

Mécanique

TD 7 Mouvement dans un champ de force centrale conservatif

Exercice 1: Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène:

On s'intéresse ici à l'interaction électrostatique entre l'électron (masse m , charge $-e$) et le proton (masse $m' \gg m$ et charge $+e$) de l'atome d'hydrogène.

On se place dans le cadre du modèle de Bohr dans lequel l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r autour du proton supposé fixe et centré en O .

L'hypothèse de Bohr consiste à poser $\|\vec{L}_0\| = n \frac{h}{2\pi}$, n étant un entier, h la constante de Planck et \vec{L}_0 le moment cinétique de l'électron calculé en O .

- Montrez que l'énergie mécanique E_m de l'électron peut s'écrire $E_m = \frac{-E_0}{n^2}$ et exprimez E_0 .
- Que représente E_0 ?
- Calculez E_0 en eV sachant que $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ USI .

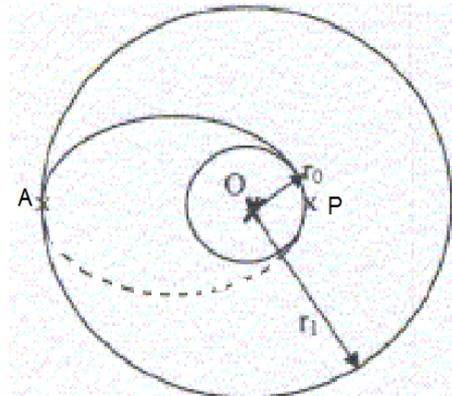
Exercice 2: Changement d'orbite, ellipse de transfert:

La Terre est supposée à symétrie sphérique de centre C , de rayon r_0 et de masse m_0 . On donne $r_0 = 6400$ km et $m_0 = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg et $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ USI.

- Un satellite de masse m décrit une orbite circulaire rasante de rayon r_0 autour de la Terre. Quelles sont les expressions de la vitesse v_0 et de la période T_0 du satellite? Calculez leur valeur numérique.
- Un satellite géostationnaire décrit une orbite dans le plan de l'équateur et semble fixe pour un observateur terrestre. Déterminez le rayon r_1 de son orbite et calculez sa vitesse v_1 . Faites les applications numériques

On veut faire passer un satellite d'une orbite circulaire rasante de rayon $r_0 = CP$ à l'orbite géostationnaire de rayon $r_1 = CA$.

Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A . Le satellite parcourt alors entre les deux orbites une demi-ellipse, dite de transfert, de périégée P et d'apogée A .



- Déterminez littéralement puis numériquement les vitesses v'_0 et v'_1 du satellite en P et A sur sa trajectoire elliptique.
- Calculez la durée du transfert de P à A .

Exercice 3: Satellite géostationnaire:

La Terre possède un seul satellite naturel mais de nombreux satellites artificiels sont par ailleurs placés en orbite autour de la Terre dans des buts comme la télécommunication, la météorologie, la défense...

Le mouvement de ces satellites artificiels est étudié dans la référentiel géocentrique R_g dont l'origine O coïncide avec le centre de la Terre (supposée à symétrie sphérique) et dont les axes pointent dans la direction de trois étoiles très éloignées et considérées comme fixes. Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de son axe avec une période de révolution T et une vitesse de révolution Ω .

On désigne par M_T et R_T la masse et le rayon de la Terre. G est la constante de gravitation universelle.

Un satellite artificiel M de masse m est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Les frottements dus à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.

Données: $R_T = 6400$ km et $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m².kg⁻² et $T = 86164$ s

1. Montrez qu'un satellite artificiel en orbite circulaire autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre O de la Terre.
2. Démontrez que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimez littéralement sa vitesse v_0 en fonction de G , M_T et r puis en fonction de g_0 , R_T et r où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

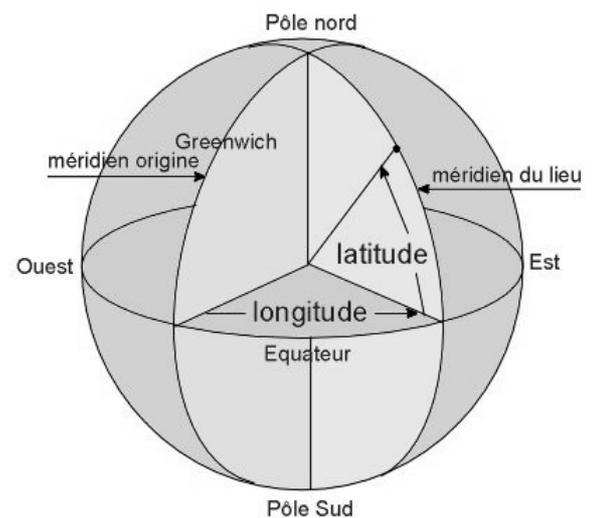
Le satellite SPOT (Satellite SPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832$ km au-dessus de la Terre. Calculez numériquement la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.

3. L'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle est choisie nulle à l'infini. Exprimez l'énergie mécanique E_m du satellite autour de la Terre en fonction de G , M_T , r et m . Quel est l'effet des forces de frottement de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse de satellite?

4. a) Exprimez l'énergie mécanique E_m du satellite immobile à la surface de la Terre en un point de latitude λ en fonction de G , M_T , R_T , λ , m et de la période T de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord.

b) Pourquoi lance-t-on préférentiellement les satellites depuis les régions de basse latitude (Kourou en Guyane : latitude 5° Nord; Cap Canaveral en Floride 28° N).

c) Les lance-t-on plutôt vers l'Est ou vers l'Ouest?



Un satellite artificiel de la Terre est géostationnaire s'il est immobile dans le référentiel terrestre: son orbite est circulaire dans le plan de l'équateur et il survole constamment le même point. Le satellite TELECOM de masse $m_s = 1000$ kg est géostationnaire.

5. Peut-on placer le satellite en-dehors du plan de l'équateur?

6. Calculez l'altitude h_G (ou distance au sol), la vitesse v_G et l'énergie mécanique E_{mG} du satellite TELECOM sur son orbite géostationnaire. Tous les satellites géostationnaires doivent-ils avoir la même masse?

Exercice 4: Distance minimale d'approche: retour sur l'expérience de Rutherford

Un noyau d'hélium (aussi appelé particule α) de masse m_1 et de charge $q_1 = 2e$ subit une force de répulsion électrostatique de la part d'un noyau d'or quasiment immobile de masse m_2 et de charge $q_2 = Z.e$ centré au point O .

Loin du point O , le noyau d'hélium a une vitesse \vec{v}_0 .

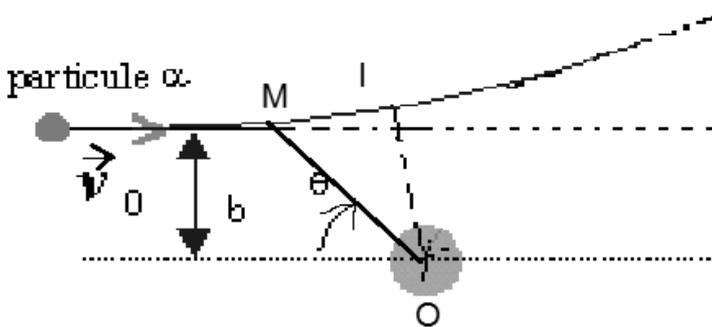
On souhaite déterminer la distance minimale d'approche $r_m = OI$ en fonction de Z , e , v_0 et b . b étant appelé le paramètre d'impact.

Données: $v_0 = 2,09 \text{ cm.s}^{-1}$

$m_p = m_n = 1,67.10^{-27} \text{ kg}$

$e = 1,60.10^{-19} \text{ C}$

$Z(\text{Au}) = 79$



1. En utilisant les coordonnées polaires, donnez l'expression du vecteur vitesse en I
2. Quelles sont les grandeurs qui se conservent au cours du mouvement?
3. A l'aide de ces lois de conservation, déterminez l'expression de la distance minimale d'approche.

4. A l'aide d'une hypothèse, déterminez la borne supérieure de l'ordre de grandeur de b . Quel commentaire pouvez-vous faire sur la valeur obtenue? D'où peut provenir l'écart avec la valeur communément admise?

Quelques résultats:

Non, aucun résultat, vous travaillez seul.