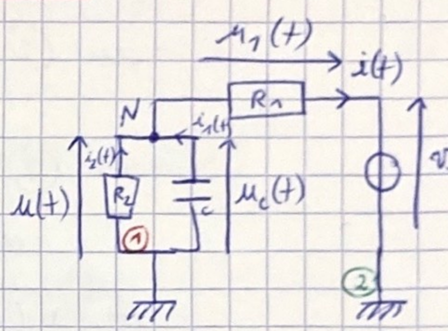
ÉTUDE D'UN RÉGIME TRANSITOIRE



1. a) Par continuité de la tension aux bornes du condensateur on a :

$$u_c(0^-) = u_c(0^+) = 0$$

d'après la loi des mailles en 1 :

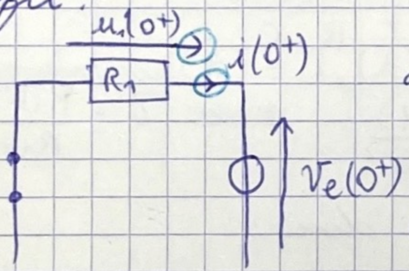
$$u(t) = u_c(t)$$

soit à $t = 0^+$:

$$u(0^+) = 0$$

aucune tension ne se trouve aux bornes de la maille 1 à $t = 0^+$, on peut donc la remplacer par un fil :

convent° générateur



d'après la loi des mailles on a :

$$u_1(0^+) = v_e(0^+)$$

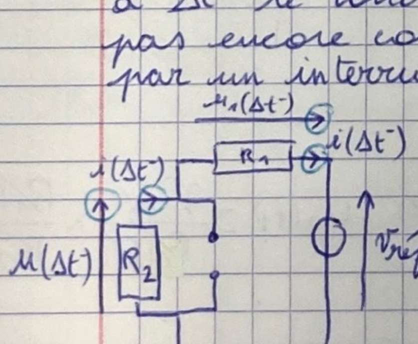
$$\Leftrightarrow -R_1 i(0^+) = v_{réf}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i(0^+) = -\frac{v_{réf}}{R_1}}$$

1. b) Par continuité de la tension aux bornes du condensateur on a :

$$u_c(\Delta t^-) = u_c(\Delta t^+) = v_{réf}$$

à Δt^- le condensateur est chargé mais ne se comporte pas encore comme un générateur, on peut le modéliser par un interrupteur ouvert :



d'après la loi des mailles on a :

$$u(\Delta t^-) + u_1(\Delta t^-) = v_{réf}$$

$$\Leftrightarrow -R_2\, i(\Delta t^-) - R_1\, i(\Delta t^-) = v_{réf}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i(\Delta t^-) = -\frac{v_{réf}}{R_1 + R_2}}$$

2. Loi des mailles :

- en 1 :

$$u_c(t) = u(t)$$

Loi des noeuds en N :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

- en 2 :

$$u_c(t) + u_1(t) = V_e(t)$$

$$\Leftrightarrow u(t) - R_1 i(t) = V_e(t)$$

$$\Leftrightarrow u(t) - R_1 i_2(t) - R_1 i_1(t) = V_e(t)$$

$$\Leftrightarrow u(t) - R_1\left(-\frac{u(t)}{R_2}\right) - R_1\left(-C\frac{du_c}{dt}\right) = V_e(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u(t)(R_1+R_2)}{R_2} + R_1 C\frac{du}{dt} = V_e(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u(t)(R_1+R_2)}{R_1R_2C} + \frac{du}{dt} = \frac{V_e(t)}{R_1C}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{u(t)}{\tau'} + \frac{du}{dt} = \frac{V_e(t)}{R_1C}} \quad \text{avec } \boxed{\tau' = \frac{R_1R_2C}{R_1+R_2}}$$

3. Dans $[0, \Delta t]$, $v_e(t) = V_{réf}$ donc :

$$\frac{u(t)}{\tau'} + \frac{du}{dt} = \frac{V_{réf}}{R_1C}$$ équation différentielle d'ordre 1 à coefficient et 2nd membre constant

donc

$u(t) = u_g(t) + u_p(t)$ où $u_g(t)$ est la solution générale de l'équation à 2nd membre homogène, et $u_p(t)$ la solution particulière de forme constante

On a donc :

$$u_g(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$$

et

$$\frac{u_p(t)}{\tau'} + \underbrace{\frac{du_p}{dt}}_{=0} = \frac{V_{réf}}{R_1C} \Leftrightarrow u_p(t) = \frac{V_{réf}}{\cancel{R_1}\cancel{C}} \times \frac{\cancel{R_1}R_2\cancel{C}}{R_1+R_2}$$

Ainsi,

$$u(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) + \frac{V_{réf}R_2}{R_1+R_2}$$

De plus,
$$u_c(0^-) = u_c(0^+) = u(0^-) = \lambda + \frac{V_{ref} R_2}{R_1+R_2}$$
donc,
$$\boxed{u(t) = \frac{V_{réf} R_2}{R_1+R_2}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)}.$$
En supposant $\tau' \ll \Delta t$ on a :
$$\frac{\Delta t}{\tau'} \longrightarrow +\infty$$
soit $\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) \longrightarrow 0$

et donc
$$u(\Delta t) \simeq \frac{V_{réf} R_2}{R_1+R_2}$$
Enfin,
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$
$$= -C\frac{du_c}{dt} - \frac{u(t)}{R_2}$$
$$= -C\,\frac{V_{réf} R_2}{R_1+R_2} \times \frac{1}{\tau'} \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) - \frac{1}{\cancel{R_2}} \frac{V_{réf} \cancel{R_2}}{R_1+R_2}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)\right)$$
$$= -\frac{\cancel{C} V_{réf} \cancel{R_2}}{\cancel{R_1+R_2}} \times \frac{\cancel{R_1+R_2}}{R_1 \cancel{R_2} \cancel{C}} \exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right) - \frac{V_{réf}}{R_1+R_2}\left(1 - \exp\left(-t/\tau'\right)\right)$$
$$= -\frac{V_{réf}}{R_1(R_1+R_2)}\left[(R_1+R_2)\exp\left(-t/\tau'\right) + R_1 - R_1 \exp\left(-t/\tau'\right)\right]$$
$$= -\frac{V_{réf}}{R_1(R_1+R_2)}\left(\exp\left(-t/\tau'\right)\left(\cancel{R_1} + R_2 - \cancel{R_1}\right) + R_1\right)$$
$$\boxed{i(t) = -\frac{V_{réf}}{R_1+R_2}\left(\exp\left(-t/\tau'\right)\frac{R_2}{R_1} + 1\right)}$$

4. Dans $[\Delta t^+, +\infty[$, $v_e(t) = 0$ donc
$$\frac{u(t)}{\tau'} + \frac{du}{dt} = 0$$ équation différentielle d'ordre 1 à coefficients et 2nd membre constant (ici homogène)

donc
$$u(t') = u_g(t') + u_p(t') \quad \text{avec } t' = t - \Delta t$$

Alors
$$u_g(t') = \beta \exp(-t'/\tau') \text{ et } u_p(t') = 0$$
d'où $\quad u(t') = \beta \exp(-t'/\tau')$

De plus, à $t' = 0$, $t = \Delta t$ et $u(t') = u(\Delta t)$

par continuité de u_c en Δt on a
$$u(\Delta t^-) = u(\Delta t^+) = \beta \exp(0) = \frac{V_{ref} R_2}{R_1 + R_2}$$

ainsi $\quad u(t') = \dfrac{V_{ref} R_2}{R_1+R_2} \exp\left(-\dfrac{t'}{\tau'}\right)$

soit pour $t' > 0 \Leftrightarrow t > \Delta t$:
$$\boxed{u(t) = \frac{V_{ref} R_2}{R_1+R_2} \exp\left(-\frac{t-\Delta t}{\tau'}\right)}$$

Enfin, $\quad i(t) = i_1(t) + i_2(t)$
$$= -C\frac{du_c}{dt} - \frac{u(t)}{R_2}$$
$$= -C\frac{V_{ref}R_2}{R_1+R_2} \times \left(\frac{-1}{\tau'}\right) \exp\left(-\frac{t-\Delta t}{\tau'}\right) - \frac{V_{ref}\cancel{R_2}}{(R_1+R_2)\cancel{R_2}} \exp\left(-\frac{t-\Delta t}{\tau'}\right)$$
$$= \frac{V_{ref}\cancel{R_2 C}}{\cancel{R_1+R_2}} \times \frac{\cancel{R_1+R_2}}{R_1 \cancel{R_2 C}} \exp\left(-\frac{t-\Delta t}{\tau'}\right) - \frac{V_{ref}}{R_1+R_2} \exp\left(-\frac{t-\Delta t}{\tau'}\right)$$
$$= V_{ref} \exp\left(-\frac{t-\Delta t}{\tau'}\right)\left(\frac{\cancel{R_1} + R_2 - \cancel{R_1}}{(R_1+R_2)R_1}\right)$$
$$\boxed{i(t) = \frac{V_{ref}R_2}{(R_1+R_2)R_1} \exp\left(-\frac{t-\Delta t}{\tau'}\right)}$$

5.