Chapitre # (ALG) 1 — Logique, Rudiments ensemblistes & Raisonnements

La logique est l'hygiène des Mathématiques

— André WEIL

Résumé & Plan

Dans ce chapitre, nous allons clarifier et peaufiner la rédaction des Mathématiques. On formalise en plus les différents types de raisonnements qui peuvent apparaitre dans une démonstration (absurde, contraposée, récurrence *etc.*).

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Ce chapitre un peu particulier ne sera pas traité de manière linéaire au début de l'année. Nous aborderons :
- **les Sections 1 et 2 dès maintenant,**
- **la Section 3 plus tard dans l'année.**

Les Mathématiques sont construits à partir d'axiomes — c'est-à-dire des faits et consensus que nous ne cherchons pas à démontrer — et à partir desquels nous déduisons des propositions/théorèmes *etc.*, si possible vrais. L'objectif de ce chapitre est de formaliser les déductions de nouveaux énoncés (symboles logiques, techniques de preuve, *etc.*).

1. LOGIQUE ÉLÉMENTAIRE

1.1. Proposition logique

Définition 1 | Proposition

- On appelle *proposition* ou *assertion* une affirmation concernant un ou plusieurs objets mathématiques qui est, soit vraie, soit fausse.
- La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai ou le faux de cette proposition (mais pas les deux).

Définition 2 | Équivalence de propositions

Deux propositions sont dites *équivalentes* si elles ont même valeur de vérité.

Notation

On notera $\mathrm{P} \iff \mathrm{Q}$ lorsque deux propositions P, Q sont équivalentes.

Exemple 1

- « $3 \leqslant 4$ » est vraie, « $2^2 = 5$ » est fausse.
- « Il ne pleut jamais à Bordeaux », « Tous les élèves de la 1BC1 aiment les Mathématiques » sont équivalentes.
- « Tout nombre entier admet une racine carrée entière » est fausse.
- « Il existe un plus petit entier naturel » est vraie.

(Booléens) En Python, il est très facile de faire différents tests logiques pour obtenir la valeur de vérité d'une proposition. Nous le verrons dans le cours d'Informatique, mais voici quelques exemples.

```
>>> 2**2 == 5
False
>>> 3 <= 4
True
>>> 3 < 4
True
```

Définition 3 | Conjecture

Une *conjecture* est une assertion non prouvée mais dont on pense que la valeur de vérité est vraie.

Exemple 2 La conjecture de Goldbach dit que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers (ce n'est pas prouvé). Au lycée, vous aviez l'habitude d'établir des conjectures d'après les figures obtenues à la calculatrice.

Remarque 1 (Axiomatique de la logique) On a interdit depuis le début qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse, mais interdit aussi qu'une proposition soit autre chose que vraie ou fausse. Ces deux principes s'appellent le principe de *non-contradiction* et le principe du *tiers exclu*. [a] Ces deux principes de base ont fondé la logique mathématique telle que nous l'utilisons habituellement, cependant, ils ne sont pas universellement acceptés : en effet, en 1931 Gödel démontra que dans tout système axiomatique de logique (tel que nous les construisons aujourd'hui), il subsiste des énoncés indécidables : dont on ne peut prouver qu'ils sont vrais ou faux.

1.2. Quantificateurs

On se donne un ensemble E et $\mathrm{P}(x)$ une proposition dont la valeur de vérité est fonction d'un élément x variable dans E. On ne peut pas dire si la proposition P est vraie ou fausse tant qu'on ne sait pas ce que vaut x.

Définition 4 | Predicat

Une proposition logique $\mathrm{P}(x)$, dont la valeur de vérité est fonction d'un élément x variable dans E, s'appelle un *prédicat*.

Exemple 3

- $\mathrm{P}(x)$ « $x^2 = 1$ » dépendant d'un réel x. Le cours de Mathématiques nous dit que « $x^2 = 1$ » est vraie quand $x = \pm 1$ uniquement.
- $\mathrm{P}(n)$ « $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ » dépendant d'un entier n. Le cours de Mathématiques nous dit que cette proposition est toujours vraie, nous le verrons dans le Chapitre (ALG) 3.

[a] On évitera donc les énoncés contradictoires du type « cette phrase est fausse », qui est subjectif et peut donc être considéré comme vrai et faux en fonction du lecteur.

Pour simplifier l'écriture des propositions on utilisera des symboles appelés quantificateurs.

Notation Quantificateurs

Soit $P(x)$ un prédicat vrai ou non pour x dans un certain ensemble E. On appelle *quantificateur* les symboles qui abrègent les propositions ci-après :

- « $\forall x \in E, P(x)$ vraie » qui signifie « **pour tout** x, telle que $P(x)$ soit vraie »,
- « $\exists x \in E, P(x)$ vraie » qui signifie « **il existe** x, telle que $P(x)$ soit vraie »,
- « $\exists! x \in E, P(x)$ vraie » qui signifie « **il existe un unique** x, telle que $P(x)$ soit vraie »,

Attention

Il faut bien comprendre la différence entre les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ » : il n'est pas du tout pareil de dire que « il existe une voiture jaune » ou « toutes les voitures sont jaunes ».

Remarque 2 (Les quantificateurs ne sont pas toujours formellement écrits)
Le quantificateur universel est parfois implicite dans les énoncés mathématiques. Par exemple, le « soit » cache souvent un « $\forall$ ».
Par exemple, l'énoncé « Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n+1)$ est pair » s'écrit :

« $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n+1)$ est pair ».

On peut alors écrire des propositions logiques de manière plus condensée en utilisant ces symboles.

Exemple 4 Résumer en une phrase chaque proposition, et dire si elle est vraie ou fausse.

- $\forall x > 0, \exists y > 0,\ y^2 = x$.
- $\forall x > 0, \exists! y > 0,\ y^2 = x$.
- $\forall x > 0, \exists! y \in \mathbb{R},\ y^2 = x$.
- $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 10$.
- $\exists! n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant 2n \leqslant 3$.

Attention Rédaction : pas de mélange mots/quantificateurs

Quand on rédige des Mathématiques, on essaie de ne pas mélanger les mots et les symboles. Ainsi,

- « x^2 est positif $\forall x$ » est une **mauvaise** rédaction. 😭
- « x^2 est positif pour tout réel x » est une **bonne** rédaction 😍 ,
- « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$ » est une **bonne** rédaction 😍 .

De plus, les quantificateurs sont toujours placés avant la proposition à quantifier.

Ordre des quantificateurs. Il est possible, et même fréquent en analyse, d'avoir plusieurs quantificateurs en cascade. On peut échanger deux quantificateurs identiques. Il est par exemple équivalent de dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, x+y \geqslant 0, \qquad \forall y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, x+y \geqslant 0$$

ou de manière condensée : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, x+y \geqslant 0.$

En revanche,

- L'assertion « $\forall x > 0, \exists y > 0,\ y^2 = x$ » est vraie, elle signifie « tout réel positif admet une racine carrée ».
- Alors que l'assertion « $\exists y > 0, \forall x > 0,\ y^2 = x$ » est fausse, elle signifie « il existe un nombre réel qui est la racine carrée de tous les nombres réels ».

Attention Ne pas échanger l'ordre de deux quantificateurs différents

L'ordre dans lequel sont écrits les quantificateurs est **extrêmement** important. En particulier, un élément introduit par un symbole « il existe » ne peut dépendre que des éléments qui le précédent.

Exemple 5 Écrire la dépendance en indice de chaque quantificateur par rapport aux autres.

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$.
- $\forall M > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+1} > M$.

Exemple 6 Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$,
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = 0$.

1.3. Opérations logiques sur les propositions

Définition 5 | Négation, Ou, Et

Soient P et Q deux assertions. On définit alors les assertions suivantes.

- La *négation* de P, écrite « non P » ou bien « **non** P », est l'assertion qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.
- L'assertion P *ou* Q, écrite « P ou Q » ou bien « P **ou** Q » est l'assertion qui est vraie si P est vraie ouQ *(ou éventuellement les deux)* est vraie, *i.e.* si au moins une des deux propositions est vraie, et fausse si P et Q sont toutes les deux fausses.
- L'assertion P *et* Q, écrite « P et Q » ou bien « P **et** Q » est l'assertion qui est vraie si P est vraie et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.

Remarque 3 Dans la pratique mathématique, nous n'utiliserons jamais les symboles **ou** , **et** . Ils le seront uniquement dans ce chapitre pour prouver des propriétés sur les symboles logiques, de manière plus concise.

(Booléens) Les opérations « et » (`and`) « ou » (`or`) sur les booléens `True` et `False` existent déjà en Python, tout comme la négation (`not`). Voici quelques exemples.

```
>>> V_1 = 2**2 == 5
>>> V_2 = 3 <= 4
>>> V_1 and V_2
False
>>> V_1 or V_2
True
>>> not V_1
True
```

Méthode Prouver une Négation, Ou, Et

- Une proposition est vraie si et seulement si sa négation est fausse.
- Pour prouver que la proposition P **ou** Q est vraie, on prouve qu'au moins une des deux propositions est vraie.
- Pour prouver que la proposition P **et** Q est vraie, on prouve que les deux propositions sont vraies.

Exemple 7

- **non** $(3 \geqslant 4)$ est
  vraie puisque $3 < 4$ *est vraie,*
- $(3 \leqslant 4)$ **ou** $(2^2 = 5)$ est vraie, alors que $(2-1 \geqslant 0)$ **et** $(2^2 = 5)$ est fausse.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 - x > 0$. Vérifier que la proposition « $x > -1$ ou $x < 0$ » est vraie.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 - 3x \leqslant 0$. Vérifier que la proposition « $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 3$ » est fausse.

Exemple 8

- On lance deux dés à six faces. On note P : « le résultat du premier lancer est un nombre pair » et Q : « le résultat du second lancer est un nombre pair ». La proposition P **ou** Q est

  « on obtient au moins un résultat pair ».
- Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100. On pioche deux boules de l'urne. On note P : « le numéro de la première boule est impair » et Q : « le numéro de la seconde boule est impair ». Alors la proposition P **et** Q est

  « le produit des numéros des deux boules piochées est impair ».

Remarque 4 Vous noterez que le « ou » mathématique est *inclusif*, ce qui n'est pas toujours le cas dans la langue française. Par exemple dans « Fromage ou Dessert » le « ou » est exclusif, vous ne pouvez pas prendre les deux.

Remarque 5 **(Représentation par tables de vérité)** On peut utiliser des tables de vérité pour résumer la Définition 5 précédente. Cela revient à indiquer dans chaque cellule du tableau le résultat des opérations précédentes en fonction de la véracité ou non des propositions données en entrée.

P	V	F
non P	F	V

P	Q	P **ou** Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P **et** Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Les tables de vérité permettent de démontrer efficacement des règles opératoires sur les propositions logiques. Une table de vérité peut aussi permettre de simplifier une assertion d'apparence compliquée.

Exemple 9 En construisant une table de vérité, montrer que les assertions **non** $\big($ **non** Q **ou** P$\big)$ et Q **et** **non** P sont équivalentes.

Négation d'une proposition avec quantificateurs. Nous utiliserons la proposition ci-après.

Proposition 1 | Nier une proposition avec quantificateurs

- La négation de « Pour tout x de E, P(x) est vraie » est « Il existe $x \in$ E pour lequel P(x) est fausse » :

$$\textbf{non}\ (\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)) \iff \exists x \in \mathrm{E},\ \textbf{non}\ (\mathrm{P}(x)).$$

- La négation de « Il existe x de E, P(x) est vraie » est « Pour tout $x \in$ E, P(x) est fausse » :

$$\textbf{non}\ (\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)) \iff \forall x \in \mathrm{E},\ \textbf{non}\ \mathrm{P}(x).$$

Méthode Nier une assertion avec des quantificteurs

Comment nier une assertion écrite à l'aide de quantificateurs ? On garde l'ordre des quantificateurs, on transforme tous les « $\exists$ » en « $\forall$ » et tous les « $\forall$ » en « $\exists$ » puis on nie les expressions mathématiques subséquentes.

Exemple 10 Nier les assertions suivantes.

- « Tous les professeurs de 1BC1 ont les yeux bleus ».

  « Il existe un professeur de 1BC1 qui n'a pas les yeux bleus »
- Dans une urne contenant des boules rouges et noires, on pioche au hasard 3 boules. « On pioche 3 boules rouges », « On ne pioche aucune boule rouge ».

Exemple 11 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \neq 0$,

  $\exists x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = 0$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = y$

  $\exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \neq y$
- $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{M}$

  $\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathrm{I}, \quad |f(x)| > \mathrm{M}$

Propriétés sur les assertions logiques. Comment ces opérations logiques se comportent-elles entre elles ? C'est ce que précise la prochaine proposition.

Proposition 1 | Négation d'ou / et

Soient P et Q deux assertions.

- **[Principe de non-contradiction]** P **et** (**non** P) est fausse. Toute proposition de cette forme est appelée une *contradiction.* [a]
- **[Principe du tiers exclu]** P **ou** (**non** P) est vraie.
- **[Double négation]** **non** (**non** P) $\Longleftrightarrow$ P.

Proposition 2 | Lois de Morgan

Soient P et Q deux assertions.

- **[Négation d'une conjonction]** **non** (P **ou** Q) $\Longleftrightarrow$ (**non** P) **et** (**non** Q),
- **[Négation d'une disjonction]** **non** (P **et** Q) $\Longleftrightarrow$ (**non** P) **ou** (**non** Q).

Proposition 3 | Propriétés de ou / et

Soit P,Q et R trois assertions. Alors :

- **[Commutativité]** P **ou** Q $\Longleftrightarrow$ Q **ou** P, P **et** Q $\Longleftrightarrow$ Q **et** P.
- **[Associativité]**

  (P **ou** Q) **ou** R $\Longleftrightarrow$ P **ou** (Q **ou** R), (P **et** Q) **et** R $\Longleftrightarrow$ P **et** (Q **et** R).
- **[Distributivité]**

  (P **ou** Q) **et** (P **ou** R) $\Longleftrightarrow$ P **ou** (Q **et** R), P **et** (Q **ou** R) $\Longleftrightarrow$ (P **et** Q) **ou** (P **et** R).

Preuve Construire les tables de vérité associées.

a. Provient directement de ce qu'une proposition logique ne peut être vraie et fausse à la fois.

Remarque 6 (Retenir la distributivité : analogie) Imaginez que le symbole **ou** est un +, et le symbole **et** un ×. La seconde formule de distributivité se réécrit alors :

$$\mathrm{P} \times (\mathrm{Q} + \mathrm{R}) = (\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) + (\mathrm{P} \times \mathrm{R}).$$

1.4. Implication, Contraposée

Que signifie en Mathématiques la notion d'implication ? Par exemple, soit x un réel. Si x est supérieur ou égal à 2, alors x est différent de 1,ce que vous notiez peut-être déjà au lycée :

$$x \geqslant 2 \Longrightarrow x \neq 1.$$

Cela nous donne une nouvelle proposition logique (une implication est soit vraie, soit fausse) formée ici à partir de « $x \geqslant 2$ » et « $x \neq 1$ ». Mais comment définir P $\Longrightarrow$ Q de manière abstraite si P, Q sont deux propositions logiques ? Il est plus facile de saisir le sens de la négation de P $\Longrightarrow$ Q : en effet, intuitivement P $\Longrightarrow$ Q est fausse si P est vraie alors que Q est fausse. Ce qui se note avec nos symboles logiques de la manière suivante :

non (P $\Longrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ P **et** (**non** Q),

donc en prenant la négation :

(P $\Longrightarrow$ Q) $\Longleftrightarrow$ ((**non** P) **ou** Q).

On a notre définition de l'implication.

Définition 6 | Implication

Soient P et Q deux assertions. On définit la proposition « P *implique* Q », notée P $\Longrightarrow$ Q, comme étant : (**non** P) **ou** Q.

Autrement dit, P $\Longrightarrow$ Q est fausse si P est vraie et Q est fausse. On dit aussi « si P est vraie, alors Q est vraie ». De plus, lorsque P $\Longrightarrow$ Q,

- on dit que Q est une condition *nécessaire* pour que P soit vraie,
- et on dit que P est une condition *suffisante* pour que Q soit vraie.

Attention

- Affirmer que l'implication : P $\Longrightarrow$ Q est vraie n'implique ni que P est vraie, ni que Q est vraie. Il est parfaitement vrai que : « Si Pinocchio est président de la République, alors il est chef des armées », et pourtant Pinocchio n'est pas plus président de la République qu'il n'est chef des armées.
- Une implication : P $\Longrightarrow$ Q peut être vraie alors que P et Q n'ont rien de commun, car après tout seules leurs valeurs de vérité comptent. Par exemple, il est vrai que : « Si 0 = 0, alors les oiseaux ont des plumes ».

Note — *Mais en Mathématiques, nous nous intéresserons le plus souvent à des assertions P, Q liées entre elles.*

On peut aussi écrire la table de vérité de $P \implies Q$.

P	Q	non P	$P \implies Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

La lecture de la table nous mène tout droit à la proposition suivante, qui est évidemment très intuitive.

Proposition 4
Soient P et Q deux assertions.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & P \text{ est vraie} \\ \textbf{(ii)} & P \implies Q \text{ est vraie} \end{cases} \implies Q \text{ est vraie.}$$

Exemple 12 Expliquer les valeurs logiques ci-après.

- L'assertion « Socrate est un homme $\implies$ Socrate est mortel » est vraie.
- L'assertion « Socrate est une table basse $\implies$ Socrate et mortel » est vraie.
- L'assertion « Socrate est une table basse $\implies$ Socrate est une chaise » est vraie.
- L'assertion « Socrate est grec $\implies$ Socrate est une chaise » est fausse.

Exemple 13

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors « $x > 1 \implies x^2 > 1$ » est vraie.
- La proposition « $3 > 5 \implies 1 + 1 = 8$ » est vraie.

Puisque la notation est bien choisie, on a la proposition ci-après.

Proposition 2 | Double implication
Soient P et Q deux assertions. Alors $(P \iff Q)$ est équivalente à :

$$(P \implies Q) \;\underline{\textbf{et}}\; (Q \implies P).$$

On dit aussi « P est vraie *si et seulement si* Q est vraie ».

Preuve Il suffit de construire la table de vérité associée à $(P \implies Q)$ **et** $(Q \implies P)$.

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On retrouve bien que $P \iff Q$ est vraie uniquement lorsque P, Q ont même valeur de vérité, c'était bien notre définition de l'équivalence en début de chapitre.

Méthode Prouver une équivalence de propositions
Soient P, Q deux assertions logiques. Alors pour prouver $P \iff Q$, on montre :

$$(P \implies Q) \;\underline{\textbf{et}}\; (Q \implies P).$$

Remarque 7 Une implication et sa réciproque ne sont pas équivalentes. Lorsqu'une implication est vraie et que sa réciproque est vraie alors les propositions sont équivalentes : c'est la base du raisonnement par « double implication ».

Proposition 5 | Négation d'une implication

Soit P une assertion. Alors :

$$\underline{\textbf{non}}\ (P \Longrightarrow Q) \iff P\ \underline{\textbf{et}}\ (\underline{\textbf{non}}\ Q).$$

Preuve C'est une conséquence directe de la définition :

$$\underline{\textbf{non}}\ (P \Longrightarrow Q) \iff \underline{\textbf{non}}\ (\underline{\textbf{non}}\ P\ \underline{\textbf{ou}}\ Q) \iff P\ \underline{\textbf{et}}\ (\underline{\textbf{non}}\ Q).$$

Exemple 14

- Écrire la négation de la phrase « Si je gagne au loto, je change de voiture »

  « J'ai gagné au loto et je n'ai pas changé de voiture »
- « $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \alpha \Longrightarrow \left|\sqrt{x}-1\right| < \varepsilon$ ».

Exemple 15 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes :

1. $\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

   $\exists (x,y) \in I^2, \quad x \leqslant y$ *et* $f(x) > f(y)$.
2. $\forall (x,y) \in I^2, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

   $\exists (x,y) \in I^2, \quad f(x) = f(y)$ *et* $x \neq y$.
3. $\forall x \in I, \quad f(x) > 0 \Longrightarrow x \leqslant 0$

   $\exists x \in I, \quad f(x) > 0$ *et* $x > 0$.

Contraposée et chaînes d'implications.

Définition/Proposition 1 | Contraposée & Réciproque d'une implication

Soient P et Q deux assertions. On définit la proposition :

- *contraposée de* P $\Longrightarrow$ Q comme étant : $(\underline{\textbf{non}}\ Q) \Longrightarrow (\underline{\textbf{non}}\ P)$. Elle est équivalente à l'implication P $\Longrightarrow$ Q.
- On définit la *réciproque de* P $\Longrightarrow$ Q comme étant : Q $\Longrightarrow$ P.

Méthode Prouver une implication de propositions

Pour montrer que P $\Longrightarrow$ Q est vraie, on peut :

1. supposer que P est vraie et montrer que (nécessairement) Q est vraie aussi,
2. **ou** montrer la contraposée, c'est-à-dire que si Q est fausse, alors P est fausse.

Preuve *(pour la contraposée)* Construire les tables de vérité ou utiliser la définition de l'implication.

Exemple 16 Soit n un entier relatif. Démontrer par contraposition que si n^2 est impair alors n est impair.

Proposition 6 | Transitivité de l'implication

Soient P, Q, R trois assertions. Alors

$$\text{Si } \begin{cases} \textbf{(i)} & P \Longrightarrow Q \text{ est vraie} \\ \textbf{(ii)} & Q \Longrightarrow R \text{ est vraie} \end{cases} \quad \text{alors : } \quad P \Longrightarrow R \text{ est vraie.}$$

Exemple 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Si on note P « $x = 0$ », Q « x est pair », R « x est un entier relatif ». Alors P $\Longrightarrow$ Q, Q $\Longrightarrow$ R et donc P $\Longrightarrow$ R. [a]

Corollaire 1 | Cycles d'implications

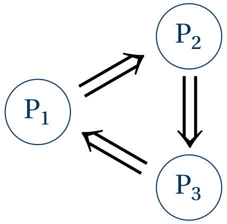
Soient P_1, P_2, P_3 trois assertions. Alors $(P_1 \iff P_2 \iff P_3)$ est équivalente à :

$$(P_1 \Longrightarrow P_2)\ \underline{\textbf{et}}\ (P_2 \Longrightarrow P_3)\ \underline{\textbf{et}}\ (P_3 \Longrightarrow P_1).$$

Remarque 8 Ce corollaire se généralise sans difficulté à n propositions. Pour un exemple, consulter par exemple l'Exemple 23.

Preuve Montrons que $P_1 \iff P_2$. On a déjà $P_1 \Longrightarrow P_2$, de plus $P_2 \Longrightarrow P_3$ et $P_3 \Longrightarrow P_1$ implique par transitivité $P_2 \Longrightarrow P_1$, on a donc prouvé $P_1 \iff P_2$ par double implication. On procède de-même pour $P_2 \iff P_3$.

a. Bien sûr, nullement besoin de transitivité pour prouver cela...



2. BASES SUR LES ENSEMBLES

La notion d'ensemble est difficile à définir proprement, on s'appuiera plutôt sur l'intuition que l'on a de cette notion, en le qualifiant vaguement de « collection d'éléments ».

2.1. Généralités

Définition 7 | Ensemble

- Un *ensemble* E est une collection d'éléments x qui sont dits *appartenir* à l'ensemble E, ce que l'on note $x \in \mathrm{E}$. On note les éléments de cette collection entre accolades.
- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, noté $\varnothing$, c'est-à-dire tel que « $x \in \varnothing$ » soit toujours fausse pour n'importe quel objet x. On l'appelle l'*ensemble vide* et on le note $\varnothing$.
- Un ensemble ne possédant qu'un seul élément est appelé un *singleton*.

Notation

Lorsqu'un élément x n'est pas dans E, on note $x \notin \mathrm{E}$.

On rappelle également à toutes fins utiles la notation ci-après.

Notation Intervalle d'entiers

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers. On notera

$$[\![a\,,\,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\} = [a, b] \cap \mathbb{Z}.$$

Modes de définition d'un ensemble. On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments, ou en *compréhension*, c'est-à-dire en donnant une propriété caractérisant de manière unique les éléments de E. Par exemple, l'ensemble ci-après est donné par extension et compréhension :

$$\mathrm{E} = \{1,2,3,4\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 1, n < 5\} \underset{\textbf{(nota.)}}{=} [\![1\,,\,4]\!].$$

En résumé on a les deux modes suivants :

- **[Extension]** $\mathrm{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- **[Compréhension]** $\mathrm{E} = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{condition sur } x\}$.

(Analogue pythonique) Ces deux modes de définition se retrouvent en Python pour construire une liste. Par exemple, avec l'ensemble E *supra*.

```
>>> E = [1, 2, 3, 4] # mode par extension
>>> E = [i for i in range(1, 10**3) if i >= 1 and i < 5] # \
↪ mode par compréhension, 10**3 est ici arbitraire
```

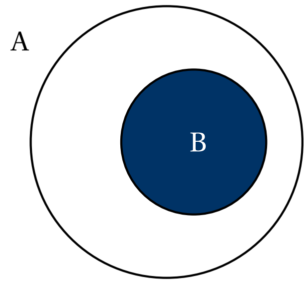
Quand on définit un ensemble en compréhension il faut toujours le situer comme sous-ensemble d'un ensemble plus grand : on n'écrit pas[1] $\{x \mid \cos(x) \geqslant 0\}$ mais $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \geqslant 0\}$.

Définition 8 | Inclusion, Égalité, Inclusion stricte

Soient F et E deux ensembles.

- On dit que F est un *sous-ensemble de* E ou que F *est inclus dans* E si tout élément de F est un élément de E, c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad x \in \mathrm{E}. \quad \text{On note cela } \mathrm{F} \subset \mathrm{E}.$$
- Les ensembles E et F sont dits égaux si : $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ **et** $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Autrement dit, E et F ont exactement les mêmes éléments, c'est-à-dire :
$$x \in \mathrm{E} \iff x \in \mathrm{F}. \text{On note cela } \mathrm{E} = \mathrm{F}.$$
- On dit que F est un *sous-ensemble strict de* E ou que F *est strictement inclus dans* E si : $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ **et** $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$, autrement dit : $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ **et** $(\exists x \in \mathrm{E}, x \notin \mathrm{F})$. On note cela $\mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$.

Les ensembles sont généralement représentés par des diagrammes, dits de Venn, ou de manière moins pompeuse des « patates ». Par exemple, voici la situation typique d'une inclusion.



1. Ou plutôt on évitera de l'écrire

Définition 9 | Ensemble des parties
Soit E un ensemble. L'*ensemble des parties de* E, noté $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, est l'ensemble des sous-ensembles de E.

On a donc : $\quad \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{A} \subset \mathrm{E}.$

Exemple 18 Si $\mathrm{E} = \{1,2,3,4\}$ et $\mathrm{F} = \{1,2\}$. Alors $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et on a aussi $\mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$.

Exemple 19 Soit $\mathrm{E} = [\![1\,,\,3]\!]$, alors : $\quad \mathscr{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \mathrm{E}\}$.

Attention **Appartenance $\neq$ Inclusion !**
Un **élément appartient** à un ensemble, et une **partie est incluse** dans un ensemble.

Exemple 20 Écrire un symbole entre les ensembles ci-après.

- $1 \quad \{1,2,3,4\}$,
- $\varnothing \quad \{1,2,3,4\}$,
- $\{1\} \quad \{1,2,3,4\}$,
- $\{1\} \quad \mathscr{P}(\{1,2,3,4\})$.

Remarque 9 Remarquons que l'on a toujours

$\mathrm{E} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$, **et** $\varnothing \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$.

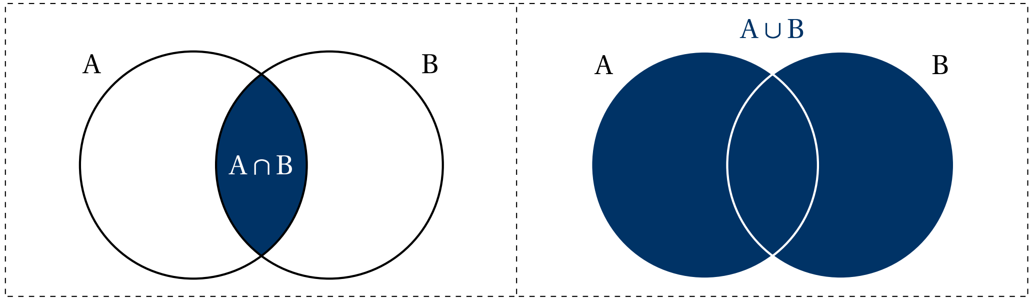
2.2. Opérations sur les ensembles

Définition 10 | Réunion & Intersection
Soit E un ensemble, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. On définit :

- l'*union de* A *et de* B, notée $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ (et lue « A union B ») par :
  $$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, x \in \mathrm{A} \ \underline{\textbf{ou}}\ x \in \mathrm{B}\right\},$$
  et on a : $\quad x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \iff x \in \mathrm{A}\ \underline{\textbf{ou}}\ x \in \mathrm{B}.$

  Note | *On rappelle ici que par défaut, en Mathématiques, le « ou » n'est pas exclusif. Ainsi, un élément peut appartenir aux deux ensembles A et B.*
- L'*intersection de* A *et de* B, notée $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ (et lue « A inter B ») par :
  $$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \left\{x \in \mathrm{E} \,\middle|\, x \in \mathrm{A} \ \underline{\textbf{et}}\ x \in \mathrm{B}\right\},$$
  et on a : $\quad x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \iff x \in \mathrm{A}\ \underline{\textbf{et}}\ x \in \mathrm{B}.$

Réunion et Intersection sur un diagramme



Exemple 21 Si $\mathrm{E} = [\![1\,,\,5]\!]$, $\mathrm{A} = \{1,2,3\}$, $\mathrm{B} = \{2,3,4\}$. Alors calculer $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}, \mathrm{A} \cup \mathrm{B}, \overline{\mathrm{A}}$.

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2,3\}, \quad \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1,2,3,4\}.$

Définition 11 | Parties disjointes & Réunion disjointe
Soit E un ensemble, soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. Alors :

- si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$, c'est-à-dire si A et B n'ont pas d'éléments en commun, on dit alors que A et B sont *disjoints*.
- La réunion $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est alors qualifiée de *réunion disjointe*, on la note $\quad \mathrm{A} \uplus \mathrm{B}$.

Exemple 22 La réunion précédente $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ n'est pas disjointe car $2, 3 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. Cependant si l'on considère $\mathrm{C} = \{4\}$, la réunion $\mathrm{A} \uplus \mathrm{C}$ l'est.

Règles opératoires sur l'intersection et la réunion. Il existe un grand nombre de règles sur les symboles d'union et d'intersection. Nous en citons quelques unes, qui se constatent facilement sur un dessin au besoin, la plupart d'entre elles seront admises mais les preuves ne présentent aucune difficulté.

Proposition 7 | Règles opératoires
Soit E un ensemble, et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. Alors :

- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$,
- $\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}, \quad \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
- **[Commutativité]** $\quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}, \quad \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$,
- **[Associativité]** $\quad \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} \quad \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$,
- **[Distributivité]** $\quad \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}), \quad \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$.

Remarque 10 **(Retenir la distributivité : analogie)** Là encore, la distributivité est très proche de celle déjà connue. Imaginez que le symbole $\cup$ est un $+$, et le symbole $\cap$ un $\times$. La première formule de distributivité se réécrit alors :

$\mathrm{A} \times (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) + (\mathrm{A} \times \mathrm{B}).$

On peut également la constater sur un diagramme de Venn.

Exemple 23 Soient A et B deux ensembles, on a alors :

$$\textbf{(i)} \quad A \subset B \iff \textbf{(ii)} \quad A \cup B = B \iff \textbf{(iii)} \quad A \cap B = A.$$

- $\boxed{\textbf{(i)} \implies \textbf{(ii)}}$ Supposons d'abord que $A \subset B$.

  On sait que $B \subset A \cup B$ *De plus, si* $x \in A \cup B$ *alors* x *appartient soit à* A, *soit à* B, *et, comme* $A \subset B$, *si* $x \in A$ *alors* $x \in B$. *Ainsi* $A \cup B \subset B$. *D'où* $A \cup B = B$. *De-même on a* $A \cap B \subset A$. *De plus, si* $x \in A$ *alors, comme* $A \subset B$, $x \in B$, $x \in A \cap B$. *Ainsi* $A \subset A \cap B$. *D'où* $A \cap B = A$. *On a donc montré les implications suivantes :*

  $$A \subset B \implies A \cup B = B \quad \textit{et} \quad A \subset B \implies A \cap B = A.$$

- $\boxed{\textbf{(ii)} \implies \textbf{(iii)}}$ Supposons maintenant que $A \cup B = B$.

  Soit $x \in A$, *alors* $x \in A \cup B$, *d'où* $x \in B$. *Ainsi tout élément de* A *est un élément de* B, *c'est-à-dire* $A \subset B$. *On a donc montré l'implication*

  $$A \cup B = B \implies A \subset B.$$

- $\boxed{\textbf{(iii)} \implies \textbf{(i)}}$ Supposons que $A \cap B = A$.

  Soit $x \in A$, *alors* $x \in A \cap B$. *D'où* $x \in B$. *Ainsi* $A \subset B$. *On a donc montré l'implication*

  $$A \cap B = A \implies A \subset B.$$

Finalement on a bien prouvé les équivalences annoncées.

Complémentaire et différence. On introduit deux dernières opérations sur les ensembles.

Définition 12 | Complémentaire & Différence

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On définit :

- le *complémentaire de* A *dans* E ou simplement le *complémentaire de* A si le contexte est clair, noté $\overline{A}$, ou parfois $\bar{A}$, par :

  $$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

- L'ensemble B *privé de* A, noté $B \setminus A$, est défini par :

  $$B \setminus A = B \cap \overline{A} = \{x \in E \mid x \in B,\ x \notin A\}.$$

  C'est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A.

Exemple 24

- Soient $E = [\![1, 5]\!]$, $A = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2\}$. Calculer $\overline{C}$ et $\overline{\overline{C}}$. Que remarque-t-on ?

  $\overline{C} = \{3, 4, 5\} \neq \overline{C} = \{3\}$.

- Le complémentaire de l'ensemble des entiers pairs est l'ensemble des entiers impairs.

Attention

On portera un grande attention au fait que $\overline{A}$ dépend du sur-ensemble E, ce qui n'est pas apparent dans la notation. Quand le contexte n'est pas absolument clair, il faudra préciser dans quel ensemble on considère le complémentaire. La notation $\overline{A}$ a le mérite de mentionner cette dépendance. Regarder par exemple l'exemple précédent.

Proposition 8 | Propriété du complémentaire

Soit E un ensemble. Alors :

$$\overline{E} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = E, \quad \forall A \in \mathscr{P}(E), \quad \overline{\overline{A}} = A.$$

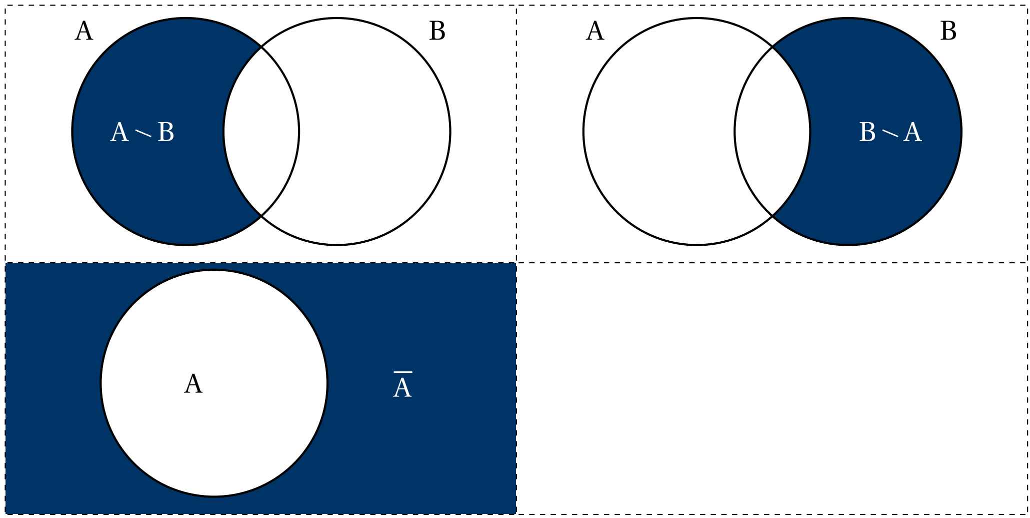
Théorème 1 | Lois de Morgan

Soit E un ensemble et soit A et B deux sous-ensembles de E. Alors

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Preuve Montrons uniquement la formule pour $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, c'est-à-dire montrons que : $x \in \overline{A \cup B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. L'intersection se prouve de la même manière.

Complémentaire sur un diagramme



Brève extension des notions de réunion/intersection. Nous généraliserons l'intersection et la réunion plus tard (dans le Chapitre (ALG) 6). Il s'agit ici seulement de définir les symboles « $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}$ » que nous utiliserons dans le Chapitre (ALG) 2 (écriture de certains ensembles de solutions d'équations et d'inéquations). Soit $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille d'ensembles dans E. Alors on définit :

- $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_k = \{x \in \mathrm{E} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathrm{A}_k\}$, et on a : $\quad x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_k \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathrm{A}_k$. C'est donc l'ensemble formé de tous les éléments de tous les A_k, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_k = \{x \in \mathrm{E} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathrm{A}_k\}$, et on a : $\quad x \in \cap_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_k \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathrm{A}_k$. C'est donc l'ensemble formé des éléments appartenant à tous les A_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 25

- $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [k, k+1] = \cdots \cup [-2,-1] \cup [-1,0] \cup [0,1] \cup [1,2] \cup \cdots = \mathbb{R}$.
- $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}} [-k, k] = \{0\}$.

On définit de manière analogue les symboles $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}}$, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}$, *etc.*.

Vous connaissez depuis le collège des produits cartésiens, mais vous n'avez jamais employé le mot. Par exemple, les vecteurs de la géométrie euclidienne peuvent être repérés par un couple abscisse/ordonnée noté (x, y) avec x, y deux réels. L'ensemble de ces couples forme l'ensemble des points du plan, et est noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou encore $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 13 | Produit cartésien

Soient $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ une collection de n ensembles. Alors on appelle *produit cartésien de* $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_n$ l'ensemble :

$$\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in \mathrm{E}_i\right\}.$$

Plus particulièrement :

- Si $\mathrm{E}_1 = \cdots = \mathrm{E}_n = \mathrm{E}$, on note $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n = \mathrm{E}^n$.
- Si $\mathrm{E}_1 = \cdots = \mathrm{E}_n = \mathrm{E}$ et $n = 2$ (*resp.* $n = 3$) : les éléments de E^2 (*resp.* E^3) sont appelés les *couples d'éléments de* E (*resp.* les *triplets d'éléments de* E).

Pour le moment nous allons assez peu utiliser cet objet à des fins mathématiques, mais plutôt pour introduire efficacement des variables comme le précise la remarque qui suit.

Remarque 11 (Se servir du produit cartésien pour quantifier des variables)
Pour deux ensembles, la notion de produit cartésien possède une intuition géométrique, comme nous l'avons précisé en introduction. La notion de produit cartésien sert souvent aussi à quantifier efficacement des variables. Ainsi, si E, F sont deux ensembles.

écrire « soient $x \in \mathrm{E}, y \in \mathrm{F}$ » $\quad = \quad$ écrire « soit $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ »

Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, un abus de notation courant est « soit $x, y \in \mathrm{E}$ ». *(En lieu et place de « soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ »)*

Exemple 26

1. Écrire le produit $\{1, 2, 3\} \times \{0, 1\}$.

2. Dessiner l'ensemble $[0, 1] \times [2, 3[$.

3. RAISONNEMENTS

3.1. Sur l'existence/unicité de propositions

Cadre

Dans toute cette sous-section, on considère un prédicat $\mathscr{P}(x)$, x appartenant à un ensemble E.

Méthode Montrer/Nier « $\exists x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ »

- **[Montrer]** Il s'agit de trouver un exemple de $x \in \mathrm{E}$ qui vérifie la propriété $\mathscr{P}(x)$.
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que **pour tout** $x \in \mathrm{E}$, $\mathscr{P}(x)$ est fausse.

Exemple 27 Montrer que : $\exists x \in [0,3], \quad x^2 - 3x + 2 < 0.$

Remarque 12 Parfois, on pourra faire appel à un théorème qui prouvera l'existence d'un x vérifiant $\mathscr{P}(x)$ sans pour autant donner d'expression de x (par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'un nombre x tel que $f(x) = 0$ si f est une fonction).

Méthode Montrer/Nier « $\forall x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ »

- **[Montrer]**
  1. On commence par fixer un élément x de E avec lequel on va travailler. La rédaction type est donc : « *Soit x un élément de* E*, montrons $\mathscr{P}(x)$* ».
  2. On démontre que $\mathscr{P}(x)$ est vraie par une suite de phrases qui commencent *toutes* par « Donc » ou « Or » (ou des connecteurs logiques).
     - Une phrase qui commence par « Donc » signifie qu'on fait une déduction.
     - Une phrase qui commence par « Or » signifie qu'on rappelle :
       - soit une hypothèse de l'énoncé,
       - soit un résultat qu'on a démontré avant dans la preuve.
  3. On écrit *toujours* à la fin de la preuve : « En conclusion, $\mathscr{P}(x)$ est vraie. ».
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer qu'**il existe** $x \in \mathrm{E}$, telle que $\mathscr{P}(x)$ soit fausse.

Exemple 28 Montrer que : $\forall x \geqslant 1, \quad x^2 \geqslant x.$

Méthode Montrer/Nier « $\exists! x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ »

- **[Montrer]**
  1. Existence On montre l'existence d'un x vérifiant la propriété comme précédemment.
  2. Unicité
     - Soit on montre que la manière dont on a construit l'élément x vérifiant $\mathscr{P}(x)$ permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'autre choix.
     - Soit on fixe deux éléments x_1 et x_2 de E tels que $\mathscr{P}(x_1)$ et $\mathscr{P}(x_2)$ sont vraies, et on démontre que $x_1 = x_2$ par une suite de phrases qui commencent toutes par « Donc » ou « Or ». La rédaction type est donc : « *Soient x_1, x_2 deux éléments de* E*, montrons que $x_1 = x_2$* ».
- **[Nier]** Soit on justifie que l'existence est en défaut (voir les méthodes précédentes), soit que l'unicité est en défaut : auquel cas, on se cherche $x_1, \neq x_2 \in \mathrm{E}$ de sorte que $\mathscr{P}(x_1), \mathscr{P}(x_2)$ soient vraies.

Remarque 13 L'existence et l'unicité peuvent aussi être démontrés d'un coup. Par exemple, en invoquant le théorème de la bijection pour les fonctions (voir cours de Terminale), on arrive à justifier l'existence et l'unicité de solutions à une équation.

Les exemples de ce type de preuve seront nombreux en fin d'année (notamment en Algèbre linéaire).

3.2. Sur les ensembles

Cadre

Dans toute cette sous-section, on considère deux ensembles A, B inclus dans un ensemble E.

Méthode **Montrer/Nier** « $A \subset B$ »

- **[Montrer]** Pour montrer que $A \subset B$, on se fixe $a \in A$ quelconque et on montre que $a \in B$. Autrement dit, on montre que tout élément de A est élément de B. La rédaction type est donc « Soit $a \in A$, montrons que $a \in B$ ».
- **[Nier]** Il s'agit de montrer qu' **il existe** $a \in A$, tel que $a \notin B$.

Méthode **Montrer/Nier** « $A = B$ »

- **[Montrer]** On a deux possibilités.
  - **[Par double inclusion]** On montre souvent *via* deux étapes, avec une *double inclusion*, que $A \subset B$ et $B \subset A$.
  - **[Par équivalences]** On montre parfois l'équivalence ci-après :

$$x \in A \iff x \in B.$$

- **[Nier]** Il s'agit de montrer $A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$ (voir la méthode précédente).

Exemple 29 Soit $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x-y=0, z=0\right\}$ et $B = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 x-y+z=0, x-y+3z=0$. Montrer que : $A = B$.

Exemple 30 On note $A = \{x \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des fonctions linéaires, et B l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $A \subsetneq B$.

3.3. Démonstration par disjonction de cas

Méthode **Disjonction de cas**

On sépare la démonstration d'une propriété en sous-cas, chacun de ces sous-cas (qui doivent, bien sûr, recouvrir l'ensemble des possibilités) permettant d'exploiter des informations supplémentaires débloquant le raisonnement.

Exemple 31 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{n+2} = (-1)^n$.

Exemple 32 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Rappel (Valeur absolue) On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$

Par exemple, $|2| = 2$ et $|-3| = 3$ (car $-3 < 0$ et $-(-3) = 3$). Par ailleurs, étant donnés a et b deux réels, on note $\max(a, b)$ le plus grand élément entre a et b. Par exemple : $\max(1, 3) = 3$.

Exemple 33 Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

3.4. Sur les liens logiques entre propositions

Cadre

Dans toute cette sous-section, on considère deux propositions logiques P, Q.

3.4.1. Implication

Rappel Rappelons que nous avions montré que $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ est équivalente à **non** $\mathrm{Q} \Longrightarrow$ **non** P. Nous avions appelé cette implication l'« implication contraposée ».

Méthode Démontrer par contraposée

Pour montrer $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$, on peut aussi montrer **non** $\mathrm{Q} \Longrightarrow$ **non** P. La rédaction type est donc « Supposons Q fausse, montrons que P est fausse ».

Exemple 34 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair. Qu'en déduit-on ?

Une autre rédaction du raisonnement par contraposition (où la propriété P n'est pas explicitée au départ) est le raisonnement *par l'absurde*.

Méthode Démontrer par l'absurde

On veut montrer une proposition Q. On suppose que Q est fausse, et on montre que cela implique une proposition qui est fausse (ou « absurde »), notée P'. Cela prouve que Q était vraie.

En effet, si on montre **non** $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}'$ alors par contraposition **non** $\mathrm{P}' \Longrightarrow \mathrm{Q}$. Puisque $\mathrm{P} =$ **non** P' est vraie et que $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$, cela prouve bien que Q est vraie.

Exemple 35 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}, \quad \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$.

Méthode **Montrer/Nier** « $P \implies Q$ »

- **[Montrer]**
  - **[1ère méthode]** Par preuve directe,
  - **[2ème méthode]** ou par l'absurde ou contraposée.
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que P est vraie alors que Q est fausse.

Exemple 36 **(Preuve directe)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est pair alors n^2 est pair. [a]

Méthode **Montrer/Nier** « $P \iff Q$ »

- **[Montrer]**
  - **[1ère méthode]** par double implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$,
  - **[2ème méthode]** ou par équivalences successives $P \iff \dots \iff \dots \iff Q$.
- **[Nier]** Il s'agit de montrer que l'une des deux implications est fausse.

Exemple 37 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(4x(x-1) = -1) \iff x = \dfrac{1}{2}$.

a. Dans un exemple précédent, nous avions étudié la contraposée de cette implication.

Exemple 38 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que :

$$f \text{ est paire et impaire } \iff f \text{ est la fonction nulle.}$$

Considérons P_1, P_2, P_3 trois propositions logiques.

Méthode **Montrer** $P_1 \iff P_2 \iff P_3$

Il faut et il suffit de montrer :

$$P_1 \implies P_2 \implies P_3 \implies P_1.$$

3.5. Par récurrence

Cette dernière section sera traitée plus tard dans l'année.

Il en existe différents types, l'objectif étant de démontrer des prédicats dépendant d'un entier n, naturel ou même relatif. Les raisonnements par récurrence seront principalement fondés sur la propriété de transitivité de l'implication $\implies$.

Attention

On ne fait **jamais** de récurrence pour prouver une propriété qui dépend d'un nombre réel.

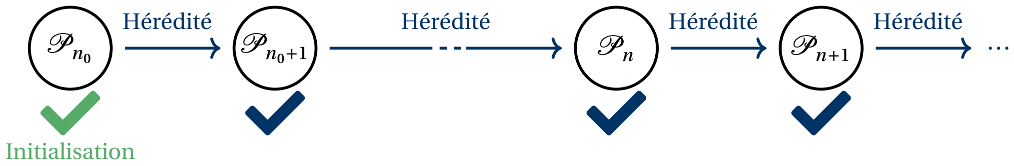
3.5.1. Simple

Théorème 1 | Principe de récurrence simple

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- **[Initialisation]** $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,
- **[Hérédité]** $\forall n \geqslant n_0, \quad \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n \geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.



Remarque 14

- Le principe de récurrence peut être vu comme le jeu qui consiste à faire tomber des dominos en cascade : pour que cela fonctionne, il faut s'assurer que chaque domino soit placé de sorte qu'il entraîne le suivant dans sa chute, c'est l'hérédité, et il faut aussi faire tomber le premier domino, c'est l'initialisation.
- Le raisonnement par récurrence est adapté à tous les objets mathématiques définis par récurrence (suites récurrentes par exemple). Le plus souvent, on vérifiera l'initialisation au rang $n_0 = 0$.

Exemple 39 (Terme général de suite récurrente à 1 pas) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par récurrence par

$$u_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n): \quad u_n = 1-2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Initialisation.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 1$.

Exemple 40 (Divisibilité) Montrons que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ est un multiple de 9, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathscr{P}(n): \quad «\exists k_n \in \mathbb{Z}, \quad 13^n - 4^n = 9k_n» \text{ est vraie.}$$

Initialisation.

$13^0 - 4^0 = 0 = 0 \times 9$, *la propriété* $\mathscr{P}(0)$ *est vraie en choisissant* $k_0 = 9$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $13^n - 4^n = 9k_n$ pour un certain $k_n \in \mathbb{Z}$, et on va montrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe $k_{n+1} \in \mathbb{Z}$ tel que : $13^{n+1} - 4^{n+1} = 9k_{n+1}$.

Or,

$$\begin{aligned}
13^{n+1} - 4^{n+1} &= (9+4) \times 13^n - 4 \times 4^n \\
&= 9 \times 13^n + 4 \times (13^n - 4^n) \\
&= 9 \times 13^n + 4 \times 9k_n \quad \text{hypothèse de récurrence} \\
&= 9\underbrace{(13^n + 4k_n)}_{:=k_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Il est clair que 9×13^n *est un multiple de* 9 *et, par hypothèse* $13^n - 4^n$ *est un multiple de* 9. *Ainsi* $13^{n+1} - 4^{n+1}$ *est bien un multiple de* 9.
On a donc montré que $\mathscr{P}(n)$ *implique* $\mathscr{P}(n+1)$.
Par récurrence on ainsi montré que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ *est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ *est un multiple de* 9.

Méthode Rédaction d'une récurrence simple

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

1. Initialisation : montrer $\mathscr{P}(n_0)$.
2. Hérédité : « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. »

[…] « Alors : par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ ».

Attention à la rédaction d'une récurrence

- Dans l'hérédité, on n'écrit **surtout pas** « Supposons que pour tout n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie » — sinon la récurrence est terminée, c'est justement ce que l'on veut montrer.
- Une erreur moins grave à présent, mais c'est incorrect : « Supposons $\mathscr{P}(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. » Le problème est que la bonne traduction de « pour un certain $n \in \mathbb{N}$ » est « $\exists n, \mathscr{P}(n)$ est vraie », ce qui ne correspond pas au principe de récurrence.

3.5.2. Double

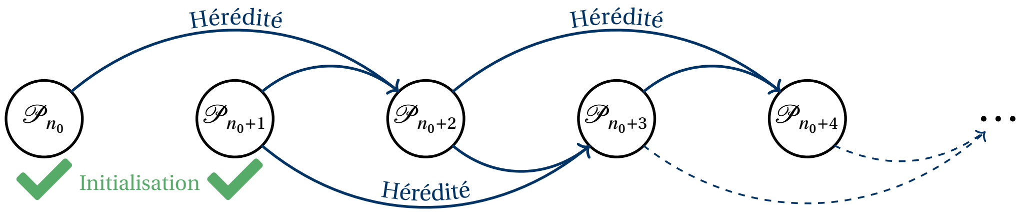
Théorème 2 | Principe de récurrence double
Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- **[Initialisation double]** $\quad \mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **[Hérédité]** $\quad \forall n \geqslant n_0+1, \quad \mathscr{P}(n-1)$ **et** $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors : $\quad$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.

Remarque 15

- Dans cette seconde version de la récurrence, on « gagne » finalement dans l'hérédité (l'hypothèse de récurrence fait intervenir deux propriétés au lieu d'une) mais on y « perd » dans l'initialisation puisqu'il faut montrer deux propriétés.
- On peut aussi très bien supposer dans l'hérédité $\mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ et montrer $\mathscr{P}(n+2)$, à voir en fonction du contexte ce qui est le plus intuitif.



Exemple 41 (Terme général de suite récurrente à 2 pas) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Montrons par récurrence la propriété $\quad \mathscr{P}(n) : \quad u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation.

Les propriétés $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont manifestement vraies par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que les propriétés $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies et on va monter qu'alors $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

On sait que $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, or, par hypothèse de récurrence, $u_n = 1$ et $u_{n+1} = 1$, ainsi :

$$u_{n+2} = 2 \times 1 - 1 = 1.$$

La propriété $\mathscr{P}(n+2)$ est donc vraie.

Par principe de récurrence double, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

Transformer une récurrence double en simple. Une récurrence double peut aussi être rédigée avec une récurrence simple sur l'hypothèse

$$\mathbb{P}(n) \quad « \mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1) »,$$

mais cela paraît moins naturel. Voir l'exemple ci-après.

Exemple 42 (Récurrence doubles ↔ Récurrence simple) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

Récurrence double	Récurrence simple
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathscr{P}_n : \quad u_n = 3^n$. **Initialisation.** On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$, ainsi $\boxed{\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1}$ sont vérifiées. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\boxed{\mathscr{P}_n, \mathscr{P}_{n+1}}$ sont vérifiées, donc que $u_n = 3^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1}$, alors par définition de la suite : $\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3^{n+1} \\ &= (2+1) \times 3^{n+1} \\ &= 3^{n+2}. \end{aligned}$ Ainsi $\mathscr{P}_{n+2}$ est bien vérifiée. D'après le principe de récurrence, $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathbb{P}_n : \quad u_n = 3^n, u_{n+1} = 3^{n+1}$. **Initialisation.** On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$, ainsi $\boxed{\mathbb{P}_0}$ est bien vérifiée. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\boxed{\mathbb{P}_n}$ est vérifiée, donc que $u_n = 3^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1}$, alors par définition de la suite : $\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} + 3u_n \\ &\geqslant 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n \quad \text{hypothèse de récurrence, } 1+a \geqslant 0 \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 3^{n+1} \\ &= (2+1) \times 3^{n+1} \\ &= 3^{n+2}. \end{aligned}$ Ainsi $\mathbb{P}_{n+1}$ est bien vérifiée. D'après le principe de récurrence, $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 43 Rédiger l'Exemple 41 précédent à l'aide d'une récurrence simple.

3.5.3. Forte

Théorème 3 | Principe de récurrence forte

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- **[Initialisation]** $\mathscr{P}(n_0)$ sont vraies.
- **[Hérédité]** $\forall n \geqslant n_0, \quad \left(\mathscr{P}(n_0) \text{ \underline{et} } \mathscr{P}(n_0+1) \text{ \underline{et} } \ldots \text{ \underline{et} } \mathscr{P}(n)\right) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n \geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.

Remarque 16 Finalement, on peut toujours utiliser une récurrence forte en lieu et place d'une double. Dans le cas d'une récurrence forte, on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang ambiant alors que dans le cas d'une récurrence double on la suppose vraie aux deux rangs précédents.

Exemple 44 **(Suite définie par tous ses termes précédents)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_n.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 2^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
<u>Indication :</u> On pourra utiliser librement la formule suivante, que nous reverrons plus tard : pour tout $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $q^0 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Initialisation.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on suppose que les propriétés $\mathscr{P}(1), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies et on va monter qu'alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence forte, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 2^{n-1}$.

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les bases de la logique (définition et table)
   - l'équivalence ☐
   - la négation ☐
   - la conjonction ☐
   - la disjonction ☐
   - l'implication ☐
2. Concernant les ensembles (définition logique et visualisation en diagrammes) :
   - la notion d'ensemble ☐
   - l'union, l'intersection ☐
   - l'inclusion et le complémentaire ☐
3. Savoir utiliser les quantificateurs et rédiger des phrases sans mélanger texte et quantificateur ☐
4. Concernant les raisonnements, savoir maitriser et rédiger :
   - le raisonnement direct ☐
   - le raisonnement par contraposée ☐
   - le raisonnement par l'absurde ☐
   - le raisonnement par disjonction de cas ☐
   - le raisonnement par analyse et synthèse ☐
   - le raisonnement par récurrence ☐

Parcours du TD

Plusieurs « parcours » sont proposés pour ce TD.

Exercices d'entrainement : ils sont faits pour travailler les notions du cours et sont généralement des applications directes (mais peuvent être techniques). Inutile de travailler forcément tous les exercices de ce parcours.

Exercices classiques : les méthodes à maitriser absolument. Il est conseillé de tous les aborder.

Pour aller plus loin : exercices plus difficiles, ou plus techniques. À ne regarder que si les autres parcours ont été correctement réalisés.

4.1. Logique et quantificateurs

Exercice 1 | Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0.$
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ y \geq 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2.$
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2.$
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2.$
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

Solution (exercice 1) Étude de chaque assertion :

1. Faux, on peut prendre comme contre exemple $x = -1$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 0.$
2. Vrai, on peut prendre par exemple $y = 1$.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ y < 0.$
3. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y = \sqrt{x}$. On a bien alors $y^2 = x$. On remarque que l'on peut également prendre $y = -\sqrt{x}$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2.$
4. Faux : soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x = y^2 + 1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
   Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^+,\ x \neq y^2.$
5. Faux : soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x = y^2$, alors en particulier, pour $y = 0$ on aurait $x = 0$, et pour $y = 1$ on aurait $x = 1$. Ceci est absurde.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2.$
6. Faux : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche y tel que $x + y > 0$ est faux. Il suffit pour cela de prendre y tel que $x + y \leqslant 0$ c'est-à-dire $y \leqslant -x$. Prenons par exemple $y = -x - 1$. On a alors $x + y = -1 \leqslant 0$. Donc on a bien un contre-exemple.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0.$
7. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche y tel que $x + y > 0$, c'est-à-dire $y > -x$. Prenons par exemple $y = -x + 1$. On a bien alors $x + y = 1 > 0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0.$
8. Faux : on peut prendre comme contre-exemple $x = -1$ et $y = -2$. Alors $x + y = -3 < 0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0.$

Exercice 2 | **Propositions sur les suites** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis les nier :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $m \in \mathbb{R}$.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

Solution (exercice 2) Étude de chaque propriété :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq u_0$
4. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
   Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$.
6. $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$
   Négation : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$.

Exercice 3 | **Propositions sur les fonctions** Soit (f,g) deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. L'application f est croissante.
2. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geq 0$.
3. La fonction f est paire.
4. La fonction f ne s'annule jamais.
5. La fonction f est inférieure à la fonction g.
6. La fonction f est périodique.

Solution (exercice 3) Étude de chaque propriété :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ (a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b))$
   Négation : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b$ et $f(a) > f(b)$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) < 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > g(x)$.
6. $\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$
   Négation : $\forall T \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x+T) \neq f(x)$.

Exercice 4 | Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leqslant x < y$.
2. $(x^2 = 1, x \in \mathbb{R}^+) \Longrightarrow x = 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x' \in \mathbb{R},\ (x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

Solution (exercice 4)

1. L'inégalité $1 \leqslant x < y$ correspond à $1 \leqslant x$ et $x < y$. Or la négation de (A et B) est (non A) ou (non B). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x < 1 \text{ ou } x \geq y}$.
2. La négation de P $\Longrightarrow$ Q est (P et (non Q)). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x^2 = 1, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \neq 1}$.
3. La négation est : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} : x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')}$.

Exercice 5 | Montrer que, pour tous réels x et y,

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$$

où $\min(x,y)$ désigne la plus petite valeur entre x et y (par exemple, $\min(1,4) = 1$).

Solution (exercice 5) Comme dans le cours, on raisonne par disjonction de cas suivant le signe de $x-y$.

- **[1er cas.]** si $x-y \geqslant 0$, à savoir si $x \geqslant y$, on a :
$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y,$$
sachant que : $\min(x,y) = y$ puisque $x \geqslant y$. On a bien montré que : $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.
- **[2nd cas.]** $x-y < 0$, à savoir si $x < y$, on a :
$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(-(x-y))}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$
sachant que : $\min(x,y) = x$ puisque $x < y$. On a bien montré que : $\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

Dans tous les cas ; on a : $\boxed{\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}}$.

4.2. Ensembles

Exercice 6 | Soit $E = \{1\}$. Déterminer $\mathscr{P}(E)$ puis $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

Solution (exercice 6) oit $E = \{1\}$. On a $\boxed{\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}\}}$. Puis, on obtient : $\boxed{\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, \{1, \varnothing\}\}}$.

Exercice 7 | Montrer que

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x+y = 1\right\} = \{(x, 1-2x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Représenter graphiquement cet ensemble.

Solution (exercice 7) Notons $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y=1\}$, et $B = \{(x,1-2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\subset}$ Soit $(x,y) \in A$. Alors $2x+y=1$ et $y=1-2x$. Donc $(x,y)=(x,1-2x) \in B$.

$\boxed{\supset}$ Soit $(x,y) \in B$. Alors $(x,y)=(x,1-2x)$ donc $y=1-2x$ et donc $(x,y) \in A$.

En conclusion : $\boxed{A = B}$. On reconnaît la droite d'équation $y=-2x+1$ donc d'ordonnée à l'origine 1 et de coefficient directeur -2.

Exercice 8 | ♥ On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y=2\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (3x+y+2)(x+2y+4) \geq 0\}.$$

Montrer que $A \subset B$. A-t-on égalité ?

Solution (exercice 8)

- Montrons que $A \subset B$: soit $(x,y) \in A$, montrons que $(x,y) \in B$. Par définition de l'ensemble A, on sait que $y = x-2$. Pour montrer que $(x,y) \in B$, vérifions que : $(3x+y+2)(x+2y+4) \geq 0$. On a :
$$(3x+y+2)(x+2y+4) = (3x+x-2+2)(x+2x-4+4) = 4x \times 3x = 12x^2 \geq 0.$$
Ainsi on a bien que $(x,y) \in B$ et on vient de montrer que $\boxed{A \subset B}$.
- On veut montrer que l'on n'a pas égalité. Il suffit de trouver un couple $(x,y) \in B$ tel que $(x,y) \notin A$. Par exemple $(1,0)$ est bien dans l'ensemble B mais il n'est pas dans l'ensemble A.

Exercice 9 | ♥ Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que : $A = B \iff A \cup B = A \cap B$.

Solution (exercice 9) On procède par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $A = B$. Montrons que $A \cup B = A \cap B$. Mais $A \cup B = A \cup A = A$, $A \cap B = A \cap A = A$, donc $A \cup B = A \cap B$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $A \cap B = A \cup B$. Alors montrons que $A = B$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$ par hypothèse, donc $x \in A$ et $x \in B$. En particulier, $x \in B$.

$\boxed{\supset}$ S'obtient de la même manière par symétrie des rôles entre A et B.

Conclusion $\boxed{A = B \iff A \cup B = A \cap B.}$

Exercice 10 | ♥ Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que : $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$.

Solution (exercice 10) On doit montrer une équivalence, on raisonne donc par double implication.

- On commence par exemple par supposer que $B \subset A \subset C$. Montrons que $A \cup B = A \cap C$. Comme $B \subset A$, on a : $A \cup B = A$ (faire un dessin pour le voir). De même, comme $A \subset C$, on a : $A \cap C = A$. Ainsi, on a : $A \cup B = A = A \cap C$. Ainsi on a montré l'implication directe.
- On suppose alors que $A \cup B = A \cap C$. Montrons que $B \subset A \subset C$:
  - ◇ On montre d'abord que $B \subset A$: Soit $x \in B$. Comme $x \in B$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in A$. On a bien montré que $B \subset A$.
  - ◇ On montre ensuite que $A \subset C$: Soit $x \in A$. Comme $x \in A$, en particulier $x \in A \cup B$. Mais par hypothèse, on sait que $A \cup B = A \cap C$ ainsi on a : $x \in A \cap C$. Donc $x \in C$ et $x \in A$. En particulier, on a bien que $x \in C$. On a bien montré que $A \subset C$.

  Ainsi on a montré que $B \subset A \subset C$ et on a démontré l'implication réciproque.

Par double implication, on a bien montré que $\boxed{(A \cup B = A \cap C) \iff B \subset A \subset C.}$

Exercice 11 | Soit E un ensemble. Montrer par contraposition l'assertion suivante : $\forall A, B, C \in \mathscr{P}(E), \quad (A \cap B = A \cap C, \quad A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C.$

Solution (exercice 11) Soit $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$. Montrons par contraposée que : $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$.

On suppose donc que $B \neq C$, à savoir soit qu'il existe un élément d'un ensemble qui n'est pas dans l'autre. Comme B et C jouent des rôles symétrique, on peut supposer par exemple qu'il existe $x \in B$ tel que $x \notin C$. On cherche à montrer que $A \cap B \neq A \cap C$ **ou** $A \cup B \neq A \cup C$. On doit étudier deux cas :

- Si $x \in A$: on a alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$. Or $x \notin C$, donc $x \notin A \cap C$. Donc : $A \cap B \neq A \cap C$.
- Soit $x \notin A$: on a alors $x \in A \cup B$ car $x \in B$. Par contre $x \notin A \cup C$ car $x \notin A$ et $x \notin C$. Donc : $A \cup B \neq A \cup C$.

On a bien montré dans les deux cas que l'on avait : $A \cap B \neq A \cap C$ **ou** $A \cup B \neq A \cup C$. Par contraposée, on a donc montré que : $\boxed{(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C}$.

4.3. Raisonnements : implication, équivalence

Exercice 12 | On considère les deux propositions suivantes :

- A : « m et n sont deux entiers pairs », et
- B : « $m+n$ est un entier pair ».

A-t-on : $A \Longrightarrow B$? $B \Longrightarrow A$? $A \iff B$?

Solution (exercice 12) On a $\boxed{A \implies B}$: en effet, si m et n sont pairs, alors il existe k et k' entiers tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$. On a donc $m+n = 2k+2k' = 2(k+k')$, ce qui implique $m+n$ pair.
Le sens réciproque est faux, $\boxed{\text{B n'implique pas A}}$. Pour contre exemple on peut choisir $m = 3$ et $n = 5$. On a $3+5 = 8$: 8 est pair alors que 3 et 5 sont impairs.
On en déduit donc que $\boxed{\text{l'équivalence est fausse}}$.

Exercice 13 | ♥ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante : $x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0,\ y = 0$.

Solution (exercice 13) On montre l'équivalence par double implication. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $x = 0$ et $y = 0$. On a alors $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$. Ainsi, on a montré que $(x = 0 \text{ et } y = 0) \implies (x^2 + y^2 = 0)$.
- $\boxed{\Longrightarrow}$ On raisonne par contraposée. On suppose que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
  - Cas 1 : si $x \neq 0$. Alors $x^2 > 0$, et de plus $y^2 \geq 0$. Donc par somme $x^2 + y^2 > 0$, et donc $x^2 + y^2 \neq 0$.
  - Cas 2 : si $y \neq 0$. Le même raisonnement donne $x^2 + y^2 \neq 0$.

  Ainsi, par contraposée, on a montré que $(x^2 + y^2 = 0) \implies (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Conclusion : on a bien démontré que

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + y^2 = 0) \implies (x = 0 \text{ et } y = 0).}$$

Exercice 14 | ♥ Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Solution (exercice 14) On cherche à montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x + y > 2 \implies x > 1 \ \underline{\textbf{ou}}\ y > 1\big).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par contraposée, on suppose que $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$. Par propriété sur les inégalités, on peut additionner terme à terme les inégalités, on obtient ainsi $x + y \leqslant 2$. Donc $\text{non}(x + y > 2)$ est vérifiée.
Conclusion : par contraposée, on a bien démontré

$$\boxed{(x + y > 2) \implies (x > 1 \ \underline{\textbf{ou}}\ y > 1.)}$$

Exercice 15 | ♥ Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad x \leqslant \varepsilon \implies x = 0.$$

Solution (exercice 15) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on raisonne par contraposée. On suppose donc que $x \neq 0$, c'est-à-dire $x > 0$. On cherche alors à vérifier que : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$.

En faisant un dessin, on remarque qu'il suffit de prendre (par exemple) $\varepsilon = \frac{x}{2}$.
En effet, on a alors bien $\varepsilon > 0$ car $x > 0$ et $x > \frac{x}{2}$ (car $x > 0$) donc on a aussi $x > \varepsilon$.
D'où par contraposition :

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon) \implies x = 0.}$$

Exercice 16 | On a démontré dans le cours que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair alors n pair. En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solution (exercice 16) On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, par définition de $\mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et on peut de plus supposer que p et q sont tels que la fraction est irréductible. On a alors, en passant au carré que $p^2 = 2q^2$, ainsi p^2 est pair et d'après la propriété démontrée en cours, on sait alors que p est pair. Ainsi, il existe $p' \in \mathbb{Z}$, tel que $p = 2p'$. On a donc $(2p')^2 = 2q^2$, soit $4(p')^2 = 2q^2$, puis en simplifiant $q^2 = 2(p')^2$ et q^2 est ainsi pair. Puis, q est pair. Contradiction car on a supposé la fraction irréductible. Ainsi, $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$.

4.4. Raisonnement par récurrence

Cette dernière section sera traitée plus tard dans l'année.

Exercice 17 | Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n - 4. \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Solution (exercice 17) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 2 \times 5^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. On a : $2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ avec $u_0 = 3$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2 \times 5^n + 1$, montrons que $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} + 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 4 \\ &= 5 \times (2 \times 5^n + 1) - 4 \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\ &= 2 \times 5^{n+1} + 5 - 4 \\ &= 2 \times 5^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 18 | Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n \geq 2$.

Solution (exercice 18) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Initialisation. On a : $u_1 = 5$ avec $5 \geqslant 2$, donc $u_1 \geqslant 2$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 2$, montrons que $u_{n+1} \geqslant 2$.
Puisque $u_n \geq 2$, on a : $u_n + 2 \geq 4$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient :

$$\sqrt{u_n+2} \geq \sqrt{4}$$

ce qui donne, sachant que $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ et que $\sqrt{4} = 2$:

$$u_{n+1} \geq 2,$$

d'où le résultat par récurrence.

Exercice 19 | Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2n(n-1)$.

Solution (exercice 19) Notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = 2n(n-1)$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$, on a bien : $2 \times 0 \times (0-1) = 0 = u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2n(n-1)$. Montrons que $u_{n+1} = 2n(n+1)$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 4n \\ &= 2n(n-1) + 4n \quad \textit{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2n^2 - 2n + 4n \\ &= 2n^2 + 2n \\ &= 2n(n+1) \quad \textit{en factorisant par } 2n \\ &= 2(n+1)(n+1-1). \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire, d'où le résultat par le principe de récurrence.

Exercice 20 | On définit une suite (u_n) par :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Solution (exercice 20) Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Initialisation. pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

- D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_0 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^1 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_1 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^2 + (-1)^1 = 4 - 1 = 3$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$, montrons que $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+3}$.
Par définition de la suite, on sait que : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$. Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2(2^{n+1} + (-1)^n) \\ &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} + 2(-1)^n \\ &= 2^{n+2}(1+1) + (-1)^n(-1+2) \\ &= 2^{n+3} + (-1)^n. \end{aligned}$$

Or $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n$. Ainsi on a : $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+2}$, et $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion : il résulte du principe de récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n.$$

Exercice 21 | Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ la suite définie par ses termes impairs et pairs : $u_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{2n} = 2u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{2n+1} = u_n + u_{n+1}$.

1. Calculer $u_1, \ldots, u_4$ puis conjecturer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. L'établir par récurrence.

Solution (exercice 21)

1. Calculons les premiers termes afin d'établir une conjecture. On a

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 2u_1 = 2 \\ u_3 &= 1 + 2 = 3 \\ u_4 &= 2u_2 = 4. \end{aligned}$$

On conjecture que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = n}$. Montrons cette propriété par récurrence forte.

2. **Initialisation.** La propriété est initialisée pour $n = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $u_k = k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, et montrons que $u_{n+1} = n + 1$ par disjonction de cas. Alors

- si n est pair, il existe un entier k de sorte que $n = 2k$, alors $u_{n+1} = u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} = k + k + 1$ par hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} = 2k + 1 = n + 1$, la propriété est démontrée.
- Si n est impair, il existe un entier k de sorte que $n = 2k + 1$, alors $u_{n+1} = u_{2k+2} = u_{2(k+1)} = 2u_{k+1} = 2(k + 1)$ par hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} = 2k + 2 = n + 1$, la propriété est démontrée.

En conclusion, par principe de récurrence forte, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = n.$$

Exercice 22 | ♥ Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 4, \quad n^2 \leqslant 2^n$. <u>*Indication :*</u> *Dans l'hérédité, on cherchera à multiplier par 2 l'hypothèse de récurrence*

Solution (exercice 22)

Initialisation. Pour $n = 4$, la propriété est $4^2 = 16 \leqslant 2^4 = 16$. Elle est donc vérifiée.

Hérédité. Soit $n \geqslant 4$ tel que que $n^2 \leqslant 2^n$, montrons que $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. Alors en multipliant l'hypothèse de récurrence par 2, on déduit :

$$2n^2 \leqslant 2^{n+1}.$$

Il suffit alors d'établir que $(n+1)^2 \leqslant 2n^2$, cela impliquera que $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. Mais

$$\begin{aligned}(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leqslant 2n^2 &\iff 2n + 1 \leqslant n^2 \\ &\iff 0 \leqslant n^2 - 2n - 1.\end{aligned}$$

De plus, le discriminant de $x \longmapsto x^2 - 2x - 1$ est 8, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x - 1 = \left(x - (1 + \sqrt{2})\right)\left(x - (1 - \sqrt{2})\right).$$

Mais, $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$, le trinôme précédent est positif à l'extérieur des racines, et $n \geqslant 4$ donc $n^2 - 2n - 1$ est positif. C'est terminé. Par principe de récurrence, on a établi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \quad n^2 \leqslant 2^n}.$$

Exercice 23 | Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

Solution (exercice 23)

Initialisation. Pour $n = 0$, la propriété est $(1 + a)^0 = 1 \geqslant 1$, elle est donc vérifiée.

Hérédité. Soit n tel que c'est-à-dire $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$. Alors montrons que $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$. On a :

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n(1 + a) && \textit{hypothèse de réc} \\ &\geqslant (1 + a)(1 + na) \\ &\geqslant 1 + na + a + na^2 && na^2 \geqslant 0 \\ &\geqslant 1 + (n+1)a + 0.\end{aligned}$$

Donc par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + a)^n \geqslant 1 + na}.$$