I. Introduction :

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Notons a le plus petit élément de A. On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'application f de $\mathbb{N}$ dans A par :

$$\begin{cases} (1) & f(0) = a; \\ (2) & \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) = \mathrm{Min}(A - \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}). \end{cases}$$

(1.) Justifier que l'application f est bien définie.

(2.) Démontrer que l'application f est strictement croissante. En déduire que f est une injection de $\mathbb{N}$ dans A.

(3.) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A.

Nous venons de démontrer le résultat suivant : *Toute partie infinie de* $\mathbb{N}$ *est en bijection avec* $\mathbb{N}$.

Définition 1 *On dit qu'un ensemble infini est* ***dénombrable*** *si il est en bijection avec* $\mathbb{N}$.

Intuitivement, un ensemble infini est donc dénombrable lorsque l'on peut "numéroter" ses éléments par $\mathbb{N}$.

II. Quelques premiers résultats :

(1.) Montrer qu'un ensemble infini A est dénombrable si et seulement si il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.

(2.) Plus généralement, montrer que si A est un ensemble infini et s'il existe une injection de A dans B où B est dénombrable, alors A est dénombrable.

(3.) Expliquer que si $A \subset B$ est une partie infinie de B et si B est dénombrable alors A l'est également.

Définition 2 *On note dans ce sujet* FD *les ensembles "finis ou dénombrables", c'est-à-dire les ensembles dont on peut "numéroter" les éléments.*

(4.) Expliquer qu'un ensemble A est FD si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

(5.) Expliquer qu'un ensemble A est de type FD, si et seulement si il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.

(6.) Montrer que si A est FD et s'il existe une injection de B vers A alors B est FD.

(7.) Expliquer que toute partie d'un ensemble de type FD est de type FD.

III. Dénombrabilité de $\mathbb{N}^k$:

(1.) Montrer sur un dessin comment l'on pourrait numéroter les éléments de $\mathbb{N}^2$. Plutôt que de formaliser cette preuve difficile à rédiger, on choisit une autre méthode :

(2.) Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to \mathbb{N} \\ (n, m) & \mapsto 2^n 3^m \end{cases}$ est injective. Conclure.

(3.) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.

IV. Opérations sur les ensembles dénombrables :

(1.) Montrer que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles de type FD alors $A_1 \times \cdots \times A_n$ est de type FD.

(2.) En déduire qu'un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

(3.) Soit E un ensemble, A et B deux parties de E de type FD. On considère donc $f : A \to \mathbb{N}$ et $g : B \to \mathbb{N}$ deux injections et on pose

$$h : \begin{cases} A \cup B & \to \mathbb{N}^2 \\ x & \mapsto \begin{cases} (f(x), 0) \text{ si } x \in A \\ (g(x), 1) \text{ si } x \in B \backslash A \end{cases} \end{cases}.$$

Montrer que h est injective. Conclusion ?

(4.) Soit E un ensemble. Soit I un ensemble de type FD et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties toutes de type FD d'un ensemble E. Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est de type FD.

(5.) En déduire que l'union dénombrables de parties dénombrables est dénombrable.

V. Exemples de parties dénombrables :

(1.) Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

(2.) A l'aide de l'écriture irréductible d'un rationnel, donner une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Conclusion ?

On dit qu'un réel x est **algébrique** si il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul tel que $P(x) = 0$ où $\mathbb{Z}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

(3.) Montrer que tout rationnel est algébrique mais que la réciproque est fausse.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $E_k = \{P \in \mathbb{Z}[X] |\, \deg(P) \leqslant k\}$ et $Z_k = \{x \in \mathbb{R} |\ \exists P \in E_k,\ P \neq 0 \text{ et } P(x) = 0\}$.

a. Montrer que E_k est dénombrable et en déduire que Z_k est dénombrable.

b. En déduire que l'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable.

VI. Exemples de parties non dénombrables :

(1.) On souhaite montrer dans cette question que $\mathcal{S} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (i.e. l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$) n'est pas dénombrable. On suppose par l'absurde qu'il l'est. On peut donc numéroter ses éléments par $\mathbb{N}$: $\mathcal{S} = \{u^0, u^1, u^2, \ldots\}$. On définit une suite u par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } (u^n)_n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Conclure.

(2.) Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. Commenter la question IV1. de la partie IV.

(3.) On souhaite montrer dans cette question que $[0,1[$ n'est pas dénombrable. On suppose qu'il l'est. On peut donc numéroter ses éléments par $\mathbb{N}$: $[0,1[= \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. On utilisant l'écriture décimale propre de chaque x_k, construire un réel x de $[0,1[$ distinct de tous les x_k. Conclusion ?

(4.) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

(5.) Montrer que l'ensemble des irrationnels n'est pas dénombrable.

(6.) Montrer qu'il existe un nombre transcendant, *i.e.* qui n'est pas algébrique.

VII. Pour aller plus loin :

(1.) Montrer qu'une fonction monotone sur un segment $[a, b]$ a un nombre fini ou dénombrable de points de discontinuité.

(2.) Montrer qu'une fonction monotone sur un intervalle I a un nombre fini ou dénombrable de points de discontinuité.

(3.) * Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle I a un nombre au plus dénombrable de maxima locaux.