COURS

ANALYSE 6 – SÉRIES ENTIÈRES

I- DÉFINITION

1. DÉFINITION

DÉFINITION 1 *Série entière*

Une *série entière* de la variable complexe est une série de fonctions de terme général de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est une suite de complexes.

Le *domaine de convergence* de la série entière est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum a_n z^n$ converge.

Les questions principales qui se posent sont celles de la convergence et de la valeur de la somme dans ce cas.

EXEMPLES

- La série entière géométrique est la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$. On sait déjà que cette série converge pour $|z| < 1$ et que dans ce cas sa somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$
- La série entière exponentielle est la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$. On sait qu'elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et que sa somme est $\exp z$.
- Séries entières *lacunaires* : il s'agit de séries entières pour lesquelles les a_n sont « souvent » nuls. Exemples : $\sum a_n z^{2n}$, $\sum a_n z^{(n^2)}$, $\sum a_n z^{n!}$.

2. STRUCTURE LINÉAIRE

PROPOSITION 1 *Structure linéaire*

L'ensemble des séries entières de la variable complexe forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$$\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n \qquad \lambda . \sum a_n z^n = \sum (\lambda a_n) z^n$$

II- Convergence

1. Rayon de convergence

Proposition 2 *Lemme d'Abel*

Soit $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(a_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.
Alors $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < r_0 \implies \sum a_n z^n$ converge absolument.

Remarque

Si $r \leqslant r_0$, alors la suite $(a_n r^n)$ est également bornée, ce qui induit que l'ensemble $\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n)\text{est bornée}\}$ est un intervalle de la forme $[0,\ldots$

Définition 2 *Rayon de convergence*

Le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ est

$$\mathrm{R} = \sup\left\{r \geqslant 0 \mid \left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\} \quad (\in \overline{\mathbb{R}_+})$$

Théorème 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon. $\forall z \in \mathbb{C}$,

- si $|z| < \mathrm{R}$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument
- si $|z| > \mathrm{R}$ alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement

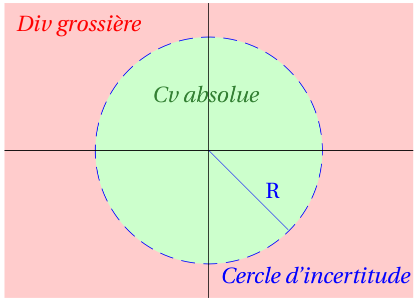
Exemples

Rayons de convergence des séries entières géométrique et exponentielle.

2. Disque ouvert de convergence

Définition 3 *Disque ouvert de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon. Le *disque ouvert de convergence* est le disque ouvert de centre O et de rayon R : $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \mathrm{R}\}$.



Le cercle de centre O de rayon R est appelé *cercle d'incertitude* : si $|z| = \mathrm{R}$, on ne peut rien dire *a priori* sur la convergence de la série $\sum a_n z^n$.

Exemple

Soit la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$. Son rayon de convergence est $\mathrm{R} = 1$. Pour $z = 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et pour $z = -1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

3. Caractérisations du rayon de convergence

Proposition 3

S'il existe un réel $\rho > 0$ tel que :

- si $|z| < \rho$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument
- si $|z| > \rho$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement

alors le rayon de convergence $\mathrm{R} = \rho$.

Proposition 4 *Utilisation du lemme d'Abel*

S'il existe un réel $\rho > 0$ tel que :

- si $|z| < \rho$ alors la suite $\left(|a_n z^n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
- si $|z| > \rho$ alors la suite $\left(|a_n z^n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

alors le rayon de convergence $\mathrm{R} = \rho$.

Proposition 5 *Règle de d'Alembert pour les séries entières*

Si le quotient $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ admet une limite ℓ, alors $\mathrm{R} = \dfrac{1}{\ell}$ $\quad$ (0 si $\ell = +\infty$).

REMARQUE

Cette règle fonctionne souvent, mais il est parfaitement possible que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ n'ait pas de limite. Auquel cas, on peut revenir à la règle de D'ALEMBERT classique :

PROPOSITION 6 *Règle de* D'ALEMBERT *classique*

S'il existe un réel $\rho > 0$ tel que :

- si $|z| < \rho$ alors la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite < 1
- si $|z| > \rho$ alors la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite > 1

alors le rayon de convergence $R = \rho$.

EXEMPLES

- $\sum \frac{z^n}{n^2}$. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D'après la règle de D'ALEMBERT, $R = \frac{1}{1} = 1$.
- $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}.z^n$. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$. D'après la règle de D'ALEMBERT, $R = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$.
- $\sum \frac{n}{2^n} z^{3n+1}$. Il s'agit d'une série lacunaire, on revient à la règle de D'ALEMBERT classique : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n+1}{2n}|z|^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|^3}{2}$.

  On en déduit que $\begin{cases} \text{si } |z| < \sqrt[3]{2}, & \sum a_n z^n \text{ converge} \\ \text{si } |z| > \sqrt[3]{2}, & \sum a_n z^n \text{ diverge} \end{cases}$ et donc que $R = \sqrt[3]{2}$.
- Soit la série $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right).z^n$. Que donne la règle de D'ALEMBERT ? Quel est son rayon ?

4. RAYON DE CONVERGENCE ET OPÉRATIONS

a) Produit par un scalaire

PROPOSITION 7 *Produit par un scalaire*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R et de somme f, et $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
La série entière $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon R et pour somme $\lambda \cdot f$

b) Somme

PROPOSITION 8 *Somme*

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b et de sommes f_a et f_b.

- En notant R le rayon de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$, on a : $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
  Si de plus $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.
- $\forall z \in D(O, R)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = f_a(z) + f_b(z)$

c) Produit par n^α

PROPOSITION 9 *Produit par n^α*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n x^n$ est le même que celui de $\sum a_n x^n$.

d) Produit de CAUCHY

PROPOSITION 10 *Produit de* CAUCHY

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b et de sommes f_a et f_b. On note $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

- En notant R le rayon de la série entière $\sum c_n z^n$, on a : $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
- $\forall z \in D(O, \min(R_a, R_b))$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f_a(z) \cdot f_b(z)$

5. RAYON DE CONVERGENCE ET COMPARAISON

PROPOSITION 11 *Rayon de convergence et ordre*

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_a \geqslant R_b$.

PROPOSITION 12 *Rayon de convergence et domination*

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.
Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.

REMARQUE

Ce résultat s'applique *a fortiori* si $a_n = o(b_n)$.

PROPOSITION 13 *Rayon de convergence et équivalents*

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.
Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ alors $R_a = R_b$.

III- Propriétés de la somme

On considère une variable réelle x. On étudie la convergence de la série $\sum a_n x^n$ et les propriétés analytiques de sa somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Convergence normale et continuité

Proposition 14 *Convergence normale*

La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R,R[$.
De plus : si $\sum |a_n| R^n$ CV, la convergence est normale sur le segment $[-R,R]$.

On déduit de cette proposition :

Théorème 2 *Continuité*

La somme de la série entière est continue sur $]-R,R[$, et même, dans le cas où $\sum |a_n| R^n$ CV, sur le segment $[-R,R]$.

Remarque

Ce théorème s'étend au cas de la variable complexe : la somme est continue sur le disque ouvert de convergence et, dans la cas où $\sum a_n R^n$ CVA, sur le disque fermé. *(dem HP)*

2. Dérivation terme à terme

Définition 4 *Série dérivée*

La *série dérivée* de la série $\sum a_n x^n$ est la série $\sum n a_n x^{n-1}$, obtenue en dérivant terme à terme.

Théorème 3 *Dérivation terme à terme*

La somme de la série entière est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$ et sa dérivée est la somme de sa série dérivée :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Remarque

Dans cette somme, on peut remplacer $n=0$ par $n=1$.

Exemple

Soit la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$. $\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
D'après le théorème de dérivation des séries entières, sa somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Corollaire 1 *Classe $\mathscr{C}^\infty$*

La somme de la série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

Remarque

Dans cette somme, on peut remplacer $n=0$ par $n=p$ ou encore par $n=k$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$.

Corollaire 2 *Expression des coefficients a_n*

Pour $x=0$ dans l'expression de $S^{(p)}$, on obtient : $a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$

3. Intégration terme à terme

Théorème 4 *Primitivation terme à terme*

La primitive de S sur $]-R,R[$ qui s'annule en 0 est la somme de sa série primitive :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemple

$\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Corollaire 3 *Intégration terme à terme*

Pour $[a,b] \subset]-R,R[$, $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n t^n \,\mathrm{d}t$

On peut intervertir les symboles $\sum$ et $\int$.

IV- Développement en série entière

1. Définition

DÉFINITION 5 *DSE*

La fonction f est *développable en série entière (DSE)* au voisinage de 0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

EXEMPLE

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est DSE, elle est la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ définie sur $]-1, 1[$.

PROPOSITION 15 *Condition nécessaire*

Pour que f soit DSE, il est nécessaire qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

REMARQUE

Attention : cette condition n'est pas suffisante comme l'atteste l'exemple de la fonction $f : x \mapsto \mathbf{e}^{-\frac{1}{x^2}}$. $f^{(n)}(0) = 0$ mais pour $x \neq 0$, $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n$

2. Unicité des coefficients

PROPOSITION 16 *Unicité des coefficients*

Si f est DSE, la série entière dont elle est la somme est unique :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Cette série s'appelle la *série de* TAYLOR de f.

COROLLAIRE 4 *Parité*

Si f est paire [resp. impaire], les termes de degrés impairs [resp. pairs] de son DSE sont nuls.

3. Opérations

PROPOSITION 17 *Somme et produit par un scalaire*

Si f et g sont DSE sur $]-R, R[$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f+g$, λf et fg sont DSE sur $]-R, R[$.

Le DSE est alors la combinaison linéaire ou le produit de CAUCHY respectivement.

PROPOSITION 18 *Dérivation et primitivation terme à terme*

Si f est DSE sur $]-R, R[$, ses dérivées successives et ses primitives successives le sont aussi et leurs DSE s'obtiennent par dérivation ou intégration terme à terme.

4. Formules de Taylor (rappels)

THÉORÈME 5 *Formule de* TAYLOR *avec reste intégral*

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur l'intervalle I et $a \in$ I. Alors $\forall x \in$ I,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\, \mathrm{d}t$$

On rappelle que la démonstration de fait par récurrence à l'aide d'une intégration par parties

COROLLAIRE 5 *Inégalité de* TAYLOR-LAGRANGE

Sous les mêmes hypothèses,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!} . \sup_{t\in[a,x]} \left| f^{(p+1)}(t) \right|$$

5. Liste des DSE

Voir en dernière page.

V- Exemples d'applications

1. Prolongement par continuité

Exemples

Les fonctions $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ sont prolongeables en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculs de sommes

Exemples

Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ (*distinguer selon le signe de* x) et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ (*effectuer une DES*)

3. Calculs d'intégrales

Exemple

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$

DSE de référence

$\mathrm{e}^x =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$
$\sin x =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$+\infty$
$\cos x =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$+\infty$
$\operatorname{sh} x =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$
$\operatorname{ch} x =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$(1+x)^\alpha =$	$1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1 ($+\infty$ si $\alpha\in\mathbb{N}$)
$\frac{1}{1-x} =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$	1
$\frac{1}{1+x} =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	1
$-\ln(1-x) =$	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1
$\ln(1+x) =$	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	1
$\arctan x =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	1
$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} =$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1

Les DSE de la variable complexe $\frac{1}{1-z}$ et $\mathbf{e}^z$ sont les mêmes que ceux de la variable réelle.