Chapitre # (ANN) 2 Synthèse pour le numérique

Résumé & Plan

Un condensé de commandes importantes et de scripts classiques à connaitre parfaitement pour les concours, mais axées sur le numérique.

1. GRAPHISMES

On importe le sous-module `matplotlib.pyplot` avec

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

1.1. Généralités

PARAMÈTRES OPTIONNELS POUR `plot`

Propriétés	Rôle	Valeurs possibles
`color`	Trace le nuage de points	`'red'`, `'blue'` *etc.* d'abscisses `X` et ordonnées `Y`
`label`	Légende de la courbe	une chaîne
`linestyle`	type de ligne (pointillés, etc.)	`'-'`, `'-.'`, `':'`
`linewidth`	épaisseur du trait	un entier
`marker`	forme des points	`'+'`, `','`, `'o'`, `'1'`, `'2'` *etc.* (`'o'` adapté aux suites)

Attention

La commande `savefig` doit être placée avant `show` et après `plot`.

OPTIONS POUR `linestyle`

Option	Rôle
`""`	les points ne sont pas reliés
`"-"`	tracé en trait plein
`"--"`	tracé avec des tirets
`":"`	tracé en pointillés
`"-."`	alternance de tirets et de points

COMMANDES DE FORMATAGE DES TITRES, LÉGENDES, AXES

Nom	Rôle
`plt.legend(loc = 'upper left')`	permet de placer les légendes (ici haut gauche)
`plt.title('titre')`	permet de placer un titre au tracé
`plt.axis('off')`	permet d'enlever les axes
`plt.axis('scaled')`	impose la même échelle aux deux axes
`plt.axis(xmin = .., xmax = ..,..)`	impose des valeurs min/max à chaque axe en spécifiant `xmax`, `ymax`, `xmin`, `ymin`
`plt.grid(True)`	trace le quadrillage
`plt.xlabel('texte')`	nom pour l'axe des abscisses
`plt.ylabel('texte')`	nom pour l'axe des ordonnées

1.2. Tracé d'une suite ou d'une fonction

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, avec $a,b \in \mathbb{R}, a < b$, définie sur cet intervalle et que l'on souhaite tracer.

Tracer une fonction

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X = np.linspace(a, b, 10**3) # création d'une subdivision des \
↪ abscisses
Y = [f(x) for x in X] # les ordonnées
# OU, si et seulement si f ne contient que des fonctions numpy
Y = f(X)
plt.plot(X, Y, options)
plt.show()
```

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$, que l'on souhaite tracer par exemple sur $[\![1, 10]\!]$. On suppose cette codée par une fonction Python notée u.

Tracer une suite

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X = list(range(1, 11))
Y = [u(n) for n in X] # les ordonnées
plt.plot(X, Y, marker = 'o', autres options)
plt.show()
```

2. ALGORITHMES SUR LES SUITES

Résumé des attendus

Voici ce qu'il faut savoir faire en Python à propos des suites :

- Les fonctions permettant de calculer un terme donné d'une suite.
- Les fonctions permettant de calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois.
- Construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée.
- Tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

Nous illustrerons ces différents programmes sur les trois suites suivantes :

- **[Explicite]** La suite (u_n), définie explicitement, vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$
où $a \in \mathbb{R}$ est choisi par l'utilisateur. On peut prouver qu'elle converge vers e^a.
- **[Récurrence d'ordre 1]** La suite (v_n), définie par une relation de récurrence d'ordre 1, vérifiant :
$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisit par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + e^{v_n}. \end{cases}$$
On peut prouver qu'elle est croissante quel que soit $a \in \mathbb{R}$ et en déduire, par l'absurde, qu'elle tend vers $+\infty$.
- **[Récurrence d'ordre 2]** La suite (w_n), définie par une relation de récurrence d'ordre 2, vérifiant :
$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisit par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisit par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{\cos(w_n + w_{n+1})}{n+2}. \end{cases}$$
On peut prouver par encadrement qu'elle tend vers 0 puis en déduire que :
$$w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Remarque 1 (Nommage des variables) Dans tous nos programmes, on respectera les deux conventions suivantes : les variables `n`, `i`, `j` … serviront à stocker des valeurs d'**indices**, les variables `u`, `v`, `w` … serviront quant à elles à stocker des valeurs de **termes** des suites. Même si la suite s'appelle autrement que (u_n), on appelle `u` la variable stockant son terme.

2.1. Calcul du n-ième terme

SUITE EXPLICITE. C'est le cas le plus simple, il suffit de retourner l'expression correspondant au terme saisit par l'utilisateur. Voici par exemple le code de la fonction `terme_u(a,n)` qui retourne le terme u_n avec a et n en paramètre de fonction :

Terme n d'une suite définie explicitement

```
def terme_u(a, n):
    """
    Renvoie la valeur de u_n lorsque u_1=a
    """
    u = (1+a/n)**n
    return u
```

```
>>> terme_u(2, 1)
3.0
>>> terme_u(0, 1)
1.0
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 1. Pour calculer v_n on procède ainsi.

1. On prévoit un test `if` pour la condition initiale, puis :
2. on initialise une variable u avec la valeur de v_0.
3. On parcourt à l'aide d'une boucle `for` tous les indices i de 1 à n (l'indice mathématique correspondant). Pour chaque valeur de i, on remplace u (qui contient v_{i-1}) par sa nouvelle valeur, v_i, à l'aide de la formule de récurrence.
4. En sortie de boucle, u contient la valeur de v_n ; il suffit donc de renvoyer u.

Voici par exemple le code de la fonction `terme_v(a, n)` qui renvoie le terme v_n avec $v_0 = a$ et n en paramètre de fonction :

■■ Terme n d'une suite récurrente d'ordre 1

```
def terme_v(a, n):
    """
    Renvoie la valeur de v_n lorsque v_0 = a
    """
    if n == 0:
        return a
    else:
        u = a
        for i in range(1, n+1):
            # u est ici la valeur précédente
            u = u + ma.exp(u)
            # v est ici la valeur suivante
        return u
```

```
>>> terme_v(0, 1)
1.0
>>> terme_v(0, 2)
3.718281828459045
```

Remarque 2 (Version « universelle » sans `if`) Le test `if` n'est ici pas obligatoire. En effet, si `n = 0` alors la boucle `for` ne s'exécutera pas (bornes dans le mauvais sens) et donc on retournera bien `v = a`.

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. Pour calculer w_n on procède ainsi :

1. On prévoit un test `if` pour les deux conditions initiales, puis :
2. on initialise **deux** variables, u et v, avec les valeurs de w_0 et de w_1.
3. On parcourt à l'aide d'une boucle `for` tous les indices i de 2 à n (l'indice mathématique correspondant). Pour chaque valeur de i, on calcule le terme suivant noté **w** à l'aide de la relation de récurrence puis on remplace **simultanément** (donc au moyen d'une **double-affectation**)u et v (qui contiennent respectivement les valeurs de w_{i-1} et de w_i) par les nouvelles valeurs (qui contiennent alors respectivement les valeurs de w_i et w_{i+1}).
4. En sortie de boucle, v contient la valeur de w_n ; il suffit donc de renvoyer w.

Voici par exemple le code de la fonction `terme_w(a, b, n)` qui retourne le terme w_n avec $w_0 = a$, $w_1 = b$ et n en paramètre de fonction.

■■ Terme n d'une suite récurrente d'ordre 2

```
def terme_w(a, b, n):
    """
    Renvoie la valeur de w_n lorsque w_0 = a et w_1 = b
    """
    if n == 0:
        return a
    elif n == 1:
        return b
    else:
        u, v = a, b
        for i in range(2, n+1):
            u contient w_{i-1} et v contient w_i
            u, v = v, ma.cos(u+v)/i
            u contient désormais w_i et v contient w_{i+1}
        return v
```

```
>>> terme_w(0, 1, 0)
0
>>> terme_w(0, 1, 1)
1
>>> terme_w(0, 1, 2)
0.2701511529340699
```

Remarque 3 (Version « universelle » sans `if`) Là encore, le test `if` n'est pas indispensable. Il est possible d'adapter la seconde partie de la fonction (chan-

gement de boucle `for` et dans la récurrence) afin qu'elle convienne également aux cas `n = 0` et `n = 1`.

```
def terme_w_bis(a, b, n):
    """
    Renvoie la valeur de w_n lorsque w_0 = a et w_1 = b
    """
    u, v = a, b
    for i in range(1, n+1):
        u, v = v, ma.cos(u+v)/(i+1)
    return u
```

```
>>> terme_w_bis(0, 1, 0)
0
>>> terme_w_bis(0, 1, 1)
1
>>> terme_w_bis(0, 1, 2)
0.2701511529340699
```

Elle retourne bien également les bons termes.

2.2. Calcul du premier terme/indice vérifiant une condition

Pour réaliser ces fonctions, il va falloir calculer les termes successivement jusqu'à ce que la condition soit vérifiée. Pour cela on utilisera une boucle `while` : tant que la condition **n'est pas vérifiée**, on calcule le terme suivant ; reste alors à renvoyer le dernier terme/indice. On parle en général *d'algorithme de seuil*.

Attention

Contrairement aux boucle `for`, une boucle `while` ne permet pas de parcourir automatiquement les différents indices. Il faudra donc dans nos programmes introduire une variable contenant la valeur de l'indice, l'initialiser correctement et l'augmenter de 1 à chaque passage dans la boucle.

SUITE EXPLICITE. Par définition de la limite, on sait par exemple que comme la suite (u_n) converge vers e^a, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n - e^a| < \varepsilon.$$

Voici une fonction cherchant l'entier n_0 en question.

■■ Algorithme de seuil pour une suite explicite

```
def seuil_u(a,eps):
    """
    Renvoie le premier indice n pour lequel |u_n-exp(a)|<eps
    """
    n = 1
    u = (1+a/n)**n
    while abs(u-exp(a)) >= eps:
        n += 1
        u = (1+a/n)**n
    return n
```

Remarque 4 Il est parfois possible de calculer l'entier n_0 explicitement en résolvant une équation/inéquation, mais cela n'est pas possible sur cet exemple (même chose pour les suivants).

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 1. Pour réaliser ces fonctions, il y a un unique changement à apporter aux fonctions précédentes : remplacer la boucle `for` par une boucle `while`.

On sait par exemple que la suite (v_n) tend en croissant vers $+\infty$, donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies v_n \geqslant A.$$

Voici la fonction qui renvoie l'indice n_0, a et A étant en paramètre de fonction.

■■ Algorithme de seuil pour une suite récurrente d'ordre 1

```
def seuil_v(a, A):
    """
    Renvoie le premier indice n pour lequel v_n >= A
    """
    n = 0
    v = a
    while v < A:
        n += 1
        v = v + ma.exp(v)
    return n
```

```
>>> n_0 = seuil_v(1, 10)
>>> n_0
2
>>> terme_v(1, n_0)
44.911837503175164
>>> terme_v(1, n_0-1)
```

```
3.718281828459045
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. Pour réaliser ces fonctions, il y a un unique changement à apporter aux fonctions précédentes : remplacer la boucle `for` par une boucle `while`.

On sait par exemple que la suite (w_n) converge vers 0, donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |w_n| < \varepsilon.$$

Voici la fonction qui renvoie l'indice n_0, a, b et ϵ étant en paramètre de fonction.

■■ Algorithme de seuil pour une suite récurrente d'ordre 2

```
def seuil_w(a, b, eps):
    """
    Renvoie le premier indice n pour lequel |w_n|<eps
    """
    n = 0
    u, v = a, b
    while abs(u) >= eps:
            n += 1
            u, v = v, ma.cos(u+v)/n
    return n
```

```
>>> n_0 = seuil_w(1, 1, 10**(-3))
>>> n_0
1001
>>> terme_w(0, 1, n_0)
0.000998998999007198
>>> terme_w(0, 1, n_0-1)
0.00099999799399421
```

2.3. Construction de la liste des termes et tracé

On construit la liste de proche en proche à l'aide d'une boucle `for` ou `while` et de la méthode `append` sur les listes. Vous noterez que les versions avec seuil permettent de retrouver les algorithmes de seuil précédents (en retournant la longueur de la liste obtenue).

SUITE EXPLICITE. On donne à titre d'exemple les fonctions qui renvoient la liste des termes u_1 à u_n.

■■ Liste de termes sous condition ou non – Suite explicite

```
def liste_terme_u(a, n):
    """
    Renvoie la liste [u_1,...,u_n] (u_0 n'existe pas !)
    """
    L = []
    for i in range(1, n+1):
        L.append((1+a/i)**i)
    return L
```

```
>>> liste_terme_u(1, 10)
[2.0, 2.25, 2.37037037037037, 2.44140625, 2.4883199999999994, \
↪ 2.5216263717421135, 2.546499697040712, 2.565784513950348, \
↪ 2.5811747917131984, 2.5937424601000023]
```

```
def liste_seuil_u(a, eps):
    """
    Renvoie la liste [u_1,...,u_n] où n est le premier indice n \
    ↪ pour lequel |u_n-exp(a)|<eps"""
    n = 1
    L = [(1+a/n)**n]
    while abs(L[-1] - ma.exp(a)) >= eps:
        n += 1
        L.append((1+a/n)**n)
    return L
```

```
>>> liste_seuil_u(1, 10**(-1))
[2.0, 2.25, 2.37037037037037, 2.44140625, 2.4883199999999994, \
↪ 2.5216263717421135, 2.546499697040712, 2.565784513950348, \
↪ 2.5811747917131984, 2.5937424601000023, 2.6041990118975287, \
↪ 2.613035290224676, 2.6206008878857308]
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 1. On construit une liste `L` telle que `L[i]` contienne la valeur de v_i. Il n'est alors plus nécessaire de conserver le terme précédent dans une variable : lors du calcul de v_i, on dispose de la valeur de v_{i-1}, c'est précisément `L[-1]`, le dernier terme ajouté.

On donne à titre d'exemple une fonction qui renvoie la liste des termes v_0 à v_n et une autre qui renvoie la liste de tous les termes de (v_n) jusqu'à ce que $v_n \geq A$.

■■ Liste de termes sous condition ou non – Suite d'ordre 1

```
def liste_terme_v(a, n):
    """
    Renvoie la liste [u_0,...,u_n]
    """
    L = [a]
    for _ in range(1, n+1):
        L.append(L[-1] + ma.exp(L[-1]))
    return L
```

```
>>> liste_terme_v(1, 3)
[1, 3.718281828459045, 44.911837503175164, \
↪ 3.1986240606431162e+19]
```

```
def liste_seuil_v(a, A):
    """
    Renvoie la liste [v_0,...,v_n] où n est le premier indice n \
    ↪ pour lequel v_n>=M
    """
    n = 0
    L = [a]
    while L[-1] < A:
        n += 1  ici cet entier n ne sert finalement pas car la récurrence a des coefficients \
    ↪ indépendants de n
        L.append(L[-1] + ma.exp(L[-1]))
    return L
```

```
>>> liste_seuil_v(1, 3)
[1, 3.718281828459045]
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. On construit une liste `L` telle que `L[i]` contienne la valeur de w_i. Là encore, il n'est alors plus nécessaire de conserver les termes précédent dans des variables : lors du calcul de w_i, on dispose de la valeur de w_{i-1} dans `L[i-1]` et de w_{i-2} dans `L[i-2]`. On donne à titre d'exemple une fonction qui renvoie la liste des termes w_0 à w_n et une autre qui renvoie la liste de tous les termes de (w_n) jusqu'à ce que $|w_n| < \epsilon$. Notons que dans deux fonctions, et ce afin d'éviter la gestion de cas particuliers, on suppose que la liste finale contient au moins w_0 et w_1.

■■ Liste de termes sous condition ou non – Suite d'ordre 2

```
def liste_terme_w(a, b, n):
    """
    Renvoie la liste [w_0,w_1,...,w_n] (n>=1)
    """
    if n == 0:
        return [a]
    elif n == 1:
        return [a, b]
    else:
        L = [a, b]
        for i in range(2, n+1):
                L.append(ma.cos(L[-2]+L[-1])/i)
        return L
```

```
>>> liste_terme_w(1, 1, 10)
[1, 1, -0.2080734182735712, 0.23415848554264707, \
↪ 0.24991495098085725, 0.1770213081859069, 0.15170644429544455, \
↪ 0.13520769153107332, 0.11989021517204179, 0.10751539939271154, \
↪ 0.09742545791160233]
```

```
def liste_seuil_w(a, b, eps):
    """
    Renvoie la liste [w_0,w_1,...,w_n] (n>=1) où n est le \
    ↪ premier indice pour lequel |w_n|<eps
    """
    n = 0
    L = [a, b]
    while abs(L[n]) >= eps:
            n += 1  ici cet entier n sert
            L.append(ma.cos(L[-2]+L[-1])/n)
    return L
```

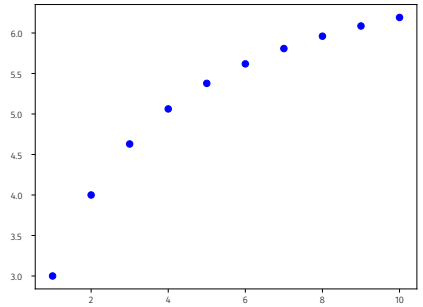
Remarque 5 (Suites imbriquées) Il faut savoir également en pratique adapter ces algorithmes à des suites récurrentes imbriquées.

2.4. Tracer une suite

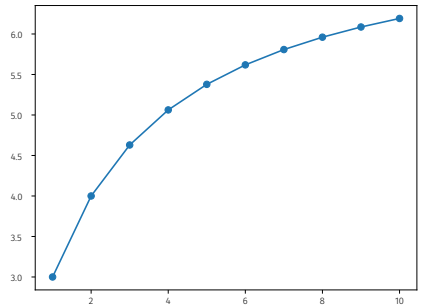
On s'y prend comme pour les fonctions, on a besoin donc de la liste des termes de ladite suite. Traçons par exemple (u_n).

Tracé de la suite (u_n) sur $[\![0, 10]\!]$

```
import matplotlib.pyplot as plt
n = 10
X = list(range(1, n+1)) # entiers entre 0 et n+1 (car n+1 termes \
↪ dans Y)
Y = liste_terme_u(2, n)
plt.plot(X, Y, "bo") # o : style de marker, des points non \
↪ reliés
```



```
plt.plot(X, Y, marker = 'o') # des points reliés cette fois, un \
↪ petit peu plus visuel
```



3. TABLEAUX

CONSTRUCTEURS DE TABLEAUX

Operations	Commande	Commentaire

CONSTRUCTEURS DE TABLEAUX

Création	`A = np.array(...)`	On indique une liste de listes en argument
Matrice nulle	`A = np.zeros((n, p))`	Un tuple est demandé en argument, donc deux parenthèses
Matrice ATTILA J_n	`A = np.ones((n, p))`	Un tuple est demandé en argument, donc deux parenthèses
Matrice identité	`A = np.identity(n)` ou `A = np.eye(n)`†	
Matrice diagonale	`A = np.diag(L)`	La liste `L` contient la diagonale
Subdivision de pas `h` de $[a, b]$	`np.arange(a, b, h)`	Analogue de `list(range(a, b, h))`
Subdivision à `n` points de $[a, b]$	`np.linspace(a, b, n)`	On s'en est servi pour tracer des suites, fonctions, *etc.*
Copie	`B = A.copy()`	Important pour pouvoir modifier `B` sans modifier `A`, comme pour les listes
Coefficients	`A[i, j]` ou `A[i][j]`	Terme `i,j` du tableau
Ligne `i`	`A[i]`	
Colonne `j`	`A[:, j]`	« `:` » signifie en *slicing* « on prend tout »

† `eye` comme identity en anglais.

Attention

Attention aux copies, comme pour les listes. On peut utiliser ici `np.copy` pour effectuer une « copie en dur » d'un tableau.

Méthode Créer une matrice

Plusieurs options s'offrent à vous.

- Si la matrice est de petite taille, on écrit directement les coefficients.
- Si la matrice est de grande taille (typiquement dépendant d'un certain entier `n`), on peut :
  - soit utiliser des commandes existantes si la matrice est proche d'une matrice usuelle. Par exemple, `np.eye`, `np.zeros`, `np.ones`, *etc.*
  - Soit partir d'une matrice nulle initialisée à la bonne taille (avec `np.zeros`),

puis la compléter des bons coefficients à l'aide d'une boucle `for`.

En indice

```
n, p = len(A), len(A[0])
for i in range(n):
    for j in range(p):
        ...
```

En valeur

```
for ligne in M:
    for x in ligne:
        ...
```

Méthode **Calcul des puissances d'une matrice avec Python**

Soit `M` un tableau carré correspondant à une matrice M carrée. Il n'y a pas de fonction toute faite dans numpy pour calculer M^n. Rappelons également que `M**n` élève les coefficients de M à la puissance n mais n'effectue pas le produit matriciel. On procède comme suit :

- on initialise un tableau `P` à l'identité.
- On effectue n fois l'affectation `P = P @ M`.
- On retourne `P`.

4. MÉTHODES NUMÉRIQUES

4.1. Équations différentielles

(Méthode d'EULER)

```
def euler(f, y0, tau, N):
    """
    f : fonction, y0 : valeur en zéro,
    tau : borne max de l'intervalle,
    N : nombre d'intervalles de la subdivision->retourne le \
    ↪ couple
    (subdivision, solution approchée) selon la méthode d Euler
    """
    h = tau/N
    T = np.linspace(0, tau, N+1) # N+1 points dans la \
    ↪ discrétisation
    Y = [y0]
    for i in range(N):
        y = Y[-1] + h*f(T[i], Y[-1])
        Y.append(y) # Y[-1] est le dernier y ajouté
    return T, Y
```

4.2. Résolution approchée de $f(x) = 0$

(Dichotomie)

```
def dicho(a, b, f, prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b \
    ↪ avec précision prec
    """
    g, d = a, b
    while d - g > prec:
        c = (g + d)/2
        if f(g)*f(c) <= 0:
            # changement de signe sur [g,c]
            d = c
        else:
            # pas de changement de signe sur [g,c]
            g = c
    return (g + d)/2
```

On peut aussi adopter une version récursive.

```
def dicho_rec(a, b, f, prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b \
    ↪ avec précision prec
    """
    if b - a <= prec:
        return (a + b)/2
    else:
        c = (a + b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            # changement de signe sur [a,c]
            return dichotomie(a, c, prec)
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,c]
            return dichotomie(c, b, prec)
```

4.3. Intégrales

(Méthodes des rectangles)

```python
def rectangle_RG(f, a, b, n):
    """
    Calcule la somme des rectangles gauche associée à f
    """
    S = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(n):
        S += f(a+h*i)
    return S*h
def rectangle_RD(f, a, b, n):
    """
    Calcule la somme des rectangles droite associée à f
    """
    S = 0
    h = (b-a)/n
    for i in range(1,n+1):
        S += f(a+h*i)
    return S*h
```

5. ALÉATOIRE & STATISTIQUES

5.1. Statistiques descriptives

(Modalités)

```python
def sans_doublon(L):
    """
    Retourne la liste des éléments de L, chaque élément \
    ↪ apparaissant une unique fois
    """
    M = []
    for x in L:
        if x not in M:
            M.append(x)
    return M
```

(Dictionnaire d'effectifs ↔ Liste des observations)

```python
def dico_occur(L):
    D = {}
    for x in L:
        if x not in D:
            D[x] = 1
        else :
            D[x] += 1
    return D
def dico_occur_vers_liste(D):
    L = []
    for x in D:
        # x est une modalité, que l'on dublique autant de \
        ↪ fois que nécessaire
        eff_x = D[x]
        for _ in range(eff_x):
            L.append(x)
    return L
```

(Grandeurs univariées)

```python
def moyenne(L):
    """
    Renvoie la moyenne des éléments d'une liste
    """
    S = 0
    for x in L:
        S += x
    return S/len(L)
def moyenne_avec_eff(D):
    """
    Renvoie la moyenne d'une série associée au dictionnaire \
    ↪ des effectifs
    D
    """
    S = 0
    N = 0 # nombre d'éléments de la série
    for x in D:
        eff_x = D[x]
        S += x*eff_x
        N += eff_x
```

```
    return S/N
def variance(L):
    """
    Renvoie la variance, version KH
    """
    S2 = 0
    for x in L:
        S2 += x**2
    return S2/len(L) - moyenne(L)**2
def etendue(L):
    """
    Renvoie l'étendue de la série statistique des éléments de L
    """
    mini = L[0]
    maxi = L[0]
    for i in range(1, len(L)):
        if L[i] < mini:
            mini = L[i]
        elif L[i] > maxi:
            maxi = L[i]
    return maxi - mini
def mediane(L):
    """
    Cherche la médiane d'une liste, après tri rapide des \
    ↪ observations
    """
    L_tri = tri_rapide_rec(L)
    n = len(L)
    if n % 2 == 1:
        # Nombre impair d'observations
        return L_tri[n//2]
    else:
        # Nombre pair d'observations
        return (L_tri[n//2-1] + L_tri[n//2])/2
def quartiles(L):
    """
    Retourne Q1, Q2, Q3, après tri rapide des observations
    """
    L_tri = tri_rapide_rec(L)
    n = len(L)
    if n % 2 != 0:
        # Nombre impair d'observations
        Q2 = L_tri[n//2]
    else:
        # Nombre pair d'observations
        Q2 = (L_tri[n//2-1] + L_tri[n//2])/2
    if n % 4 != 0:
        # Nombre non multiple de 4 d'observations
        Q1 = L_tri[n//4]
        Q3 = L_tri[(3*n)//4]
    else:
        # Nombre multiple de 4 d'observations
        Q1 = L_tri[n//4-1]
        Q3 = L_tri[(3*n)//4-1]
    return Q1, Q2, Q3
```

(Grandeurs bivariées)

```
def covariance(L, M):
    """
    Renvoie la covariance des deux séries
    """
    Prod = [L[i]*M[i] for i in range(len(M))]
    return moyenne(Prod) - moyenne(L)*moyenne(M)
from variance import *
import math as ma
def coeff_cor(X, Y):
    """
    Renvoie le coefficient de corrélation des deux séries
    """
    return covariance(X, \
    ↪ Y)/(ma.sqrt(variance(X))*ma.sqrt(variance(Y)))
def covariance(L, M):
    """
    Renvoie la covariance des deux séries
    """
    Prod = [L[i]*M[i] for i in range(len(M))]
    return moyenne(Prod) - moyenne(L)*moyenne(M)
from variance import *
from covariance import *
def regression_lin(X, Y):
```

```
    """
    Retourne les coefficients a, b de régression  linéaire \
    ↪ associée au
    nuage de points (X, Y)
    """
    a = covariance(X, Y)/variance(X)
    b = moyenne(Y)-a*moyenne(X)
    return a, b
```

```
        return 0
def binomiale(n,p):
    """
    simule une binomiale
    """
    S = 0
    for i in range(n):
        if rd.random() < p:
            S += 1
    return S
```

5.2. Simulation de lois classiques

On importe le module `random` avec :

```
import random as rd
```

Commande	Effet
`rd.random()`	Tirer un nombre entre 0 et 1 selon une $\mathscr{U}[0,1]$
`rd.randint(i,j)`	Tirer un entier entre i et j selon une $\mathscr{U}[\![i,j]\!]$
`rd.choice(L)`	Tirer un élément au hasard dans `L`
`rd.shuffle(L)`	Mélange les éléments de `L` de manière aléatoire

(Lois discrètes)

```
def unif_entier(a,b):
    """
    Renvoie une simulation de l'uniforme sur [a,b] entier
    """
    return np.floor(a+(b+1-a)*rd.random())
def bernoulli(p):
    """
    simule une bernoulli
    """
    if rd.random() < p:
        return 1
    else:
```