Lycée Kerichen
MPSI 2
2013-2014

# Partie Mécanique

# TD 3 Travail et énergie en référentiel galiléen

<u>Méthode de traitement des exercices:</u>

- Définissez le système sur lequel vous travaillez, identifiez le référentiel dans lequel vous étudiez le mouvement, faites un bilan des forces s'exerçant sur le système et représentez-les sur un schéma. Choisissez une base de projection adaptée au système
- Jusqu'ici, on appliquait systématiquement le principe fondamental de la dynamique pour aboutir aux équations du mouvement. Dans ce TD, on va plutôt appliquer les théorèmes énergétiques.

## Exercice 1: Théorème de la puissance cinétique: Petites oscillations d'un pendule simple:

On considère un pendule constitué d'une masselotte de masse m supposée ponctuelle suspendue à un fil inextensible de longueur *l* et de masse négligeable, fixé à un point fixe O d'un référentiel galiléen. On repère à chaque instant la position du pendule par l'angle θ que fait le fil avec la verticale descendante passant par O. Le fil est supposé tendu dans toutes les phases du mouvement.

1. Montrez que le théorème de la puissance cinétique conduit ici à l'équation du mouvement puis déterminez la période des petites oscillations autour de l'équilibre vertical du fil.

## Exercice 2: Travail d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse:

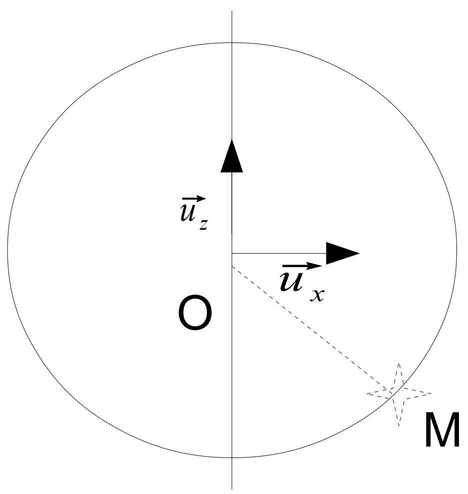
Un mobile effectue un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ ; ce mobile subit l'action d'une force de frottement fluide : $\overrightarrow{F_{frott}}=-\alpha\vec{v}=-\alpha\dot{x}\vec{u_x}$

Déterminez en fonction de A, α et ω le travail de la force de frottement sur une période T des oscillations de x.

## Exercice 3: Mouvement d'un point matériel sur une circonférence.

Soit un point M de masse m pouvant glisser sans frottement sur une circonférence de centre O et de rayon r placée dans un plan vertical.

Le référentiel d'étude R est lié au repère $(O,\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z})$ est supposé galiléen. La circonférence est fixe dans ce référentiel.




1. M est un anneau qui peut coulisser sur la circonférence (liaison bilatérale). A t = 0, il est lancé de A (0,0, -r) avec la vitesse $\vec{v_0}=v_0\vec{u_\theta}$

a) Quelle est l'expression du module v de la vitesse de M en fonction de la côte z?

b) Discutez de la nature du mouvement en fonction de $v_0$.

2. M est maintenant une bille qui glisse à l'intérieur du support circulaire. Elle peut donc perdre le contact avec la circonférence (liaison unilatérale). La réaction exercée par la circonférence sur M s'écrit $\vec{R}=-R\vec{u_r}\, avec\, \vec{u_r}=\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$

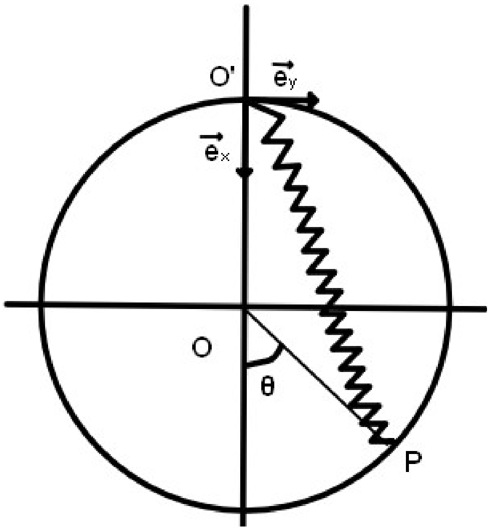
a) Établissez l'expression de R en fonction de la côte z.

b) A quelle côte le point M quitte-t-il la circonférence?

c) Pour quelles valeurs de $v_0$ M quitte-t-il la circonférence en z = 0? en z = r?

## Exercice 4: Équilibre et stabilité:

Une perle quasi ponctuelle P de masse m est astreinte à se déplacer sans frottement le long d'un demi-cercle (C) de rayon a et de centre O. Le point P est attaché à un ressort (R) dont l'autre extrémité est fixée en O' (OO' = a) avec $\overrightarrow{OO'}$ vertical.
Le ressort (R) possède une constante de raideur k et une longueur au repos $l_0$ . Le point P est repéré par l'angle θ = $(\vec{e}_x, \overrightarrow{OP})$ dans le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$



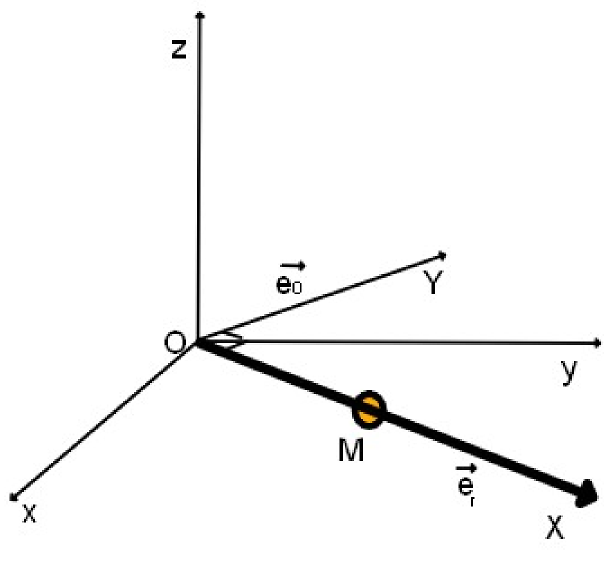

1. Exprimez la tension $\vec{T}$ du ressort en fonction de a, k, $l_0$ et θ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .
2. a) Comment s'exprime la vitesse $\vec{v}$ de P dans la base de projection $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ ?
   b) On note $\vec{F}$ la résultante des forces exercées sur la perle P. Donnez l'expression de $\vec{F}\cdot\vec{v}$ en fonction de $\theta \, et \, \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ .
   Déduisez-en l'énergie potentielle à une constante près dont dérive la force $\vec{F}$ .

3. On suppose la relation suivante entre les paramètres $a = \frac{2mg}{k} \, et \, l_0 = \sqrt{3}(a - \frac{mg}{k})$

Quelles sont les positions d'équilibre $\theta_1$ et $\theta_2$ pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ? Étudiez leur stabilité.

## Exercice 5: Glissement sans frottement d'un anneau sur une tige en rotation

Une tige rectiligne horizontale OX tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω en restant dans le plan (Oxy). Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut y glisser sans frottement.
A un instant t quelconque, la rotation de la tige est repérée par l'angle polaire θ = ωt et la position de l'anneau sur la tige par $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = r(t)$ .
Le mouvement de M peut être étudié soit dans le référentiel terrestre galiléen $R_g(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ soit dans le référentiel de la tige $R_{Tige}(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .
L'équation de la trajectoire de M dans le référentiel terrestre est r(t) = $r_0$.ch(ωt).




1. 1. Donnez les vecteurs vitesse et accélération du point M successivement dans le référentiel $R_g$ et $R_{tige}$.
2. a) Effectuez le bilan des forces appliquées au point M.
   b) En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel galiléen, exprimez les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur M en fonction de m, g, r, $\dot{r} \, et \, \omega$ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

3. Calculez la puissance de cette force $\vec{R}$ dans le référentiel $R_{tige}$ de la tige.
4. Déterminez la puissance de $\vec{R}$ dans le référentiel terrestre $R_g$ .
5. Établissez l'équation différentielle du mouvement de M par une méthode énergétique et montrez que cette équation est cohérente avec la solution proposée dans l'énoncé .

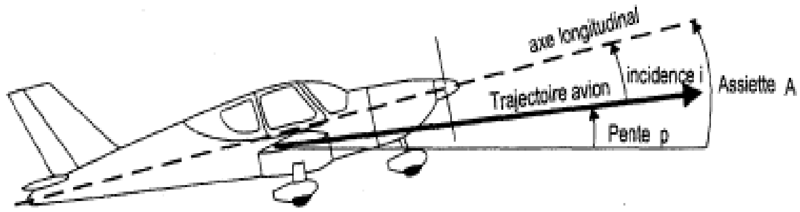
## Exercice 6 : Mécanique en vol : (d'après ENSAIT 2003)

Dans ce problème en étudie différents mouvements rectilignes uniformes que peut adopter un avion monomoteur à hélice dans une atmosphère calme. L'avion, assimilé à un point matériel, est soumis aux quatre forces suivantes:

- $\vec{f}_m$ , la **traction de l'hélice** dont la direction est l'axe longitudinal de l'avion;
- $\vec{f}_p$ , la **portance**, perpendiculaire à la trajectoire de l'avion;
- $\vec{f}_t$ , la **traînée**, de même direction que la trajectoire mais s'opposant au mouvement de l'avion;
- $\vec{P}$ , son **poids** ($g$ = 9,8 m.s$^{-2}$).

Pour caractériser le mouvement et l'altitude de l'avion dans l'espace, on définit trois angles (non orientés):

- la pente p, angle entre l'horizontale (Ox) et la trajectoire de l'avion;
- l'assiette A, angle entre l'horizontale et l'axe longitudinal de l'avion;
- l'incidence i, angle entre la trajectoire de l'avion et son axe longitudinal.



Les angles i , p , et A ne sont pas orientés.

La masse totale de l'avion est m = 800 kg. La portance et la traînée sont calculables à l'aide des expressions suivantes:

$f_p = \frac{1}{2}\rho S C_p v^2$ et $f_t = \frac{1}{2}\rho S C_t v^2$ où:

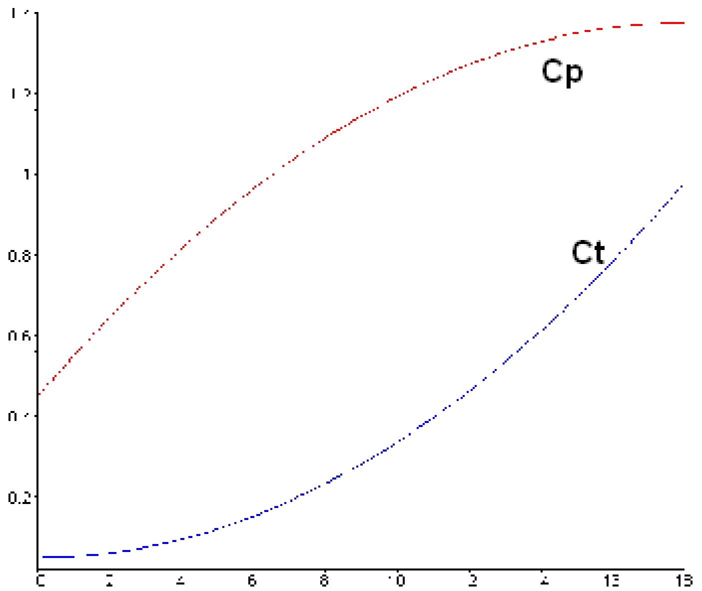
- $\rho$ = 1,2 kg.m$^{-3}$ représente la masse volumique de l'air que l'on considérera constante (même si c'est une fonction de l'altitude)
- S = 10 m$^2$ la surface ailaire
- v = la vitesse de l'avion
- $C_p$ et $C_t$ sont les coefficients aérodynamiques sans dimension, fonction de l'incidence i.
- On donne ci-après les graphes $C_p$ = f(i) , $C_t$ = g(i) et $C_p$ = h($C_t$)

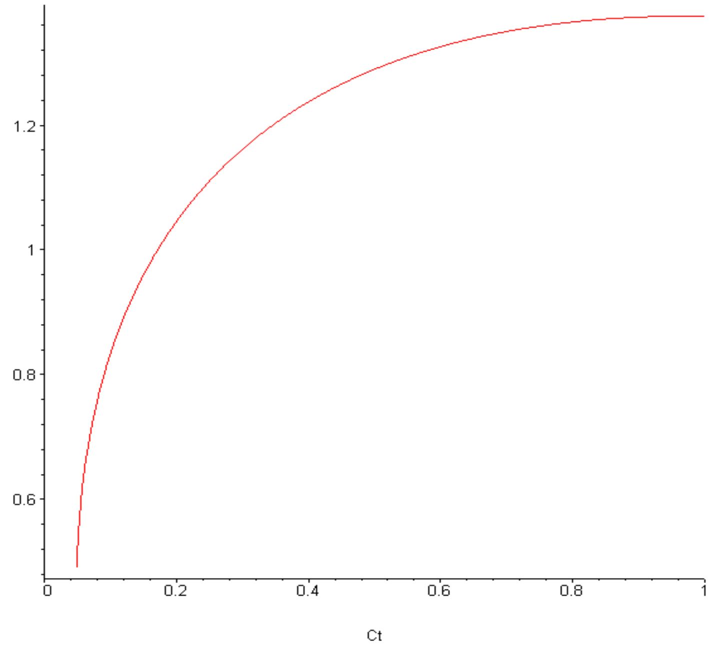
1. Après le décolage, le pilote effectue une montée à la puissance maximale $P_{max}$ = *80 kW* avec une incidence *i* nulle .

   a) Montrer que l'assisette *A* vérifie l'équation $P_{max} = P_0(\cos A + K_0 \sin A)\sqrt{(\cos A)}$ où $P_0$ et $K_0$ sont des constantes à déterminer.

   b) En supposant *A* petit, établir l'équation du second degré vérifiée par *A*.

   c) Calculer numériquement *A*, la vitesse *v* de l'avion et sa vitesse ascensionnelle $v_z$.




2. améliorer sa pente, le pilote impose (toujours à la puissance maximale) une vitesse *v = 130 km.h⁻¹*; ce qui confère à l'avion une incidence *i = 5,85 °*.

a) Calculer numériquement la force de traction de l'hélice.

b) En déduire les valeurs de la pente et de la vitesse ascensionnelle. Commenter

3. Alors que l'avion évolue en croisière à l'altitude de 1500 m, le moteur tombe en panne. Afin de préparer dans les meilleures conditions son atterrissage forcé, le pilote doit choisir l'incidence pour laquelle la distance parcourue en vol plané est maximale.

a) Montrer que cela revient à choisir un rapport $\frac{C_p}{C_t}$ maximal.

b) En déduire la valeur de p et de i lors de cette phase de vol.

c) Calculer la vitesse de l'avion, le taux de descente en $m.min^{-1}$, la distance parcourue et la durée du vol plané.

<u>Quelques résultats:</u>

Exercice 2: $W=-\alpha\omega\pi A^2$

Exercice 3: 1) a) $v=\sqrt{(v_0)^2-2g(r+z)}$ 1) b) Si $v_0>2\sqrt{gr}$ , la bille fait un tour complet. Sinon, la bille fait des oscillations.

2) a) $R=\frac{mg}{r}(\frac{(v_0)^2}{g}-2r-3z)$ 2) b) $z=\frac{1}{3}(\frac{v_0^2}{g}-2r)$

Exercice 4: 1) $\vec{T}=-k(2a\cos(\frac{\theta}{2})-l_0)(\cos(\frac{\theta}{2})\vec{e}_r-\sin(\frac{\theta}{2})\vec{e}_\theta)$

2)b) $E_p=(-mga+ka^2)\cos\theta-2kl_0 a\cos\frac{\theta}{2}+constante$ 3) $\theta_1$ = 0 et $\theta_2$ = $\frac{\pi}{3}$

Exercice 5: 2) $\vec{R}=mg\vec{e}_z+2m\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ 3)dans $R_{tige}$, $P(\vec{R})_{Rtige}=0$ 4) dans $R_g$ , $P(\vec{R})_{Rg}=2mr\dot{r}\dot{\theta}^2$ 5) $\ddot{r}-\omega^2 r=0$