TD 0 : Révisions et approfondissements en analyse

Table des matières

1 Les suites

1.1 Définitions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Soit ℓ, r, M et m des réels.

Exercice 1. Compléter les définitions suivantes :

1. On dit que la suite (u_n) est croissante si ...

2. On dit que la suite (u_n) est strictement décroissante si ...

3. On dit que la suite (u_n) est majorée par M si ...

4. On dit que la suite (u_n) est minorée par m si ...

5. On dit que la suite (u_n) est majorée si ...

6. On dit que la suite (u_n) est bornée si ...

7. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si ...

   On le note $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \ell$.
8. On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si ...

   On le note $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$.
9. On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ si ...

   On le note $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$.
10. On dit que la suite (u_n) est convergente si ...

11. On dit que la suite (u_n) est divergente si ...

Exercice 2. Suites arithmétiques et géométriques :

1. On dit que la suite (u_n) est arithmétique de raison r si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$...
2. On dit que la suite (u_n) est géométrique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, ...
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n =$...

1.2 Propriétés

Exercice 3. Énoncer les théorèmes suivants :

1. Théorème de convergence monotone :

2. Théorème de passage à la limite dans l'inégalité :

3. Théorème de minoration :

4. Théorème de majoration :

5. Théorème d'encadrement ("des gendarmes") :

6. Résultats de croissances comparées :

7. Tableau des résultats sur la limite d'une somme :

8. Tableau des résultats sur la limite d'un produit :

9. Tableau des résultats sur la limite de l'inverse :

Remarque : Attention aux notations : u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou (u_n), désignent la **suite**, alors u_n désigne un **réel** (le terme d'indice n de cette suite).
Cela n'a donc pas de sens d'écrire "u_n est croissante" ou "u_n converge" : il faut écrire "(u_n) est croissante" ou "(u_n) converge"...

1.3 Exercices

Exercice 4. Répondre par Vrai ou Faux aux questions suivantes. Si c'est faux, justifier par un contre-exemple.

1. Si une suite est majorée alors elle admet un unique majorant.

2. Une suite convergente est bornée.

3. Si une suite est convergente, alors elle admet une unique limite.

4. Si (u_n) est croissante et majorée par 2 alors elle converge vers 2.

5. Une suite divergente tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

6. Une suite bornée est convergente.

7. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

8. Une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

9. Une suite est soit croissante, soit décroissance.

Exercice 5. Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+3}$.

1. Montrer que pour tout naturel n, $u_n \geq 0$. En déduire que tous les termes de la suite existe.
2. Montrer que la suite u est décroissante.
3. Montrer que u est convergente. On note ℓ sa limite.
4. Prouver que $\ell = 0$.

2 Les fonctions

On note f, ou $f : x \mapsto f(x)$, la **fonction** f.
(Attention à ne pas confondre la fonction f avec $f(x)$, qui désigne un réel : la valeur de la fonction f en x.)

2.1 Définitions

On appelle *domaine de définition* de f l'ensemble des réels x tels que l'expression $f(x)$ ait un sens. On le notera ici $\mathcal{D}_f$.
(Par exemple pour $f : x \mapsto \frac{1}{x-2}$, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$ c'est-à-dire $\mathcal{D}_f =]-\infty, 2[\cup]2; +\infty[$.)
Soit I, un ensemble inclus dans $\mathcal{D}_f$.
Soit a, ℓ, m, M des réels.

Exercice 6. Compléter les définitions suivantes.

1. On dit que f est *croissante sur* I si ...

2. On dit que f est *strictement décroissante sur* I si ...

3. On dit que f est monotone sur I si ...

4. On dit que f est majorée par M sur I si ...

5. On dit que f est minorée par m sur I si ...

6. On dit que f est majorée sur I si ...

7. On dit que f est bornée sur I si ...

8. On dit que f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ si ...

9. On dit que f est continue en a si ...

10. On dit que f est dérivable en a si ...

11. Si f est dérivable en a, on appelle nombre dérivée de f en a ...

    On le note $f(a)$

12. On dit que f est continue sur I si ...

13. On dit que f est dérivable sur I si ...

14. On dit que f admet un maximum sur I en a si ...

15. On dit que M est un majorant de f sur I si ...

16. On dit que M est un maximum de f sur I si ...

Exercice 7. Une fonction peut-elle avoir plusieurs maximum sur I ? Un maximum peut-il être atteint en plusieurs points différents ?

Exercice 8. En utilisant le fait que sin est dérivable en 0, déterminer la limite en 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

2.2 Propriétés

Ici, a peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Et f et g désigneront deux fonctions ayant chacune une limite (finie ou infinie) en a.

Exercice 9. Formuler ces propriétés sur les limites de fonctions :

1. Tableau des cas possibles de limite en a de $f + g$:

2. Tableau des cas possibles de limite en a de $f \times g$:

3. Tableau des cas possibles de limite en a de $\frac{1}{f}$:

4. Résultats de croissances comparées :

2.3 Continuité, dérivabilité : définitions, propriétés

Exercice 10. Comme à la première question, préciser le domaine de définition ($\mathcal{D}_f$), le domaine de continuité ($\mathcal{D}_f^c$) et le domaine de dérivabilité ($\mathcal{D}_f^d$) et la dérivée f' de f dans les cas classiques suivants :

1. $f : x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) : $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_f^c = \mathcal{D}_f^d = \mathbb{R}$ et $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$:
3. $f : x \mapsto \sqrt{x}$:
4. $f : x \mapsto \cos(x)$:
5. $f : x \mapsto \sin(x)$:
6. $f : x \mapsto e^x$:

   Autres propriétés de cette fonction : $e^{a+b} = \dots$; $\frac{1}{e^a} = \dots$
7. $f : x \mapsto \ln(x)$:

   Autres propriétés de cette fonction :
8. $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x - 3)$:

9. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 3}$:

Exercice 11. Énoncer ou compléter ces propriétés de la continuité :

1. Si f et g sont continues sur I alors $f + g$ et $f \times g$ sont $\dots\dots$

2. Si f est continue en a et si $\dots$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en a.
3. Théorème des valeurs intermédiaires :

4. Corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires : Si, en plus des hypothèses précédentes, f est **strictement monotone** sur $\dots$, alors $\dots$

Exercice 12. Énoncer ou compléter ces propriétés de la dérivabilité :

1. $\dots$ f est dérivable en a, $\dots$ f est continue en a.
2. Si f et g sont dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g$, $f.g$ et $\lambda.f$ sont dérivables sur I. De plus si pour tout $x \in I$, $g(x) \dots\dots$, alors $\frac{1}{g}$ est aussi dérivable sur I. Et on a :
$$(f+g)' = \dots \ ; \ (f.g)' = \dots \ ; \ (\lambda.f)' = \dots \ ; \ (\frac{1}{g})' = \dots \ ; \ (\frac{f}{g})' = \dots \ .$$
3. Si f est dérivable et à dérivée positive sur un $\dots$ I, alors f est croissante sur I.
4. Si f est dérivable et à dérivée $\dots\dots$ sur un $\dots$ I, alors f est strictement décroissante sur I.
5. Si f est dérivable, de dérivée $\dots$ sur un $\dots$ I, alors f est constante sur I.
6. Si f est dérivable en a, alors la courbe de f admet une $\dots$ en a, d'équation

$$\dots$$

Exercice 13. Dire si la phrase est Vraie ou Fausse. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

1. Si f est continue en a alors f est définie en a.

2. Si f est continue en a alors f est dérivable en a.

3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors elle est dérivable et à dérivée positive sur $\mathbb{R}$.

2.4 Fonctions usuelles

Dans cette section, pas d'exercices, mais seulement des rappels. Surligner le texte si vous n'avez jamais vu les points évoqués.

Fonctions polynômiales :
Ce sont les fontions de la forme $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.
Elles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout réel x, x^n est le produit de x par lui-même n fois.
Par convention $x^0 = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto nx^{n-1}$.
Si n est impair : La fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limite $+\infty$ et $+\infty$ et de limite $-\infty$ en $-\infty$.
Si n est pair : La fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}-$, elle admet un minimum en 0 qui vaut 0, et elle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

Fontions rationnelles :
Ce sont les quotients de fonctions polynômiales.
Une fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des racines de son dénominateur.
Une fonction rationnelle est continue et dérivable sur son ensemble de définition.
On la dérive grâce à la formule de dérivation d'un quotient : $(\frac{f}{g})' = \frac{f'.g-g'.f}{g^2}$.

Fonctions racines n^{iemes} : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, l'équation $x^n = y$ admet une unique solution x dans $\mathbb{R}^+$, qu'on appelle racine n^{ieme} de y et qu'on note $\sqrt[n]{y}$.
Par exemple, la racine 2^{ieme} est la racine carrée.
La fonction $f : t \mapsto \sqrt[n]{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, mais n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour tout $t > 0$:

$$f'(t) = \frac{\sqrt[n]{t}}{nt}.$$

Par exemple, pour $n = 2$: la dérivée de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $t \mapsto = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
La fonction $f : t \mapsto \sqrt[n]{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, de limite 0 en 0 et de limite $+\infty$ en $+\infty$.

Fonction exponentielle :
La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y' = y$ sur $\mathbb{R}$, telle que $y(0) = 1$.
La fonction exponentielle est donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et elle est égale à sa dérivée.
La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et a pour limite 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Elle vaut 1 en 0.

Propriété remarquable : Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{x+t} = e^x.e^t\,;\; e^{-t} = \frac{1}{e^t} \text{ et donc } e^{x-t} = \frac{e^x}{e^t}; (e^x)^n = e^{nx}.$$

Fonction logarithme népérien :
La fonction logarithme népérien, noté ln, est définie ainsi :
Pour tout $y > 0$, il existe un unique réel x tel que $e^x = y$: ce réel est noté $\ln(y)$.
On a donc pour tout réel x, et tout $y > 0$:

$$e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln(y).$$

Donc pour tout réel x et tout $y > 0$:

$$e^{ln(y)} = y \text{ et } \ln(e^x) = x.$$

La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et sa dérivée sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$.
La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, de limite $-\infty$ en 0 et de limite $+\infty$ en $+\infty$. Elle ne s'annule qu'en 1.
Propriété remarquable : Pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(x.t) = \ln(x) + \ln(t); \ln(\frac{1}{t}) = -\ln(t) \text{ et donc } \ln(\frac{x}{t}) = \ln(x) - \ln(t); \ln(x^n) = n\ln(x).$$

Fonctions puissances :
Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la notation x^α par

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

Propriétés remarquables : Pour tous α, β réels et tout $x > 0$,

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha.x^\beta \text{ et } (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha.\beta}.$$

La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa dérivée est

$$f' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}.$$

On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x > 0$,

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

donc la fonction racine n^{ieme} coïncide avec la fonction "puissance $\frac{1}{n}$" sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Si $\alpha > 0$: la limite de $f :\mapsto x^\alpha$ en 0 vaut 0.
On peut alors le domaine de définition de f à $\mathbb{R}^+$ en posant $f(0) = 0$. Alors f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Fonction valeur absolue : La fonction $x \mapsto |x|$ est définie et continue sur R, mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}*$. On a :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } |x| = -x \text{ sinon.}$$

Pour deux réels a et b, $|a-b|$ est la distance entre a et b sur l'axe réel. Ainsi pour tout $r \geq 0$:

$$|a-b| \leq r \Longleftrightarrow a \in [b-r, b+r]$$

Et on rappelle l'inégalité triangulaire :

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Fonction partie entière : Pour tout réel x, la partie entière de x, notée $[x]$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Il est caractérisé par :

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, elle est constante égale à n sur $[n, n+1[$.
la fonction partie entière est définie et croissante sur $\mathbb{R}$, de limite $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$. Elle est continue et dérivable en les réels non entiers seulement.

Fonction cosinus :
La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
Pour tout réel x, $\cos(x)$ est l'abscisse du point du cercle trigonométrique correspondant à un angle de x radian. Elle prend donc ses valeurs dans $[-1, 1]$ et est 2π-périodique, et paire.
Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\cos' = -\sin$$

Fonction sinus :
La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
Pour tout réel x, $\sin(x)$ est l'ordonnée du point du cercle trigonométrique correspondant à un angle de x radian. Elle prend donc ses valeurs dans $[-1, 1]$ et est 2π-périodique, et impaire.
Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\sin' = \cos$$

Propriété remarquable : D'après le théorème de Pythagore, pour tout réel x,

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Fonction tangente :
La fonction tangente est le quotient de sinus par cosinus :

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}.$$

Elle est donc définie en tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ privé des réels de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. De plus elle est impaire.
Comme cos et sin sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est continue et dérivable en tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$. Donc tan est continue et dérivable sur son domaine de définition et

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

La fonction tan est strictement croissante sur chaque intervalle inclus dans son domaine de définition. Par exemple elle est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Elle est π-périodique.

2.5 Formulaire de trigonométrie

Valeurs classiques à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini	0

Relations visibles sur le cercle trigonométrique : Pour tout réel x,
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;
$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$; $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ (d'où la π-périodicité de tan) ;
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$; $\sin(\pi - x) = \sin(x)$;
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$; $\sin(x + \frac{\pi}{2} = \cos(x)$;
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$; $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

Sommes d'angles : Pour tous réels a et b,
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$; $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Exercice 14. Pour tous réels a et b dans $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, montrer que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Factorisations : Pour tous réels a et b,
$\cos(a)+\cos(b)=2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$; $\cos(a)-\cos(b)=-2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$;
$\sin(a)+\sin(b)=2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$; $\sin(a)-\sin(b)=2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$.

2.6 Composées de fonctions

Vous connaissez déjà des composées de fonctions particulières. Par exemple, ce que vous notez $\sqrt{u}$ est la composée de la fonction u par la fontion racine carrée : $g : t \mapsto \sqrt{t}$. Dorénavant, il faudra la noter $g \circ u$, plutôt que $\sqrt{u}$.

Plus généralement on appelle *composée de la fonction f par la fonction g*, la fonction notée $g \circ f$ et définie par

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$ est la composée de $f : x \mapsto x^2-3x+2$ par $g : x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est $\ln \circ \sin$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est la composée de ln par la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$, c'est-à-dire $g \circ \ln$.

Le domaine de définition de $g \circ f$ est l'ensemble des x qui sont dans $\mathcal{D}_f$ **et qui sont tels que $f(x)$ soit dans $\mathcal{D}_g$.**
En effet pour que $g(f(x))$ existe, il faut que f soit définie en x et g soit définie en $f(x)$.

Par exemple, si $f : x \mapsto x^2-3x+2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^+$.
Donc la composée $g \circ f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$ est définie en tout x de $\mathbb{R}$ tel que $f(x) \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire en tout réel x tel que $x^2-3x+2 \geq 0$.
Or les racines de ce trinôme sont 1 et 2, donc d'après le théorème sur le signe d'une trinôme,

$$\mathcal{D}_{g\circ f} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[.$$

On rappelle qu'on note $\mathcal{D}_h^c$ le domaine de continuité d'une fonction h, et $\mathcal{D}_h^d$ son domaine de dérivabilité.

Propriété des composées de fonctions :
— Le domaine de continuité de $g \circ f$ est l'ensemble des $x \in \mathcal{D}_f^c$ tels que $f(x) \in \mathcal{D}_g^c$.
— Le domaine de dérivabilité de $g \circ f$ est l'ensemble des $x \in \mathcal{D}_g^d$ tels que $f(x) \in \mathcal{D}_g^d$.
De plus pour tout $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}^d$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x)).$$

Par exemple, si $f : x \mapsto x^2-3x+2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, alors $\mathcal{D}_f^c = \mathcal{D}_f^d = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}_g^c = \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{D}_g^d = \mathbb{R}^{+*}$.

Donc le domaine de continuité de $g \circ f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ est l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) \in \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}^c_{g \circ f} =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[.$$

Et le domaine de dérivabilité de $g \circ f$ est l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) \in \mathbb{R}^{+*}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_{g \circ f} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[.$$

De plus pour tout $x \in \mathcal{D}^d_{g \circ f}$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x)) = f'(x).\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

Remarquer que la formule générale de dérivée d'une composée, c'est-à-dire

$$(g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x)),$$

permet de retrouver les cas particuliers de dérivées de composées que vous avez vues au lycée :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \ : \ (\ln(u))' = \frac{u'}{u} \, ; \ (e^u)' = u'.e^u \, ;$$
$$(\cos(u))' = -u'.\sin(u) \, ; \ (\sin(u))' = u'.\cos(u) \, ;$$
$$(\frac{1}{u})' = \frac{-u'}{u^2} \, ; \ (u^n)' = n.u'.u^{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

2.7 Primitives et calcul intégral

On appelle *primitive* d'une fonction f sur un ensemble I, toute fonction F dérivable et de dérivée f sur I.
Exemple : $F : x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Propriété : Si F et G sont deux primitives f sur un **intervalle** I, alors $F - G$ est une fonction constante sur I.

(En effet $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ sur l'intervalle I, donc $F - G$ est bien constante sur I.)

Donc si F est une primitive de f sur un **intervalle** I, alors **les** primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + c$, où c est une constante réelle.

En terminale, on définit par ailleurs ainsi la notion d'intégrale :
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Vous avez appelé *intégrale de a à b de f*, et noté $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, l'aire délimitée par la courbe de f, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.
Les portions d'aires sous l'axe des abscisses sont comptées négativement et celles au dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement.
On pose par convention

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Remarque : C'est une première approche intuitive de l'intégrale. Elle n'est pas rigoureuse car la notion d'aire se définie, justement, à l'aide de l'intégrale ! Vous verrez au second semestre de MPSI une définition rigoureuse de la grandeur notée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Exercice 15. Énoncer ou compléter les propriétés suivantes de l'intégrale :

1. Relation de Chasles :

2. Linéarité de l'intégrale :

3. Positivité de l'intégrale : si f est continue et positive sur $[a, b]$, alors

$$\ldots \geq 0$$

4. Croissance de l'intégrale : si g et f sont continues sur $[a, b]$ etsi $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors

$$\ldots \leq \ldots$$

5. Inégalité triangulaire pour l'intégrale : si f est continue sur $[a, b]$,

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \ldots$$

Il n'y a pas a priori de lien entre les notions d'intégrale et de primitives. Mais vous avez admis le théorème fondamental suivant (qu'on démontrera au second semestre de MSPI) :

Théorème fondamental de l'analyse : Si f est un fonction continue sur un intervalle I, alors f admet une infinité de primitives sur I, et si $a \in I$ alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est **la primitive de f sur I qui s'annule en a.**

En conséquence de ce théorème : si G est une primitive de f sur l'intervalle I, alors on a vu que $G - F$ est constante sur I.
Donc pour tout $x \in I$, $G(x) - F(x) = G(a) - F(a) = G(a) - 0 = G(a)$, donc $F(x) = G(x) - G(a)$.
Autrement dit pour tout $b \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) - G(a).$$

Connaître une primitive G de f permet donc de calculer les intégrales de f.

Pour calculer une intégrale, on peut donc utiliser une primitive de la fonction à intégrer. Il faut donc savoir reconnaître les dérivées de fonctions usuelles et de leurs composées.

Notation : $G(b) - G(a)$ se note $[G(t)]_a^b$.

Exercice 16. Compléter comme dans le premier exemple :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b t^n dt = [\frac{t^{n+1}}{n+1}]_a^b$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, et tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\displaystyle\int_a^b t^\alpha dt = \dots$
3. Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t} = \dots$
4. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b e^t dt = \dots$
5. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
   $\displaystyle\int_a^b \cos(t)dt = \dots$
   et $\displaystyle\int_a^b \sin(t)dt = \dots$
6. Pour tout $(a, b) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[^2$,
   $\displaystyle\int_a^b (1 + \tan^2(t))dt = \dots$
   et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\cos^2(t)} = \dots$
7. Si f est dérivable et f' est continue sur $[a, b]$, et si g est dérivable et g' est continue sur $f([a, b])$,
   $$\int_a^b f'(t).g'(f(t))dt = [g(f(t))]_a^b.$$

8. Par conséquent, si la fonction intégrée est continue sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}dt = [\sqrt{f(t)}]_a^b \ ; \ \int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = [\ \dots\ ]_a^b;$$

$$\int_a^b f'(t)e^{f(t)}dt = [\ \dots\ ]_a^b\ ; \int_a^b f'(t)\cos(f(t))dt = [\ \dots\ ]_a^b\ ; \int_a^b f'(t)\sin(f(t))dt = [\ \dots\ ]_a^b$$

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f^2(t)}dt = [\ \dots\ ]_a^b\ ; \int_a^b f'(t)f^n(t)dt = [\ \dots\ ]_a^b$$

Exercice 17. Calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}dt\,;\ \int_0^\pi \sin(t)\cos^3(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}dt$.

3 Équations et inéquations

3.1 Méthode de résolution

Une équation est une phrase de la forme $E : f(x) = g(x)$. Une inéquation est une phrase de la forme $E : f(x) \leq f(x)$ ou de la forme $E : f(x) < g(x)$.
Le domaine de définition d'une telle (in)équation est $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, car elle est définie en tout x tel que $f(x)$ et $g(x)$ existent.

Soit I un ensemble inclus dans le domaine de définition de E.
Résoudre E sur I c'est trouver **tous** les x de I vérifiant E. On notera $\mathcal{S}_{E,I}$ l'ensemble des solution de E dans I.

Exemple : Résolvons l'inéquation $E : \ln(x^2 - 2x - 3) \leq 0$.

1. On cherche d'abord le domaine de définition $\mathcal{D}$ de E : E n'a de sens que pour les réels x tels que $x^2 - 2x - 3 > 0$.
   Or ce trinôme a pour racines -1 et 3, donc
   $$\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$$
2. On raisonne ensuite par équivalence sur E : Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a
   $$E \Longleftrightarrow \ln(x^2 - 3x + 2) \leq \ln(1)$$
   Or la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a
   $$E \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 1$$
   Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_E$, $E \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 4 \leq 0$.
   Or ce trinôme a pour racines $\alpha = 1 - \sqrt{5}$ et $\beta = 1 + \sqrt{5}$, il est donc négatif sur $[\alpha, \beta]$.
3. On ne garde que les solutions qui sont bien dans le domaine de définition $\mathcal{D}$ de E :
   Comme on peut vérifier que $\alpha < -1 < 3 < \beta$, l'ensemble des solutions de E est
   $$\mathcal{S} = [\alpha, -1[\cup]3, \beta]$$

Exercice 18. De la même façon, résoudre :

1. $E_1 : \ln(x^2 - 2x + 3) \leq 0$
2. $E_2 : \sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 1$
3. $E_3 : \ln(|x^2 - 2x + 3|) \leq 0$ *Indication : On pourra d'abord résoudre E_3 sur le domaine I_1 où $x^2 - 2x + 3 > 0$, puis sur le domaine I_2 où $x^2 - 2x + 3 < 0$. Puis on remarque l'ensemble de toutes les solutions est l'union de $\mathcal{S}_{E_3,I_1}$ et de $\mathcal{S}_{E_3,I_2}$.*

Pour bien résoudre des inéquations, il faut connaître :
— Les domaines de définitions et les tableaux de variations des fonctions usuelles.
— Les opérations qu'on peut faire de chaque côté de l'inéquation.
— Les propriétés des trinômes, de la valeur absolue.

3.2 Équations et inéquations trigonométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$.
Dessiner un cercle trigonométrique pour comprendre et se souvenir des résultats suivants :

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des x de la forme $a + 2k\pi$ ou $-a + 2k\pi$, pour k dans $\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des x de la forme $a + 2k\pi$ ou $\pi - a + 2k\pi$, pour k dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 19. On veut résoudre $E : \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Donner d'abord l'unique solution dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ et dessiner-la sur le cercle trigonométrique.
2. Déterminer les deux solutions dans $[0, 2\pi]$.
3. Dire exactement quelles sont les solutions de E dans $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que sin est 2π-périodique.

On s'aide aussi du cercle trigonométrique pour résoudre des inéquations trigonométriques.

Par exemple, résolvons $E : \sin(x) \leq \frac{1}{2}$ sur $I = [0, 2\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$.

1. Comme $\frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$, le tableau de variation de sin sur $[0, 2\pi]$ montre que l'ensemble des solutions de E sur I est
$$\mathcal{S}_{E,I} = [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, 2\pi].$$
(Le visualiser sur le cercle trigonométrique.)
2. Ensuite, comme sin est 2π-périodique, on peut en déduire que l'ensemble des solutions de E sur $\mathbb{R}$ est l'union des intervalles de la forme $[2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi] \cup [\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (2k+1)\pi]$ pour k dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 20. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$, puis sur $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$E : \cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$