Cahier de calcul

— pratique et entraînement —

La suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Elle apparaît sous de nombreuses formes biologiques, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci.

Ce cahier de calcul est une adaptation pour les classes de BCPST d'un travail réalisé initialement pour l'ensemble des classes préparatoires.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Adaptation BCPST

Pierre-Jean Aubry, Carine Courant, Elodie Maillet

Remerciements

Nous remercions vivement l'équipe coordonnée par Colas Bardavid pour avoir mis à disposition les sources du cahier initial.

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

L'illustration de la couverture vient de
https ://www.freeimg.net/photo/512455/fibonacci-geometry-mathematics-nautilus

Version du 30 août 2022

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année de Post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études Post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant d'avoir d'un seul coup d'œil les différentes fiches de ce cahier de calcul, et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, et centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calculs.
- Enfin, quelques fiches portant sur le programme de deuxième année : les chapitres nécessaires sont clairement indiqués.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés sont dans un second cahier dédié, diffusé selon le choix de votre professeur.

Chaque fiche de calculs est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahierdecalculs@prepasbio.org`.

Fiche de calcul n° 1

001A

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Dès le début de la 1ère année.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ ....

Calcul 1.4 — Des nombres décimaux et des fractions.

Dans chaque cas, donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $0{,}2$ ....

b) $0{,}36$ ....

c) $1{,}35$ ....

d) $1{,}5 + \dfrac{2}{3}$ ....

e) $\dfrac{1}{3} - 0{,}3$ ....

f) $\dfrac{13{,}5}{18{,}2 - 3{,}2}$ ....

Calcul 1.5 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.6 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ ....

c) $\dfrac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$ ....

b) $\dfrac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ ....

d) $\dfrac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$ ....

Calcul 1.7 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1, 2\}$. ....

Calcul 1.8 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2} k}{\sum\limits_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \cdots + p = \dfrac{p(p+1)}{2}$. ....

Calcul 1.9 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \dfrac{b}{c}$ avec $b < c$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ....

b) $\dfrac{k}{k-1}$ ....

c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ....

Calcul 1.10 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Comparaison

Calcul 1.11 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « $>$ », « $<$ » ou « $=$ ».

a) $\dfrac{3}{5} \ldots \dfrac{5}{9}$ ....

b) $\dfrac{12}{11} \ldots \dfrac{10}{12}$ ....

c) $\dfrac{125}{25} \ldots \dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.12 — Produit en croix.

Les nombres $A = \dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? ....

Calcul 1.13 — Produit en croix.

On pose $A = \dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$? ....

Réponses mélangées

$1\ 000$	$2t$	$\dfrac{13}{6}$	3	Non	2^5	$\dfrac{-1}{n(n+1)^2}$	$\dfrac{3}{2}n$	$-\dfrac{ab}{a-b}$
$\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}$	$\dfrac{n^3+n}{n+1}$	$\dfrac{1}{30}$	$1+\dfrac{1}{k-1}$	$A > B$	$\dfrac{27}{20}$	$\dfrac{1}{9}$	2	$\dfrac{1}{5}$
$\dfrac{9}{25}$	$\dfrac{203}{24}$	$\dfrac{-10}{3}$	1	247	$4+\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}$	$\dfrac{9}{10}$	$\dfrac{7}{15}$
$\dfrac{4}{5}$	$-2\times 3^{3k-2}$	$2\ 022$	$\dfrac{16}{35}$	$3+\dfrac{5}{x-2}$	9	$\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}$	$\dfrac{1}{2}$	

Fiche de calcul n° 2

002A

Puissances

Prérequis
Opérations sur les puissances (produits, quotients), sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Dès le début de la 1ère année

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ......

Calcul 2.2 — Des nombres décimaux.

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $0{,}001$ ....

b) $10^3 \cdot 0{,}01^3$ ....

c) $\dfrac{0{,}01^2}{0{,}1^5}$ ....

d) $0{,}001^{-2} \cdot 1000^2$ ....

e) $\dfrac{1000 \cdot 0{,}01^3}{0{,}1^3 \cdot 0{,}01^2}$ ......

f) $\dfrac{\left(0{,}01^3\right)^{-2}}{0{,}1^{-3} \cdot \left(100^{-2}\right)^{-3}}$.

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.6

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

Réponses mélangées

11 $\quad 10^{-3}$ $\quad 8$ $\quad 10^{-3}$ $\quad 2^{-4}\cdot 3^{-1}$ $\quad 2$ $\quad 10^{-3}$ $\quad 3^{10}$ $\quad 10^{12}$ $\quad 10^{-8}$

$\dfrac{x}{x+1}$ $\quad 2^6\cdot 5$ $\quad 10^{15}$ $\quad \dfrac{2}{x-2}$ $\quad 3^5$ $\quad 2^7$ $\quad 2^{21}\cdot 3$ $\quad 10$ $\quad 10^{-2}$ $\quad 10^4$

15^4 $\quad \dfrac{2x}{x+1}$ $\quad \dfrac{1}{x-2}$ $\quad (-7)^{-2}$ $\quad 3^{28}$ $\quad 5^{-6}$ $\quad 10^8$ $\quad 2^{38}\cdot 3^{26}$ $\quad 10^4$ $\quad 10^2$

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Dès le début de la 1ère année

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\big(x^2+x+1\big)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\big(-x^2+3x-1\big)-(2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\big(x^2-x+1\big)+1\Big)x-x^6-x^5+2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2-2\big(x^2+x+1\big)$ ....

e) $\Big(x^2+\sqrt{2}x+1\Big)\Big(1-\sqrt{2}x+x^2\Big)$ ....

f) $\big(x^2+x+1\big)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ ....

b) $25-(10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Donner la forme canonique puis factoriser les polynômes de degré deux suivants.

On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (où $a \neq 0$).

a) $x^2 - 2x + 1$ ....

b) $x^2 + 4x + 4$ ....

c) $x^2 + 3x + 2$ ....

d) $3x^2 + 7x + 1$ ....

e) $2x^2 + 3x - 28$ ....

f) $-5x^2 + 6x - 1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x + y)^2 - z^2$ ....

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ....

c) $xy + x + y + 1$ ....

d) $xy - x - y + 1$ ....

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..

f) $y^2\left(a^2 + b^2\right) + 16x^4\left(-a^2 - b^2\right)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $x^4 - 1$ ....

b) $\left(-9x^2 + 24\right)\left(8x^2 + 8\right) + 64x^4 - 64$ ....

c) $x^4 + x^2 + 1$ ....

d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ ....

e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.

Réponses mélangées

$x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$ $\quad$ $2+x^3-x^4-x^5$ $\quad$ $8x^3-6x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{8}$

$x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$ $\quad$ $-1-3x-3x^2+x^3$ $\quad$ $(x+y-z)(x+y+z)$

$-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{4}{25}\right]$ et $-5(x-1)\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$ $\quad$ $-2+12x-17x^2+8x^3-3x^4$

$x^5-x^3+x^2-1$ $\quad$ $x^5-x^3-x^2+1$ $\quad$ $(x-1)^2$ $\quad$ $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

$3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{37}{36}\right]$ et $3\left(x+\dfrac{7-\sqrt{37}}{6}\right)\left(x+\dfrac{7+\sqrt{37}}{6}\right)$

$\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ $\quad$ $(x+1)(y+1)$ $\quad$ $-8(x+1)(x+16)$ $\quad$ $(x+2)^2$

$2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{233}{16}\right]$ et $2\left(x+\dfrac{3-\sqrt{233}}{4}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{233}}{4}\right)$ $\quad$ $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(p^2+q^2+r^2+s^2\right)$

$1+2x+3x^2+2x^3+x^4$ $\quad$ $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ et $(x+1)(x+2)$ $\quad$ $1+x^4$

$-6(6x+7)$ $\quad$ $2(3x-4)(10x+3)$ $\quad$ $(14x+3y)(-12x+3y)$ $\quad$ $4(5x+4)(-5x+1)$

$\left(a^2+b^2\right)\left(y-4x^2\right)\left(y+4x^2\right)$ $\quad$ $(x+y)(x+1)^2$ $\quad$ $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$

$-8\left(x^2+1\right)(x-4)(x+4)$ $\quad$ $-28+21x$ $\quad$ $(x-1)(y-1)$ $\quad$ x^4+x^2+1

Fiche de calcul n° 4

004A

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Dès le début de la 1ère année

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ .....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ ....

c) $\sqrt{x + 2f(x)}$ ....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

e) $f(x) + 4f''(x)$ ....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ ....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ....

Réponses mélangées

$-4(x-1)^2$ $\quad 12\sqrt{7}$ $\quad 9+4\sqrt{5}$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad 50-25\sqrt{3}$ $\quad -11+5\sqrt{5}$ $\quad 1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

$9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ $\quad 12$ $\quad -\sqrt{3}+2$ $\quad 1+\sqrt{5}$ $\quad \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$ $\quad -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ $\quad 1+\sqrt{2}$ $\quad 2\sqrt{2}$

$\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$ $\quad \dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ $\quad 10$ $\quad 3+\sqrt{2}$ $\quad 5$ $\quad \sqrt{7}-2$ $\quad 1+\sqrt{x-1}$

$\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ $\quad \sqrt{3}$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$ $\quad 2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ $\quad x-\sqrt{x^2-1}$ $\quad 2\sqrt{2}$ $\quad \pi-3$

$1+\sqrt{3}$ $\quad \sqrt{3}-1$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad 20$ $\quad 3-2\sqrt{2}$ $\quad \ln(1+\sqrt{2})$ $\quad |3-a|$ $\quad -\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables. Nombres complexes.

Dès le début de la 1ère année

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ……

b) $a^5 - a^6$ ……

c) a^{12} ……

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ……

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ ……

b) $(3-\mathrm{i})^2$ ……

c) $(3-\mathrm{i})^3$ ……

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ ……

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ ……

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ ……

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ ……

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ……

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ ……

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ ……

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$ ……

Calcul 5.5 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ……

b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ ……

c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ……

Calcul 5.6

Soit p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $pq \times \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}$ ....

b) $\dfrac{pq}{(1-p)^2} - \dfrac{1}{q}$ ....

c) $\dfrac{1}{pq} - \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{1}{1-p}$ ....

d) $p^3 + 3pq + q^3$ ....

Calcul 5.7 — Résoudre une équation en physique.

Résoudre les équations suivantes en exprimant l'inconnue en fonction des autres grandeurs.

a) $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ avec pour inconnue k ....

b) $\dfrac{2mg}{a}\rho - \dfrac{mC^2}{\rho^3} = 0$ avec pour inconnue ρ avec $\rho > 0$ ....

c) $\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{mgd^2}{2R} = \dfrac{mgR}{2}$ avec pour inconnue v. ....

Réponses mélangées

$\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ $\quad -4+43\mathrm{i}\sqrt{5}$ $\quad 1$ $\quad -a^2+1$ $\quad 7a^2+12a+7$ $\quad 4a^2-a-3$

-1 $\quad a^2+2$ $\quad a^2-a-1$ $\quad 8+6\mathrm{i}$ $\quad 39-18\mathrm{i}$ $\quad 1$ $\quad 18-26\mathrm{i}$

a^3+3a $\quad 0$ $\quad 3$ $\quad -9-46\mathrm{i}$ $\quad \left(\dfrac{aC^2}{2g}\right)^{\frac{1}{4}}$ $\quad 8-6\mathrm{i}$ $\quad a^4+4a^2+2$

$\dfrac{q}{p^2}$ $\quad 2197$ $\quad 1$ $\quad \sqrt{g\left(R-\dfrac{d^2}{R}\right)}$ ou $-\sqrt{g\left(R-\dfrac{d^2}{R}\right)}$ $\quad 1$

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dès le début de la 1ère année

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Calcul 6.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

a) $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ ....

b) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ ....

c) $(x+a)(x+b) = (m+a)(m+b)$ ....

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 ....

b) -11 et 17 ....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ ....

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ ....

b) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ ....

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x-3)(ax+b)$ ....

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$ ....

b) $-x^2 + 2x + 15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

Réponses mélangées

a, b $\qquad -3, -5$ $\qquad x^2 - 6x - 187 = 0$ $\qquad -7, -11$ $\qquad -2/7$ $\qquad \varnothing$ $\qquad 6, 7$ $\qquad 2, 3$

$a = -2$ et $b = 1$ $\qquad a = 2$ et $b = 3$ $\qquad 1$ donc $(a-b)/(b-c)$ $\qquad 2, -6$ $\qquad 2m/(m+3)$

1 donc $c(a-b)/(a(b-c))$ $\qquad -1/m$ $\qquad a = -3$ et $b = 5$ $\qquad 1$ donc -5 $\qquad -3, 11$

$-1/3, -1/3$ $\qquad a-b, a+b$ $\qquad 2/3$ $\qquad]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $\qquad x^2 - 4x + 1 = 0$

$]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$ $\qquad 3, 3$ $\qquad m$ donc $-(m+a+b)$ $\qquad [-3, 5]$ $\qquad m = -3/4$ et $x = 3/4$

$m = -1$ et $x = -2$, ou $m = 7$ et $x = 2/3$ $\qquad 0$, donc 5 $\qquad 0$, donc $-3/2$ $\qquad x^2 - 22x + 117 = 0$

Fiche de calcul n° 7

006A

Exponentielle et Logarithme

Prérequis

Exponentielle, logarithme.

Dès le début de la 1ère année

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln(16)$ ....

b) $\ln(512)$ ....

c) $\ln(0{,}125)$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$ ....

e) $\ln(72) - 2\ln(3)$ ....

f) $\ln(36)$ ....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln\left(\dfrac{1}{12}\right)$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0{,}875)$ ..

d) $\ln(500)$ ....

e) $\ln\left(\dfrac{16}{25}\right)$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right)$ ....

Exponentielles

Calcul 7.4

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln(2)}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $e^{-2\ln(3)}$ ....

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $e^{\ln(3)-\ln(2)}$ ....

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ ....

b) $e^{-\ln(\ln(2))}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{e^{17}}\right)$ ....

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$ ....

Études de fonctions

Calcul 7.6 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2022+x}{2022-x}\right)$ ....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ....

Calcul 7.7 — Limites d'une fonction.

On note $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 7.8

On note $f : x \longmapsto \ln(1+x)$.

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2e^x - 1)$ ....

b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ ....

c) $\dfrac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ ....

d) $xf'(x) - 1$ ....

Équations, inéquations

Calcul 7.9

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $e^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant e^{-x^2+x}$ ....

c) $e^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $e^{-6x} \leqslant \sqrt{e}$ ....

Réponses mélangées

impaire impaire -17 $\ln|x-1|$ $-\dfrac{1}{1+x}$ $-2\ln(5)+4\ln(2)$ 8 $4\ln(2)$

$x \geqslant \dfrac{\ln(12)+5}{3}$ $-\ln(3)-2\ln(2)$ $2\ln(5)-2\ln(2)$ $x \geqslant \dfrac{2}{e}$ impaire impaire

$\dfrac{1}{2}\ln(2)$ $\dfrac{1}{\ln(2)}$ 1 $x \in [0,1]$ -1 $3\ln(5)+2\ln(2)$ $2\ln(2)+2\ln(3)$

$3\ln(2)$ $\dfrac{3}{2}$ $-\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{3}$ $9\ln(2)$ $x \geqslant -\dfrac{1}{12}$ $\dfrac{1}{9}$ $-2\ln(2)-2\ln(5)$

$\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ $2\ln(3)-2\ln(2)$ $\dfrac{1}{2}$ 1 $x+\ln 2$ -2 $\ln(3)+11\ln(2)$ $-3\ln(2)$

Fiche de calcul n° 8

Trigonométrie

Prérequis

Cercle trigonométrique. Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos. Fonction tangente.

Dès le début de la 1ère année

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1

Donner les valeurs :

a) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ......

b) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ....

c) $\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$ ......

d) $\cos(7\pi)$ ....

e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ ....

f) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ ......

Calcul 8.2

Simplifier :

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

b) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ ....

c) $\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+\tan\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

d) $\cos^2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

e) $\cos^2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

Signe du cosinus et du sinus

Calcul 8.3

Donner le signe :

a) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ ......

b) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{5}\right)$ ......

c) $\cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)$ ......

d) $\tan\left(\dfrac{13\pi}{5}\right)$ .....

e) $\sin\left(\dfrac{14\pi}{5}\right)$ .....

f) $\tan\left(-\dfrac{3\pi}{5}\right)$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.4

Simplifier :

a) $\sin(\pi-x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ ....

b) $\sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$ ....

d) $\cos(x-\pi)+\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ ....

Formules de duplication

On rappelle les formules suivantes : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Calcul 8.5

En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ....

b) $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ....

c) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ....

Calcul 8.6

Simplifier pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

a) $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ ....

b) $\frac{\cos(2x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 8.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ ....

b) $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .....

c) $\sin(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

d) $\tan(x) = -1$ ....

e) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ ....

f) $|\tan(x)| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .....

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos(x) \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....

b) $\cos(x) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .....

c) $\sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$ ....

d) $|\sin(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ ....

e) $\tan(x) \geqslant 1$ ....

f) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ......

Réponses mélangées

$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad$ $\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ $\quad$ $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\}$ $\quad$ $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ 1 $\quad$ $\tan x$ $\quad$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $-\frac{1}{\cos(x)}$ $\quad$ $-\frac{1}{2}$

$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad$ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

0 $\quad$ $\left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $\left\{-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \frac{7\pi}{4}\right\}$

$\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ < 0

$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ $\quad$ $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ $\quad$ $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ $\quad$ > 0

$2\cos x$ $\quad$ $-2\cos x$ $\quad$ $\left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ $\quad$ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad$ $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

$-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\left\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}\right\}$ $\quad$ $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ $\quad$ 0 $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1

$\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

$\sqrt{2} - 1$ $\quad$ $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\quad$ $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ $\quad$ > 0 $\quad$ < 0 $\quad$ 1

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $-\sin x$ $\quad$ < 0 $\quad$ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ $\quad$ > 0 $\quad$ $-1 - \sqrt{3}$

Fiche de calcul n° 9 **036A**

Notation arccos, arcsin, arctan

Prérequis

Trigonométrie. Fonction arctangente.
Définition de $\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ pour $x \in [-1;1]$.

Après le cours de première année.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Calcul 9.1

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\arctan(1)$ ....

f) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$ ....

Calcul 9.2

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin(\sin(\pi))$ ....

b) $\arcsin(\cos(0))$ ....

c) $\arccos(\sin(0))$ ....

d) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ ....

e) $\arctan(\tan(3\pi))$ ....

f) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ ....

Calcul 9.3

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin(\sin(1))$ ....

b) $\arcsin(\sin(2))$ ....

c) $\arccos(\cos(3))$ ....

d) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{17}\right)\right)$ ....

e) $\arctan(\tan(3))$ ....

f) $\arctan\left(\tan\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)\right)$ ....

Calcul 9.4 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ....

e) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ....

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ....

Calcul 9.5 — Calcul de dérivées.

Déterminer une expression de la dérivée des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \arctan(2x)$ sur $\mathbb{R}$ ....

b) $x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ ....

c) $x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}\right)$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ ....

Réponses mélangées

$x \longmapsto \dfrac{2}{1+4x^2}$ $\quad$ $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{3}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ $3-\pi$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ 1 $\quad$ $\pi-2$ $\quad$ 2 $\quad$ $\dfrac{\pi}{6}$

1 $\quad$ $\dfrac{\pi}{3}$ $\quad$ 1 $\quad$ 0 $\quad$ $\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ 3 $\quad$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\dfrac{\pi}{17}$ $\quad$ 0 $\quad$ $\dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ $\left\{\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi-\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $x \longmapsto 0$ $\quad$ $-\dfrac{\pi}{3}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{6}$ $\quad$ $-\dfrac{\pi}{7}$

Fiche de calcul n° 10

Dérivation

Prérequis
Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Dès le début de 1ère année, sauf pour les composées : après le cours de 1ère année.

Application des formules usuelles

Calcul 10.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 10.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 10.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

e) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

f) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 10.4 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 10.5

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3,3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 10.6

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3,-2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0,e[\cup]e,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

Réponses mélangées

$-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$ $\quad 5(x^2-5x)^4(2x-5)$ $\quad \dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

$\dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$ $\quad (2x^2-2x+10)\exp(2x)$ $\quad \dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$ $\quad \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

$2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad (6x-1)\ln(x-2)+\dfrac{3x^2-x}{x-2}$ $\quad 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4$

$\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ $\quad \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$ $\quad \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$ $\quad 5x^4-6x^2+4x-15$

$6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$ $\quad -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$ $\quad \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$

$\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$ $\quad \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$ $\quad \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$ $\quad \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$

$(-2x^2+3x-1)\exp(x^2+x)$ $\quad \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$ $\quad 6x^2+2x-11$ $\quad \dfrac{2x}{x^2+1}$

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque.

Dès le début de la 1ère année

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 11.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

e) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

f) e^{2t+1} ....

Utilisation des formulaires

Calcul 11.2 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

Calcul 11.3 — Dérivée d'une fonction composée – *bis*.

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3(t)}{t}$ ....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}$ ....

c) $\dfrac{8e^{2t}}{(3-e^{2t})^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\dfrac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$ ....

f) $\dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 11.4 — Trigonométrie.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2(t)\sin(t)$ .....

b) $\cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}$ ......

c) $\tan(t)$ ....

d) $\dfrac{\cos(t)}{1-\sin(t)}$ ....

e) $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ ....

f) $\tan^2(t)$ ....

g) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$ ..

h) $\dfrac{\cos(t)}{(1-\sin(t))^3}$ ....

i) $\dfrac{1}{1+4t^2}$ ....

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 11.5

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- donner une primitive de l'expression.

a) t^2-2t+5 .....

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ ....

c) $\sqrt{t}-\dfrac{1}{t^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ ....

e) $\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-3t}$ ......

f) e^{3t-2} ....

g) $\sin(t)\cos^2(t)$ ...

h) $\dfrac{1}{t^2}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ .....

i) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{2+\mathrm{e}^t}$ ....

j) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ....

k) $\dfrac{\sin(t)}{2+3\cos(t)}$ ....

l) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

m) $t\mathrm{e}^{-t^2}$ ....

n) $\dfrac{1-\ln(t)}{t}$ ....

o) $\dfrac{1}{t\ln(t)}$ ....

p) $\dfrac{\sin(\ln(t))}{t}$ ......

Réponses mélangées

$\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}$ $\quad$ $-\frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{t}+1\right)$ puis $-\frac{1}{t}+\ln|t|$ $\quad$ $-\frac{3}{2(t+2)^2}$ $\quad$ $-\frac{3}{t+2}$

$-\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$ $\quad$ $\cos t(3\cos^2(t)-2)$ puis $-\frac{1}{3}\cos^3(t)$ $\quad$ $\frac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}$ $\quad$ $\frac{2\mathrm{e}^t}{(2+\mathrm{e}^t)^2}$ puis $\ln(2+\mathrm{e}^t)$

$\frac{\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^{2t})}{(2+\mathrm{e}^t)^2}$ puis $\arctan(\mathrm{e}^t)$ $\quad$ $\frac{2\cos t+3}{(2+3\cos t)^2}$ puis $-\frac{1}{3}\ln|2+3\cos t|$ $\quad$ $\frac{2}{3}\ln|1+t^3|$

$-\frac{4}{t^5}-\frac{3}{2}\frac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3}-\frac{2}{\sqrt{t}}$ $\quad$ $\frac{\cos\ln(t)-\sin\ln(t)}{t^2}$ puis $-\cos(\ln(t)))$ $\quad$ $-2\cos(\sqrt{t})$

$-\ln|\cos(t)|$ $\quad$ $2\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{-3t}$ puis $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}$ $\quad$ $-\frac{1+\ln(t)}{t^2\ln^2(t)}$ puis $\ln|\ln(t)|$ $\quad$ $\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\sin(t))^2}$

$-\frac{1}{3}\cos^3(t)$ $\quad$ $\ln|t+1|$ $\quad$ $-\frac{2t\sin(\frac{1}{t})+\cos(\frac{1}{t})}{t^4}$ puis $\cos(\frac{1}{t})$ $\quad$ $\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1-t^2}$

$\mathrm{e}^{\sin(t)}$ $\quad$ $\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{3}{t^4}$ puis $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2t^2}$ $\quad$ $3\mathrm{e}^{3t-2}$ puis $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3t-2}$ $\quad$ $\frac{1}{4}\ln^4(t)$ $\quad$ $\frac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}$

$\tan(t)-t$ $\quad$ $-\frac{\cos(4t)}{4}$ $\quad$ $\frac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $-\sqrt{1-t^2}$ $\quad$ $-\ln|1-\sin(t)|$

$2(t-1)$ puis $\frac{1}{3}t^3-t^2+5t$ $\quad$ $-\frac{1}{(1+3t^2)^2}$ $\quad$ $-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ $\quad$ $\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t|$ $\quad$ $(1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$ puis $-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$

$\frac{1}{6}\ln(1+3t^2)$ $\quad$ $\frac{\ln(t)-2}{t^2}$ puis $\ln(t)-\frac{1}{2}\ln^2(t)$ $\quad$ $2\sqrt{\tan(t)}$ $\quad$ $2\sqrt{\ln(t)}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)$

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Dès le début de 1ère année, sauf pour les composées : après le cours de 1ère année.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont dans le sens croissant.

Calcul 12.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{5}^{-3} |\sin(7x)| \,\mathrm{d}x$ ..

c) $\displaystyle\int_{0}^{-1} \sin(x) \,\mathrm{d}x$ .....

Calcul 12.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} 7 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{7}^{-3} -5 \,\mathrm{d}x$ .....

c) $\displaystyle\int_{0}^{7} 3x \,\mathrm{d}x$ ......

d) $\displaystyle\int_{2}^{8} (1-2x) \,\mathrm{d}x$.

e) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sin(x) \,\mathrm{d}x$ ...

f) $\displaystyle\int_{-2}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$ ......

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 12.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} 2 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} (2x-5) \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-2}^{0} (x^2+x+1) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x^5-5x^3) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^5-x^4) \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{1}^{-1} x^{100} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 12.4 — Fonctions usuelles.

Calculer.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(x) \,\mathrm{d}x$ ..

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) \,\mathrm{d}x$ ..

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ ...

e) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ ......

f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ ....

Calcul 12.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \mathrm{d}x$ ....

Calcul 12.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan(x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)(\cos(x))^5 \,\mathrm{d}x$ ......

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 12.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln(x)}{x} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos(x)\sin(x)| \,\mathrm{d}x$ ......

Calcul 12.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{Arctan}\,(x) \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x+e^{-x}}{2} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

Réponses mélangées

$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$	8	50	$\frac{99}{\ln 10}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{384}$	$\frac{5}{2}$	Négatif
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	e^2	$\frac{147}{2}$	$-\frac{1}{30}$	Positif	0	78	0	0	0	$\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}$
$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{3}$	14	$3\mathrm{e}-4$	$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{\mathrm{e}+1}$	-2	Positif	18	6	$\frac{\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}}{2}$	
$-\frac{2}{101}$	1	0	-54	$-\ln 3$	$2(\mathrm{e}^3-1)$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{17}{2}$	$\frac{8}{3}$		

Intégration par parties

Prérequis

Primitives, dérivées, intégration par parties.

A la suite du cours de 1ère année.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 13.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\sin(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t\,2^t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_1^2 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$ ....

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2(t)\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 13.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

d) $x \longmapsto x\cos(x)$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 13.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 13.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$ ....

b) $x \longmapsto x^2\sin(x)$ ....

c) $x \longmapsto \ln^2(x)$ ....

d) $x \longmapsto (x\ln(x))^2$ ......

Réponses mélangées

$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2\cos(x)+2x\sin(x)+2\cos(x)-2 \end{cases}$ $\quad 1 \quad$ $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x-\dfrac{2}{9}\ln x+\dfrac{2}{27}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x-2x\ln x+2x \end{cases}$ $\quad \ln(2)-2+\dfrac{\pi}{2} \quad$ $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sin(x)+\cos(x) \end{cases}$

$4 \quad \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{2} \quad$ $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}$ $\quad \dfrac{5}{2}-\mathrm{e}^2 \quad 2\ln 2-\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)}-2\ln(2)-2^{\ln(2)}+2}{(\ln(2))^2} \quad \dfrac{4\sqrt{2}}{3}-\dfrac{16\sqrt{2}}{15} \quad$ $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{2}-1 \quad -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{4}{3} \quad \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{\pi^2}{32} \quad \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2} \quad$ $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -(x^2+2x+2)e^{-x} \end{cases}$

$\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2)-\dfrac{8}{9}\sqrt{2}+\dfrac{4}{9} \quad$ $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}$ $\quad -\dfrac{5}{2}\cos(2)-\dfrac{1}{2}\sin(2)+\dfrac{3}{2}$

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

A la suite du cours de 1ère année.

Changements de variable

Calcul 14.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \sin(\theta)$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin(t)$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin(t)$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin(t)$ ....

f) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calcul 14.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \cos(t)$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \tan(u)$ ....

d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t+t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln(t)$ ....

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 14.3

Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{t}}\,dt$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}}\,dt$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 14.4

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)\cos^2(x)}$ avec $u = \tan(x)$ ....

b) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{e^x - 1}$ ....

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$ ....

d) $x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u = \sqrt{x^2-1}$ ....

Réponses mélangées

$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1) \end{array}\right.$ $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2e+1}{3}\right)$

$\frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$ $-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1)-4+2\sqrt{3}$

$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$ $\left\{\begin{array}{rcl} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x)+\ln(\tan(x)) \end{array}\right.$

$\ln(\sqrt{2}+1)$ $\frac{1}{12}$ $\left\{\begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2-1} \end{array}\right.$ $2e^2$

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis
Fonctions ln et arctan.
Changements de variable affines dans les intégrales.

A la suite du cours de 1ère année.

Premier cas

Calcul 15.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t$ ....

Deuxième cas

Dans ce deuxième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 15.3

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Troisième cas

Calcul 15.5 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.6

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.7

Soit $a \in \,]0, 1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t$ ....

Quatrième cas

Calcul 15.8

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) En effectuant le changement de variables $t = au$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}$, déterminer une primitive de

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ ....

Calcul 15.9

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$ ....

Synthèse

Calcul 15.10 — **Mise sous forme canonique.**

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$ ....

b) $2x^2 - 3x + 1$ ....

c) $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ ....

d) $ax^2 + a^2x + a^3$ ....

Calcul 15.11

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Réponses mélangées

$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)$ $\quad$ $\sqrt{2}(x+\frac{1}{4})^2 + \sqrt{2}\dfrac{15}{16}$ $\quad$ $2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{8}$ $\quad$ $\ln\dfrac{1}{3}$

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ $\quad$ $\ln(a+1)$ $\quad$ $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ $\quad$ $\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $2\ln\dfrac{9}{10}$ $\quad$ $\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$

$2\ln\dfrac{4}{3}$ $\quad$ $A=-1$ et $B=1$ $\quad$ $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad$ $\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ $a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{3a^3}{4}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)$

$\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5}$ $\quad$ $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ $\quad$ 1 et 2 $\quad$ $2\ln\dfrac{4}{3}$ $\quad$ $\ln\dfrac{33}{28}$ $\quad$ $\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$ $\quad$ $\ln(2)$ $\quad$ $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

Fiche de calcul n° 16

0014A

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

A la suite du cours de 1ère année.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 16.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ 3\,x + 4\,y = 13 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3\,x - 6y = -3 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3\,x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6\,x + 2\,y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 16.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ......

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 16.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 16.4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ......

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ......

Calcul 16.5

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0$ ....

b) $a = -2$ ....

c) $a = 3$ ....

d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. ....

Calcul 16.6

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ a\,x - y = c \\ a\,y - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2$, $c = 7$ ....

b) $a = 1, c = 2$ ....

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ....

Calcul 16.7

On propose le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$ ....

b) $\lambda = 3$ ....

c) $\lambda = 6$ ....

Réponses mélangées

$\left\{\left(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x\right); x \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad$ $\{(7,2)\}$ $\quad$ $\left\{\left(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$

$\left\{\left(-\frac{2}{7} - z, \frac{-3}{7}, z\right)\ ;\ z \in \mathbb{R}\right\}$ $\quad$ $\left\{\left(1, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\}$ $\quad$ $\{(1, y, 3+2y); y \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(-1,4,2)\}$

$\{(2,-1,3)\}$ $\quad$ $\left\{\left(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a\right)\right\}$ $\quad$ $\left\{\left(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c, \frac{a^2-a-1}{a^3-1}c, \frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c\right)\right\}$

$\varnothing$ $\quad$ $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$ $\quad$ $\left\{\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ $\quad$ $\{(x, y, -x-y)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ $\quad$ $\{(3,1)\}$

$\{(5z, 1-4z, z)\ ;\ z \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(1+z, -z, z); z \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\{(z,z,z)\ ;\ z \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $(2,-3)$ $\quad$ $\{(5,3,-1)\}$

$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ $\quad$ $(a - 2a^2, a + a^2)$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $\{(0,0,0)\}$ $\quad$ $\left\{\left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2\right)\right\}$ $\quad$ $\varnothing$

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

A la suite du cours de 1ère année.

Pour s'échauffer

Calcul 17.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i})$ ....

b) $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$ ....

c) $(4-3\mathrm{i})^2$ ....

d) $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ ....

e) $(2-3\mathrm{i})^4$ ....

f) $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}}$ ....

g) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ ....

h) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 17.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 ....

b) -8 ....

c) $\sqrt{3}\mathrm{i}$ ....

d) $-2\mathrm{i}$ ....

e) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ ....

f) $5-5\mathrm{i}$ ....

g) $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ ....

h) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Résolution de l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Calcul 17.3 — Equation dans $\mathbb{C}$.

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes. (on donnera les solutions sous forme algébrique)

a) $x^2=-1$ ....

b) $x^2=2$ ....

c) $x^2=2\mathrm{i}$ ....

d) $x^2=3-4\mathrm{i}$ ....

Un calcul plus difficile

Calcul 17.4 — **Une simplification.**

On pose $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}$.

a) Calculer $|z|$ ....

b) Mettre z sous forme algébrique ....

c) Calculer z^{2021} ....

Réponses mélangées

$\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\{1-2\mathrm{i}, -1+2\mathrm{i}\}$ $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$4+32\mathrm{i}$ $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ $10\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ $\{1+\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}\}$ 1 5 $8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ $\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10}\mathrm{i}$ $\{-i, i\}$

$2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$ $13-\mathrm{i}$ $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $7-24\mathrm{i}$ $-119+120\mathrm{i}$ $\dfrac{4}{29} - \dfrac{19}{29}\mathrm{i}$ 12

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

A la suite du cours de 1ère année.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisation

Calcul 18.1

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ ....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Arc moitié, arc moyen

Calcul 18.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$ ....

g) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ....

h) $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ ....

Calcul 18.3

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

Délinéarisation

Calcul 18.4

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$ ....

b) $\sin(4x)$ ....

Factorisation

Calcul 18.5

Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$ .....

c) $\cos(x) - \cos(3x)$ .....

d) $\sin(3x) + \sin(5x)$ .....

Calcul 18.6

Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ ....

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$ ....

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

Réponses mélangées

$2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ $\qquad$ $\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\qquad$ $\dfrac{\cos(9x)}{8} + \dfrac{3\cos(5x)}{8} + \dfrac{\cos(3x)}{8} + \dfrac{3\cos(x)}{8}$

$2\sin(x)\sin(2x)$ $\qquad$ $2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\qquad$ $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\qquad$ $4\cos^3(x) - 3\cos(x)$

$\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{4}\cos(4x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}$ $\qquad$ $2\cos(2x)\cos(x)$

$-\dfrac{1}{8}\cos(6x) + \dfrac{1}{4}\cos(4x) - \dfrac{3}{8}\cos(2x) + \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$

$-\dfrac{\sin(9x)}{8} + \dfrac{3\sin(5x)}{8} - \dfrac{\sin(3x)}{8} - \dfrac{3\sin(x)}{8}$ $\qquad$ $2\cos(4x)\sin(x)$ $\qquad$ $2\sin(4x)\cos(x)$

$-\dfrac{1}{4}\sin(11x) + \dfrac{1}{4}\sin(5x) + \dfrac{1}{2}\sin(3x)$ $\qquad$ $\left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ $\qquad$ $2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ $\qquad$ 0

$2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{4}\cos(3x) + \dfrac{3}{4}\cos(x)$ $\qquad$ $2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}$ $\qquad$ $4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

A la suite du cours de 1ère année.

Si q est un nombre réel et si $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ *(Non par coeur)*
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 19.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 19.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k + 4k - n + 2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 19.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(5\sqrt{k} \times k\right)$ ......

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Avec des changements d'indice

Calcul 19.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$ avec $j=n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)$ avec $j=n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^k$ avec $j=k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3$ avec $j=k-2$. ....

Sommes et produits télescopiques

Calcul 19.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}\left((k+1)^3-k^3\right)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\times k!$ ....

Calcul 19.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-3}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

Sommes doubles

Calcul 19.7

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}$ .....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$.

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2$

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j)$ ..

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$

Réponses mélangées

$\dfrac{n(5n+1)}{2}$ $\qquad \ln(n+1)$ $\qquad n(n+1)(n^2+n+4)$ $\qquad \dfrac{n(n+3)}{4}$ $\qquad 0$ $\qquad \dfrac{n^2(n+1)}{2}$

$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $\qquad \dfrac{n(n^2-1)}{2}$ $\qquad (n+1)!-1$ $\qquad n2^{n+1}+2(1-2^n)$

$\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}$ $\qquad \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}$ $\qquad 5^n(n!)^{\frac{3}{2}}$ $\qquad \dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)$

$\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)$ $\qquad n+1$ $\qquad n(n+2)$ $\qquad 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ $\qquad \dfrac{n+1}{2n}$ $\qquad 1-4n^2$ $\qquad \dfrac{1}{n}$

$5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}$ $\qquad 2^{q-p+1}$ $\qquad \dfrac{(n-2)(n-7)}{6}$ $\qquad \dfrac{n+1}{2n}$ $\qquad \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)$ $\qquad 1-\dfrac{1}{(n+1)!}$ $\qquad (n+2)^3-2^3$ $\qquad 0$ $\qquad \dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

A la suite du cours de 1ère année.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 20.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4 \times \dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 20.2 — Pour s'échauffer – ***bis.***

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$ ....

b) $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ ....

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ ....

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$ ....

Calcul 20.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n \geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n \geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 20.4 — Avec la notation produit.

Soient n et p deux entiers vérifiant : $1 \leqslant p \leqslant n$,

Reconnaître des coefficients binomiaux :

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{10} \frac{20-k}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{5} \frac{10-k}{6-k}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5} \frac{5+k}{k}$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{n-k+2}{k}$ ....

e) $\displaystyle\prod_{k=0}^{p} \frac{n-k}{p-k+1}$ ....

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-p+k}{k+1}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 20.5

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 20.6

Calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) 11^5 ....

b) $1{,}01^3$ ....

Calcul 20.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Calcul 20.8

En utilisant la formule $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$, calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1)$ .....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Réponses mélangées

$\frac{1}{(n+1)!}$	$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$	$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$	$\binom{n+1}{p}$	$1{,}030301$	$\frac{n!\times(n-3)}{2^{2n+2}}$		
$10\ 100$	$n(n+1)2^{n-2}$	$\binom{9}{4}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$(n+2)(n+1)$	$n2^{n-1}$		
3^n	2^n	$2^n \times n!$	$\binom{n}{p+1}$	$\binom{10}{5}$	56	$161\,051$	$\binom{10}{6}$
12×15^n	$\binom{19}{10}$	0	15	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$	$\frac{9!}{5!}$	$\binom{n-1}{p}$	140
$n(n+1)2^{n-2}$	$\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$	6^n	$\frac{1}{30}$	$n2^{n-1}$	$n2^{n-1}$	$\frac{k+1}{n-k}$	720

Fiche de calcul n° 21 **019A**

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Valeur absolue. Racine carrée. ln
Dérivation, équations du second degré.

Après le cours de 1ère année.

Résolution d'équations

Calcul 21.1 — Valeur absolue.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $|x+2| = 3$ ....

b) $|x+2| = |x-3|$ ......

Calcul 21.2 — Racine carrée.

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sqrt{x+1} = 2$ ....

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 2$ ....

Calcul 21.3 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 21.4 — Fonctions $x \longmapsto a^x$ (plus difficile).

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Résolution d'inéquations

Calcul 21.5 — Valeur absolue.

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $|x-3| < 1$ ....

b) $|2x+1| \geqslant 2$ ....

Dérivation

Calcul 21.6 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x+1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

e) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

f) $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ ....

Réponses mélangées

$\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$ $\quad x \mapsto (\ln(x)+1)x^x$ $\quad \left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$ $\quad \dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$ $\quad \dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$

$\left\{\dfrac{9}{16}\right\}$ $\quad x \mapsto \arctan(x)$ $\quad \{-5, 1\}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ $\quad x \mapsto 0$ $\quad x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$

$1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad x \mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5) + 3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}$ $\quad 1$ $\quad]2, 4[$ $\quad \{3\}$ $\quad \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ $\quad x \mapsto -\dfrac{1}{1+x^2}$

Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

A la suite du cours de 1ère année.

Calcul de termes

Calcul 22.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 22.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) u_2 ....

b) u_3 ....

Calcul 22.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 22.4 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\ 000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 22.5 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 22.6 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est :

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$

c) g_{10}

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$

Calcul 22.7 — Suite géométrique.

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12}

b) q

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 22.8

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n

b) u_5

Calcul 22.9

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n

b) v_2

Calcul 22.10 — Suite de Fermat.

Soit la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

a) F_3

b) F_4

c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$

d) $F_n \times (F_n - 2)$

e) F_n^2

f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$

Réponses mélangées

$\dfrac{3069}{512}$ $\quad 2 \quad$ F_n $\quad 257 \quad$ $\dfrac{6141}{1024}$ $\quad$ $\dfrac{17}{24}$ $\quad 211 \quad$ $\dfrac{3}{512}$ $\quad$ $\dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}$

$8 \quad 2 \quad$ $\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$ $\quad$ $\dfrac{12}{5}$ $\quad$ F_{n+2} $\quad$ $2\sqrt{2}$ $\quad 21 \quad 65\ 537$

$2\ 001$ $\quad$ $F_{n+1} - 2$ $\quad$ $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$ $\quad$ $\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$ $\quad$ $\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$ $\quad$ $\dfrac{3}{1\ 024}$

$F_{n+1} + 2^{2^n+1}$ $\quad 10\ 201 \quad 10\ 000 \quad$ $3^n + (-2)^n$ $\quad$ $\dfrac{1}{24}$ $\quad 13 \quad 29$

Fiche de calcul n° 23

Inégalités

Prérequis
Manipulations d'inégalités. Cours sur l'intégration. Suites numériques.

Dès le début de 1ère année.

Pour répondre vrai, donner une démonstration.
Pour répondre faux, montrer que c'est absurde ou donner un contre-exemple.

Pour s'échauffer

Calcul 23.1

Vrai-Faux : Soient deux réels a et b tels que : $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$

a) $-4 < a + b < -1$ ....

b) $6 < a - b < 5$ ....

c) $-19 < 3b - 2a < -11$ ....

d) $-5 < ab < -6$ ....

e) $\dfrac{-2}{3} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{-1}{5}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \dfrac{1}{25}$ ....

g) $a^2 \leqslant a$ ....

h) $\forall n \in \mathbb{N},\ (-5)^n < b^n < (-3)^n$ ......

Calcul 23.2

Vrai-Faux : Soient deux réels a et b

a) $-ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ....

b) $\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \leqslant ab$ ....

c) $|a| \leqslant 1 + a^2$ ....

d) $a(1 - a) \leqslant \dfrac{1}{4}$ ....

Calcul 23.3

Vrai-Faux : Soit x un réel

a) $\sin(x) \leqslant (\sin(x))^2$ ....

b) $(\sin(x))^2 \leqslant \sin(x)$ ....

c) $(\sin(x))^2 \leqslant |\sin(x)|$ ....

d) $1 - \cos(2x) \leqslant 2|\sin(x)|$ ....

Pour comparer des intégrales

Calcul 23.4

Vrai-Faux : On note (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{1+x} dx$.

Soient x un réel tel que $1 \leqslant x \leqslant 2$ et n un entier naturel.

a) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$ ....

b) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x}$ ....

c) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x}$ .... ☐

d) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ .... ☐

e) La suite $(u_n)_n$ est décroissante. ... ☐

f) La suite $(u_n)_n$ est bornée. .... ☐

g) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. .... ☐

Calcul 23.5

Vrai-Faux : On note (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{(\ln(x))^n}{1+x}dx$.

Soient x un réel tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ et n un entier naturel.

a) $(\ln(1/2))^n \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x}$ .... ☐

b) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x}$ .... ☐

c) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x}$ .... ☐

d) La suite $(u_n)_n$ est monotone. ...... ☐

e) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. .... ☐

Pour comparer des sommes

Calcul 23.6

Vrai-Faux : On note $(T_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $0 \leqslant T_n \leqslant n$ .... ☐

b) $\dfrac{1}{2} \leqslant T_n \leqslant 1$ .... ☐

c) $T_{n+1} \leqslant T_n$ .... ☐

d) $T_n \leqslant T_{n+1}$ .... ☐

e) La suite $(T_n)_n$ converge. .... ☐

Calcul 23.7

Vrai-Faux : On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = -2\sqrt{n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

a) $u_{n+1} \leqslant u_n$ .... ☐

b) $u_n \leqslant u_{n+1}$ .... ☐

c) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ ☐

d) La suite $(u_n)_n$ est bornée. .... ☐

Réponses mélangées

Faux Vrai Vrai Vrai Vrai Faux Faux Vrai Vrai

Faux Vrai Faux Vrai Faux Faux Vrai Vrai Vrai

Vrai Vrai Faux Faux Vrai Faux Vrai Vrai Vrai Vrai

Faux Faux Faux Vrai Vrai Faux Vrai Faux Vrai

Fiche de calcul n° 24

035A

Polynômes

Prérequis
Équations du second degré. Opérations sur les polynômes.
Racines d'un polynôme.

A la suite du cours de 2ième année.

Factorisation de polynômes de degré 2

Calcul 24.1 — Racines réelles uniquement.

Factoriser les polynômes suivants :

a) $P = -X^2 - 5X$ ......

b) $P = 2X^2 - 2$ ....

c) $P = 3X^2 + 3X - 6$ ...

d) $P = 2X^2 - 4X - 2$ ...

Calcul 24.2 — Racines réelles et complexes.

Factoriser les polynômes suivants :

a) $P = X^2 - 2X + 2$.

b) $P = 3X^2 - 6X + 15$

c) $P = iX^2 + 2iX + 2i$

d) $P = X^2 + (i-1)X - i$

Factorisation de polynômes de degré supérieur

Calcul 24.3 — Racines réelles uniquement.

Factoriser, en utilisant uniquement des racines réelles, les polynômes suivants *(on pourra en chercher une racine évidente)* :

a) $P = X^3 - 25X$ ....

b) $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$

c) $P = 3X^3 + 3X^2 - 6X - 6$

d) $P = 3X^3 + 3X^2 + 6X + 6$

e) $P = X^4 - 5X^2 + 4$ ...

f) $P = X^4 - 1$ ....

Calcul 24.4 — Racines complexes.

Factoriser, en utilisant des racines complexes, les polynômes suivants *(on pourra en chercher une racine évidente)* :

a) $P = 3X^3 + 3X^2 + 6X + 6$ ....

b) $P = X^3 + (i-1)X^2 + (2-i)X - 2$ ....

Calcul 24.5 — Compléments.

Factoriser, en utilisant l'indication, les polynômes suivants :

a) $P = X^3 + 5X^2 + X + 5$ après avoir vérifié que i est racine de P ....

b) $P = 2X^3 - 5X^2 + 6X - 2$ après avoir vérifié que $1+i$ est racine de P ......

c) $P = X^3 - 2X^2 - 15X + 36$ après avoir vérifié que 3 est racine multiple de P

d) $P = 4X^3 - 12X^2 - 15X - 4$ après avoir vérifié que $-\dfrac{1}{2}$ est racine multiple de P

Réponses mélangées

$(X-1)(X-i)(X+2i)$ $\quad (X-3)^2(X+4)$ $\quad (X-1)(X+i)$ $\quad 3(X+1)(X^2+2)$

$3(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ $\quad (X-1)(X+2)(X-3)$ $\quad 2(X-1-i)(X-1+i)\left(X-\dfrac{1}{2}\right)$

$4\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2(X-4)$ $\quad (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ $\quad 2(X-1-\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})$

$i(X+1+i)(X+1-i)$ $\quad 2(X-1)(X+1)$ $\quad (X-i)(X+i)(X+5)$

$(X-1+i)(X-1-i)$ $\quad -X(X+5)$ $\quad 3(X-1+2i)(X-1-2i)$ $\quad X(X-5)(X+5)$

$3(X-1)(X+2)$ $\quad 3(X+1)(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)$ $\quad (X-1)(X+1)(X^2+1)$

Développements limités

Prérequis
Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles.

A la suite du cours de 1ère année.

Développements limités

Calcul 25.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 3 : $f(x) = \sin(x) + 2\ln(1+x)$ ....

b) À l'ordre 2 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ ....

c) À l'ordre 4 : $\sin(x)(\cos(x)-1)$ ....

d) À l'ordre 4 : $e^x \sin(x)$ ....

Calcul 25.2 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en 0 : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ....

b) À l'ordre 4, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ ....

c) À l'ordre 3, en 0 : e^{e^x} ....

d) À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ ....

Calculs de limites

Calcul 25.3

Calculer les limites suivantes :

a) En 0 : $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ ....

b) En 0 : $\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$ .....

c) En 0 : $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ ....

d) En 0 : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)}$ ....

e) En 1 : $\dfrac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}}$ ....

f) En 0 : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}$ ......

Equivalents

Calcul 25.4

Déterminer un équivalent au voisinage indiqué, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) En 0 : $\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) En $+\infty$: $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ ....

c) En $+\infty$: $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$ ....

d) En $+\infty$: $\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$ ....

Réponses mélangées

$-\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $-\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)$ $\quad$ -1 $\quad$ $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)$ $\quad$ 1

$-\dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)$ $\quad$ $1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^4)$ $\quad$ $3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$

$-\dfrac{1}{2x}$ $\quad$ $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x$ $\quad$ $1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right)$ $\quad$ $\dfrac{1}{x^2}$ $\quad$ 0

$\mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \dfrac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^3)$ $\quad$ $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)$ $\quad$ $-\ln(x)$ $\quad$ $\dfrac{2}{3}$

Fiche de calcul n° 26

Calcul matriciel

Prérequis
Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

A la suite du cours de 1ère année.

Calcul matriciel

Calcul 26.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 . . .

b) A^3 . . .

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 . . .

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 26.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) A^2 …

b) A^3 …

c) A^k …

d) B^2 …

e) B^3 …

f) B^k …

g) C^2 …

h) C^3 …

i) C^k …

j) D^2 …

k) D^3 …

l) D^k …

Calcul 26.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \qquad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}$$

Donner le coefficient d'indice (i,j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

a) $A \times B$ ……………

b) B^2 ……………

c) $B^\top \times B$ ……………

d) $\left[A^2\right]_{i,j}$ ……………

Inversion de matrices

Calcul 26.4 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A . . .

b) B . . .

c) C . . .

d) D . . .

e) E . . .

f) F . . .

g) G . . .

h) H . .

i) J . . .

Calcul 26.5 — Matrices dépendant d'un paramètre.

On note λ et μ deux paramètres réels. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . .

d) Inverse de B . . .

Réponses mélangées

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1} \qquad 2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1) \qquad \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda + 2 & \lambda & -2\lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \neq 1 \qquad \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3^{i+j}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \neq 1 \qquad \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix} \qquad n^{k-1}D$$

$$\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 - 2\mathrm{i} \\ 1 & -1 + \mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \text{Non inversible !} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1 - \lambda + \lambda^2 & 1 - \lambda & 2 - \lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 - \lambda^2 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2^{i-j}\binom{i-1}{j-1} \qquad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} \qquad 17 \text{ (matrice } 1 \times 1) \qquad \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Fiche de calcul n° 27 0027A

Équations différentielles

Prérequis
Équations différentielles à coefficients constants.

A la suite du cours de 1ère année.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 27.1

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $y' = 12y$ et $y(0) = 56$ ....

b) $y' = y + 1$ et $y(0) = 5$ ....

c) $y' = 3y + 5$ et $y(0) = 1$ ....

d) $y' = 2y + 12$ et $y(0) = 3$ ....

Calcul 27.2

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $5y' = -y$ et $y(1) = \mathrm{e}$ ....

b) $7y' + 2y = 2$ et $y(7) = -1$ ....

c) $y' - \sqrt{5}y = 6$ et $y(0) = \pi$ ....

d) $y' = \pi y + 2\mathrm{e}$ et $y(\pi) = 12$ ....

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 27.3 — Une équation avec plusieurs conditions initiales.

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ ....

Calcul 27.4 — Racines doubles, racines simples.

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$ ....

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

e) $y'' + 4y' + 4y = 2$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

f) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$ ....

Calcul 27.5 — Racines complexes.

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' + 4y = -4$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ ....

d) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ ....

Avec des paramètres

Calcul 27.6

Déterminer l'expression de la solution $y(t)$ des problèmes différentiels suivants en fonction des différentes constantes.

a) $\tau y'(t) + y(t) = 0$ et $y(t_0) = y_0$ en fonction des constantes t_0, y_0 et $\tau \neq 0$.

....

b) $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$ et $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = 0$ en fonction des constantes t_0, y_0 et $\omega > 0$.

....

Réponses mélangées

$x \mapsto e^x$ $\qquad x \mapsto 2e^{2x} - e^x$ $\qquad x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$ $\qquad x \mapsto e^{2x}$ $\qquad x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2}$

$x \mapsto 6e^x - 1$ $\qquad x \mapsto \cos(x) + 2\sin(x)$ $\qquad x \mapsto 56e^{12x}$ $\qquad x \mapsto (2-x)e^{2-2x}$

$y : t \mapsto y_0 \cos(\omega(t - t_0))$ $\qquad x \mapsto e^{(6-x)/5}$ $\qquad x \mapsto 9e^{2x} - 6$ $\qquad x \mapsto 2\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x) - 1$

$x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$ $\qquad y : t \mapsto y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$ $\qquad x \mapsto e^{-x}\sin(x)$

$x \mapsto (2-x)e^x$ $\qquad x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$ $\qquad x \mapsto \left(4x + \dfrac{3}{2}\right)e^{-2x} + \dfrac{1}{2}$

$x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}$ $\qquad x \mapsto \dfrac{4}{3}e^x - \dfrac{1}{3}e^{-2x}$ $\qquad x \mapsto e^x$ $\qquad x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$

Equations différentielles

Prérequis
Equations différentielles.

Après le cours de première année.

Calcul 28.1

Résoudre les équations différentielles suivantes sur I avec la condition initiale indiquée.

a) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) + t\,y(t) = 0$ et $y(0) = 1$ ....

b) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) + t\,y(t) = t$ et $y(0) = 1$ ....

c) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) + t\,y(t) = t^3$ et $y(0) = 1$ ....

Calcul 28.2

Résoudre les équations différentielles suivantes sur I avec les conditions initiales indiquées.

a) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) + y(t) = e^t$ et $y(0) = 1$ ....

b) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) - y(t) = e^t$ et $y(0) = 1$ ....

c) Sur $I = \mathbb{R}$, $y''(t) + y(t) = e^t$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

d) Sur $I = \mathbb{R}$, $y''(t) - y(t) = e^t$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

Calcul 28.3

Résoudre les équations différentielles suivantes sur I avec les conditions initiales indiquées.

a) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(x) = x + 2xy(x)$ et $y(0) = 1$. ....

b) Sur $I = \mathbb{R}$, $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t$, $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$ ....

c) Sur $I =]0; +\infty[$, $x^3y'(x) - x^2y(x) = 1$ et $y(1) = 0$. ....

d) Sur $I =]0, 1[$, $x\ln(x)y'(x) - y(x) = \ln(x)$ et $y(1/2) = 0$ . ...

Calcul 28.4 — Un second membre polynomial.

Déterminer une solution polynomiale des équations différentielles suivantes.

a) $y' - 2y = x$. ....

b) $2y' + y = 3x^2 + 2x + 1$. ....

c) $y'' - 3y = x^2 - 3x + 5$. ....

d) $4y'' + 3y' + 2y = x^2 + 2x$. ....

e) $y'' + 3y = x^2$. ....

f) $y'' + 3y' = 5x^3 - 3x + 5$. ....

Réponses mélangées

$t \longmapsto \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\big)$ $\quad t \longmapsto 1$ $\quad x \longmapsto \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2} - \frac{1}{2}$ $\quad x \longmapsto \frac{1}{3}x - \frac{1}{3x^2}$ $\quad t \longmapsto \frac{1}{4}(2t+3)\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}$

$t \longmapsto (t+1)\mathrm{e}^t$ $\quad t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ $\quad x \longmapsto -\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{17}{9}$ $\quad x \longmapsto 3x^2 - 10x + 21$ $\quad x \longmapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$t \longmapsto t^2 - 2 + 3\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ $\quad x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}$ $\quad x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ $\quad x \longmapsto \ln(x)\cdot\ln\left(-\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)$

$x \longmapsto \frac{5}{12}x^4 - \frac{5}{9}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + \frac{44}{27}x$ $\quad t \longmapsto t - 2 + \mathrm{e}^{1-t}$ $\quad t \longmapsto \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t + \cos(t) + \sin(t)\big)$

Fonctions de deux variables

Prérequis
Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

A la suite du cours de 1ère année.

Les fondamentaux

Calcul 29.1 — Ensembles de définition.

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a) $(x, y) \longmapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ ....

b) $(x, y) \longmapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2}$ ....

c) $(x, y) \longmapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2} \ln(x^2 + y^2 - 16)$ ....

Calcul 29.2 — Dérivation partielle.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a) $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$ ....

b) $f : (x, y) \longmapsto \sin(2xy - y)$ ....

c) $f : (x, y) \longmapsto \arctan(2x + y)$ ....

Calcul 29.3

Même exercice.

a) $f : (x, y) \longmapsto \cos(x - y)$ ....

b) $f : (x, y) \longmapsto x\cos(\mathrm{e}^{xy})$ ....

c) $f : (x, y) \longmapsto x^y$ ....

d) $f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ....

Composition de fonctions

Calcul 29.4

On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$ ....

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ ....

c) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3\sin(2t) \\ v(t) = 4\cos(2t) \end{cases}$ ....

Calcul 29.5 — Changements de variables.

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u, v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$ .....

b) $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ....

Calcul 29.6 — Points critiques.

Déterminer les points critiques de la fonction f.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ ....

b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ ....

c) $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ ....

d) $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ ....

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ ....

Réponses mélangées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x-y) \qquad (0,0) \text{ et } (-1,-1).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(\mathrm{e}^{xy}) - xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad (0,0), (1,1) \text{ et } (-1,-1).$$

$$-72\cos(4t) - 46\sin(4t) \qquad \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) + \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(0,3) \qquad (0,1) \text{ et } (0,\mathrm{e}^{-2}). \qquad \frac{2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t}}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y\ln x$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5y^4+x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+(2x+y)^2} \qquad \varnothing$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\cos(2xy-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x-1)\cos(2xy-y)$$

$$(0,0) \qquad]0,+\infty[\times[0,+\infty[\qquad \sin(2t)$$

Fiche de calcul n° 30 **028A**

Séries numériques

Prérequis
Séries usuelles (convergence et sommes)

A la suite du cours de 2ième année.

Séries géométriques, exponentielles

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 30.1 — Séries géométriques.

a) $\sum_{k \geqslant 0} 2^k$ ....

b) $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2^k}$ ....

c) $\sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ ....

d) $\sum_{k \geqslant 10} \frac{1}{3^k}$ ....

Calcul 30.2 — Séries exponentielles.

a) $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!}$ ....

b) $\sum_{k \geqslant 2} \frac{2^k}{k!}$ ....

c) $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2^k \times k!}$ ....

d) $\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$ ....

Séries télescopiques

Calcul 30.3

Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2+k}$.

On pourra chercher a et b tels que pour tout k, $\frac{1}{k^2+k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ ....

b) $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}$.

On pourra chercher a, b et c tels que pour tout k, $\frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ ....

c) $\sum_{k \geqslant 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$ ....

d) $\sum_{k \geqslant 0} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

Séries géométriques - Séries géométriques dérivées

Calcul 30.4

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{2^{2k}}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{-(k-1)}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\frac{1}{2^{k-1}}$ ....

Calcul 30.5

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (3k+1)\frac{1}{3^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}}$ .....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-(k-2)}$ ..

Calcul 30.6

Justifier que les séries suivantes convergent puis calculer leur somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k(-2)^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k^2 3^{-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (k+2)\mathrm{e}^{-2k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k(k+1)\mathrm{e}^{-k}$ ......

Réponses mélangées

2 $\quad \ln(2)$ $\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ $\quad 1$ $\quad 1$ $\quad \dfrac{2\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^3}$ $\quad$ divergente $\quad \dfrac{1}{12}$

$\dfrac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}$ $\quad \mathrm{e}$ $\quad 2$ $\quad \dfrac{1}{2\times 3^9}$ $\quad 4$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$ $\quad \dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$ $\quad$ divergente

$\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ $\quad 16$ $\quad \dfrac{11}{4}$ $\quad \dfrac{1}{4}$ $\quad \dfrac{\mathrm{e}^2(2\mathrm{e}^2-1)}{(\mathrm{e}^2-1)^2}$ $\quad \mathrm{e}^2-3$ $\quad \dfrac{3}{2}$ $\quad -\dfrac{2}{9}$

Fiche de calcul n° 31 **0026A**

Algèbre linéaire

Prérequis
Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.

A la suite du cours de 1ère année.

Vecteurs

Calcul 31.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1),(-1,2)\big)$. ....

b) $u = (1,1)$, $\mathcal{B} = \big((-1,2),(0,1)\big)$. ....

c) $u = (3,4)$, $\mathcal{B} = \big((1,2),(12,13)\big)$. ....

d) $u = (1,2,1)$, $\mathcal{B} = \big((0,1,3),(4,5,6),(-1,0,1)\big)$. ....

e) $u = (-1,0,1)$, $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,3)\big)$. ....

Calculs de rangs

Calcul 31.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. ....

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ....

Calcul 31.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et Applications linéaires

Calcul 31.4 — **Matrices d'endomorphismes.**

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (1, 0)\big)$. ....

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (3, 4)\big)$ ....

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ ....

Calcul 31.5 — **Matrices d'applications linéaires.**

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 1), (1, 0)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((2, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

Réponses mélangées

$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad (9/11, 2/11) \quad$ $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$

$4 \quad 3 \quad 2 \quad$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 2 \quad$ $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$1 \quad (-1, 1/2, 1/2) \quad 2 \quad 1 \quad (-1, 3) \quad (-2, 4/5, 11/5) \quad (3, -1)$

0033A

Réduction

Prérequis
Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation. Théorème du rang.

A la suite du cours de 2ième année.

Vecteurs propres

Calcul 32.1

Déterminer si U est un vecteur propre de la matrice A et si oui donner la valeur propre associée.

a) $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ....

c) $U = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ....

d) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ....

e) $U = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Dimension des sous-espaces propres

Calcul 32.2

Dire si λ est une valeur propre de A et si oui déterminer la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

a) $\lambda = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\lambda = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

c) $\lambda = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ....

d) $\lambda = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ....

Valeurs propres

Calcul 32.3

Déterminer les valeurs propres de la matrice et préciser si la matrice est diagonalisable.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ....

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ....

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ ....

e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 32.4

Même question

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ....

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. ....

c) $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ....

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

Réponses mélangées

oui $\sqrt{2}$ 1 non $1,3$ oui $1,2,3$ non   oui 0 non   oui et $\dim(E_\lambda(A)) = 1$

oui 3 oui et $\dim(E_\lambda(A)) = 2$ $2,4,6$ oui   oui et $\dim(E_\lambda(A)) = 1$

$1,3,2$ oui $1,2$ non   non   non $7,5$ $-1,5$ oui $1,-1,3$ oui