corps, tout anneau $(K, +, \times)$ tel que l'on ait :

1. L'anneau $(K, +, \times)$ est non trivial.
2. L'anneau $(K, +, \times)$ est commutatif.
3. Tout élément de K distinct de 0_K est inversible.

Proposition — Tout corps est un anneau intègre.

Définition — SOUS-CORPS —

On appelle sous-corps d'un corps $(K, +, \times)$ tout sous-anneau de $(K, +, \times)$ (considéré comme un anneau), qui est un corps.

Proposition — CARACTÉRISATION DES SOUS-CORPS —

Soient un corps $(K, +, \times)$ et k une partie de K . k est un sous-corps de $(K, +, \times)$ si et seulement si

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. $1_K \in k$, (ou bien k non nul)2. k est stable par $+$,3. k est stable par passage à l'opposé,4. k est stable par $\times$,5. k est stable par passage à l'inverse. | $\left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}} \right\} \text{(sous-anneau)}$ |
|--|---|

Définition — MORPHISMES DE CORPS —

On appelle morphisme d'un corps $(K_1, +_1, \times_1)$ dans un corps $(K_2, +_2, \times_2)$, toute application φ de K_1 dans K_2 telle que :

1. $\varphi(1_{A_1}) = 1_{A_2}$ (ou bien φ non nulle).
2. Pour tout x et tout y éléments de K_1 , $\varphi(x +_1 y) = \varphi(x) +_2 \varphi(y)$.
3. Pour tout x et tout y éléments de K_1 , $\varphi(x \times_1 y) = \varphi(x) \times_2 \varphi(y)$.

Si de plus φ est une bijective, on dit que φ est un isomorphisme de corps.

Proposition — PROPRIÉTÉS DES MORPHISMES DE CORPS —

Soit φ un morphisme d'un corps $(K_1, +_1, \times_1)$ dans le corps $(K_2, +_2, \times_2)$.

1. Pour tout élément x_1 de K_1 non nul, $\varphi(x_1^{-1}) = (\varphi(x_1))^{-1}$.
2. L'image direct d'un sous-corps de $(K_1, +_1, \times_1)$ par φ est un sous-corps.
3. L'image réciproque d'un sous-corps de $(K_2, +_2, \times_2)$ par φ est un sous-corps.

Définition — IDÉAL —

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre, dans la pratique $(\mathbf{Z}, +, \times)$, $(\mathbf{K}[X], +, \times)$ etc. On appelle idéal de $(A, +, \times)$, toute partie $\mathfrak{S}_0$ de A telle que :

1. $(\mathfrak{S}_0, +)$ soit un sous groupe de $(A, +)$.
2. Pour tout élément x_0 de $\mathfrak{S}_0$ et tout élément a de A , $a \times x_0 \in \mathfrak{S}_0$.

Proposition — Les noyaux des morphismes d'un anneau intègre dans un anneau sont des idéaux.

ESPACES VECTORIELS

Définition — ESPACE VECTORIEL —

On appelle espace vectoriel sur un corps $(\mathbf{K}, +, \times)$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \dots$) tout triplet $(\mathbf{E}, +_{\mathbf{E}}, \cdot)$, où $\mathbf{E}$ est un ensemble, $+_{\mathbf{E}}$ une loi interne sur $\mathbf{E}$, $\cdot$ une opération de l'ensemble $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{E}$, ($\mathbf{K} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$; $(\alpha, \mathbf{x}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{x}$), tel que $(\mathbf{E}, +_{\mathbf{E}})$ soit un groupe abélien et qui jouit des propriétés suivantes :

1. Pour tout élément α de $\mathbf{K}$, tout $\mathbf{x}$ et tout $\mathbf{y}$ éléments de $\mathbf{E}$.

$$\alpha \cdot (\mathbf{x} +_{\mathbf{E}} \mathbf{y}) = (\alpha \cdot \mathbf{x}) +_{\mathbf{E}} (\alpha \cdot \mathbf{y}).$$

2. Pour tout élément $\mathbf{x}$ de $\mathbf{E}$, tout α et tout β éléments de $\mathbf{K}$.

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = (\alpha \cdot \mathbf{x}) +_{\mathbf{E}} (\beta \cdot \mathbf{x}).$$

3. Pour tout élément $\mathbf{x}$ de $\mathbf{E}$, tout α et tout β éléments de $\mathbf{K}$.

$$(\alpha \times \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}).$$

4. Pour tout élément $\mathbf{x}$ de $\mathbf{E}$, $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Conventions d'écriture — $+_{\mathbf{E}}$ noté $+$, omission de $\cdot$, priorité de $\cdot$ sur $+_{\mathbf{E}}$.

Définition — SOUS-ESPACE VECTORIEL —

Soit $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ un e.v. sur $\mathbf{K}$. On appelle sous-espace vectoriels de $(\mathbf{E}, +, \cdot)$, tout triplet $(\mathbf{H}, +_{\mathbf{H}}, \cdot_{\mathbf{H}})$ où :

- $\mathbf{H}$ est une partie de $\mathbf{E}$ stable par $+$ et par $\cdot$, ($\mathbf{H} + \mathbf{H} \subset \mathbf{H}$, $\mathbf{K} \cdot \mathbf{H} \subset \mathbf{H}$);
- $+_{\mathbf{H}}$ la loi induite sur $\mathbf{H}$ par $+$, $\cdot_{\mathbf{H}}$ l'opération de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{H}$ induite par $\cdot$;
- $(\mathbf{H}, +_{\mathbf{H}}, \cdot_{\mathbf{H}})$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

Remarque — Abusivement on dit que $\mathbf{H}$ est un sous-espace vectoriel.

Proposition — CARACTÉRISATION DES SOUS-ESPACES VECTORIELS —

Soit $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ un e.v. sur $\mathbf{K}$. Soit $\mathbf{H}$ une partie de $\mathbf{E}$. $\mathbf{H}$ est un sous-e.v. de $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ si et seulement si

1. $\mathbf{H}$ est non vide.
2. La partie $\mathbf{H}$ est stable par combinaison linéaire.

Définition — APPLICATIONS LINÉAIRES —

On appelle application linéaire d'un $\mathbf{K}$ -e.v. $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ dans un $\mathbf{K}$ -e.v. $(\mathbf{F}, +, \cdot)$, toute application $\mathbf{f}$ de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ telle que : pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{E}^2$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$, $\mathbf{f}(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y})$.

Proposition — PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS LINÉAIRES —

Soit $\mathbf{f}$ une application linéaire d'un e.v. $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ dans un e.v. $(\mathbf{F}, +, \cdot)$.

1. $\mathbf{f}(\mathbf{0}_{\mathbf{E}}) = \mathbf{0}_{\mathbf{F}}$.
2. Si $\mathbf{H}$ est un sous-e.v. $(\mathbf{E}, +, \cdot)$, alors $\mathbf{f}(\mathbf{H})$, en est un de $(\mathbf{F}, +, \cdot)$.
3. Si $\mathbf{H}'$ est un sous-e.v. de $(\mathbf{F}, +, \cdot)$, alors $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{H}')$, en est un de $(\mathbf{E}, +, \cdot)$.

Cas particulier — $\mathbf{f}^{-1}(\{\mathbf{0}_{\mathbf{F}}\})$ est un sous-e.v. de $(\mathbf{E}, +, \cdot)$; on l'appelle noyau de $\mathbf{f}$ et on le note $\text{Ker}(\mathbf{f})$. $\mathbf{f}$ est injectif si et seulement si $\text{Ker}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{0}_{\mathbf{E}}\}$.

ALGÈBRES

Définition — ALGÈBRE —

On appelle algèbre sur un corps $(\mathbf{K}, +, \times)$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \dots$) tout quadruplet $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$, où $\mathbf{E}$ est un ensemble, $+$ et $\times$ des lois internes sur $\mathbf{E}$, $\cdot$ une opération de l'ensemble $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{E}$, tel que :

1. $(\mathbf{E}, +, \times)$ soit un anneau.
2. $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ soit un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.
3. Pour tout α élément $\mathbf{K}$, tout $\mathbf{x}$ et tout $\mathbf{y}$ éléments de $\mathbf{E}$.

$$(\alpha \cdot \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times (\alpha \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}).$$

Si de plus la loi $\times$ est commutative on dit que l'algèbre est commutative.

Définition — SOUS-ALGÈBRE —

Soit $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$ une algèbre sur $\mathbf{K}$. On appelle sous-algèbre de $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$, tout quadruplet $(\mathbf{H}, +_{\mathbf{H}}, \times_{\mathbf{H}}, \cdot_{\mathbf{H}})$ où :

- $\mathbf{H}$ est une partie de $\mathbf{E}$ stable par $+$, par $\times$ et par $\cdot$ et contenant l'unité de l'anneau $(\mathbf{E}, +, \times)$;
- $+$, $\times$ les lois induites sur $\mathbf{H}$ respectivement par $+$ et $\times$, $\cdot_{\mathbf{H}}$ l'opération de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{H}$ induite par $\cdot$;
- $(\mathbf{H}, +_{\mathbf{H}}, \times_{\mathbf{H}}, \cdot_{\mathbf{H}})$ est une algèbre sur $\mathbf{K}$.

Remarque — abusivement on dit que $\mathbf{H}$ est une sous-algèbre.

Proposition — Soit $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$ un e.v. sur $\mathbf{K}$. Une partie $\mathbf{H}$ de $\mathbf{E}$ est une sous-algèbre de $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$ si et seulement si $\mathbf{H}$ est un sous-anneau de $(\mathbf{E}, +, \times)$ et un sous-e.v. $(\mathbf{E}, +, \cdot)$.

Proposition — CARACTÉRISATION DES SOUS-ALGÈBRES —

Soit $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$ un e.v. sur $\mathbf{K}$. Soit $\mathbf{H}$ une partie de $\mathbf{E}$. $\mathbf{H}$ est une sous-algèbre de $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$ si et seulement si

1. $1_{\mathbf{E}} \in \mathbf{H}$.
2. La partie $\mathbf{H}$ est stable par combinaison linéaire.
3. La partie $\mathbf{H}$ est stable par $\times$.

Définition — MORPHISME D'ALGÈBRES —

Soient $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$ et $(\mathbf{F}, +, \times, \cdot)$ des algèbres sur $\mathbf{K}$. On appelle morphisme de l'algèbre $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ dans l'algèbre $(\mathbf{F}, +, \cdot)$ toute application $\mathbf{f}$ de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$ qui soit un morphisme de l'anneau $(\mathbf{E}, +, \times)$ dans l'anneau $(\mathbf{F}, +, \times)$ et une application linéaire de l'e.v. $(\mathbf{E}, +, \cdot)$ dans l'e.v. $(\mathbf{F}, +, \cdot)$; c'est-à-dire qui vérifie :

- $\mathbf{f}(1_{\mathbf{E}}) = 1_{\mathbf{F}}$,
- Pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{E}^2$, tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^2$, $\mathbf{f}(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y})$;
- Pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{E}^2$, $\mathbf{f}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \times \mathbf{f}(\mathbf{y})$.

Proposition — PROPRIÉTÉS DES MORPHISMES D'ALGÈBRES —

Soit $\mathbf{f}$ un morphisme d'une algèbre $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$ dans un algèbre $(\mathbf{F}, +, \times, \cdot)$.

1. Si $\mathbf{H}$ est une sous-algèbre de $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$, alors $\mathbf{f}(\mathbf{H})$, en est une de $(\mathbf{F}, +, \times, \cdot)$.
2. Si $\mathbf{H}'$ est une sous-algèbre de $(\mathbf{F}, +, \times, \cdot)$, alors $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{H}')$, en est une de $(\mathbf{E}, +, \times, \cdot)$.