Chapitre (ALG) 1 — Logique, Rudiments ensemblistes & Raisonnements

La logique est l'hygiène des Mathématiques

— **André Weil**

Résumé & Plan

Dans ce chapitre, nous allons clarifier et peaufiner la rédaction des Mathématiques. On formalise en plus les différents types de raisonnements qui peuvent apparaitre dans une démonstration (absurde, contraposée, récurrence *etc.*).

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Ce chapitre un peu particulier ne sera pas traité de manière linéaire au début de l'année. Nous aborderons :
- **les Sections 1 et 2 dès maintenant,**
- **la Section 3 plus tard dans l'année.**

Les Mathématiques sont construits à partir d'axiomes — c'est-à-dire des faits et consensus que nous ne cherchons pas à démontrer — et à partir desquels nous déduisons des propositions/théorèmes *etc.*, si possible vrais. L'objectif de ce chapitre est de formaliser les déductions de nouveaux énoncés (symboles logiques, techniques de preuve, *etc.*).

1. LOGIQUE ÉLÉMENTAIRE

Remarque 1 Cette section fait déjà appel aux sous-ensembles usuels de nombres réels ($\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ *etc.*), ils sont déjà connus depuis les classes antérieures mais seront revus dans la Section 2.2 (à consulter si besoin).

1.1. Proposition logique

Définition 1 | Proposition
- On appelle *proposition* ou *assertion* une affirmation concernant un ou plusieurs objets mathématiques qui est, soit vraie, soit fausse.
- La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai ou le faux de cette proposition (mais pas les deux).

Définition 2 | Équivalence de propositions
Deux propositions sont dites *équivalentes* si elles ont même valeur de vérité.

Notation

On notera P $\iff$ Q lorsque deux propositions P, Q sont équivalentes.

Exemple 1

- « $3 \leqslant 4$ » est vraie, « $2^2 = 5$ » est fausse.
- « Il ne pleut jamais à Bordeaux », « Tous les élèves de la 1BC1 aiment les Mathématiques » sont équivalentes.
- « Tout nombre entier admet une racine carrée entière » est fausse.
- « Il existe un plus petit entier naturel » est vraie.

(Booléens) En Python, il est très facile de faire différents tests logiques pour obtenir la valeur de vérité d'une proposition. Nous le verrons dans le cours d'Informatique, mais voici quelques exemples.

```
>>> 2**2 # syntaxe d'une puissance
4
>>> 2**2 == 5
False
>>> 3 <= 4
True
>>> 3 < 4
True
```

Définition 3 | Conjecture

Une *conjecture* est une assertion non prouvée mais dont on pense que la valeur de vérité est vraie.

Exemple 2

- La conjecture de GOLDBACH dit que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers (ce n'est pas prouvé).
- Au lycée, vous aviez l'habitude d'établir des conjectures d'après les figures obtenues à la calculatrice, avant de les prouver mathématiquement.

Remarque 2 (Axiomatique de la logique) On a interdit depuis le début qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse, mais interdit aussi qu'une proposition soit autre chose que vraie ou fausse. Ces deux principes s'appellent le principe de *non-contradiction* et le principe du *tiers exclu*. *(on évitera donc les énoncés contradictoires du type « cette phrase est fausse », qui est subjectif et peut donc être considéré comme vrai et faux en fonction du lecteur)* Ces deux principes de base ont fondé la logique mathématique telle que nous l'utilisons habituellement, cependant, ils ne sont pas universellement acceptés : en effet, en 1931 GÖDEL démontra que dans tout système axiomatique de logique (tel que nous les construisons aujourd'hui), il subsiste des énoncés indécidables : dont on ne peut prouver qu'ils sont vrais ou faux.

1.2. Quantificateurs

On se donne un ensemble E et $P(x)$ une proposition dont la valeur de vérité est fonction d'un élément x variable dans E. On ne peut pas dire si la proposition P est vraie ou fausse tant qu'on ne sait pas ce que vaut x.

Définition 4 | Predicat

Une proposition logique $P(x)$, dont la valeur de vérité est fonction d'un élément x variable dans E, s'appelle un *prédicat*.

Exemple 3

- $P(x)$ « $x^2 = 1$ » dépendant d'un réel x. Le cours de Mathématiques nous dit que « $x^2 = 1$ » est vraie quand $x = \pm 1$ uniquement.
- $P(n)$ « $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ » dépendant d'un entier n. Le cours de Mathématiques nous dit que cette proposition est toujours vraie, nous le verrons dans le Chapitre (ALG) 4.

Pour simplifier l'écriture des propositions on utilisera des symboles appelés quantificateurs.

Notation Quantificateurs

Soit $P(x)$ un prédicat vrai ou non pour x dans un certain ensemble E. On appelle *quantificateur* les symboles qui abrègent les propositions ci-après :

- « $\forall x \in E$, $P(x)$ vraie » qui signifie « **pour tout** x, telle que $P(x)$ soit vraie »,
- « $\exists x \in E$, $P(x)$ vraie » qui signifie « **il existe** x, telle que $P(x)$ soit vraie »,
- « $\exists!\, x \in E$, $P(x)$ vraie » qui signifie « **il existe un unique** x, telle que $P(x)$ soit vraie »,

Attention

Il faut bien comprendre la différence entre les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ » : il n'est pas du tout pareil de dire que « il existe une voiture jaune » ou « toutes les voitures sont jaunes ».

Remarque 3 (Les quantificateurs ne sont pas toujours formellement écrits)
Le quantificateur universel est parfois implicite dans les énoncés mathématiques. Par exemple, le « soit » cache souvent un « $\forall$ ».
Par exemple, l'énoncé « Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n+1)$ est pair » s'écrit :

« $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n+1)$ est pair ».

On peut alors écrire des propositions logiques de manière plus condensée en utilisant ces symboles.

Exemple 4 Résumer en une phrase chaque proposition, et dire si elle est vraie ou fausse.

- $\exists n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 10$.
- $\exists ! n \in \mathbb{N}, \ 1 \leqslant 2n \leqslant 3$.
- $\forall x > 0, \exists y > 0, \ y^2 = x$.
- $\forall x > 0, \exists ! y > 0, \ y^2 = x$.
- $\forall x > 0, \exists ! y \in \mathbb{R}, \ y^2 = x$.

Attention Rédaction : pas de mélange mots/quantificateurs

Quand on rédige des Mathématiques, on essaie de ne pas mélanger les mots et les symboles. Ainsi,

- « x^2 est positif $\forall x$ » est une **mauvaise** rédaction. 😭
- « x^2 est positif pour tout réel x » est une **bonne** rédaction 😍,
- « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0$ » est une **bonne** rédaction 😍.

De plus, les quantificateurs sont toujours placés avant la proposition à quantifier.

Ordre des quantificateurs. Il est possible, et même fréquent en analyse, d'avoir plusieurs quantificateurs en cascade. On peut échanger deux quantificateurs identiques. Il est par exemple équivalent de dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, x+y \geqslant 0, \qquad \text{ou de manière condensée :} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, x+y \geqslant 0.$$
$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, x+y \geqslant 0$$

En revanche,

- L'assertion « $\forall x > 0, \exists y > 0, \ y^2 = x$ » est vraie, elle signifie « tout réel positif admet une racine carrée strictement positive ».
- Alors que l'assertion « $\exists y > 0, \forall x > 0, \ y^2 = x$ » est fausse, elle signifie « il existe un nombre réel qui est la racine carrée de tous les nombres réels ».

Attention Ne pas échanger l'ordre de deux quantificateurs différents

L'ordre dans lequel sont écrits les quantificateurs différents est **extrêmement** important. En particulier, un élément introduit par un symbole « il existe » ne peut dépendre que des éléments qui le précédent.

Exemple 5 Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \ x+y=0$,
- $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ x+y=0$.

La raison pour laquelle on ne peut échanger l'ordre d'un « $\forall$ » et d'un « $\exists$ » est que la variable apparaissant dans le second quantificateur dépend du premier.

1.3. Opérations logiques sur les propositions

Définition 5 | Négation, Ou, Et

Soient P et Q deux assertions. On définit alors les assertions suivantes.

- La *négation* de P, écrite « **non** P » ou plus simplement « non P », est l'assertion qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.
- L'assertion « P **ou** Q » ou plus simplement « P ou Q » est l'assertion qui est vraie si P est vraie ou Q *(ou éventuellement les deux !)* est vraie, *i.e.* si au moins une des deux propositions est vraie, et fausse si P et Q sont toutes les deux fausses.
- L'assertion « P **et** Q » ou plus simplement « P et Q » est l'assertion qui est vraie si P est vraie et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.

Remarque 4

- Quand on rédigera les Mathématiques dans de futurs chapitres, nous écrirons simplement ou et et au lieu de **ou** et **et** .
- Vous noterez que le « ou » mathématique est *inclusif*, ce qui n'est pas toujours le cas dans la langue française. Par exemple dans « Fromage ou Dessert » le « ou » est exclusif, vous ne pouvez pas prendre les deux.

(Booléens) Les opérations « et » (`and`) « ou » (`or`) sur les booléens `True` et `False` existent déjà en Python, tout comme la négation (`not`). Voici quelques exemples.

```
>>> V_1 = 2**2 == 5
>>> V_2 = 3 <= 4
>>> V_1 and V_2
False
>>> V_1 or V_2
True
>>> not V_1
True
```

Méthode 1 (Prouver une Négation, Ou, Et)

- Une proposition est vraie si et seulement si sa négation est fausse.
- Pour prouver que la proposition P **ou** Q est vraie, on prouve qu'au moins une des deux propositions est vraie.
- Pour prouver que la proposition P **et** Q est vraie, on prouve que les deux propositions sont vraies.

Exemple 6

- **non** $(3 \geqslant 4)$ est

  vraie puisque $3 < 4$ *est vraie,*
- $(3 \leqslant 4)$ **ou** $\left(2^2 = 5\right)$ est vraie, alors que $(2-1 \geqslant 0)$ **et** $(2^2 = 5)$ est fausse.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^3 - x > 0$. Vérifier que la proposition « $x > -1$ » **ou** « $x < 0$ » est vraie.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 3x \leqslant 0$. Vérifier que la proposition « $x \geqslant 0$ » **et** « $x \leqslant 3$ » est vraie.

Exemple 7

- On lance deux dés à six faces. On note P : « le résultat du premier lancer est un nombre pair » et Q : « le résultat du second lancer est un nombre pair ». La proposition P **ou** Q est

  « on obtient au moins un résultat pair parmi les deux lancers ».

- Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100. On pioche deux boules de l'urne. On note P : « le numéro de la première boule est impair » et Q : « le numéro de la seconde boule est impair ». Alors la proposition P **et** Q est

  « les deux numéros piochés sont des entiers impairs ».

Remarque 5 **(Représentation par tables de vérité)** On peut utiliser des tables de vérité pour résumer la Définition 5 précédente. Cela revient à indiquer dans chaque cellule du tableau le résultat des opérations précédentes en fonction de la véracité ou non des propositions données en entrée.

P	V	F
non P	F	V

P	Q	P **et** Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P **ou** Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Les tables de vérité permettent de démontrer efficacement des règles opératoires sur les propositions logiques (cela revient à investiguer tous les cas possibles sur les valeurs logiques de P et Q). Une table de vérité peut aussi permettre de simplifier une assertion d'apparence compliquée.

NÉGATION D'UNE PROPOSITION AVEC QUANTIFICATEURS. Commençons par un premier exemple issu de la langue française.

Exemple 8 Nier les assertions suivantes.

- « Tous les poissons sont rouges »
- Sur un damier, « il existe un pion noir »

Si on formalise un peu la première assertion, notant $\mathscr{P}$ l'ensemble des poissons, on a donc dit que :

$$\textbf{non}\ (\forall x \in \mathscr{P},\quad \text{le poisson } x \text{ est rouge}) \iff \exists x \in \mathscr{P},\ \textbf{non}\ (\text{le poisson } x \text{ est rouge}).$$

Nous utiliserons de manière générale la proposition ci-après.

Proposition 1 | Nier une proposition avec quantificateurs

- La négation de « Pour tout x de E, P(x) est vraie » est « Il existe $x \in$ E pour lequel P(x) est fausse ». De manière symbolique :
$$\textbf{non}\ (\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)) \iff \exists x \in \mathrm{E},\ \textbf{non}\ (\mathrm{P}(x)).$$
- La négation de « Il existe x de E, P(x) est vraie » est « Pour tout $x \in$ E, P(x) est fausse ». De manière symbolique :
$$\textbf{non}\ (\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)) \iff \forall x \in \mathrm{E},\ \textbf{non}\ \mathrm{P}(x).$$

Méthode 2 **(Nier une assertion avec des quantificteurs)** On garde l'ordre des quantificateurs, on transforme tous les « ∃ » en « ∀ » et tous les « ∀ » en « ∃ » puis on nie les expressions mathématiques subséquentes.

Exemple 9 Nier les assertions suivantes ; dans une urne contenant des boules rouges et noires, on pioche au hasard 3 boules. P_1 « On pioche 3 boules rouges », P_2 « On ne pioche aucune boule rouge ».

Exemple 10 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes :

- $\forall x \in \mathrm{I},\quad f(x) \neq 0,$ *(interprétation : la fonction f ne s'annule jamais)*

  $\exists x \in \mathrm{I},\quad f(x) = 0$
- $\forall y \in \mathbb{R},\quad \exists x \in \mathrm{I},\quad f(x) = y.$

  $\exists y \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \mathrm{I},\quad f(x) \neq y$
- $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\quad \forall x \in \mathrm{I},\quad f(x) \leqslant \mathrm{M}$ *(interprétation : la fonction f est majorée)*

  $\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\quad \exists x \in \mathrm{I},\quad f(x) > \mathrm{M}$

PROPRIÉTÉS SUR LES ASSERTIONS LOGIQUES. Comment ces opérations logiques se comportent-elles entre elles ? C'est ce que précise la prochaine proposition.

Proposition 2 | Négation d'ou / et

Soient P et Q deux assertions.

- **[Principe de non-contradiction]** P **et** (**non** P) est fausse. Toute proposition de cette forme est appelée une *contradiction*. *(Provient directement de ce qu'une proposition logique ne peut être vraie et fausse à la fois.)*
- **[Principe du tiers exclu]** P **ou** (**non** P) est vraie.
- **[Double négation]** **non** (**non** P) $\iff$ P.

Proposition 3 | Lois de De Morgan

Soient P et Q deux assertions.

- **[Négation d'une conjonction]** **non** (P **ou** Q) $\iff$ (**non** P) **et** (**non** Q),
- **[Négation d'une disjonction]** **non** (P **et** Q) $\iff$ (**non** P) **ou** (**non** Q).

Preuve Construire les tables de vérité associées. Montrons par exemple que :

non (P **ou** Q) $\iff$ (**non** P) **et** (**non** Q).

Exemple 11 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Exprimer la négation des propositions suivantes :

- $a > b$,
- $a \leqslant b$
- $a \leqslant b \leqslant c$
- $a < b \leqslant c$

Proposition 4 | Propriétés de ou / et

Soit P,Q et R trois assertions. Alors :

- **[Commutativité]** P **ou** Q $\iff$ Q **ou** P, P **et** Q $\iff$ Q **et** P.
- **[Associativité]**
(P **ou** Q) **ou** R $\iff$ P **ou** (Q **ou** R), (P **et** Q) **et** R $\iff$ P **et** (Q **et** R).
- **[Distributivité]**
(P **ou** Q) **et** (P **ou** R) $\iff$ P **ou** (Q **et** R), P **et** (Q **ou** R) $\iff$ (P **et** Q) **ou** (P **et** R).

Cette proposition, nous l'admettons, elle s'établit aussi en construisant les tables de vérité.

Remarque 6 **(Retenir la distributivité : analogie)** Imaginez que le symbole **ou** est un +, et le symbole **et** un ×. La seconde formule de distributivité se réecrit alors : $P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R)$.

1.4. Implication, Contraposée

- Moralement, écrire l'implication $P \implies Q$ (se lit « P implique Q ») signifie que si P est vraie, alors Q est vraie. Par exemple, si x est supérieur ou égal à 2, alors x est différent de 1, ce que vous notiez peut-être déjà au lycée de la façon suivante :
$x \geqslant 2 \implies x \neq 1$.
- Quand on dit qu'une proposition P en implique une autre Q, la seule chose qu'on affirme, c'est que si P est vraie, Q l'est *forcément, nécessairement, obligatoirement.* Dire que l'implication est fausse revient donc à dire que le passage de P à Q n'est *pas systématique, i.e.* que P est vraie sans que Q le soit. Dans toute autre situation, l'implication est vraie.
- Comment définir $P \implies Q$ à l'aide des connecteurs logiques déjà existants? Il est commode de saisir le sens de la négation de $P \implies Q$: en effet, intuitivement, l'implication $P \implies Q$ est fausse si P est vraie alors que Q est fausse. Ce qui se note avec nos symboles logiques de la manière suivante :

non (P $\implies$ Q) $\iff$ P *et* (*non* Q),

donc en prenant la négation :

(P $\implies$ Q) $\iff$ ((*non* P) *ou* Q).

On a alors notre définition de l'implication.

Définition 6 | Implication

Soient P et Q deux assertions.

- On définit la proposition « P *implique* Q », notée $P \implies Q$, comme étant :
$\boxed{(\textbf{non } P) \textbf{ ou } Q}$.

- Ainsi, « P *n'implique pas* Q », notée **non** (P $\Longrightarrow$ Q), est :

  $\boxed{\text{P } \textbf{et} \left(\textbf{non } \text{Q}\right)}$.

  Autrement dit, P $\Longrightarrow$ Q est fausse si P est vraie et Q est fausse.
- **[Vocabulaire]** De plus, lorsque P $\Longrightarrow$ Q, on dit aussi « si P est vraie, alors Q est vraie », et :
  - on dit que Q est une condition *nécessaire* pour que P soit vraie,
  - on dit que P est une condition *suffisante* pour que Q soit vraie.

On peut aussi écrire la table de vérité de P $\Longrightarrow$ Q.

P	Q	**non** P	P $\Longrightarrow$ Q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

On peut donc retenir la définition de l'implication ainsi :
- **Si P est vraie, alors P $\Longrightarrow$ Q est vraie uniquement si Q est vraie aussi.**
- **Si P est fausse, alors P $\Longrightarrow$ Q est toujours vraie.**

Remarque 7
- Écrire que « Faux $\Longrightarrow$ Vrai » est vrai, ou encore que « Faux $\Longrightarrow$ Faux » est vrai peut en 1ère lecture vous choquer.
- Cependant, vous avez toutes et tous envie d'écrire que $x \leqslant 1 \Longrightarrow x \leqslant 3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci devant fonctionner pour tout $x \in \mathbb{R}$, on voit qu'en particulier :
  - pour $x = 2$, on doit avoir « Faux $\Longrightarrow$ Vrai » est vrai,
  - pour $x = 4$, on doit avoir « Faux $\Longrightarrow$ Faux » est vrai.

Attention
- Affirmer que l'implication : P $\Longrightarrow$ Q est vraie n'implique ni que P est vraie, ni que Q est vraie. Il est parfaitement vrai que : « Si Pinocchio est président de la République, alors il est chef des armées », et pourtant Pinocchio n'est pas plus président de la République qu'il n'est chef des armées.
- Une implication : P $\Longrightarrow$ Q peut être vraie alors que P et Q n'ont rien de commun, car après tout seules leurs valeurs de vérité comptent. Par exemple, il est vrai que : « Si 0 = 0, alors les oiseaux ont des plumes ».

Note | *Mais en Mathématiques, nous nous intéresserons le plus souvent à des assertions* P, Q *liées entre elles.*

La lecture de la table nous mène tout droit à la proposition suivante, qui est évidemment très intuitive.

Proposition 5 | Implication et valeur logique vraie
Soient P et Q deux assertions.

$$\left\{\begin{array}{ll} \textbf{(i)} & \text{P est vraie} \\ \textbf{(ii)} & \text{P} \Longrightarrow \text{Q est vraie} \end{array}\right. \Longrightarrow \text{Q est vraie.}$$

Exemple 12 Expliquer les valeurs logiques ci-après.
- L'assertion « Socrate est un homme $\Longrightarrow$ Socrate est mortel » est vraie.
- L'assertion « Socrate est une table basse $\Longrightarrow$ Socrate et mortel » est vraie.
- L'assertion « Socrate est une table basse $\Longrightarrow$ Socrate est une chaise » est vraie.
- L'assertion « Socrate est grec $\Longrightarrow$ Socrate est une chaise » est fausse.

Exemple 13
- La proposition « $3 > 5 \Longrightarrow 1 + 1 = 8$ » est vraie.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors « $x > 1 \Longrightarrow x^2 > 1$ » est vraie. *(Ici,* P *est « $x > 1$ », dont on ne connaît a priori pas la valeur de vérité (puisque x est quelconque). On procède donc pas disjonction de cas (technique de raisonnement qui sera formalisée dans la suite du cours))*

> Note — *Ici, nous avons traité le cas $x \leqslant 1$, ce que nous ne faisons dans la pratique jamais en Mathématiques puisqu'il est inutile (en effet, si P est fausse alors $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ est forcément vraie!)*

Exemple 14 Traduire à l'aide d'implications.

1. Si $n \geqslant 10$, u_n est strictement positif.
2. Pour que $f(x) > 1$, il suffit que $x > 2$.
3. Pour que $f(x) > 1$, il faut que $x < 2$.

Exemple 15 **(Négation d'une implication)**

- Écrire la négation de la phrase « Si je gagne au loto, je change de voiture »

  « J'ai gagné au loto et je n'ai pas changé de voiture »
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer la négation des propositions suivantes :
  1. $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) > 0 \Longrightarrow x \leqslant 0$

     $\exists x \in \mathrm{I}, \quad f(x) > 0 \ \underline{\text{et}}\ x > 0.$
  2. $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \forall y \in \mathrm{I}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$

     $\exists (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad x \leqslant y \ \underline{\text{et}}\ f(x) > f(y).$
  3. $\forall x \in \mathrm{I}, \quad \forall y \in \mathrm{I}, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

     $\exists (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad f(x) = f(y) \ \underline{\text{et}}\ x \neq y.$
- « $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-1| < \alpha \Longrightarrow \left|\sqrt{x} - 1\right| < \varepsilon$ ».

> Note — *Notez bien un point important ici : « $\forall \varepsilon > 0$ » signifie « $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$ ». Il ne faut donc surtout pas changer $>$ en $\leqslant$*

Puisque la notation est bien choisie, on a la proposition ci-après.

Proposition 6 | Double implication

Soient P et Q deux assertions.

- Alors $(\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q})$ est équivalente à : $\quad (\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q})\ \underline{\textbf{et}}\ (\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P})$.
- **[Vocabulaire]** De plus, lorsque $\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$, on dit aussi « P est vraie *si et seulement si* Q est vraie », ou que « Q est une condition nécessaire et suffisante pour que P soit vraie ».

Preuve Il suffit de construire la table de vérité associée à $(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q})\ \underline{\textbf{et}}\ (\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P})$.

P	Q	$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$	$\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$	$\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ **et** $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

La dernière colonne correspond bien à la table de $\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$ (qui rappelons-le, signifie « avoir la même valeur de vérité »).

Méthode 3 **(Prouver une équivalence de propositions)** Soient P, Q deux assertions logiques. Alors pour prouver $\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$, on montre :

- $(\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q})\ \underline{\textbf{et}}\ (\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P})$, ou :
- directement que P et Q ont même valeur de vérité. *(plus rarement possible)*

CONTRAPOSÉE, RÉCIPROQUE ET CHAÎNES D'IMPLICATIONS.

Définition 7 | Contraposée & Réciproque d'une implication

Soient P et Q deux assertions. On définit la proposition :

- *contraposée de* $\mathrm{P} \implies \mathrm{Q}$ comme étant : $(\textbf{non } \mathrm{Q}) \implies (\textbf{non } \mathrm{P})$,

  Note | *Bien faire attention à l'ordre : Q se retrouve* ***à gauche*** *dans la contraposée*

- *réciproque de* $\mathrm{P} \implies \mathrm{Q}$ comme étant : $\mathrm{Q} \implies \mathrm{P}$.

L'intérêt fondamental de la contraposée est qu'elle est équivalente à la proposition initiale !

Proposition 7 | Équivalence de la contraposée

Soient P et Q deux assertions. Alors :

$$(\mathrm{P} \implies \mathrm{Q}) \iff \left[(\textbf{non } \mathrm{Q}) \implies (\textbf{non } \mathrm{P})\right].$$

Méthode 4 (Prouver une implication de propositions) Soient P, Q deux assertions logiques. Pour montrer que $\mathrm{P} \implies \mathrm{Q}$ est vraie, on peut :

- supposer que P est vraie et montrer que (nécessairement) Q est vraie aussi,
- **ou** montrer la contraposée, c'est-à-dire que si Q est fausse, alors P est fausse.

Preuve Construire les tables de vérité ou utiliser la définition de l'implication.

Exemple 16 Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier relatif. Démontrer par contraposition que :

$$n^2 \text{ est impair} \implies n \text{ est impair.}$$

Proposition 8 | Transitivité de l'implication

Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ trois assertions. Alors :

$$\text{si } \begin{cases} \textbf{(i)} & \mathrm{P}_1 \implies \mathrm{P}_2 \text{ est vraie} \\ \textbf{(ii)} & \mathrm{P}_2 \implies \mathrm{P}_3 \text{ est vraie} \end{cases} \quad \text{alors : } \mathrm{P}_1 \implies \mathrm{P}_3 \text{ est vraie.}$$

Exemple 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Si on note P_1 « $x = 0$ », P_2 « x est pair », P_3 « x est un entier relatif ». Alors $\mathrm{P}_1 \implies \mathrm{P}_2$ et $\mathrm{P}_2 \implies \mathrm{P}_3$, et donc $\mathrm{P}_1 \implies \mathrm{P}_3$.

Note | *Bien sûr, nullement besoin de transitivité pour prouver cela...*

Corollaire 1 | Cycles d'implications

Soient $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ trois assertions. Alors :

$$(\mathrm{P}_1 \iff \mathrm{P}_2 \iff \mathrm{P}_3) \iff (\mathrm{P}_1 \implies \mathrm{P}_2) \ \textbf{et}\ (\mathrm{P}_2 \implies \mathrm{P}_3) \ \textbf{et}\ (\mathrm{P}_3 \implies \mathrm{P}_1).$$

Remarque 8 Ce corollaire se généralise sans difficulté à n propositions.

Preuve Montrons que $\mathrm{P}_1 \iff \mathrm{P}_2$. On a déjà $\mathrm{P}_1 \implies \mathrm{P}_2$, de plus $\mathrm{P}_2 \implies \mathrm{P}_3$ et $\mathrm{P}_3 \implies \mathrm{P}_1$ implique par transitivité $\mathrm{P}_2 \implies \mathrm{P}_1$, on a donc prouvé $\mathrm{P}_1 \iff \mathrm{P}_2$ par double implication. On procède de-même pour $\mathrm{P}_2 \iff \mathrm{P}_3$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{P}_2 \arrow[d, Rightarrow] \\ \mathrm{P}_1 \arrow[ur, Rightarrow] & \mathrm{P}_3 \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

2. BASES SUR LES ENSEMBLES

La notion d'ensemble est difficile à définir proprement, on s'appuiera plutôt sur l'intuition que l'on a de cette notion, en le qualifiant vaguement de « collection d'éléments ».

Définition 8 | Ensemble

- Un *ensemble* E est une collection d'éléments x qui sont dits *appartenir* à l'ensemble E, ce que l'on note $x \in \mathrm{E}$. On note les éléments de cette collection entre accolades.
- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, noté $\emptyset$, c'est-à-dire tel que « $x \in \emptyset$ » soit toujours fausse pour n'importe quel objet x. On l'appelle l'*ensemble vide* et on le note $\emptyset$.
- Un ensemble ne possédant qu'un seul élément est appelé un *singleton*.

Notation

Lorsqu'un élément x n'est pas dans E, on note $x \notin \mathrm{E}$.

Modes de définition d'un ensemble. On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments, ou en *compréhension*, c'est-à-dire en donnant une propriété caractérisant de manière unique les éléments de E. Par exemple, l'ensemble ci-après est donné par extension et compréhension :

$$\mathrm{E} = \{1,2,3,4\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 1, n < 5\} \underset{\textbf{(nota.)}}{=} [\![1\,,4]\!].$$

En résumé on a les deux modes suivants :

- **[Extension]** $\mathrm{E} = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- **[Compréhension]** $\mathrm{E} = \{x \in \dots \mid \text{condition sur } x\}$.

(Analogue python) Ces deux modes de définition se retrouvent en Python pour construire une liste. Par exemple, avec l'ensemble E *supra*.

```
>>> E = [1, 2, 3, 4] # mode par extension
>>> E = [i for i in range(1, 10**3) if i >= 1 and i < 5] # \
↪ mode par compréhension, 10**3 est ici arbitraire
```

Quand on définit un ensemble en compréhension il faut toujours le situer comme sous-ensemble d'un ensemble plus grand :

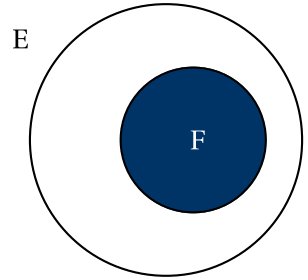
$$\text{on n'écrit pas} \quad \cancel{\{x \mid \cos(x) \geqslant 0\}} \quad \text{mais} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \geqslant 0\}.$$

Définition 9 | Inclusion, Égalité, Inclusion stricte

Soient F et E deux ensembles.

- On dit que F est un *sous-ensemble de* E ou que F *est inclus dans* E si tout élément de F est un élément de E, c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad x \in \mathrm{E}. \quad \text{On note cela :} \quad \mathrm{F} \subset \mathrm{E}.$$
- Les ensembles E et F sont dits égaux si : $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ **et** $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Autrement dit, E et F ont exactement les mêmes éléments, c'est-à-dire :
$$x \in \mathrm{E} \iff x \in \mathrm{F}. \quad \text{On note cela :} \quad \mathrm{E} = \mathrm{F}.$$
- On dit que F est un *sous-ensemble strict de* E ou que F *est strictement inclus dans* E si :
$$\mathrm{F} \subset \mathrm{E} \ \underline{\textbf{et}}\ (\exists x \in \mathrm{E}, x \notin \mathrm{F}). \quad \text{On note cela } \mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}.$$

Les ensembles sont généralement représentés par des diagrammes, dits de Venn, ou de manière moins pompeuse des « patates ». Par exemple, voici la situation typique d'une inclusion.



Exemple 18 Si $\mathrm{E} = \{1,2,3,4\}$ et $\mathrm{F} = \{1,2\}$. Alors $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ et on a aussi $\mathrm{F} \subsetneq \mathrm{E}$.

Remarque 9 Écrire la négation de « $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ », notée $\mathrm{E} \neq \mathrm{F}$.

Définition 10 | Ensemble des parties

Soit E un ensemble. L'*ensemble des parties de* E, noté $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, est l'ensemble des sous-ensembles de E.

On a donc : $\boxed{\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}) \iff \mathrm{A} \subset \mathrm{E}.}$

Attention **Appartenance ≠ Inclusion!**

Un **élément appartient** à un ensemble, et une **partie est incluse** dans un ensemble.

Exemple 19 Soit $E = [\![1\,,3]\!]$, alors : $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$.

Exemple 20 Écrire un symbole entre les ensembles ci-après.

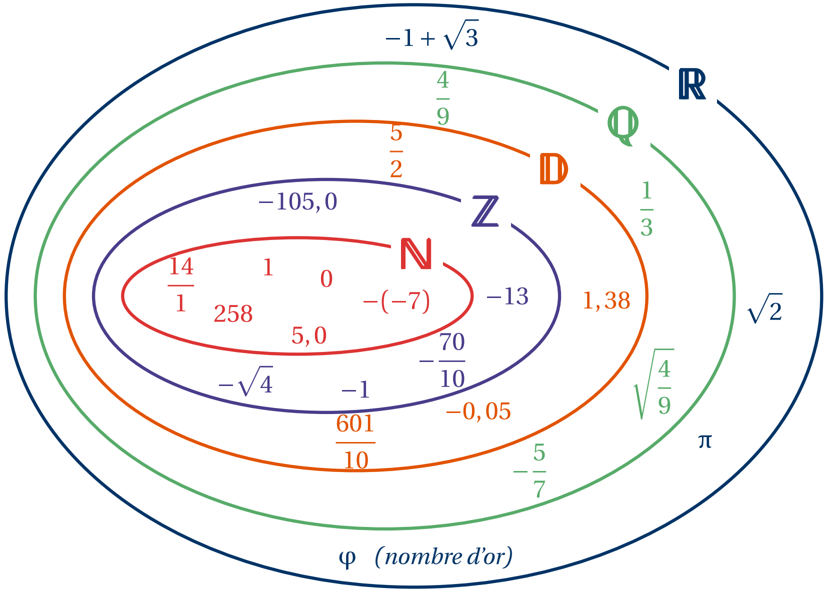
- $1 \quad \{1,2,3,4\}$,
- $\{1\} \quad \{1,2,3,4\}$,
- $\emptyset \quad \{1,2,3,4\}$,
- $\{1\} \quad \mathscr{P}(\{1,2,3,4\})$.

Remarque 10 Remarquons que l'on a toujours :

$$E \in \mathscr{P}(E), \quad \text{et} \quad \emptyset \in \mathscr{P}(E).$$

2.2. Sous-ensembles usuels de réels

On rappelle brièvement quelques sous-ensembles de réels connus depuis le collège.



Sur ce dessin :

- $\mathbb{R}$ désigne les *réels*,
- $\mathbb{Q}$ désigne les *rationnels*,
- $\mathbb{D}$ désigne les *décimaux*, c'est-à-dire les nombres à virgules ayant un nombre fini de chiffres après la virgule,
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ désigne les *irrationnels*,
- $\mathbb{Z}$ désigne les *entiers relatifs* (parfois appelés simplement *entiers*),
- $\mathbb{N}$ désigne les *entiers naturels*.

Comme le dessin le rappelle, on a alors la chaîne d'inclusions suivante :

$$\boxed{\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}}.$$

Notation Partie positive, négative, étoilée d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors on note en général :

- $E^\star = \{x \in E \mid x \neq 0\}$,
- $E^+ = \{x \in E \mid x \geqslant 0\}$,
- $E^- = \{x \in E \mid x \leqslant 0\}$.

On peut aussi combiner les deux conditions :

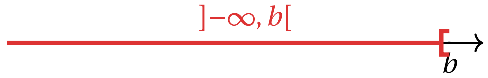
$$E^{+\star} = \{x \in E \mid x > 0\}, \quad E^{-\star} = \{x \in E \mid x < 0\}.$$

Intervalles. On passe à présent à une classe d'ensembles qui nous offrira un cadre commode pour définir toute sorte de notions sur les fonctions : les intervalles.

Soient a et b deux réels avec $a < b$, on définit alors les sous-ensembles ci-dessous, que l'on appelle *intervalles de* $\mathbb{R}$[1]

le *segment* $[a,b]$: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a, x \leqslant b\}$	$[a,b]$; a ; b
l' *intervalle semi-ouvert en* a, $]a,b]$: $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a,\ x \leqslant b\}$	$]a,b]$; a ; b
$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a,\ x < b\}$	$[a,b[$; a ; b
$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a,\ x < b\}$	$]a,b[$; a ; b
$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$	$[a,+\infty[$; a
$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$]a,+\infty[$; a
$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$	$]-\infty,b]$; b

1. On indique sous la définition mathématique la lecture de l'ensemble.

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	

Remarquons que lorsque $a = b$ alors on définit de manière naturelle :

$$[a, b] = \{a\}, \quad [a, b[=]a, b] =]a, b[= \emptyset.$$

Intervalles d'entiers. On introduit aussi une nouvelle notation permettant de définir des intervalles d'entiers en « doublant » les crochets.

Notation Intervalle d'entiers

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers avec $a \leqslant b$. On notera

$$[\![a\,,\,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\} = [a, b] \cap \mathbb{Z}.$$

Exemple 21 Écrire explicitement $[\![3\,,\,7]\!]$.

Nombres pairs, nombres impairs.

Définition 11 | Entier pair/impair

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

- n est dit *pair* si : $\quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n = 2k$.
- n est dit *impair* si : $\quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad n = 2k + 1$.

Exemple 22

- 10 est pair car $10 = 2 \times 5 + \boxed{0}$ où $5 \in \mathbb{N}$, et 7 est impair puisque $7 = 2 \times 3 + \boxed{1}$ avec $3 \in \mathbb{N}$.
- -10 est aussi pair puisque $-10 = 2 \times (-5) + \boxed{0}$. De-même $-7 = 2 \times (-4) + \boxed{1}$ est impair.

Attention

Cette notion n'a strictement rien à voir avec la parité/imparité des fonctions que nous reverrons prochainement.

(Test de parité) Les identités écrites dans l'exemple précédent sont en fait les divisions euclidiennes de 3 et -7 par 2. Les restes de ces divisions sont surlignés ; on voit que pour savoir si un entier est pair (*resp.* impair) il suffit de tester si sont reste est nul (*resp.* égal à 1). Le reste d'un entier est obtenu *via* la commande pourcentage en Python.

```
>>> 7%2 == 0 # impair
False
>>> -7%2 == 0 # impair
False
>>> 10%2 == 0 # pair
True
>>> -10%2 == 0 # pair
True
```

2.3. Opérations sur les ensembles

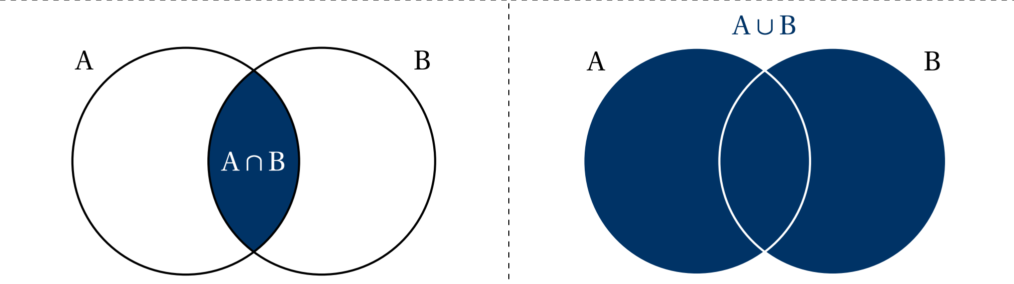
Définition 12 | Réunion & Intersection

Soit E un ensemble, soit $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(E)$. On définit :

- l'*union de* A *et de* B, notée $A \cup B$ (et lue « A union B ») par :
  $$A \cup B = \left\{x \in E \,\middle|\, x \in A \ \underline{\textbf{ou}}\ x \in B\right\},$$
  et on a pour $x \in E$: $\quad x \in A \cup B \iff x \in A \ \underline{\textbf{ou}}\ x \in B.$

  Note — *On rappelle ici que par défaut, en Mathématiques, le « ou » n'est pas exclusif. Ainsi, un élément peut appartenir aux deux ensembles A et B.*
- L'*intersection de* A *et de* B, notée $A \cap B$ (et lue « A inter B ») par :
  $$A \cap B = \left\{x \in E \,\middle|\, x \in A \ \underline{\textbf{et}}\ x \in B\right\},$$
  et on a pour $x \in E$: $\quad x \in A \cap B \iff x \in A \ \underline{\textbf{et}}\ x \in B.$

Réunion et Intersection sur un diagramme



Exemple 23 Pour E, A, B ci-dessous, calculer $A \cap B$, $A \cup B$.

- $E = [\![1\,,\,5]\!]$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

$$A \cap B = \{2,3\}, \quad A \cup B = \{1,2,3,4\}.$$

- $E = \mathbb{Z}$, et A l'ensemble des entiers pairs, B l'ensemble des entiers impairs.

Définition 13 | Parties disjointes & Réunion disjointe

Soit E un ensemble, soit $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(E)$. Alors :

- si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire si A et B n'ont pas d'éléments en commun, on dit alors que A et B sont *disjoints*.
- La réunion $A \cup B$ est alors qualifiée de *réunion disjointe*, on la note $A \uplus B$.

Exemple 24 Reprendre l'exemple précédent en précisant si la réunion de A et B est disjointe.

- La réunion précédente $A \cup B$ n'est pas disjointe car $2 \in A \cap B$ et $3 \in A \cap B$.
-

RÈGLES OPÉRATOIRES SUR L'INTERSECTION ET LA RÉUNION. Il existe un grand nombre de règles sur les symboles d'union et d'intersection. Nous en citons quelques unes, qui se constatent facilement sur un dessin au besoin, la plupart d'entre elles seront admises mais les preuves ne présentent aucune difficulté.

Proposition 9 | Règles opératoires

Soit E un ensemble, et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Alors :

- $A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B,$
- $A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B.$
- **[Commutativité]** $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A,$
- **[Associativité]** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
- **[Distributivité]** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Remarque 11 (Retenir la distributivité : analogie) Là encore, la distributivité est très proche de celle déjà connue. Imaginez que le symbole $\cup$ est un $+$, et le symbole $\cap$ un $\times$. La première formule de distributivité se réecrit alors :

« $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times B)$ ».

On peut également la constater sur un diagramme de VENN.

COMPLÉMENTAIRE ET DIFFÉRENCE. On introduit deux dernières opérations sur les ensembles.

Définition 14 | Complémentaire & Différence

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On définit :

- le *complémentaire de* A *dans* E (noté $\overline{A}^E$), ou simplement le *complémentaire de* A (noté $\overline{A}$) si le contexte est clair, par :
$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$
- L'ensemble B *privé de* A, noté $B \setminus A$, est défini par :
$$B \setminus A = B \cap \overline{A} = \{x \in E \mid x \in B,\ x \notin A\}.$$
C'est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A.

Exemple 25

- Soient $E = [\![1\,,\,5]\!]$, $A = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2\}$. Calculer $\overline{C}^E$ et $\overline{C}^A$. Que remarque-t-on ?
  $\overline{C}^E = \{3,4,5\} \neq \overline{C}^A = \{3\}$.
- Le complémentaire de l'ensemble des entiers pairs est l'ensemble des entiers impairs.

Attention

On portera un grande attention au fait que $\overline{A}$ dépend du sur-ensemble E, ce qui n'est pas apparent dans la notation. Quand le contexte n'est pas absolument clair, il faudra préciser dans quel ensemble on considère le complémentaire. La notation $\overline{A}^E$ a le mérite de mentionner cette dépendance. Regarder par exemple l'exemple précédent.

Proposition 10 | Propriété du complémentaire

Soit E un ensemble. Alors :

$$\overline{\mathrm{E}} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = \mathrm{E}, \quad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}), \quad \overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}.$$

Preuve Montrons uniquement la formule $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}$, c'est-à-dire montrons que :

$$x \in \overline{\overline{\mathrm{A}}} \iff x \in \mathrm{A}.$$

Théorème 1 | Lois de De Morgan

Soit E un ensemble et soit A et B deux sous-ensembles de E. Alors :

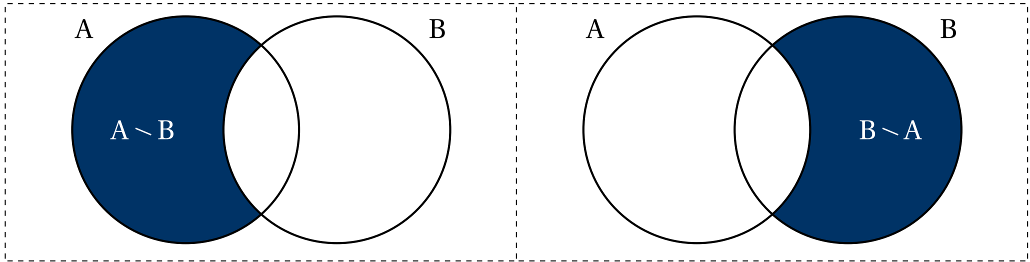
$$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}, \quad \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}.$$

Preuve Montrons uniquement *(l'intersection se prouvant de la même manière)* la formule $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$, c'est-à-dire montrons que :

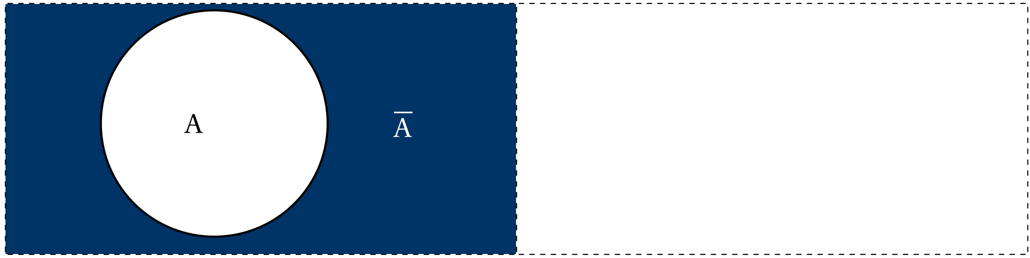
$$x \in \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} \iff x \in \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}.$$

L'intersection se prouve de la même manière.

Complémentaire sur un diagramme



Complémentaire sur un diagramme



Brève extension des notions de réunion/intersection. Nous généraliserons l'intersection et la réunion plus tard (dans le Chapitre (ALG) 7). Il s'agit ici seulement de définir les symboles « $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}$ » que nous utiliserons dans le Chapitre (ALG) 2 (écriture de certains ensembles de solutions d'équations et d'inéquations). Soit $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille d'ensembles dans un ensemble E. Alors on définit :

- $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_k = \{x \in \mathrm{E} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathrm{A}_k\}$, et on a : $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_k \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathrm{A}_k$. C'est donc l'ensemble formé de tous les éléments de tous les A_k, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_k = \{x \in \mathrm{E} \mid \forall k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathrm{A}_k\}$, et on a : $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_k \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathrm{A}_k$. C'est donc l'ensemble formé des éléments appartenant à tous les A_k, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 26

- $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [k, k+1] = \cdots \cup [-2,-1] \cup [-1,0] \cup [0,1] \cup [1,2] \cup \cdots = \mathbb{R}$.
- $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{Z}} [-k, k] = \{0\}$.

On définit de manière analogue les symboles $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}}$, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}$, *etc.*.

2.4. Produit cartésien

Vous connaissez depuis le collège des produits cartésiens, mais vous n'avez jamais employé le mot. Par exemple, les vecteurs de la géométrie euclidienne peuvent être repérés par un couple abscisse/ordonnée noté (x, y) avec x, y deux réels. L'ensemble de ces couples forme l'ensemble des points du plan, et est noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou encore $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 15 | Produit cartésien de deux ensembles

Soient E, F deux ensembles. Alors on appelle *produit cartésien de* E *et* F l'ensemble : $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{(x, y) \mid x \in \mathrm{E}, y \in \mathrm{F}\}$.

Exemple 27

1. Écrire explicitement le produit $\{1,2,3\} \times \{0,1\}$.

2. Dessiner l'ensemble $[0,1] \times [2,3[$.

Définition 16 | Produit cartésien de n ensembles

Soient $E_1, \dots, E_n$ une collection de n ensembles. Alors on appelle *produit cartésien de* $E_1, \dots, E_n$ l'ensemble :

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\}.$$

Plus particulièrement :

- Si $E_1 = \dots = E_n = E$, on note $E_1 \times \dots \times E_n = E^n$.
- Si $E_1 = \dots = E_n = E$ et $n = 2$ (*resp.* $n = 3$) : les éléments de E^2 (*resp.* E^3) sont appelés les *couples d'éléments de* E (*resp.* les *triplets d'éléments de* E).

Pour le moment nous allons assez peu utiliser cet objet à des fins mathématiques, mais plutôt pour introduire efficacement des variables comme le précise la remarque qui suit.

Remarque 12 **(Se servir du produit cartésien pour quantifier des variables)**
La notion de produit cartésien sert souvent aussi à quantifier efficacement des variables. Ainsi, si E, F sont deux ensembles.

écrire « soient $x \in E, y \in F$ » $=$ écrire « soit $(x, y) \in E \times F$ »

Si $E = F$, un abus de notation courant est « soit $x, y \in E$ ». *(En lieu et place de « soit $(x,y) \in E^2$ »)*

Exemple 28 **(Produits cartésiens usuels)**

- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. RAISONNEMENTS

3.1. Sur l'existence/unicité de propositions

Cadre
Dans toute cette sous-section, on considère un prédicat $\mathscr{P}(x)$, x appartenant à un ensemble E.

Méthode 5 **(Montrer/Nier « $\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$ »)**

- **[Montrer]** Il s'agit de trouver un exemple de $x \in E$ qui vérifie la propriété $\mathscr{P}(x)$.
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que **pour tout** $x \in E$, $\mathscr{P}(x)$ est fausse.

Exemple 29 Montrer que : $\exists x \in [0,3],\quad x^2 - 3x + 2 < 0.$

Remarque 13 Parfois, on pourra faire appel à un théorème qui prouvera l'existence d'un x vérifiant $\mathscr{P}(x)$ sans pour autant donner d'expression de x (par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'un nombre x tel que $f(x) = 0$ si f est une fonction).

Méthode 6 **(Montrer/Nier « $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ »)**

- **[Montrer]**
  1. On commence par fixer un élément x de E avec lequel on va travailler. La rédaction type est donc : « *Soit x un élément de* E*, montrons* $\mathscr{P}(x)$ ».
  2. On démontre que $\mathscr{P}(x)$ est vraie par une suite de phrases qui commencent *toutes* par « Donc » ou « Or » (ou des connecteurs logiques).
     - ◇ Une phrase qui commence par « Donc » signifie qu'on fait une déduction.
     - ◇ Une phrase qui commence par « Or » signifie qu'on rappelle :
       - soit une hypothèse de l'énoncé,
       - soit un résultat qu'on a démontré avant dans la preuve.

3. On écrit *toujours* à la fin de la preuve : « En conclusion, $\mathscr{P}(x)$ est vraie. ».

- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer qu'**il existe** $x \in E$, telle que $\mathscr{P}(x)$ soit fausse.

Exemple 30 Montrer que : $\forall x \geqslant 1, \quad x^2 \geqslant x.$

Méthode 7 (Montrer/Nier « $\exists! x \in E, \mathscr{P}(x)$ »)

- **[Montrer]**
  1. Existence On montre l'existence d'un x vérifiant la propriété comme précédemment.
  2. Unicité
     - Soit on montre que la manière dont on a construit l'élément x vérifiant $\mathscr{P}(x)$ permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'autre choix.
     - Soit on fixe deux éléments x_1 et x_2 de E tels que $\mathscr{P}(x_1)$ et $\mathscr{P}(x_2)$ sont vraies, et on démontre que $x_1 = x_2$ par une suite de phrases qui commencent toutes par « Donc » ou « Or ». La rédaction type est donc : « *Soit* x_1, x_2 *deux éléments de* E, *montrons que* $x_1 = x_2$ ».
- **[Nier]** Soit on justifie que l'existence est en défaut (voir les méthodes précédentes), soit que l'unicité est en défaut : auquel cas, on se cherche $x_1, \neq x_2 \in E$ de sorte que $\mathscr{P}(x_1), \mathscr{P}(x_2)$ soient vraies.

Remarque 14 L'existence et l'unicité peuvent aussi être démontrées d'un coup. Par exemple, en invoquant le théorème de la bijection pour les fonctions (voir cours de Terminale), on arrive à justifier l'existence et l'unicité de solutions à une équation.

3.2. Sur les ensembles

Cadre

Dans toute cette sous-section, on considère deux ensembles A, B **inclus dans un ensemble** E.

Méthode 8 (Montrer/Nier « $A \subset B$ »)

- **[Montrer]** Pour montrer que $A \subset B$, on se fixe $a \in A$ quelconque et on montre que $a \in B$. Autrement dit, on montre que tout élément de A est élément de B. La rédaction type est donc « Soit $a \in A$, montrons que $a \in B$ ».
- **[Nier]** Il s'agit de montrer qu' **il existe** $a \in A$, tel que $a \notin B$.

Méthode 9 (Montrer/Nier « $A = B$ »)

- **[Montrer]** On a deux possibilités.
  - **[Par double inclusion]** On montre souvent *via* deux étapes, avec une *double inclusion*, que $A \subset B$ et $B \subset A$.
  - **[Par équivalences]** On montre parfois l'équivalence ci-après :
    $$x \in A \iff x \in B.$$
- **[Nier]** Il s'agit de montrer $A \not\subset B$ **ou** $B \not\subset A$ (voir la méthode précédente).

Exemple 31 Soient :

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + y = 1\}$ et,
- $B = \{(x, 1-2x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que A = B.

$\boxed{\subset}$ $A \subset B$

Soit $(x,y) \in A$. *Alors* $2x + y = 1$ *et* $y = 1 - 2x$. *Donc* $(x,y) = (x, 1-2x) \in B$.

$\boxed{\supset}$ $B \subset A$

Soit $(x,y) \in B$. *Alors* $(x,y) = (x, 1-2x)$ *donc* $y = 1 - 2x$ *et donc* $(x,y) \in A$.

Représenter graphiquement cet ensemble.

Exemple 32 Soient :

- $A = \{x \in \mathbb{R} \longmapsto ax \,|\, a \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des fonctions linéaires,
- $B = \{x \in \mathbb{R} \longmapsto ax + b \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, l'ensemble des fonctions affines.

Montrer que $A \subsetneq B$. On doit donc montrer deux choses.

-
-

3.3. Démonstration par disjonction de cas

Méthode 10 **(Démontrer par disjonction de cas)** On sépare la démonstration d'une propriété en sous-cas, chacun de ces sous-cas (qui doivent, bien sûr, recouvrir l'ensemble des possibilités) permettant d'exploiter des informations supplémentaires débloquant le raisonnement.

Exemple 33 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (-1)^{n+2} = (-1)^n$.

Il y a bien sûr beaucoup plus efficace qu'une preuve par disjonction, il suffit d'utiliser les règles sur les puissances.

Exemple 34 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier.

Rappel **(Valeur absolue & Maximum)** On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x définie par : $\quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$
Par exemple, $|2| = 2$ et $|-3| = 3$ (car $-3 < 0$ et $-(-3) = 3$). Par ailleurs, étant donnés a et b deux réels, on note $\max(a, b)$ le plus grand élément entre a et b. Par exemple : $\max(1, 3) = 3$.

Exemple 35 Montrer que : $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \max(a, b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

3.4. Sur les liens logiques entre propositions

Cadre
Dans toute cette sous-section, on considère deux propositions logiques P, Q**.**

Méthode 11 **(Montrer/Nier** $\quad$ « $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ »**)**
- **[Montrer]**
  - **[1ère méthode]** Par preuve directe,
  - **[2ème méthode]** ou par l'absurde ou contraposée.
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que P est vraie alors que Q est fausse.

Exemple 36 **(Preuve directe)** Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous avions montré dans un précédent exemple que : $\quad n$ pair $\Longrightarrow n^2$ pair.

Rappel Nous avions montré que $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ est équivalente à **non** $\mathrm{Q} \Longrightarrow$ **non** P. Nous avions appelé cette implication l'« implication contraposée ».

Méthode 12 (Démontrer par contraposée) Pour montrer $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$, on peut aussi montrer **non** Q $\Longrightarrow$ **non** P. La rédaction type est donc « Supposons Q fausse, montrons que P est fausse ».

Exemple 37 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : n^2 pair $\Longrightarrow$ n est pair.

Une autre rédaction du raisonnement par contraposition (où la propriété P n'est pas explicitée au départ) est le raisonnement *par l'absurde.*

Méthode 13 (Démontrer par l'absurde) On veut montrer une proposition Q. On suppose que Q est fausse, et on montre que cela implique une proposition qui est fausse (ou « absurde »), notée P. Cela prouve que Q était vraie.

En effet, si on montre **non** Q $\Longrightarrow$ P (avec P faux), alors par contraposition **non** P $\Longrightarrow$ Q. Ainsi on a :

$$\begin{cases} \textbf{non } \mathrm{P} \text{ est vraie} \\ \textbf{non } \mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q} \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \mathrm{Q} \text{ est vraie.}$$

Exemple 38 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}, \quad \dfrac{x+1}{x+2} \neq 1.$

Méthode 14 (Montrer/Nier « $\mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$ »)

- **[Montrer]**
  - **[1ère méthode]** par double implications $\mathrm{P} \Longrightarrow \mathrm{Q}$ et $\mathrm{Q} \Longrightarrow \mathrm{P}$,
  - **[2ème méthode]** ou par équivalences successives $\mathrm{P} \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow \mathrm{Q}$.
- **[Nier]** Il s'agit de montrer que l'une des deux implications est fausse.

Exemple 39 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(4x(x-1) = -1) \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. *On utilisera ici un raisonnement par équivalences successives.*

Exemple 40 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Démontrer que :

f est paire **et** impaire $\Longleftrightarrow$ f est la fonction nulle.

On utilisera ici un raisonnement par double-implication.

Considérons $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ trois propositions logiques.

Méthode 15 **(Montrer $P_1 \iff P_2 \iff P_3$)** Il faut et il suffit de montrer :
$P_1 \implies P_2 \implies P_3 \implies P_1$.

3.5. Par récurrence

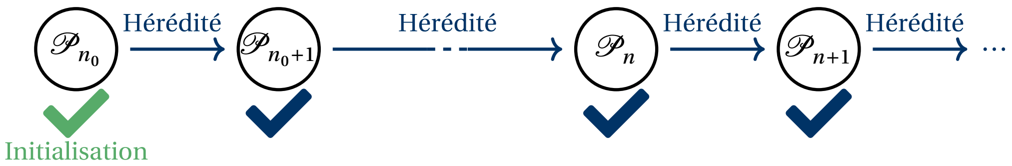
Cette dernière section sera traitée plus tard dans l'année.

Il en existe différents types, l'objectif étant de démontrer des prédicats dépendant d'un entier n, naturel ou même relatif. Les raisonnements par récurrence seront principalement fondés sur la propriété de transitivité de l'implication $\implies$.

3.5.1. Simple

Théorème 2 | Principe de récurrence simple
Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :
- **[Initialisation]** $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie,
- **[Hérédité]** $\forall n \geqslant n_0, \quad \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n \geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.



Remarque 15
- Le principe de récurrence peut être vu comme le jeu qui consiste à faire tomber des dominos en cascade : pour que cela fonctionne, il faut s'assurer que chaque domino soit placé de sorte qu'il entraîne le suivant dans sa chute, c'est l'hérédité, et il faut aussi faire tomber le premier domino, c'est l'initialisation.
- Le raisonnement par récurrence est adapté à tous les objets mathématiques définis par récurrence (suites récurrentes par exemple). Le plus souvent, on vérifiera l'initialisation au rang $n_0 = 0$.

Exemple 41 **(Terme général de suite récurrente d'ordre 1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par récurrence par :

$$u_1 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1.$$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = 1 - 2^{n-1}$.

Initialisation.

Hérédité.

Méthode 16 **(Rédaction d'une récurrence simple)** Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
1. Initialisation : montrer $\mathscr{P}(n_0)$.
2. Hérédité : « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. »

[…] « Alors : par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ ».

Exemple 42 **(Divisibilité)** Montrons que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ est un multiple de 9, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{«}\exists k_n \in \mathbb{Z}, \quad 13^n - 4^n = 9k_n\text{» est vraie.}$$

Initialisation.
$13^0 - 4^0 = 0 = 0 \times 9$, *la propriété est initialisée en choisissant* $k_0 = 9$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\exists k_n \in \mathbb{Z}, \quad 13^n - 4^n = 9k_n.$$

On cherche donc $k_{n+1} \in \mathbb{Z}$ tel que : $13^{n+1} - 4^{n+1} = 9k_{n+1}$.

Or,

$$\begin{aligned} 13^{n+1}-4^{n+1} &= (9+4)\times 13^n - 4\times 4^n \\ &= 9\times 13^n + 4\times\left(13^n-4^n\right) \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\ &= 9\times 13^n + 4\times 9k_n \\ &= 9\underbrace{\left(13^n+4k_n\right)}_{:=k_{n+1}}. \end{aligned}$$

Il est clair que 9×13^n est un multiple de 9 et, par hypothèse 13^n-4^n est un multiple de 9. Ainsi $13^{n+1}-4^{n+1}$ est bien un multiple de 9.
Par principe de récurrence on a ainsi montré que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, 13^n-4^n est un multiple de 9.

Attention à la rédaction d'une récurrence

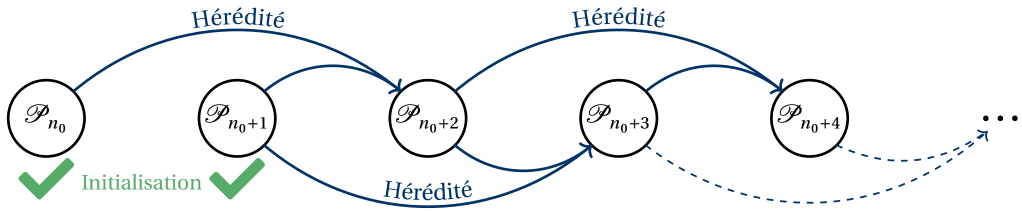
- Dans l'hérédité, on n'écrit <u>**surtout pas**</u> « Supposons que pour tout n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie » — sinon la récurrence est terminée, c'est justement ce que l'on veut montrer.
- Une erreur moins grave à présent, mais c'est incorrect : « Supposons $\mathscr{P}(n)$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. » Le problème est que la bonne traduction de « pour un certain $n\in\mathbb{N}$ » est « $\exists n,\ \mathscr{P}(n)$ est vraie », ce qui ne correspond pas au principe de récurrence.

3.5.2. Double

Théorème 3 | Principe de récurrence double
Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n\in\mathbb{N}$ et $n_0\in\mathbb{N}$. Supposons que :
- **[Initialisation double]** $\mathscr{P}(n_0), \mathscr{P}(n_0+1)$ sont vraies,
- **[Hérédité]** $\forall n\geqslant n_0+1,\quad \mathscr{P}(n-1)$ <u>**et**</u> $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n\geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.

Remarque 16
- Dans cette seconde version de la récurrence, on « gagne » finalement dans l'hérédité (l'hypothèse de récurrence fait intervenir deux propriétés au lieu d'une) mais on y « perd » dans l'initialisation puisqu'il faut montrer deux propriétés.
- On peut aussi très bien supposer dans l'hérédité $\mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ et montrer $\mathscr{P}(n+2)$, à voir en fonction du contexte ce qui est le plus intuitif.



Méthode 17 (Rédaction d'une récurrence double) Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n\geqslant n_0$ avec $n_0\in\mathbb{N}$.
1. Initialisation : montrer $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$.
2. Hérédité : « Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$, et montrons $\mathscr{P}(n+2)$. » [...] « Alors : par principe de récurrence double, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geqslant n_0$ ».

Exemple 43 (Terme général de suite récurrente d'ordre 2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par :

$$u_0=1,\quad u_1=1,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n.$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad u_n=1.$$

Initialisation.

Hérédité.

Transformer une récurrence double en simple. Une récurrence double peut aussi être rédigée avec une récurrence simple sur l'hypothèse

$\mathbb{P}(n) \quad$ « $\mathscr{P}(n), \mathscr{P}(n+1)$ »,

mais cela paraît moins naturel. Voir l'exemple ci-après.

Exemple 44 (Récurrence doubles ↔ Récurrence simple) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$$

Récurrence double	Récurrence simple
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathscr{P}_n : \quad u_n = 3^n.$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathbb{P}_n : \quad u_n = 3^n, u_{n+1} = 3^{n+1}.$
Initialisation. On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$, ainsi $\boxed{\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1}$ sont vérifiées.	**Initialisation.** On a $u_0 = 1 = 3^0$ et $u_1 = 3 = 3^1$, ainsi $\boxed{\mathbb{P}_0}$ est bien vérifiée.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\boxed{\mathscr{P}_n, \mathscr{P}_{n+1}}$ sont vérifiées, donc que $u_n = 3^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1}$, alors par définition de la suite : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ $= 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n$ *hypothèse de récurrence* $= 2 \times 3^{n+1} + 3^{n+1}$ $= (2+1) \times 3^{n+1}$ $= 3^{n+2}.$ Ainsi $\mathscr{P}_{n+2}$ est bien vérifiée. D'après le principe de récurrence, $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\boxed{\mathbb{P}_n}$ est vérifiée, donc que $u_n = 3^n$ et $u_{n+1} = 3^{n+1}$, alors par définition de la suite : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ $\geqslant 2 \times 3^{n+1} + 3 \times 3^n$ *hypothèse de récurrence,* $1 + a \geqslant 0$ $= 2 \times 3^{n+1} + 3^{n+1}$ $= (2+1) \times 3^{n+1}$ $= 3^{n+2}.$ Ainsi $\mathbb{P}_{n+1}$ est bien vérifiée. D'après le principe de récurrence, $u_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.5.3. Forte

Théorème 4 | Principe de récurrence forte

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- **[Initialisation]** $\mathscr{P}(n_0)$ sont vraies.
- **[Hérédité]** $\forall n \geqslant n_0, \quad \left(\mathscr{P}(n_0) \ \underline{\textbf{et}}\ \mathscr{P}(n_0+1) \ \underline{\textbf{et}}\ \dots \ \underline{\textbf{et}}\ \mathscr{P}(n)\right) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1).$

Alors : pour tout entier $n \geqslant n_0$ l'assertion $\mathscr{P}(n)$ et vraie.

Remarque 17 Finalement, on peut toujours utiliser une récurrence forte en lieu et place d'une double. Dans le cas d'une récurrence forte, on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang ambiant alors que dans le cas d'une récurrence double on la suppose vraie aux deux rangs précédents.

Exemple 45 (Suite définie par tous ses termes précédents) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2\right).$$

Montrons par récurrence forte : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1.$

Initialisation.

Hérédité.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode 1 (Prouver une Négation, Ou, Et)
- Une proposition est vraie si et seulement si sa négation est fausse.
- Pour prouver que la proposition P **ou** Q est vraie, on prouve qu'au moins une des deux propositions est vraie.
- Pour prouver que la proposition P **et** Q est vraie, on prouve que les deux propositions sont vraies.

Méthode 2 (Nier une assertion avec des quantificateurs) On garde l'ordre des quantificateurs, on transforme tous les « ∃ » en « ∀ » et tous les « ∀ » en « ∃ » puis on nie les expressions mathématiques subséquentes.

Méthode 3 (Prouver une équivalence de propositions) Soient P, Q deux assertions logiques. Alors pour prouver P $\iff$ Q, on montre :
- (P $\implies$ Q) **et** (Q $\implies$ P), ou :
- directement que P et Q ont même valeur de vérité. *(plus rarement possible)*

Exemple Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair.}$$

Solution Soit $n \in \mathbb{Z}$ (quelconque).

$\boxed{\implies}$ On suppose que n est pair : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On a alors

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times \underbrace{2k^2}_{\in\mathbb{Z}}.$$

ce qui prouve que n^2 est pair.

$\boxed{\impliedby}$ On montre ensuite l'implication n^2 pair $\implies$ n pair par contraposée, c'est-à-dire n impair $\implies$ n^2 impair .

Note | *L'idée de la démonstration par contraposée vient ici en remarquant qu'il est plus naturel de propager une propriété d'un entier à son carré que le contraire.*

On suppose que n est impair : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Par suite,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times \underbrace{(2k^2+2k)}_{\in\mathbb{Z}} + 1,$$

donc n^2 est impair. Ainsi, n impair $\implies$ n^2 impair et donc, par contraposée, que n^2 pair $\implies$ n pair .

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a montré par double-implication l'équivalence n pair $\iff$ n^2 pair.

Méthode 4 (Prouver une implication de propositions) Soient P, Q deux assertions logiques. Pour montrer que P $\implies$ Q est vraie, on peut :
- supposer que P est vraie et montrer que (nécessairement) Q est vraie aussi,
- **ou** montrer la contraposée, c'est-à-dire que si Q est fausse, alors P est fausse.

Méthode 5 (Montrer/Nier « $\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$ »)
- **[Montrer]** Il s'agit de trouver un exemple de $x \in E$ qui vérifie la propriété $\mathscr{P}(x)$.
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que **pour tout** $x \in E$, $\mathscr{P}(x)$ est fausse.

Méthode 6 (Montrer/Nier « $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ »)
- **[Montrer]**
  1. On commence par fixer un élément x de E avec lequel on va travailler. La rédaction type est donc : « *Soit* x *un élément de* E, *montrons* $\mathscr{P}(x)$ ».
  2. On démontre que $\mathscr{P}(x)$ est vraie par une suite de phrases qui commencent *toutes* par « Donc » ou « Or » (ou des connecteurs logiques).
     - Une phrase qui commence par « Donc » signifie qu'on fait une déduction.
     - Une phrase qui commence par « Or » signifie qu'on rappelle :
       - soit une hypothèse de l'énoncé,
       - soit un résultat qu'on a démontré avant dans la preuve.
  3. On écrit *toujours* à la fin de la preuve : « En conclusion, $\mathscr{P}(x)$ est vraie. ».
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer qu'**il existe** $x \in E$, telle que $\mathscr{P}(x)$ soit fausse.

Méthode 7 (Montrer/Nier « $\exists!\, x \in E, \mathscr{P}(x)$ »)
- **[Montrer]**
  1. EXISTENCE On montre l'existence d'un x vérifiant la propriété comme précédemment.
  2. UNICITÉ
     - Soit on montre que la manière dont on a construit l'élément x vérifiant $\mathscr{P}(x)$ permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'autre choix.
     - Soit on fixe deux éléments x_1 et x_2 de E tels que $\mathscr{P}(x_1)$ et $\mathscr{P}(x_2)$ sont vraies, et on démontre que $x_1 = x_2$ par une suite de phrases qui commencent toutes par « Donc » ou « Or ». La rédaction type est donc : « *Soient* x_1, x_2 *deux éléments de* E, *montrons que* $x_1 = x_2$ ».
- **[Nier]** Soit on justifie que l'existence est en défaut (voir les méthodes précédentes), soit que l'unicité est en défaut : auquel cas, on se cherche $x_1, \neq x_2 \in E$ de sorte que $\mathscr{P}(x_1), \mathscr{P}(x_2)$ soient vraies.

Méthode 8 (Montrer/Nier « $A \subset B$ »)
- **[Montrer]** Pour montrer que $A \subset B$, on se fixe $a \in A$ quelconque et on montre que $a \in B$. Autrement dit, on montre que tout élément de A est élément de B. La rédaction type est donc « Soit $a \in A$, montrons que $a \in B$ ».
- **[Nier]** Il s'agit de montrer qu' **il existe** $a \in A$, tel que $a \notin B$.

Méthode 9 (Montrer/Nier « $A = B$ »)
- **[Montrer]** On a deux possibilités.
  - **[Par double inclusion]** On montre souvent *via* deux étapes, avec une *double inclusion*, que $A \subset B$ et $B \subset A$.
  - **[Par équivalences]** On montre parfois l'équivalence ci-après :
  $$x \in A \iff x \in B.$$
- **[Nier]** Il s'agit de montrer $A \not\subset B$ **ou** $B \not\subset A$ (voir la méthode précédente).

Méthode 10 (Démontrer par disjonction de cas) On sépare la démonstration d'une propriété en sous-cas, chacun de ces sous-cas (qui doivent, bien sûr, recouvrir l'ensemble des possibilités) permettant d'exploiter des informations supplémentaires débloquant le raisonnement.

Méthode 11 (Montrer/Nier « $P \implies Q$ »)
- **[Montrer]**
  - **[1ère méthode]** Par preuve directe,
  - **[2ème méthode]** ou par l'absurde ou contraposée.
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que P est vraie alors que Q est fausse.

Méthode 12 (Démontrer par contraposée) Pour montrer $P \implies Q$, on peut aussi montrer **non** $Q \implies$ **non** P. La rédaction type est donc « Supposons Q fausse, montrons que P est fausse ».

Méthode 13 (Démontrer par l'absurde) On veut montrer une proposition Q. On suppose que Q est fausse, et on montre que cela implique une proposition qui est fausse (ou « absurde »), notée P. Cela prouve que Q était vraie.

Méthode 14 (Montrer/Nier « $P \iff Q$ »)
- **[Montrer]**
  - **[1ère méthode]** par double implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$,
  - **[2ème méthode]** ou par équivalences successives $P \iff \ldots \iff \ldots \iff Q$.
- **[Nier]** Il s'agit de montrer que l'une des deux implications est fausse.

Méthode 15 (Montrer $P_1 \iff P_2 \iff P_3$) Il faut et il suffit de montrer :
$$P_1 \implies P_2 \implies P_3 \implies P_1.$$

Méthode 16 (Rédaction d'une récurrence simple) Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
1. Initialisation : montrer $\mathscr{P}(n_0)$.
2. Hérédité : « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. »

[...] « Alors : par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ ».

Méthode 17 (Rédaction d'une récurrence double) Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier $n \geqslant n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
1. Initialisation : montrer $\mathscr{P}(n_0)$ et $\mathscr{P}(n_0+1)$.
2. Hérédité : « Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$, et montrons $\mathscr{P}(n+2)$. »

[...] « Alors : par principe de récurrence double, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ ».

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Pas de question de cours dans ce chapitre

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les bases de la logique (définition et table)
   - l'équivalence ☐
   - la négation ☐
   - la conjonction ☐
   - la disjonction ☐
   - l'implication ☐
2. Concernant les ensembles (définition logique et visualisation en diagrammes) :
   - la notion d'ensemble ☐
   - l'union, l'intersection ☐
   - l'inclusion et le complémentaire ☐
3. Savoir utiliser les quantificateurs et rédiger des phrases sans mélanger texte et quantificateur ☐
4. Concernant les raisonnements, savoir maitriser et rédiger :
   - le raisonnement direct ☐
   - le raisonnement par contraposée ☐
   - le raisonnement par l'absurde ☐
   - le raisonnement par disjonction de cas ☐
   - le raisonnement par récurrence ☐

Signalétique du TD

- Le logo désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

4.1. Logique et quantificateurs

Exercice 1 | [Solution] Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0$.
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ y \geqslant 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.

Exercice 2 | **Propositions sur les suites** [Solution] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis les nier :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $m \in \mathbb{R}$.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

Exercice 3 | **Propositions sur les fonctions** [Solution] Soit (f, g) deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. L'application f est croissante.
2. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geqslant 0$.
3. La fonction f est paire.
4. La fonction f ne s'annule jamais.
5. La fonction f est inférieure à la fonction g.
6. La fonction f est périodique.

Exercice 4 | [Solution] Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leqslant x < y$.
2. $(x^2 = 1, x \in \mathbb{R}^+) \Longrightarrow x = 1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x' \in \mathbb{R},\ (x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

4.2. Ensembles

Exercice 5 | [Solution] Soient :

- $\mathrm{A} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\{\begin{array}{r} x - y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.\right\}$,
- $\mathrm{B} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\{\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{array}\right.\right\}$.

Montrer que : $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Exercice 6 | [Solution] On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x - y = 2\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (3x + y + 2)(x + 2y + 4) \geqslant 0\right\}.$$

Montrer que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. A-t-on égalité ?

4.3. Raisonnements (hors récurrences)

Exercice 7 | [Solution] Montrer que, pour tous réels x et y,

$$\min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}$$

où $\min(x,y)$ désigne la plus petite valeur entre x et y (par exemple, $\min(1,4)=1$).

Exercice 8 | [Solution] On considère les deux propositions suivantes :

- A : « m et n sont deux entiers pairs », et
- B : « $m+n$ est un entier pair ».

A-t-on : A $\Longrightarrow$ B ? B $\Longrightarrow$ A ? A $\Longleftrightarrow$ B ?

Exercice 9 | [Solution] Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$x^2+y^2=0 \iff x=0, \quad y=0.$$

Exercice 10 | [Solution] Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x+y>2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Exercice 11 | [Solution] Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon>0, \quad x\leqslant\varepsilon \Longrightarrow x=0.$$

Exercice 12 | [Solution] On a démontré dans le cours que pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$, si n^2 est pair alors n pair.
En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

4.4. Raisonnement par récurrence

Cette dernière section sera traitée plus tard dans l'année.

Exercice 13 | [Solution] Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=3,\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=5u_n-4. \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n=2\times5^n+1$.

Exercice 14 | [Solution] Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1=5,\\ \forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}. \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n\geqslant2$.

Exercice 15 | [Solution] Soit (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=0,\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+4n. \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n=2n(n-1)$.

Exercice 16 | [Solution] Soit (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=3,\ u_1=3,\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+2u_n. \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n=2^{n+1}+(-1)^n$.

Exercice 17 | [Solution] Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par ses termes impairs et pairs :

$$\begin{cases} u_1=1,\\ \forall n\in\mathbb{N}^\star,\ u_{2n}=2u_n,\ u_{2n+1}=u_n+u_{n+1}. \end{cases}$$

1. Calculer $u_1,\dots,u_4$ puis conjecturer la valeur de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.
2. L'établir par récurrence.

Exercice 18 | [Solution] Montrer par récurrence que : $\forall n\geqslant4, \quad n^2\leqslant2^n$.
Indication : Dans l'hérédité, on cherchera à multiplier par 2 l'hypothèse de récurrence

Exercice 19 | [Solution] Soit $a\in\mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad (1+a)^n\geqslant1+na.$$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé] Étude de chaque assertion :

1. Faux, on peut prendre comme contre exemple $x=-1$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ x<0$.
2. Vrai, on peut prendre par exemple $y=1$.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ y<0$.
3. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y=\sqrt{x}$. On a bien alors $y^2=x$. On remarque que l'on peut également prendre $y=-\sqrt{x}$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
4. Faux : soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x=y^2+1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
   Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y.
   Négation : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}^+,\ x \neq y^2$.
5. Faux : soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x=y^2$, alors en particulier, pour $y=0$ on aurait $x=0$, et pour $y=1$ on aurait $x=1$. Ceci est absurde.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \neq y^2$.
6. Faux : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche y tel que $x+y>0$ est faux. Il suffit pour cela de prendre y tel que $x+y \leqslant 0$ c'est-à-dire $y \leqslant -x$. Prenons par exemple $y=-x-1$. On a alors $x+y=-1 \leqslant 0$. Donc on a bien un contre-exemple.
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y \leqslant 0$.
7. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On cherche y tel que $x+y>0$, c'est-à-dire $y>-x$. Prenons par exemple $y=-x+1$. On a bien alors $x+y=1>0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y \leqslant 0$.
8. Faux : on peut prendre comme contre-exemple $x=-1$ et $y=-2$. Alors $x+y=-3<0$.
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y \leqslant 0$.

Solution (exercice 2) [Énoncé] Étude de chaque propriété :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq u_0$
4. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
   Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$
   Négation : $\exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$.
6. $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$
   Négation : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ u_n < m$.

Solution (exercice 3) [Énoncé] Étude de chaque propriété :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ (a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b))$
   Négation : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b$ et $f(a) > f(b)$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geqslant 0$
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) < 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > g(x)$.
6. $\exists T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$
   Négation : $\forall T \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x+T) \neq f(x)$.

Solution (exercice 4) [Énoncé]

1. L'inégalité $1 \leqslant x < y$ correspond à $1 \leqslant x$ et $x<y$. Or la négation de (A et B) est (non A) ou (non B). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x<1 \text{ ou } x \geqslant y.}$
2. La négation de P $\Longrightarrow$ Q est (P et (non Q)). Ainsi ici on obtient : $\boxed{x^2=1, x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \neq 1.}$
3. La négation est : $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R} : x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x').}$

Solution (exercice 5) [Énoncé]

$\boxed{\subset}$ $A \subset B$. Soit $(x,y,z) \in A$, alors $x=y$ et $z=0$. On a alors :

$$x-y+z = x-x+0 = 0+0 = 0, \quad x-y+3z = x-x+3\times 0 = 0,$$

donc $(x,y,z) \in B$.

$\boxed{\supset}$ $B \subset A$. Soit $(x,y,z) \in B$, alors $x-y+z=0\,(1)$ et $x-y+3z=0\,(2)$. On a alors en calculant $(2)-(1)$ on a :

$$(x-y+3z)-(x-y+z) = 2z = 0-0$$

d'où l'on tire $z=0$. En injectant $z=0$ dans (1), on obtient alors $x-y=0$. donc $(x,y,z) \in A$.

Conclusion : $A=B$.

Solution (exercice 6) [Énoncé]

- Montrons que $A \subset B$: soit $(x,y) \in A$, montrons que $(x,y) \in B$. Par définition de l'ensemble A, on sait que $y=x-2$. Pour montrer que $(x,y) \in B$, vérifions que : $(3x+y+2)(x+2y+4) \geqslant 0$. On a :

$$(3x+y+2)(x+2y+4) = (3x+x-2+2)(x+2x-4+4) = 4x \times 3x = 12x^2 \geqslant 0.$$

Ainsi on a bien que $(x,y) \in B$ et on vient de montrer que $\boxed{A \subset B}$.

- On veut montrer que l'on n'a pas égalité. Il suffit de trouver un couple $(x,y) \in B$ tel que $(x,y) \notin A$. Par exemple $(1,0)$ est bien dans l'ensemble B mais il n'est pas dans l'ensemble A.

Solution (exercice 7) [Énoncé] Comme dans le cours, on raisonne par disjonction de cas suivant le signe de $x-y$.

- **[1^er cas.]** si $x-y \geqslant 0$, à savoir si $x \geqslant y$, on a :
$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y,$$
sachant que : $\min(x,y) = y$ puisque $x \geqslant y$. On a bien montré que : $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.
- **[2^nd cas.]** $x-y<0$, à savoir si $x<y$, on a :
$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(-(x-y))}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$
sachant que : $\min(x,y) = x$ puisque $x<y$. On a bien montré que : $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

Dans tous les cas ; on a : $\boxed{\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}}$.

Solution (exercice 8) [Énoncé] On a $\boxed{A \Longrightarrow B}$: en effet, si m et n sont pairs, alors il existe k et k' entiers tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$. On a donc $m+n = 2k+2k' = 2(k+k')$, ce qui implique $m+n$ pair.
Le sens réciproque est faux, $\boxed{\text{B n'implique pas A}}$. Pour contre exemple on peut choisir $m=3$ et $n=5$. On a $3+5=8$: 8 est pair alors que 3 et 5 sont impairs.
On en déduit donc que $\boxed{\text{l'équivalence est fausse}}$.

Solution (exercice 9) [Énoncé] On montre l'équivalence par double implication. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $x=0$ et $y=0$. On a alors $x^2+y^2 = 0^2+0^2 = 0$. Ainsi, on a montré que $(x=0 \text{ et } y=0) \Longrightarrow (x^2+y^2=0)$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ On raisonne par contraposée. On suppose que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

- Cas 1 : si $x \neq 0$. Alors $x^2>0$, et de plus $y^2 \geqslant 0$. Donc par somme $x^2+y^2>0$, et donc $x^2+y^2 \neq 0$.
- Cas 2 : si $y \neq 0$. Le même raisonnement donne $x^2+y^2 \neq 0$.

Ainsi, par contraposée, on a montré que $(x^2+y^2=0) \Longrightarrow (x=0 \text{ et } y=0)$.
Conclusion : on a bien démontré que
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x^2+y^2=0) \Longrightarrow (x=0 \text{ et } y=0).}$$

Solution (exercice 10) [Énoncé] On cherche à montrer que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y>2 \Longrightarrow x>1 \text{ \underline{ou} } y>1).$$
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par contraposée, on suppose que $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$. Par propriété sur les inégalités, on peut additionner terme à terme les inégalités, on obtient ainsi $x+y \leqslant 2$. Donc non$(x+y>2)$ est vérifiée.
Conclusion : par contraposée, on a bien démontré
$$\boxed{(x+y>2) \Longrightarrow (x>1 \text{ \underline{ou} } y>1.)}$$

Solution (exercice 11) [Énoncé] Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on raisonne par contraposée. On suppose donc que $x \neq 0$, c'est-à-dire $x>0$. On cherche alors à vérifier que : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$.
En faisant un dessin, on remarque qu'il suffit de prendre (par exemple) $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$.
En effet, on a alors bien $\varepsilon > 0$ car $x>0$ et $x > \dfrac{x}{2}$ (car $x>0$) donc on a aussi $x > \varepsilon$.
D'où par contraposition :
$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0,\ x \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow x = 0.}$$

Solution (exercice 12) [Énoncé] On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, par définition de $\mathbb{Q}$, il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, tel que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et on peut de plus supposer que p et q sont tels que la fraction est irréductible. On a alors, en passant au carré que $p^2 = 2q^2$, ainsi p^2 est pair et d'après la propriété démontrée en cours, on sait alors que p est pair. Ainsi, il existe $p' \in \mathbb{Z}$, tel que $p = 2p'$. On a donc $(2p')^2 = 2q^2$, soit $4(p')^2 = 2q^2$, puis en simplifiant $q^2 = 2(p')^2$ et q^2 est ainsi pair. Puis, q est pair. Contradiction car on a supposé la fraction irréductible.
Ainsi, $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$.

Solution (exercice 13) [Énoncé] Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 2 \times 5^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. On a : $2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ avec $u_0 = 3$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2 \times 5^n + 1$, montrons que $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} + 1$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 4 \\ &= 5 \times (2 \times 5^n + 1) - 4 \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\ &= 2 \times 5^{n+1} + 5 - 4 \\ &= 2 \times 5^{n+1} + 1. \end{aligned}$$
D'où le résultat par récurrence.

Solution (exercice 14) [Énoncé] Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: $u_n \geqslant 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Initialisation. On a : $u_1 = 5$ avec $5 \geqslant 2$, donc $u_1 \geqslant 2$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 2$, montrons que $u_{n+1} \geqslant 2$.
Puisque $u_n \geqslant 2$, on a : $u_n + 2 \geqslant 4$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient :

$$\sqrt{u_n + 2} \geqslant \sqrt{4}$$

ce qui donne, sachant que $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et que $\sqrt{4} = 2$:

$$u_{n+1} \geqslant 2,$$

d'où le résultat par récurrence.

Solution (exercice 15) [Énoncé] Notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « $u_n = 2n(n-1)$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$, on a bien : $2 \times 0 \times (0-1) = 0 = u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2n(n-1)$. Montrons que $u_{n+1} = 2n(n+1)$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 4n \quad \text{\textit{par hypothèse de récurrence}} \\ &= 2n(n-1) + 4n \\ &= 2n^2 - 2n + 4n \\ &= 2n^2 + 2n \quad \text{\textit{en factorisant par } } 2n \\ &= 2n(n+1) \\ &= 2(n+1)(n+1-1). \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire, d'où le résultat par le principe de récurrence.

Solution (exercice 16) [Énoncé] Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Initialisation. pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

- D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_0 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^1 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_1 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^2 + (-1)^1 = 4 - 1 = 3$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$, montrons que $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+3}$.
Par définition de la suite, on sait que : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$. Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2(2^{n+1} + (-1)^n) \\ &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} + 2(-1)^n \\ &= 2^{n+2}(1+1) + (-1)^n(-1+2) \\ &= 2^{n+3} + (-1)^n. \end{aligned}$$

Or $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n$. Ainsi on a : $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+2}$, et $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion : il résulte du principe de récurrence double que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{n+1} + (-1)^n.$$

Solution (exercice 17) [Énoncé]

1. Calculons les premiers termes afin d'établir une conjecture. On a

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 2u_1 = 2 \\ u_3 &= 1 + 2 = 3 \\ u_4 &= 2u_2 = 4. \end{aligned}$$

On conjecture que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = n}$. Montrons cette propriété par récurrence forte.

2. **Initialisation.** La propriété est initialisée pour $n = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $u_k = k$ pour tout $k = 1, \dots, n$, et montrons que $u_{n+1} = n + 1$ par disjonction de cas. Alors

- si n est pair, il existe un entier k de sorte que $n = 2k$, alors $u_{n+1} = u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} = k + k + 1$ par hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} = 2k + 1 = n + 1$, la propriété est démontrée.
- Si n est impair, il existe un entier k de sorte que $n = 2k + 1$, alors $u_{n+1} = u_{2k+2} = u_{2(k+1)} = 2u_{k+1} = 2(k+1)$ par hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} = 2k + 2 = n + 1$, la propriété est démontrée.

En conclusion, par principe de récurrence forte, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = n.$$

Solution (exercice 18) [Énoncé]

Initialisation. Pour $n = 4$, la propriété est $4^2 = 16 \leqslant 2^4 = 16$. Elle est donc vérifiée.

Hérédité. Soit $n \geqslant 4$ tel que que $n^2 \leqslant 2^n$, montrons que $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. Alors en multipliant l'hypothèse de récurrence par 2, on déduit :

$$2n^2 \leqslant 2^{n+1}.$$

Il suffit alors d'établir que $(n+1)^2 \leqslant 2n^2$, cela impliquera que $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. Mais

$$\begin{aligned}(n+1)^2 = n^2+2n+1 \leqslant 2n^2 &\iff 2n+1 \leqslant n^2\\ &\iff 0 \leqslant n^2-2n-1.\end{aligned}$$

De plus, le discriminant de $x \longmapsto x^2-2x-1$ est 8, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2-2x-1 = \left(x-(1+\sqrt{2})\right)\left(x-(1-\sqrt{2})\right).$$

Mais, $1+\sqrt{2} \approx 2.41$, le trinôme précédent est positif à l'extérieur des racines, et $n \geqslant 4$ donc n^2-2n-1 est positif. C'est terminé. Par principe de récurrence, on a établi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \quad n^2 \leqslant 2^n}.$$

Solution (exercice 19) [Énoncé]

Initialisation. Pour $n=0$, la propriété est $(1+a)^0 = 1 \geqslant 1$, elle est donc vérifiée.

Hérédité. Soit n tel que c'est-à-dire $(1+a)^n \geqslant 1+na$. Alors montrons que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$. On a :

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n(1+a) \quad \text{\textit{hypothèse de réc}}\\ &= (1+a)(1+na)\\ &\geqslant 1+na+a+na^2 \quad na^2 \geqslant 0\\ &\geqslant 1+(n+1)a+0.\end{aligned}$$

Donc par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na}.$$