Chapitre # (ALG) 2 — Nombres Réels & Trigonométrie

Résumé & Plan

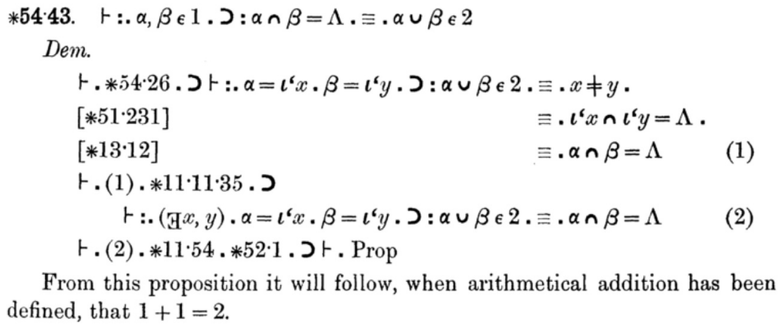
Ce chapitre consiste essentiellement en des rappels des notions vues par le passé. Afin de ne pas se limiter à des exemples simplistes on sera parfois amené à utiliser des notions et propriétés vues au lycée qui ne seront rappelées qu'après.

> *La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.*
>
> — GALILÉE

> *L'utilisation du x en mathématiques pour désigner une inconnue vient de l'arabe, une traduction en français serait « la chose ».*
>
> — **Le saviez-vous ?**

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Nous supposerons construit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, ainsi que les sous-ensembles usuels des rationnels, entiers *etc.*. Mais tout ceci cache des difficultés auxquelles les mathématiciens se sont frottées pendant longtemps : celle de la construction de ces ensembles. Par exemple, qu'est-ce que l'entier 1, 2 *etc.* ? Dans le livre *Principia Mathematica* (1910), il faut environ 300 pages à WHITEHEAD et RUSSEL pour démontrer que $1+1=2$.



∗54·43. ⊢ :. α, β ∊ 1 . ⊃ : α ∩ β = Λ . ≡ . α ∪ β ∊ 2

Dem.

⊢ . ∗54·26 . ⊃ ⊢ :. α = ι'x . β = ι'y . ⊃ : α ∪ β ∊ 2 . ≡ . x ≠ y .

[∗51·231] ≡ . ι'x ∩ ι'y = Λ .

[∗13·12] ≡ . α ∩ β = Λ (1)

⊢ . (1) . ∗11·11·35 . ⊃

⊢ :. (∃x, y) . α = ι'x . β = ι'y . ⊃ : α ∪ β ∊ 2 . ≡ . α ∩ β = Λ (2)

⊢ . (2) . ∗11·54 . ∗52·1 . ⊃ ⊢ . Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that 1 + 1 = 2.

Nous ne nous poserons évidemment pas de telles questions ici.

1. OPÉRATIONS DE BASES

1.1. Addition & Multiplication

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux *lois internes* : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$. Pourquoi les qualifier d'internes ? Car elles prennent en argument deux réels et elles renvoient un autre réel, on reste donc « dans l'ensemble $\mathbb{R}$ » :

$$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \times : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Rappelons quelques propriétés de la loi additive.

Proposition 1 | Propriétés de l'addition

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :
- **[Interne]** $x + y \in \mathbb{R}$,
- **[Associativité]** $(x+y)+z = x+(y+z)$.
- **[Commutativité]** $x+y = y+x$.
- **[Élément neutre]** $x+0 = 0+x = x$. On dit que 0 est un *élément neutre* pour l'addition.

- **[Élément opposé]** $x + (-x) = 0$. On dit que $-x$ est *l'élément opposé de x* pour l'addition.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :

- $x \times y \in \mathbb{R}$,
- **[Associativité]** $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- **[Commutativité]** $x \times y = y \times x$.
- **[Élément neutre]** $x \times 1 = 1 \times x = x$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication.
- **[Élément inverse]** Si $x \neq 0$, alors $x \times \frac{1}{x} = 1$. On dit que $\frac{1}{x}$ est *l'élément inverse de x* pour la multiplication.
- **[Distributivité]** $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

Remarque 1 Il existe un vocabulaire — mais [H.P] en BCPST — pour les ensembles munis de lois. Ici, avec les propriétés précédentes :

- $(\mathbb{R}, +)$ est qualifié de *groupe commutatif*,
- $(\mathbb{R}, +, \times)$ est qualifié de *corps commutatif*.

1.2. Rappels de calcul fractionnaire

On rappelle ici brièvement les règles de calcul usuelles du collège relatives aux fractions.

Proposition 3 | Calcul fractionnaire

Soient $((a, c), (b, d)) \in \mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{N}^*)^2$. Alors :

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$,
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$,
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
- si $c \neq 0$, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Exemple 1

1. $\frac{13}{28} + \frac{5}{42} = \frac{13}{2 \times 14} + \frac{5}{3 \times 14} = \frac{49}{2 \times 3 \times 14} = \frac{7}{12}$. *(Réduction au même dénominateur)*
2. Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x + e^x}{x} = \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{e^x}{x}\right)}{\cancel{x} \times 1} = 1 + \frac{e^x}{x}$.
3. Pour tout $x > 0$, $\frac{x^3 + x\ln(x) - 2}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{\cancel{x}\ln(x)}{\cancel{x}} + \frac{-2}{x} = x^2 + \ln(x) - \frac{2}{x}$.
4. Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x^2 e^x}{x} = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} e^x = xe^x$.
5. Pour tout $t \neq 0$, $\frac{\frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{t}\right)}{t} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{t}\right)\frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{t^2}\right)$.

Attention

On prendra garde à appliquer correctement la règle des signes devant une fraction ! En effet, l'écriture fractionnaire $\frac{a+b}{c}$ remplace l'écriture en ligne $(a+b) \div c$: il y a donc toujours une parenthèse masquée autour du numérateur d'une fraction... Ainsi, par exemple :

$$3 - x - \frac{2-x}{3} = \frac{3(3-x) - (2-x)}{3} = \frac{9 - 3x - 2 + x}{3} = \frac{7 - 2x}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x.$$

On rappelle également les grossières erreurs ci-après, à ne plus commettre bien sûr.

Attention

- $\frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$: on ne simplifie **PAS** dans le cas d'une addition,
- $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$: on ne sépare **PAS** une somme au dénominateur.

De plus certaines fractions possèdent une forme particulière, dite *irréductible*.

Théorème 1 | Forme irréductible d'un rationnel

Tout nombre rationnel non nul peut être écrit d'une et une seule manière, appelée sa *forme irréductible*, sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et p et q premiers entre eux (*i.e.* qui ont 1 pour seul diviseur commun). Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists!(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ x = \frac{p}{q} \text{ \textbf{et} } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}$$

Dans la pratique, pour obtenir la forme irréductible, on divise numérateur et dénominateur par le plus grand diviseur commun.

Exemple 2 Mettre sous forme irréductible $\frac{495}{60}$.

$$\frac{495}{60} = \frac{5 \times 33 \times 3}{5 \times 4 \times 3} = \frac{33}{4}.$$

1.3. Rappels sur les égalités et inégalités

Notation

On note $x \leqslant y$ lorsque $x - y \leqslant 0$, et $x < y$ lorsque $x - y < 0$. On définit de manière analogue $x \geqslant y, x > y$.

Pour comparer deux quantités, on peut faire leur différence et étudier son signe, sauf si la comparaison est évidente. De plus, deux réels se comparent toujours : on dit que $\mathbb{R}$ est *totalement ordonné*. On peut alors définir quantités ci-après, que nous utiliserons parfois.

Définition 1 | Max / Min

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on définit alors

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant y, \\ y & \text{sinon,} \end{cases} \quad \underline{\textbf{et}} \quad \min(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x \geqslant y, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Passons à présent aux propriétés de l'inégalité.

Proposition 4 | Propriétés de $\leqslant$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. Alors :
- **[Réflexivité]** $x \leqslant x$.
- **[Anti-symétrie]** $x \leqslant y, \quad y \leqslant x \iff x = y$.
- **[Transitivité]** $x \leqslant y, \quad y \leqslant z \implies x \leqslant z$.

Manipulation d'égalités et d'inégalités. On va rappeler dans ce paragraphe les propriétés élémentaires de manipulation des égalités et inégalités sur $\mathbb{R}$ vues dans les classes antérieures.

Proposition 5 | Manipulations d'égalités & d'inégalités

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- **[Additionner =]** $x = y \iff x + z = y + z$.
- **[Multiplier =]** Si de plus $z \neq 0$, alors $x = y \iff xz = yz$.
- **[Équation produit]** $xy = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0$.
- **[Signe d'un produit]**

$$xy \geqslant 0 \quad (\textit{resp.} \leqslant 0) \iff \begin{cases} x, y & \text{sont de même signe} \\ & (\textit{resp.}\text{ signe opposé}). \end{cases}$$

- **[Additionner $\leqslant$]** $x \leqslant y \iff x + z \leqslant y + z$.
- **[Multiplier $\leqslant$]** Si de plus $z > 0$, alors :

  $x \leqslant y \iff xz \leqslant yz$.

  Si de plus $z < 0$, alors :

  $x \leqslant y \iff xz \geqslant yz$.
- **[Multiplier/Additionner des inégalités]** Soit de plus $t \in \mathbb{R}$. Alors :

  $x \leqslant y, \quad z \leqslant t \implies x + z \leqslant y + t$.

  $\boxed{0 \leqslant} x \leqslant y, \quad 0 \leqslant z \leqslant t \implies 0 \leqslant xz \leqslant yt$.
- **[Inverser des inégalités]**

  $x \leqslant y$ **et** x, y sont de même signe non nuls $\iff \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

- On peut donc multiplier une égalité **par une quantité strictement positive**, et ajouter/soustraire par le même terme de chaque côté.
- Le signe d'un produit de deux éléments permet de caractériser le signe de chaque terme du produit.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement positive**.
- On peut donc multiplier une inégalité **par une quantité strictement négative en inversant le sens de l'inégalité**.
- On peut donc additionner deux inégalités, et les multiplier sous réserve qu'elles ne fassent intervenir que des nombres réels positifs.
- On peut donc inverser deux inégalités faisant intervenir des réels non nuls de même signe.

Bien entendu, toutes ces propriétés s'adaptent à des inégalités strictes, et s'étendent à des sommes quelconques de termes.

Proposition 6 | Sommer des inégalités

Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels, et $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad x_i \leqslant y_i \implies x_1 + \cdots + x_n \leqslant y_1 + \cdots + y_n.$$

Attention

- On ne soustrait pas des inégalités. Par exemple, $\begin{cases} -1 \leqslant 2 \leqslant 2, \\ 0 \leqslant 1 \leqslant 2 \end{cases}$ et on n'a clairement pas $-1 - 0 \leqslant \boxed{2 - 1 \leqslant 0}$!

  Si on veut encadrer une quantité du type $x - y$, on peut encadrer x et encadrer y puis multiplier l'encadrement de y par -1 (ce qui change le sens !), puis sommer les inégalités pour terminer.
- Lorsqu'on multiplie ou l'on divise une inégalité par un nombre négatif, cela en change le sens aussi, puisque diviser par un négatif revient à multiplier par son inverse (qui sera négatif).

Exemple 3 Soient a et b deux nombres réels tels que : $\begin{cases} 1 \leq a \leq 3, \\ -4 \leq b \leq 7. \end{cases}$

Donner un encadrement de $\dfrac{a+b}{5}$ et de $\dfrac{3a-b}{2}$.

Composition d'inégalités par une fonction monotone. Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Rappelons que (nous le reverrons dans le Chapitre (AN) 1) :

- f est dite *croissante* (*resp. strictement*) sur D si
$$\forall (x,y) \in \mathrm{D}^2 \quad x \leqslant (\textit{resp.} <) y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant (\textit{resp.} <) f(y).$$
Autrement dit si on peut appliquer f à une inégalité en conservant l'ordre : les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents.
- On dit que f est *décroissante* (*resp. strictement*) sur D si
$$\forall (x,y) \in \mathrm{D}^2 \quad x \leqslant (\textit{resp.} >) y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant (\textit{resp.} >) f(y).$$
Autrement dit si on peut appliquer f à une inégalité en inversant l'ordre : les images sont rangées dans l'ordre inversé des antécédents.

Ainsi, la monotonie d'une fonction permet de manipuler des inégalités. Voyons quelques exemples. Enfin, on termine par une remarque importante.

Remarque 2 **($\Longrightarrow$ devient $\Longleftrightarrow$ en cas de monotonie stricte)** Pour les fonctions strictement monotones, on peut remplacer le symbole « $\Longrightarrow$ » par « $\Longleftrightarrow$ » dans la définition précédente.

Exemple 4

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^y$, car :
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x < y \Longleftrightarrow \ln(x) < \ln(y)$, car :
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad x \leq y \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2$, car :
- $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x \leq y \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$, car :

Attention

Il est **faux** de dire que
$$\forall (x,y) \in \boxed{\mathbb{R}^2}, \quad x \leq y \Longrightarrow x^2 \leq y^2$$
car $a \longmapsto a^2$ n'est pas monotone (c'est-à-dire croissante ou décroissante) sur $\mathbb{R}$.
En revanche, il est **juste** de dire :
$$\forall (x,y) \in \boxed{(\mathbb{R}^+)^2}, \quad x \leq y \Longrightarrow x^2 \leq y^2.$$
$$\forall (x,y) \in \boxed{(\mathbb{R}^-)^2}, \quad x \leq y \Longrightarrow x^2 \geq y^2.$$

1.4. Puissances entières

Définition 2 | Puissances entières
Soit $x \in \mathbb{R}$, on note x^2 le réel $x \times x$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit par récurrence le réel x^n par :
$$x^0 = 1, \quad x^1 = x, \quad x^{n+1} = x \times x^n.$$

Pour $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit x^{-n} par : $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

De manière plus explicite, avec les notations précédentes, on a :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}, \quad x^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ facteurs}}}.$$

De manière générale, nous serons capable de définir ultérieurement x^α avec $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ et même x^α avec $x \in \mathbb{R}$ lorsque α est l'inverse d'un entier impair, mais il faudra attendre les rappels sur la fonction exponentielle et le logarithme. Rappelons les règles usuelles sur les fonctions puissances.

Proposition 1 | Règles sur les puissances

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$ de sorte que les puissances ci-après soient définies. Alors :

- $x^{n+p} = x^n \times x^p \quad (x^n)^p = x^{n \times p} \quad (x \times y)^n = x^n \times y^n$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.
- Si on a de plus $x > 0$, alors : $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = \dfrac{1}{x^{m-n}}$.

Les puissances de -1 sont très faciles à calculer, elle dépend simplement de la parité de la puissance, la preuve étant une simple disjonction de cas dans la définition de la puissance entière.

Proposition 7 | Puissances de -1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve

Exemple 5 **(Quiz)** Cochez la bonne réponse.

Expression	Réponse A	Réponse B	Réponse C
$a^5 a^3 =$	☐ a^{5^3}	☐ a^{15}	☐ a^8
$a^2 b^3 =$	☐ $(ab)^2 b$	☐ $(ab)^5$	☐ $(ab)^6$
$(a^2)^n =$	☐ a^{2n}	☐ a^{2+n}	☐ a^{2^n}
$(3^n)^2 =$	☐ 3^{n^2}	☐ 6^n	☐ 9^n
$\left(a^{n^2}\right)^3 =$	☐ a^{3n^2}	☐ a^{n^8}	☐ a^{n^6}
$a^{3n}(a^n)^2 =$	☐ a^{3n^3}	☐ a^{n^2+3n}	☐ a^{5n}
$2^{-2k}3^k =$	☐ $\left(\frac{3}{4}\right)^k$	☐ $\left(\frac{3}{2}\right)^k$	☐ $\left(\frac{3}{2}\right)^{2k}$
$3^{2k+1}2^{-k} =$	☐ $3\left(\frac{9}{2}\right)^{-k}$	☐ $3\left(\frac{9}{2}\right)^k$	☐ $9\left(\frac{3}{2}\right)^k$
$2^n + 2^n =$	☐ 4^n	☐ 2^{n+1}	☐ 2^{2n}
$(-2)^{2n+1} =$	☐ -2^{2n}	☐ $(-4)^{n+1}$	☐ -2×4^n
$2 \times \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^2 =$	☐ 2^n	☐ 2^{n+1}	☐ $\frac{1}{2^{n-1}}$

Exemple 6 Écrire sous la forme $2^p \times 3^q$ avec p et q deux entiers relatifs :

1. $\dfrac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 3^8 \times 6^{-1}} =$

2. $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} =$

3. $\dfrac{\left(3^2\times(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\times 2^3\right)^{-2}} =$

4. $\dfrac{12^{-4}\times(-3)^3}{\left(\frac{2}{9}\right)^3\times 18^2\times 16^{-3}} =$

Proposition 8 | Identités remarquables

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, alors :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2,\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Preuve Elles se démontrent directement à l'aide de la définition et des règles usuelles de développement.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2.$$

De-même pour les deux autres.

Exemple 7 (Puissance 3) Développer $(a+b)^3, (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Remarque 3 (Généralisations possibles)

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ seront généralisées dans le Chapitre (ALG) 3 en la formule dite du *binôme de* Newton.
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ possède elle aussi une généralisation à toute expression de la forme $a^n-b^n, n\in\mathbb{N}$. On l'appelle l'*identité de* Bernoulli mais hors-programme en BCPST.

Encadrements et puissances entières. Nous avons un résultat sur la manipulation des encadrements et des puissances, qui précise en d'autres termes la monotonie de certaines fonctions puissance, le voici.

Proposition 9 | Puissances et encadrements

- Soit $n=2k+1\in\mathbb{N}$ un entier impair, $k\in\mathbb{N}$. Alors on peut toujours élever à la puissance n un encadrement, c'est-à-dire :
$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x\leqslant(<)y \implies x^n\leqslant(<)y^n.$$
Autrement dit, la fonction $x\longmapsto x^{2k+1}$ est (strictement) croissante pour tout $k\in\mathbb{N}$.
- Soit $n=2k\in\mathbb{N}$ un entier pair, $k\in\mathbb{N}$. Alors :
  - on peut toujours élever à la puissance n un encadrement **positif**, c'est-à-dire :
  $$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad \boxed{0\leqslant} x\leqslant(<)y \implies 0\leqslant x^n\leqslant(<)y^n.$$
  - On peut toujours élever à la puissance n un encadrement **négatif à condition de renverser l'ordre**, c'est-à-dire :
  $$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x\leqslant(<)y\leqslant 0 \implies y^n\leqslant(<)x^n\leqslant 0.$$

  Autrement dit, la fonction $x\longmapsto x^{2k}$ est croissante **sur** $\mathbb{R}^+$ et décroissante **sur** $\mathbb{R}^-$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Preuve Conséquences directes des monotonies des fonctions usuelles, voir le Chapitre (AN) 1.

1.5. Racines carrées & cubiques

On sait élever au carré des réels, ou à une puissance plus grande. On peut aussi se poser la question inverse : est-ce que tout réel peut être vu comme le carré d'un autre ? le cube d'un autre ? Pour la racine carrée la réponse est clairement non pour les négatifs (un carré est forcément positif), et oui pour les positifs. Pour les cubes, il y a toujours existence et unicité.

Définition/Proposition 1 | Racine carrée & Cubique

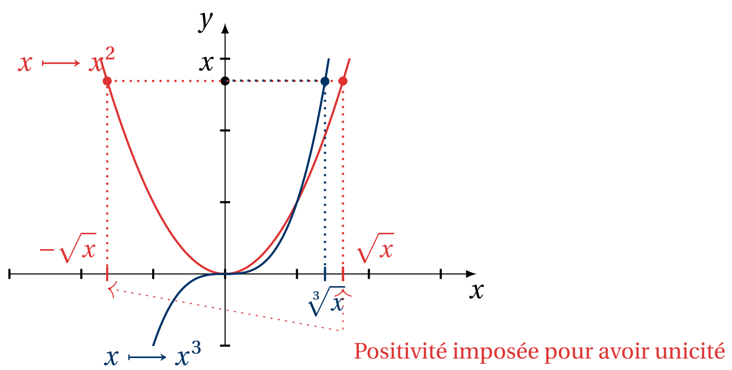
- **[Racine carrée]** Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Il existe un unique réel positif, noté $\sqrt{x}$, ou encore $x^{\frac{1}{2}}$, tel que :
$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$
On appelle ce réel **la** *racine carrée (ou simplement parfois « la racine ») de* x.
- **[Racine cubique]** Soit $x\in\mathbb{R}$. Il existe un unique réel, noté $\sqrt[3]{x}$, ou encore

$x^{\frac{1}{3}}$, tel que :
$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$ On appelle ce réel **la** *racine cubique* de x.

Remarque 4 (Comment comprendre ces deux propriétés ?) En anticipant légèrement sur le chapitré dédié aux fonctions, traçons les graphes des fonctions $x \longrightarrow x^2, x \longrightarrow x^3$. On voit qu'il existe :

- un unique antécédent de $x \in \mathbb{R}$ pour la fonction cube, et ce pour tout x.
- En revanche, pour la fonction carrée, les négatifs n'ont pas d'antécédent, et les positifs en ont deux.

Par ailleurs, les notations $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}$ apparaitrons comme plus claires après le Chapitre (AN) 1.



Attention — Racine d'un carré

La quantité $\sqrt{x^2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $x^2 \geqslant 0$. En revanche, sur $\mathbb{R}^-$, nous n'avons pas $\sqrt{x^2} = x$. Par exemple, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$.

Exemple 8 Déterminer $\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{-27}$.

Proposition 2 | Règles sur les racines carrées

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. On a :

- $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$.
- Si on a de plus $y > 0$, alors : $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Proposition 3 | Règles sur les racines cubiques

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- $\sqrt[3]{x \times y} = \sqrt[3]{x} \times \sqrt[3]{y}$.
- Si on a de plus $y \neq 0$, alors : $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$.
- $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x, \quad \sqrt[3]{x^3} = x.$ [a]

Attention — Racine d'une somme

On ne peut rien dire de la racine d'une somme. Par exemple, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \neq 3+4 = 7$.

Attention — Notation racine

Le symbole $\sqrt{\ }$ est réservé à cet usage, on n'écrira jamais de racine carrée d'autre chose qu'un réel positif.

Définition 3 | Quantité conjuguée

Soient $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}_+$. Le nombre $A - \sqrt{B}$ est la *quantité conjuguée* de $A + \sqrt{B}$.

On a alors la relation : $(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B}) = A^2 - B$. Multiplier par la quantité conjuguée permet de faire « disparaître » les radicaux d'un dénominateur ou encore d'étudier le signe d'expressions de la forme $A(x) \pm B(x)$. Par exemple,
$$\frac{1}{4-\sqrt{15}} = \frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} = \frac{4+\sqrt{15}}{4^2-15} = 4+\sqrt{15}.$$

Exemple 9 (Calculs avec des radicaux) Mettre sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible ou faire en sorte qu'il n'y ait plus de racine au dénominateur.
$$\sqrt{72}, \quad 3\sqrt{125}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

- $\sqrt{72} = \sqrt{2 \times 4 \times 9} = 6\sqrt{2}$
- $3\sqrt{125} = 3\sqrt{5 \times 25} = 15\sqrt{5}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2} = \sqrt{2}+1$

a. Cette propriété est fausse pour la racine carrée, ce n'est pas un oubli.

Proposition 10 | Racines et encadrements

- On peut toujours appliquer la racine carrée à un encadrement positif c'est-à-dire :
$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad \boxed{0\leqslant} x\leqslant(<)y \implies 0\leqslant\sqrt{x}\leqslant(<)\sqrt{y}.$$
Autrement dit, la fonction $x\in\mathbb{R}^+\longmapsto\sqrt{x}$ est (strictement) croissante.
- On peut toujours appliquer la racine cubique à un encadrement :
$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x\leqslant(<)y \implies \sqrt[3]{x}\leqslant(<)\sqrt[3]{y}.$$
Autrement dit, la fonction $x\in\mathbb{R}\longmapsto\sqrt[3]{x}$ est (strictement) croissante.

Preuve Conséquences directes des monotonies des fonctions usuelles, voir le Chapitre (AN) 1.

Exemple 10 Montrer que : $2\leqslant\sqrt{5}\leqslant 3.$

1.6. Valeur absolue

La valeur absolue d'un réel est le même nombre réel mais dont on aurait enlevé le signe devant. Ainsi, si ce réel est positif il n'y a rien à faire, c'est sa valeur absolue. En revanche, s'il est négatif, il suffit d'ajouter un signe « - » devant ledit réel. Cela nous mène tout droit à la définition ci-après.

Définition 4 | Valeur absolue, Distance à zéro d'un réel

Soit $x\in\mathbb{R}$, la *valeur absolue de* x, notée $|x|$, est le réel défini par :
$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Exemple 11 Déterminer :

- $|2|=$
- $|0|=$
- $|-3|=$
- $|-\pi|=$

Exemple 12 Donner, en fonction de x, un expression sans valeur absolue de la quantité $|x-3|-|x+2|$. *On pourra présenter le résultat sous forme d'un tableau de signes.*

Définition 5 | Distance entre deux réels

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On définit la *distance de x à y* comme étant le réel noté $\mathrm{d}(x,y)$ et défini par : $\mathrm{d}(x,y)=\max(x,y)-\min(x,y)$. C'est donc la différence entre la plus grande valeur et la plus petite.

Exemple 13

- $\mathrm{d}(1,4)=4-1=3,$
- $\mathrm{d}(3,-1)=3-(-1)=4.$

Proposition 11 | Lien entre distance et valeur absolue

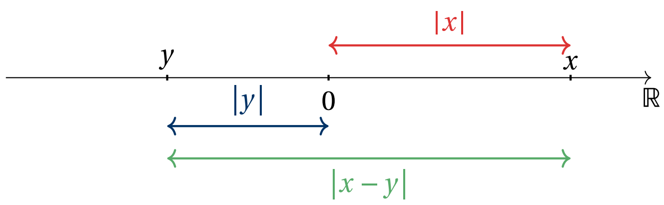
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors : $\mathrm{d}(x,y)=|x-y|.$

Preuve *(Point clef — **Disjonction de cas suivant la position entre x et y.**)*

-
-

Remarque 5 Puisque pour tout réel x, on a : $|x|=|x-0|$, la valeur absolue de x peut s'interpréter comme étant la distance entre x et 0.

Les réels peuvent se représenter sur une droite dite « numérique », les quantités définies *supra* se visualisent comme suit.



Pour tous réels x, y, la valeur absolue correspond à l'écart (sans signe) entre x et y, et $|x|$ représente donc la distance entre x et 0.

Proposition 12 | Propriétés de la valeur absolue et de la distance

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|0| = 0$,
2. $|x| \geqslant 0$, $\quad |x| = \max\{x, -x\}$.
3. **[Séparation]** $\quad |x| = 0 \iff x = 0$, $\quad \mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.
4. **[Parité / Symétrie]** $\quad |x| = |-x|$, $\quad \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.
5. **[Égalité et valeur absolue]** $\quad$ Pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$:
$$|x| = \mathrm{M} \iff x = \pm\mathrm{M}.$$
6. **[Encadrement et valeur absolue]** $\quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|$. Plus généralement, pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$:
$$|x| \leqslant \mathrm{M} \iff -\mathrm{M} \leqslant x \leqslant \mathrm{M}, \qquad |x| \geqslant \mathrm{M} \iff x \geqslant \mathrm{M} \ \underline{\textbf{ou}}\ x \leqslant -\mathrm{M}.$$
Les propriétés restent vraies avec des inégalités strictes.
7. **[Carré]** $\quad |x| = \sqrt{x^2}$, $\quad |x|^2 = x^2$.
8. **[Égalité de valeurs absolues]** $\quad |x| = |y| \iff x = y \ \underline{\textbf{ou}}\ x = -y$.
9. **[Produit/quotient]** $\quad |xy| = |x| \times |y|$. De plus si $y \neq 0$, alors :
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Remarque 6 Les propriétés
$$|x| \leqslant \mathrm{M} \iff -\mathrm{M} \leqslant x \leqslant \mathrm{M}, \qquad |x| \geqslant \mathrm{M} \iff x \geqslant \mathrm{M} \ \underline{\textbf{ou}}\ x \leqslant -\mathrm{M}$$
sont très intuitives si on garde à l'esprit l'interprétation de la valeur absolue en terme de distance à l'origine. Si $|x| \leqslant \mathrm{M}$, alors cela signifie que x est à distance au plus M de l'origine, donc que x est dans $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$.

Toutes ces propriétés seront plus intuitives dans le Chapitre (AN) 1 où la valeur absolue sera vue comme une fonction.

Preuve

1. La propriété $|0| = 0$ est évidente.
2. La positivité est élémentaire et découle de la définition en séparant les cas. Passons à la seconde partie.

3. Faisons la preuve pour $|x| = 0 \iff x = 0$. Celle pour la distance découle directement en remplaçant x par $x - y$ dans la première.

$\boxed{\Longleftarrow}$

$\boxed{\Longrightarrow}$

4. Faisons la preuve pour $|-x| = |x|$. Celle pour la distance découle directement en remplaçant x par $x - y$ dans la première.

5. **[Égalité et valeur absolue]**

6. **[Encadrement et valeur absolue]** La première partie s'obtient en prenant $M = |x|$, on se contente donc de la deuxième.

7. Si $x \geqslant 0$ alors
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x} \times \sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x = |x|.$$
Si $x < 0$ alors $-x \geqslant 0$ et on a
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{(-x)} \times \sqrt{(-x)} = \sqrt{(-x)}^2 = -x = |x|.$$
La deuxième partie de la formule est une conséquence directe de la première, en l'élevant au carré.

8.

9. On peut par exemple utiliser la propriété analogue déjà démontrée pour la racine.
$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x| \times |y|.$$

Théorème 1 | Inégalité triangulaire

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors : $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Note — *La majoration de droite sert beaucoup plus souvent que la minoration de gauche, mais les deux sont bien à connaître.*

Attention

- Pour tous réels x et y, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$ donc en remplaçant y par $-y$, on obtient (puisque $|-y| = |y|$) :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq |x| + |y|.$$
- En revanche, il est complètement faux d'écrire : $|x - y| \leq \cancel{|x| - |y|}$.

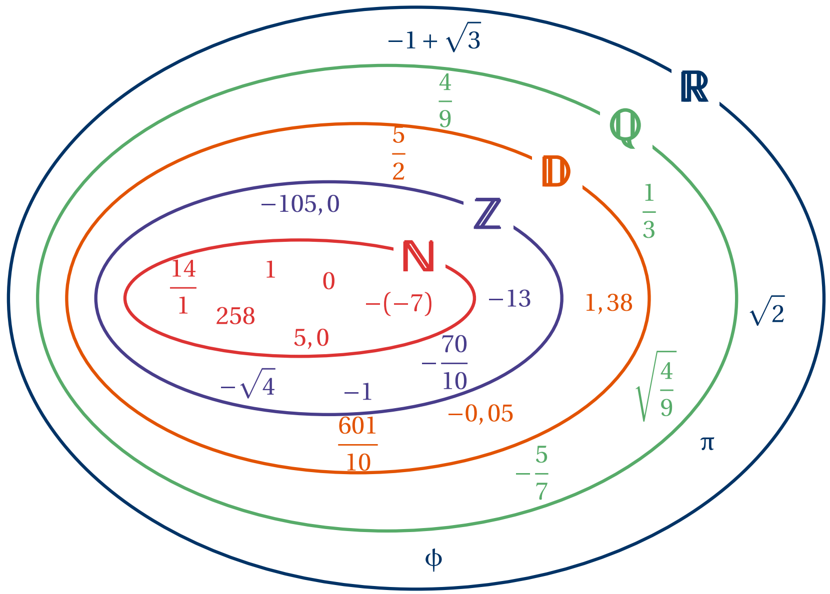
Preuve

1. Commençons par montrer que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Nous allons montrer que l'inégalité élevée au carré est vraie. On a :
$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy,$$
$$\big(|x| + |y|\big)^2 = |x|^2 + 2|x| \times |y| + |y|^2 = x^2 + 2|xy|\,y^2.$$
Or $xy \leqslant |xy|$, *d'où* $x^2 + y^2 + 2xy \leqslant x^2 + 2|xy|\,y^2$, *c'est-à-dire*
$$|x + y|^2 \leqslant \big(|x| + |y|\big)^2$$
Et, comme $|x + y| \geqslant 0$ *et* $|x| + |y| \geqslant 0$, *en obtient en passant à la racine dans l'encadrement :*
$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$
2. De manière analogue, on montre ensuite $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x + y|$.

2. SOUS-ENSEMBLES USUELS DE $\mathbb{R}$

2.1. Sous-ensembles usuels

On rappelle brièvement quelques sous-ensembles de réels connus depuis le collège.



Sur ce dessin :

- $\mathbb{R}$ désigne les *réels*,
- $\mathbb{D}$ désigne les *décimaux*, c'est-à-dire les nombres à virgules ayant un nombre fini de chiffres après la virgule,
- $\mathbb{Z}$ désigne les *entiers relatifs* (parfois appelés simplement *entiers*),
- $\mathbb{Q}$ désigne les *rationnels*,
- $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ désigne les *irrationnels*,
- $\mathbb{N}$ désigne les *entiers naturels*.

Comme le dessin le rappelle, on a alors la chaîne d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N}\subsetneq\mathbb{Z}\subsetneq\mathbb{D}\subsetneq\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{R}\subsetneq\mathbb{C}.$$

Notation — Partie positive, négative, étoilée d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Soit $E\subset\mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors on note en général :
- $E^\star=\{x\in E\mid x\neq 0\}$,
- $E^+=\{x\in E\mid x\geqslant 0\}$,
- $E^-=\{x\in E\mid x\leqslant 0\}$.

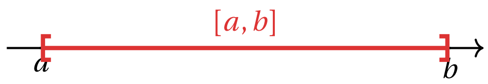
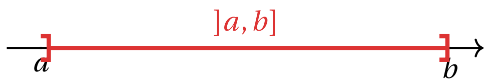
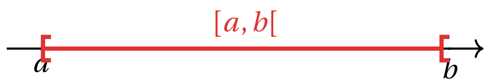
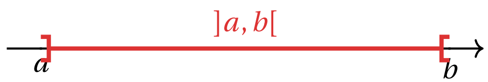
On peut aussi combiner les deux conditions :

$$E^{+\star}=\{x\in E\mid x>0\},\quad E^{-\star}=\{x\in E\mid x<0\}.$$

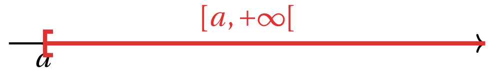
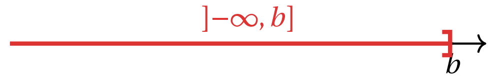
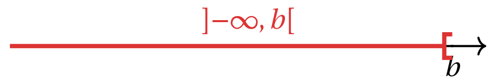
2.2. Intervalles

On passe à présent à une classe d'ensembles qui nous offrira un cadre commode pour définir toute sorte de notions sur les fonctions : les intervalles.

Soient a et b deux réels avec $a<b$, on définit alors les sous-ensembles ci-dessous, que l'on appelle *intervalles de* $\mathbb{R}$ [1]

le *segment* $[a,b]$: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a, x\leqslant b\}$	
l' *intervalle semi-ouvert en a*, $[a,b]$: $]a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a,\ x\leqslant b\}$	
$[a,b[=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a,\ x<b\}$	
$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a,\ x<b\}$	

1. On indique sous la définition mathématique la lecture de l'ensemble.

$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a\}$	
$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$	
$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant b\}$	
$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$	

Remarquons que lorsque $a=b$ alors on définit de manière naturelle :

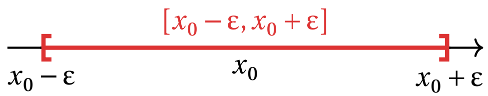
$$[a,b]=\{a\},\quad [a,b[=]a,b]=]a,b[=\varnothing.$$

Intervalles et lien avec la valeur absolue. Les intervalles centrés autour d'un point peuvent être reformulés à l'aide de la valeur absolue, puisque rappelons que pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}^+, x\in\mathbb{R}$:

$$|x|\leqslant\varepsilon \iff -\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon \iff x\in[-\varepsilon,\varepsilon],$$

ou encore pour tout $x,x_0\in\mathbb{R},\varepsilon\in\mathbb{R}^+$:

$$|x-x_0|\leqslant\varepsilon \iff -\varepsilon\leqslant x-x_0\leqslant\varepsilon \iff x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon].$$



On arrive alors à la prochaine proposition.

Proposition 13 | Intervalles et valeur absolue

Soient $x\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$. Alors :

$$\{x\in\mathbb{R}\mid |x-x_0|<\varepsilon\}=]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[,\quad \{x\in\mathbb{R}\mid |x-x_0|\leqslant\varepsilon\}=[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon].$$

Exemple 14 (Écriture avec valeurs absolues d'intervalles plus généraux)

Montrer que si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\leqslant b$, alors

$$[a,b]=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\leqslant\frac{b-a}{2}\right\},\quad]a,b[=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}\right\}.$$

Illustrer la première formule sur un dessin.

En résumé, la valeur absolue est une quantité très efficace pour traduire des conditions d'appartenance à un certain intervalle. Nous utiliserons régulièrement ce genre de choses en analyse.

3. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

3.1. Principes généraux de raisonnement

Rien de bien nouveau dans cette partie par rapport aux classes antérieures. On formalise simplement différents types de raisonnements rencontrés jusqu'alors pour résoudre des équations et inéquations, à l'aide des rudiments de logique développés dans le Chapitre (ALG) 1. Commençons par rappeler des erreurs cruciales à ne pas commettre.

Attention — Au sujet des divisions / factorisations

- Ne jamais diviser par une quantité qui pourrait éventuellement être nulle.
- Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors l'égalité $a^2 = b^2$ n'est pas équivalente à l'égalité $a = b$. Mais, on rédige la condition en utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 &\iff a^2 - b^2 = 0 && \textit{identité remarquable} \\ &\iff (a-b)(a+b) = 0 && \textit{équation produit-nul} \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b. \end{aligned}$$

Comment procéder pour résoudre une équation? Plusieurs méthodes s'offrent à nous.

Méthode — Résolution d'une équation ou inéquation

Considérons deux équations ou inéquations $(\mathrm{EQ}_1), (\mathrm{EQ}_2)$ en une inconnue notée x.

1. **[Ensemble de définition]** On commence par déterminer l'ensemble de définition de l'équation (ou inéquation) de départ. On cherche donc les inconnues solution **dans l'ensemble de définition** de l'équation (ou inéquation).
2. On note $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ l'ensemble des solutions (éventuellement vide) respectif de $(\mathrm{EQ}_1), (\mathrm{EQ}_2)$.
   - **[Travailler par équivalence]** On arrive à transformer l'équation (ou inéquation) initiale en (EQ_2) équivalente à la première, c'est-à-dire :
     $$x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_1) \iff x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_2).$$
     Ou encore :
     $$x \in \mathscr{S}_1 \iff x \in \mathscr{S}_2, \qquad \text{en terme d'ensembles de solutions : } \boxed{\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_2}.$$
   - **[Travailler par implication]** On arrive à transformer l'équation (ou inéquation) initiale en (EQ_2) mais à partir d'implications à partir de la première, c'est-à-dire :
     $$x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_1) \implies x \text{ solution de } (\mathrm{EQ}_2).$$
     Ou encore :
     $$x \in \mathscr{S}_1 \implies x \in \mathscr{S}_2, \qquad \text{en termes d'ensembles de solutions : } \boxed{\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2}.$$
     Ainsi, des solutions « parasites » (de (EQ_2) mais pas de (EQ_1)) peuvent apparaître. Il faut donc vérifier *a posteriori* lesquelles sont effectivement des solutions de (EQ_1). Typiquement, cela peut se produire lorsque l'on élève au carré une équation.
   - **[Technique spécifique aux inéquations]** Pour résoudre $f(x) \geqslant g(x)$ avec $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, on peut aussi étudier le signe de la fonction $f - g$ (à l'aide de la dérivée).

Attention — Ensemble de définition

Quand on parle d'ensemble de solutions $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ cela sous-entend naturellement ensemble de définition **et** de solution. On commence donc toujours pas préciser l'ensemble de définition de l'équation ou l'inéquation considérée.

Notation — Ensemble de solutions

L'ensemble des solutions est souvent noté $\mathscr{S}$. Lorsque l'on cherche les solutions uniquement dans un certain ensemble E, on notera $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}$ les solutions appartenant à E. En d'autres termes : $\mathscr{S}_{\mathrm{E}} = \mathscr{S} \cap \mathrm{E}$.

La rigueur de la rédaction mathématique demande qu'une fois que l'on a commencé à utiliser des symboles d'implications ($\Longrightarrow$) dans une suite d'assertions on ne réutilise plus de symboles d'équivalence ($\Longleftrightarrow$) — une fois que l'on a perdu une équivalence, c'est donc perdu jusqu'au bout du calcul!

Attention

Il ne suffit pas d'écrire sur sa feuille un symbole « $\Longleftrightarrow$ » pour prouver ladite équivalence! Si certaines ne sont pas évidentes, une justification précise est attendue.

3.2. Techniques spécifiques de résolution

3.2.1. Avec des produits et des quotients

On intègre les réflexes suivants lorsqu'on cherche à résoudre une (in)équation :

- tout passer du même côté pour comparer à 0,
- tout mettre sur le même dénominateur le cas échéant,
- factoriser au maximum.

Méthode Produit ou quotient nul, signe d'un produit ou d'un quotient

Soient A et B deux réels.

- $AB = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
- $\dfrac{A}{B} = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ (et $B \neq 0$ pour que le quotient ait un sens, cette condition peut intervenir dans l'ensemble de définition de l'équation).
- Pour déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient, on dresse un tableau de signe pour chaque facteur au numérateur et éventuellement au dénominateur.

3.2.2. Cas polynomial

Étude de $ax+b$, $a\neq 0$. Tout se cache dans le tableau de signe.

Si $a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a<0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Exemple 15 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

- $x(x+2) = 2x(3x-4)$.

  $x(x+2) = 2x(3x-4) \Longleftrightarrow 5x(2-x) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x = 0 \text{ \underline{ou} } x = 2}$.
- $(3x-1)(x+2) > (2-6x)(4x+3)$.
- $\dfrac{2}{x} \geq \dfrac{4}{x+4}$.

Étude de ax^2+bx+c, $a\neq 0$. On reprend les formules vues au lycée pour résoudre des équations du second degré à coefficients réels. Elles seront généralisées dans le Chapitre (ALG) 4 aux cas de coefficients complexes.

Considérons un trinôme $x \longmapsto ax^2+bx+c$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$. Vous avez appris en première comment on trouvait ses racines, en mettant le trinôme sous forme « canonique »[2]. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque $a\neq 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{4a^2}\left(b^2-4ac\right)\right]. \end{aligned}$$

forme canonique

2. C'est-à-dire sans facteur en x

Le terme entre crochet ressemble à une identité remarquable de la forme « $a^2 - b^2$ ». Deux cas se présentent, en notant $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \quad \textit{identité remarquable} \\ &= 0 \iff x \in \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}. \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - 0\right] \\ &= a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2 \\ &= 0 \iff x = \frac{-b}{2a}. \end{aligned}$$

- si $\Delta < 0$, alors

$$-\frac{1}{4a^2}(b^2-4ac) = \frac{-\Delta}{4a^2} > 0, \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0 \implies ax^2+bx+c > 0.$$

Donc il n'y a pas de solution (dans $\mathbb{R}$).

On arrive tout droit au théorème suivant.

Théorème 2 | Second degré sur $\mathbb{R}$

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. On cherche les solutions de l'équation $ax^2+bx+c = 0$ d'inconnue x. On appelle *discriminant* la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \geqslant 0$ l'équation $ax^2 + b + x + c = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si en particulier $\Delta = 0$ alors les deux solutions sus-mentionnées sont confondues. Il n'y a qu'une solution définie par $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c = 0$ n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

De plus, on connait le signe de l'expression $P(x) = ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta > 0, a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Si $\Delta > 0, a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Si $\Delta < 0, a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	

- Si $\Delta < 0, a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$-$	

Attention

On ne calcule Δ que dans les cas indispensables, c'est-à-dire lorsque le polynôme n'est pas déjà factorisable rapidement (par racine évidente ou identité remarquable).

Exemple 16 Soit $m \in \mathbb{R}$ et $P(x) = 2x^2 + (2m+2)x + m^2 - 1$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $P(x) = 0$ admet-elle une unique solution ? Quelle est alors cette solution ?

$\Delta_m = 4m^2 - 8m - 12 = 0$, *dont on souhaite à présent étudier le signe en* m. *On calcule donc le discriminant en* m : $\Delta' = 256 = 16^2$

Donc $\Delta_m = 0 \iff m = m_1$ *ou* m_2 *avec* $m_1 = -1$ *et* $m_2 = 3$.

- *Donc si* $m = 3$ *ou* $m = -1$, *l'équation* $P(x) = 0$ *admet une unique solution.*
- *Si* $m = -1$, 0 *est l'unique solution.*
- *Si* $m = 3$, -2 *est l'unique solution.*

Pour déterminer les racines d'un trinôme, on peut éviter parfois le calcul de Δ, en devinant une racine simple puis en exploitant les relations coefficients racines.

Proposition 14 | Relations coefficients/racines pour l'ordre 2

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$, tels que $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Notons x_1, x_2 les deux solutions de $ax^2+bx+c = 0$. Alors : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Ainsi, connaissant une racine, disons x_1, on peut obtenir facilement x_2.

Exemple 17 Pour les équations qui suivent, déterminer une solution évidente (*i.e.* dans $\{-2,-1,0,1,2\}$), puis en déduire la deuxième.

- $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- $5x^2 + x - 4 = 0$

- $x^2-(2+\pi)x+2\pi$

Lorsque le degré est supérieur ou égal à 3. Tout ce qui suit deviendra plus naturel lorsque nous traiterons les polynômes dans le Chapitre (ALG) 9.

Méthode Équations/Inéquations de degré supérieur ou égal à 3

- Si c'est possible (*équations bicarrées*), on peut chercher à effectuer un changement de variable.
- Sinon, on cherche à factoriser l'expression $A(x)$ intervenant dans l'équation ou l'inéquation pour se ramener à l'étude d'un produit de facteurs de degrés inférieurs :
  - soit on factorise directement en repérant un facteur commun (voir plus loin),
  - soit on trouve une *racine évidente* x_0 (donc vérifiant $A(x_0)=0$) et dans ce cas on sait qu'il est possible d'écrire $A(x)$ sous la forme
  $$A(x)=(x-x_0)B(x)$$
  pour tout x où le degré de $B(x)$ est le degré de $A(x)$ moins 1. Il s'agit alors de poser une forme *générale* pour $B(x)$, avec des coefficients inconnus, puis de trouver la valeur de ces coefficients en redéveloppant l'expression $(x-x_0)B(x)$ et en identifiant terme à terme avec $A(x)$.

Exemple 18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^3+x+2=4x^2$.

- Chercher $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^3-4x^2+x+2=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad (x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c.$$

On veut donc : $\forall x\in\mathbb{R},\quad ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c=x^3-4x^2+x+2.$

Le choix $a=1$, $b=-3$ *et* $c=-2$ *convient. D'où :* $x^3-4x^2+x+2=0\iff(x-1)(x^2-3x-2)=0$.

Or les racines du trinôme x^2-3x-2 *sont* $-\frac{1}{2}$ *et* $\frac{7}{2}$*, après calcul du discriminant.*

L'équation admet ainsi trois solutions : $1, -\frac{1}{2}$ *et* $\frac{7}{2}$.

- On peut à présent résoudre l'inéquation.

2. $x^4-x<0$.

- Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\quad x^3-1=(x-1)(1+x+x^2)$.

- On peut à présent résoudre l'inéquation.

3.3. Transformer des équations et inéquations pour mieux les résoudre

Rappel des propriétés de exp, ln. Les fonctions exp, ln seront revues plus tard, mais rappelons un kit de survie concernant leurs propriétés.

Proposition 15 | Quelques propriétés de exp et ln

- **[Exponentielle]**
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ e^{x+y}=e^xe^y,\ e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}.$$
- **[Logarithme]**
$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(xy)=\ln(x)+\ln(y),\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y).$$
$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*, n\in\mathbb{N},\ \ln(x^n)=n\ln x.$$
- **[Réciprocité]**
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \ln(e^x)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\quad e^{\ln x}=x.$$

Utiliser les propriétés de ln, exp. L'idée est d'essayer d'appliquer ln, **ou** exp de chaque côté afin de simplifier l'équation.

Exemple 19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $2\ln(x+1)=\ln(x-1)+\ln(2x-1)$

   $2\ln(x+1)=\ln(x-1)+\ln(2x-1)$ est bien définie lorsque $x>1$. Alors
$$\begin{aligned}&2\ln(x+1)=\ln(x-1)+\ln(2x-1)\\ \iff&\ln((x+1)^2)=\ln((x-1)(2x-1))\\ \iff&(x+1)^2=(x-1)(2x-1)\iff x^2-5x=0\iff x(x-5)=0\\ \iff&(x=0\ \underline{ou}\ x=5)\ \underline{et}\ x>1\\ \iff&x=5.\end{aligned}$$
2. $e^{x+1}e^{3x-4}>1$.

Élever au carré. L'idée est d'essayer d'élever au carré afin de supprimer d'éventuelles racines. Attention : on rappelle qu'on ne peut élever au carré n'importe comment une inégalité ! Il faut toujours prendre la précaution de savoir si les membres sont positifs.

Exemple 20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x=\sqrt{2-x}$.

L'équation est définie sur $]-\infty,2]$. On a pour $x\in]-\infty,2]$:
$$\begin{aligned}x=\sqrt{2-x}&\implies x^2=2-x\\&\implies x^2+x-2=0\\&\implies(x-1)(x+2)=0\\&\implies x\in\{1,-2\}.\end{aligned}$$
On voit ainsi que les solutions de notre équation sont incluses dans l'ensemble $\{1,-2\}$. En réinjectant ensuite ces valeurs dans l'équation on constate que seul 1 est solution.

Exemple 21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{x^2+2x}<x+1$.

$\sqrt{x^2+2x}<x+1$ n'est bien définie que si $x\in]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$.
Par ailleurs, comme $\sqrt{x^2+2x}\geq 0$ on a aussi $x+1>0$ par transitivité donc on sait que $x>-1$. Pour tout $x\in[0;+\infty[$, on a alors
$$\sqrt{x^2+2x}<x+1\iff x^2+2x<(x+1)^2\iff 0<1$$
ce qui est toujours vrai donc $\sqrt{x^2+2x}<x+1$ pour tout $x\in[0;+\infty[$. L'ensemble des solutions est $[0;+\infty[$.

Utiliser un changement de variable. Il s'agit de poser un changement de variable du type $X=e^x$ ou $X=\ln(x)$ ou $X=x^2$ ou $X=\sqrt{x}$... pour faire apparaître une (in)équation plus simple à résoudre (en général polynomiale). Dans les exercices, le changement de variable éventuel à réaliser sera toujours donné.

Attention

Attention, une fois les valeurs possibles de X trouvées, il ne faut pas oublier de revenir aux solutions en x pour conclure.

Exemple 22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $x^4-3x^2+2=0$ et $x^4-3x^2+2<0$.

   Posons $X=x^2$. On a alors $x^4-3x^2+2=0\iff X^2-3X+2=0$ et $X=x^2$.
   Les racines du trinôme $X^2-3X+2=0$ étant 1 et 2,
$$x^4-3x^2+2=0\iff x^2=1\ \underline{ou}\ x^2=2\iff x\in\left\{-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}\right\}.$$

Pour l'inéquation, $X^2-3X+2<0 \iff X\in]1;2[$ *donc*

$$x^4-3x^2+2<0 \iff 1<x^2<2 \iff x\in\left]-\sqrt{2},-1\right[\cup\left]1,\sqrt{2}\right[.$$

2. $e^x+e^{1-x}=e+1$.

$e^x+e^{1-x}=e+1 \iff e^{2x}+e=(e+1)e^x \iff (e^x)^2-(e+1)e^x+e=0.$
Posons $X=e^x$. *On a alors* $e^x+e^{1-x}=e+1 \iff X^2-(e+1)X+e=0$ *et* $X=e^x$.
Le discriminant du trinôme $X^2-(e+1)X+e$ *est* $\Delta=(e-1)^2>0$ *donc*

$$X^2-(e+1)X+e=0 \iff X=\frac{e+1-(e-1)}{2}=1 \ \underline{ou}\ X=\frac{e+1+(e-1)}{2}=e.$$

Ainsi,

$$e^x+e^{1-x}=e+1 \iff e^x=1 \ \underline{ou}\ e^x=e \iff x=0 \ \underline{ou}\ x=1.$$

Enlever les valeurs absolues. Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qu'il y a à l'intérieur. On peut donc étudier le signe de l'expression dans la valeur absolue puis faire une disjonction de cas pour résoudre l'(in)équation obtenue sans la valeur absolue dans chacun des cas possibles.

Exemple 23 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes.

1. $|x-4|=2x+10$.

Si $x-4\geq 0 \iff x\geq 4$, *l'équation s'écrit* $x-4=2x+10$ *i.e.* $x=-14\notin[4;+\infty[$ *donc l'équation n'a pas de solution dans cet intervalle. Finalement,* $|x-4|=2x+10 \iff \boxed{x=-2}$.

2. $|3-x|>|x+2|$.

- *si* $x\in]-\infty;-2]$, *l'inéquation devient* $3-x>-x-2 \iff 3>-2$ *ce qui est toujours vrai donc l'inéquation est vérifiée pour tout* $x\in]-\infty;-2]$.
- *si* $x\in[-2;3]$, *l'inéquation devient* $3-x>x+2 \iff x<\frac{1}{2}$ *donc l'inéquation est vérifiée pour tout* $x\in[-2;\frac{1}{2}[$.
- *si* $x\in[3;+\infty[$, *l'inéquation devient* $x-3>x+2 \iff -3>2$ *ce qui est toujours faux donc l'inéquation n'est vérifiée pour aucun* $x\in[3;+\infty[$.

Finalement, $|3-x|>|x+2| \iff x\in]-\infty;\frac{1}{2}[$. *Donc* $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty;\frac{1}{2}[}$.

Résolution d'inéquations par une étude de fonction. Si on souhaite montrer qu'une inéquation est vraie pour tout x dans un certain sous-ensemble E (de $\mathbb{R}$), ou même vraie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et que l'on n'y parvient pas par inégalités successives, on peut essayer d'étudier les variations d'une certaine fonction.

Méthode **Pour montrer « $\forall x\in E, f(x)\leqslant(\ \underline{\text{ou}}\ \geqslant)g(x)$ »**

Soient $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
- On définit la fonction $h:x\longmapsto f(x)-g(x)$.
- On étudie les variations de h, on en déduit le signe de h.
- Le signe de h donne alors la réponse.

Commençons par un exemple complet.

Exemple 24 Résoudre sur $\mathbb{R}$: $e^x\geqslant x+1$.

Soit $f\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & e^x-x-1\end{array}\right.$. *La fonction f est dérivable car somme de fonctions dérivables.*
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, *on a* $f'(x)=\exp(x)-1$. *Ainsi, si* $x>0$ *alors* $f'(x)>0$ *et si* $x<0$ *alors* $f'(x)<0$. *On obtient donc le tableau de variations suivant :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le tableau de variations f admet 0 *pour minimum sur* $\mathbb{R}$ *et l'atteint en* 0. *On a donc montré que, pour tout réel* $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant 0$ *et, par suite,* $\boxed{\textit{l'ensemble des solutions est } \mathbb{R}}$.

Exemple 25 Montrer, sans utiliser l'exemple précédent, que : $\forall x>-1$, $\ln(1+x)\leq x$.

On pose f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ *par :*

$$\forall x>-1,\quad f(x)=\ln(1+x)-x.$$

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ *et :*

$$\forall x>-1,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}.$$

On dresse alors le tableau des variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Comme $f(0)=0$, on a que pour tout $x>-1$, $f(x)\leq 0$. Ainsi :
$$\forall x>-1,\quad \ln(1+x)\leq x.$$

4. PARTIES MAJORÉES, MINORÉES DE $\mathbb{R}$ & PARTIE ENTIÈRE

4.1. Minorant, majorant, borne inférieure/supérieure

Définition 6 | Majorant, minorant

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que A est *majoré* si :
$$\exists M\in\mathbb{R}, \forall a\in A,\quad a\leqslant M.$$
On dit alors que M est ***un*** *majorant* de l'ensemble A.
- On dit que A est minoré si :
$$\exists m\in\mathbb{R}, \forall a\in A,\quad a\geqslant m.$$
On dit alors que m est ***un*** *minorant* de l'ensemble A.
- Un ensemble à la fois majoré et minoré est dit *borné*, c'est-à-dire lorsque :
$$\exists M\in\mathbb{R}, , \exists m\in\mathbb{R}, \forall a\in A,\quad m\leqslant a\geqslant m.$$

Exemple 26

- L'ensemble $\mathbb{N}$ est non majoré dans $\mathbb{R}$ mais il est minoré par 0.
- L'ensemble $[0,1[$ est minoré par 0 et majoré par 1 car :
$$\forall x\in[0,1[,\ 0\leqslant x<1\leqslant 1.$$

Attention

Un ensemble majoré (*resp.* minoré) admet une infinité de majorant (*resp.* de minorants). En effet, si M est un majorant, alors M + 1 en est un aussi.

Exemple 27 (Négation) Écrire la négation de « A est minoré », « A est majoré », puis « A est borné ».

-
-
-

Proposition 16 | Partie bornée et valeur absolue

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$. Alors :
$$A \text{ est borné} \iff \exists M\in\mathbb{R}^+,\ \forall x\in A,\quad |x|\leqslant M.$$

Preuve

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons d'abord que A est borné, soit alors M un majorant de A et m un minorant de A. Alors, pour $x\in A$ on a
$$x\leqslant M\leqslant |M|,\quad x\geqslant m\geqslant -|m|.$$
Posons $R=\max\{|M|,|m|\}$, on a alors $|M|\leqslant R$ et $-|m|\geqslant -R$.
Ainsi, pour tout $x\in A$ on a $-R\leqslant -|m|\leqslant x\leqslant |M|\leqslant R$, c'est-à-dire $|x|\leqslant R$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement supposons qu'il existe $R\in\mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x\in A$, $|x|\leqslant R$. Alors, pour $x\in A$ on a
$$x\leqslant |x|\leqslant R,\quad x\geqslant -|x|\geqslant -R.$$
Le réel R est donc un majorant de A et $-R$ est un minorant de A, l'ensemble A est ainsi borné.

Exemple 28

- L'ensemble $]1,3]$ est
  borné
- $\mathbb{N}$ est
  minoré mais n'est pas majoré
- L'ensemble $]-\infty,4]$ est
  majoré mais n'est pas minoré
- $\mathbb{Q}$
  n'est ni majoré, ni minoré

Définition 7 | Minimum, maximum

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- **[Maximum]** On dit que A *admet un maximum* M si :
$$\begin{cases}\textbf{(i)} & \text{A est majoré par M,}\\ \textbf{(ii)} & M\in A.\end{cases}$$
- **[Minimum]** On dit que A *admet un minimum* m si :
$$\begin{cases}\textbf{(i)} & \text{A est minoré par } m,\\ \textbf{(ii)} & m\in A.\end{cases}$$

Un minimum ou un maximum est appelé un *extremum*.

Proposition 17

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A possède un maximum, il est unique et on le note $\max(A)$.

- Si A possède un minimum, il est unique et on le note $\min(A)$.

Preuve Faisons par exemple la preuve pour le cas du maximum par exemple. Soient M, M' deux maximum.

Exemple 29 Montrer que l'ensemble $A = [0,2[$ admet un minimum et que 2 majore A.

Considérons à nouveau l'intervalle $A = [0,2[$. Ici, les réels 0 et 2 jouent un rôle particulier.

- 0 est un minorant, et il ne semble pas y en avoir de plus grand, et il **est dans** A. On dira que 0 est la « borne inférieure de A », et même un « minimum de A » car il appartient à l'ensemble comme nous l'avons vu.
- 2 est un majorant, et il ne semble pas y en avoir de plus petit, et il **n'est pas** dans A. On dira que 2 est la « borne supérieure de A ».

Formalisons cela dans la définition/proposition qui suit.

Définition/Proposition 1 | Borne supérieure/inférieure

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.

- **[Borne supérieure]** Si A est majorée, alors : A admet un plus petit majorant, et on appelle *borne supérieure de* A le plus petit de ces majorants, noté $\sup A$.
- **[Borne inférieure]** Si A est minorée, alors : A admet un plus grand minorant, et on appelle *borne inférieure de* A le plus grand de ces minorants, noté $\inf A$.

Nous admettons l'existence d'un plus petit/grand majorant/minorant sous les hypothèses mentionnées (toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure).

La proposition qui suit est immédiate d'après les définitions et fait le lien entre extremum et borne supérieure / inférieure.

Proposition 18 | Lien avec le maximum / minimum

Soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée **et** $\sup A \in A$, alors A possède un maximum et :
$$\max A = \sup A.$$
- Si A est minorée **et** $\inf A \in A$, alors A possède un minimum et :
$$\min A = \inf A.$$

Attention

Un ensemble n'admet pas forcément de maximum ou de minimum. Mais, pour nous, toujours une borne supérieure ou inférieure car nous travaillerons avec des parties non vides majorées ou minorées.

Exemple 30 Si $A = [0,2[$, on a :
$$\inf A = \min A = 0 \quad \text{et} \quad \sup A = 2.$$
[H.P] Démontrons rigoureusement, même si cela dépasse légèrement le cadre du programme, que : $\sup A = 2$. *(Dans la pratique, sur la notion de* $\inf, \sup$*, on attend de vous seulement une intuition.)*

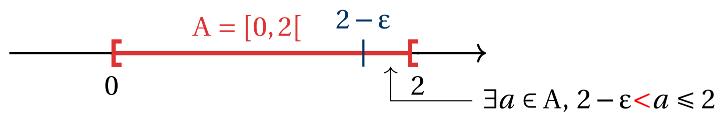
Remarque 7 Le calcul de la borne inférieure / supérieure permet également de répondre à la question de l'existence d'un minimum / maximum (conséquence de la Proposition 18).
En effet, dans l'exemple précédent, $\sup A = 2$. Si A possédait un maximum, alors il serait égal à $\sup A = 2$, or $2 \notin A$ donc A ne possède pas de maximum.

Remarque 8 **(Un peu d'orthographe)** L'Académie Française recommande d'utiliser le pluriel « à la française » pour les mots latins finissant en « - um » comme « maximum », « minimum » ou « extremum ». En revanche, en Mathématiques, nous utiliserons des pluriels latins c'est-à-dire : « maxima », « minima » et « extrema ».

Exemple 31 On considère les ensembles suivants
$$A = [1,2],\quad B =]-\infty,3],\quad C =]0,4[,\quad D =]1,+\infty[,\quad E = \mathbb{N},\quad F = \mathbb{R}^{+\star}.$$
Préciser si ces ensembles admettent un maximum ou minimum, et donner sa valeur le cas échéant.

-
-
-
-
-
-

Remarque 9 **(Caractérisation de la borne supérieure / inférieure [H.P])** Pour terminer, on souhaite traduire mathématiquement (à l'aide de quantificateurs) les portions d'assertions « plus petit majorant » et « plus grand minorant » apparaissant dans la Définition/Proposition 1. Reprenons l'exemple de $A = [0,2[$. On a $2 = \sup A$, mais comment traduire que c'est le plus petit majorant ?



Si on se fixe $\varepsilon > 0$, alors $2-\varepsilon$ ne sera pas un majorant, c'est-à-dire il existe $a \in A$ de sorte que $2-\varepsilon < a \leqslant 2$. On peut traduire de la même façon le fait d'avoir un plus grand majorant, ce qui nous mènerait au résultat suivant : soit A un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$, alors

- **[Borne supérieure]** Si A est majoré, alors :
$$M = \sup A \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & M \text{ est un majorant,} \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ M-\varepsilon \text{ n'est pas un majorant,} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ M-\varepsilon < a \leqslant M. \end{cases}$$
- **[Borne inférieure]** Si A est minoré, alors :
$$m = \inf A \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & m \text{ est un minorant,} \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ m+\varepsilon \text{ n'est pas un minorant,} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \textbf{(i)} & \forall a \in A,\ m \leqslant a, \\ \textbf{(ii)} & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ m \leqslant a < m+\varepsilon. \end{cases}$$

4.2. Partie entière

La notion de borne supérieure va nous permettre de définir proprement la notion de « partie entière » d'un réel, qui est connue depuis bien longtemps mais peut-être pas sous ce nom. Ainsi, on souhaite définir mathématiquement l'action d'ôter la partie décimale d'un nombre réel, c'est-à-dire transformer par exemple 1.1 en 1. Comment définir mathématiquement une telle transformation? Une idée serait de justifier l'écriture de tout réel x de la manière suivante :

$$x = k + y, \quad k \in \mathbb{N}, \quad y \in [0, 1[.$$

Puis on poserait que la partie entière de x est l'entier k, mais encore faudrait-il prouver d'abord l'existence et l'unicité de x. Par exemple $1.1 = 1+0.1$ donc la partie entière de 1.1 est 1. En revanche, ce n'est pas la définition classique qui consiste à dire qu'il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [k, k+1[$, c'est-à-dire que x se trouve dans un unique intervalle de deux entiers consécutifs. Dans notre exemple, $1.1 \in [1, 2[$.

Définition/Proposition 2 | Partie entière

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *partie entière de* x l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, tel que :

$$x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[\quad (\iff \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1).$$

Attention

Attention aux confusions entre $\leqslant, <$.

- Si vous confondez les deux symboles, alors on change complètement la notion. [3]
- Si vous oubliez d'utiliser une inégalité stricte, c'est pire, il n'y a plus unicité!

Exemple 32 Calculer les parties entières ci-après.

- $\lfloor 3.1 \rfloor$

  $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ *car* $3 \leqslant 3.1 < 3$,
- $\lfloor -4.5 \rfloor$

  $\lfloor -4.5 \rfloor = -5$, *car* $-5 \leqslant -4.5 < -4$,
- $\lfloor 12 \rfloor$

  $\lfloor 12 \rfloor = 12$, *car* $12 \leqslant 12 < 13$,
- $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor$

  $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$, *car* $2 \leqslant \frac{7}{3} < 3$.

Contrairement aux apparences, l'existence de la partie entière n'est pas du tout triviale. Nous l'admettrons largement dans le contexte de ce cours.

Preuve Nous devons maintenant justifier l'existence et l'unicité de la partie entière. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Existence. (très partielle) Considérons $N_x = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$ l'ensemble des entiers inférieurs à x. Nous admettons que N_x est non vide, cet ensemble est majoré par x. Il admet donc une borne supérieure que l'on note $\lfloor x \rfloor = \sup(N_x)$. On admet que cette quantité convient.

Unicité. Supposons que $m, n \in \mathbb{Z}$ conviennent pour la partie entière de x. Alors :

$$n \leqslant x < n+1, \quad m \leqslant x < m+1.$$

On peut supposer que $n < m$, sinon on inverse les rôles. Alors en combinant les deux encadrements, on a :

$$n < m \leqslant x < n+1 < m+1.$$

En particulier, $n < m < n+1$. On aurait donc qu'un entier m serait compris strictement entre deux entiers consécutifs $n, n+1$ — absurde.

Proposition 19 | Reformulation de la définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, *i.e.* :

  $$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}.$$
- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$, tel que :

  $$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

De manière générale, lorsque l'on ne sait plus si on doit ouvrir ou fermer l'encadrement, on vérifie ce que l'on écrit avec un exemple, par exemple tester avec $x = 1.1$.

5. TRIGONOMÉTRIE

On rappelle dans cette section la définition géométrique du cosinus, sinus et de la tangente. Leur étude en tant que fonction sera faite dans le Chapitre (AN) 1.

5.1. Définitions

Définition 8 | Cercle trigonométrique

Le *cercle trigonométrique* est le cercle du plan de rayon 1 et de centre O.

D'après le cours de géométrique, c'est le cercle d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = 1.$$

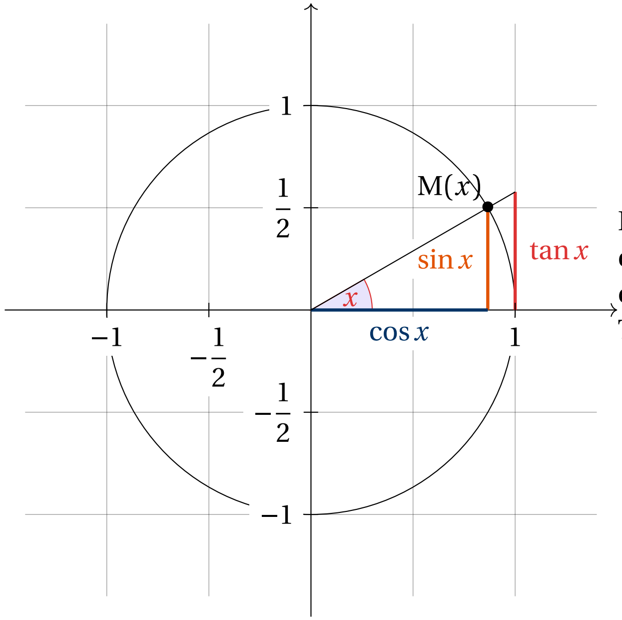
Définition 9 | Cosinus, sinus et tangente

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. Soit x un réel et $M(x)$ le point de $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

- On appelle *cosinus de* x, noté $\cos x$, l'abscisse du point $M(x)$.
- On appelle *sinus de* x, noté $\sin x$, l'ordonnée du point $M(x)$.

3. Par exemple, si on avait pris comme définition $\lfloor x \rfloor < x \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$, alors on aurait $\lfloor 5 \rfloor = 4$... curieux non?

- Lorsque $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, on appelle *tangente de* x, notée $\tan x$, la quantité : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.



Pourquoi indiquer $\tan x$ à cet endroit ? Ceci est une simple conséquence du théorème de THALÈS. En effet, il donne

$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Remarque 10 Pour la tangente, la condition $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ garantit que $\cos x$ ne s'annule pas, donc que la fraction est bien définie. Nous le reconstaterons lors de la résolution d'équations trigonométriques.

Proposition 20 | Conséquences directes de la définition

- **[Inégalités fondamentales]**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |\cos(x)| \leqslant 1, \\ |\sin(x)| \leqslant 1. \end{cases}$$

- **[Théorème de PYTHAGORE]**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

- **[Périodicité]** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \tan(x + k\pi) = \tan x.$$

Remarque 11 Dans la proposition précédente $\cos^2(x)$ désigne $(\cos(x))^2$. Autrement dit, la fonction $\cos^2$ évaluée en x.

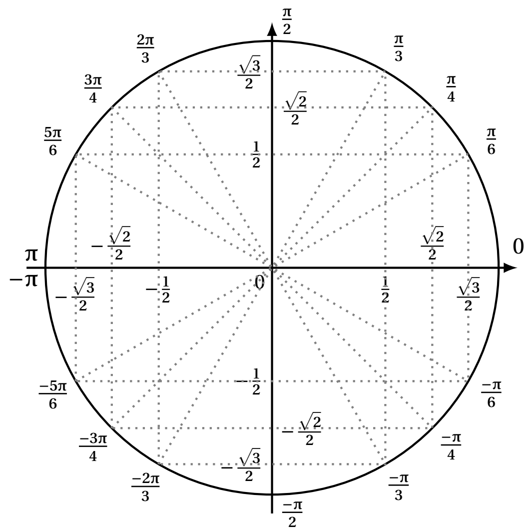
Remarque 12 (Et le collège ?) Ces définitions sont tout à fait cohérentes avec celles qui ont été vues au collège et au lycée. Dans votre enfance, on vous avait expliqué qu'en considérant un angle x d'un triangle rectangle, on avait :

$$\cos x = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}.$$

Ici, le triangle rectangle sous-jacent est celui dessiné sur le cercle trigonométrique précédent, avec la longueur de l'hypoténuse qui vaut 1 (la distance $\mathrm{OM}(x)$). Pour retrouver la formule du collège avec une longueur d'hypoténuse quelconque, on applique le théorème de THALÈS. Il en est de même pour le sinus.

5.2. Valeurs remarquables

On rappelle également ici un certain nombre de valeurs remarquables utiles.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Pour la tangente, à savoir retrouver rapidement plutôt que de les apprendre :					
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition 21 | Multiples de π

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors : : $\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \sin(n\pi) = 0.$

Preuve Lecture directe sur le cercle trigonométrique.

5.3. Formules trigonométriques

Il existe de nombreuses formules en trigonométrie, seules quelques unes sont à notre programme, ce sont celles figurant dans les énoncés ci-après. Toutes les autres sont hors-programme, certaines d'entre elles seront vues néanmoins dans des exemples. On commence par les principales : les formules d'addition, qui seront admises (voir vos cours de lycée sur le produit scalaire).

Proposition 22 | Formules d'addition

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$,
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$.

Attention au sinus

Pour le sinus, le signe est inversé dans le résultat. $\pm \rightsquigarrow \mp$.

Exemple 33 (Autre formule : anti-linéarisation) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide des formules précédentes, établir une formule pour $\cos x \cos y$, $\sin x \sin y$ et $\sin x \cos y$.

En prenant différentes valeurs de x, y, et en utilisant les valeurs remarquables, on déduit les formules ci-après facilement.

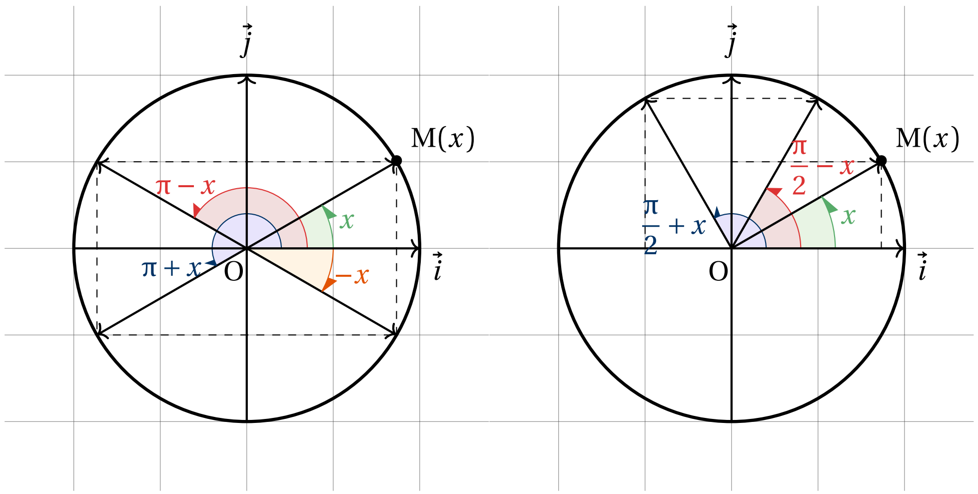
Corollaire 1 | Formules de transformation d'angles associés

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\cos(-x) = \cos(x)$,
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$,
- $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$,
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$,
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Remarque 13 Naturellement, des formules similaires peuvent s'obtenir pour la tangente. Mais on les retrouve facilement à l'aide de celles énoncées précédemment.

Remarque 14 (Retenir les formules d'angles associés de manière géométrique) Les relations entre les cosinus et sinus des angles associés ne s'apprennent pas par coeur ! Mémoriser comment construire les angles $\frac{\pi}{2} \pm x$ et $\pi \pm x$ sur le cercle trigonométrique.



Les cas particuliers $x = y$ dans les formules d'addition fournissent les formules dites « de duplication ».

Corollaire 2 | Formules de duplication / anti-linéarisation

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1.$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$

Preuve

Ou encore, de manière équivalente, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 3 | Formules de linéarisation

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Preuve

Exemple 34 À l'aide des valeurs remarquables et de propriétés sur cos, sin, déterminer les valeurs ci-après.

- $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
- $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
- $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Remarque 15 Les propriétés précédentes peuvent aussi se lire directement sur le cercle trigonométrique.

Transformation de Fresnel. Une dernière conséquence des formules d'addition est la transformation d'expressions trigonométriques en cos ou sin.

Méthode Écriture d'une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques sous « forme déphasée »

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$. On souhaite transformer l'expression

$$E(x) = a\cos x + b\sin x$$

en $\rho\cos(x+\varphi)$, avec $\rho \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}$, ou la forme $\rho\sin(x+\varphi)$. On supposera que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (sinon l'expression est déjà de la forme voulue).

1. Mettre $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ en facteur, de sorte que
$$E(x) = \rho\left(\frac{a}{\rho}\cos x + \frac{b}{\rho}\sin x\right).$$
2. Comme $\left(\frac{a}{\rho}, -\frac{b}{\rho}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, puisque
$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(-\frac{b}{\rho}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{\rho^2} = 1,$$
il existe $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que :
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi, \qquad -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$
3. Alors $E(x) = \cos x\cos\varphi - \sin x\sin\varphi = \cos(x+\varphi)$ d'après les formules d'addition.

Une méthode analogue existe si l'on souhaite une forme déphasée de la forme $\rho\sin(x+\varphi)$, il suffit de choisir l'angle différemment.

Remarque 16 L'angle φ peut ne pas être explicite en fonction des valeurs de a, b.

Exemple 35 Écrire sous forme d'un sinus puis d'un cosinus l'expression $\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{6}\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

5.4. Équations et inéquations trigonométriques trigonométriques

Équations trigonométriques. Pour procéder à la résolution, on s'appuie sur le résultat suivant, qui découle directement d'une lecture graphique sur le cercle trigonométrique.

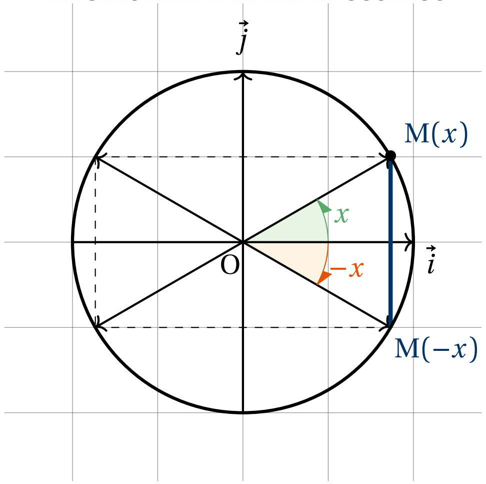
Proposition 4 | Résolution d'équations

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$$\cos(x) = \cos(y) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -y + 2k\pi.$$
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
$$\sin(x) = \sin(y) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - y + 2k\pi.$$
- Soit $(x, y) \in \mathscr{D}_{\tan}^2$,
$$\tan(x) = \tan(y) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\pi.$$

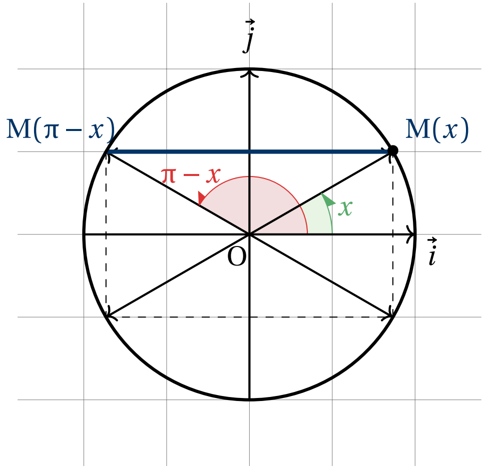
Les équations ci-dessus sont appelées *équations fondamentales*.

Remarque 17 **(Retenir les solutions d'équations trigonométriques de manière géométrique)**

Angles ayant le même cosinus



Angles ayant le même sinus



Exemple 36

- Résoudre $\sin x = 2$ en $x \in [0, 2\pi[$.

- Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$ en $x \in]-2\pi, 0]$.

- Résoudre $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $x \in [0, 2\pi[$.

- Résoudre $\sin x = \cos x$ en $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 37 Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ en $x \in \mathbb{R}$.

INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES. Il n'y pas de résultat mentionné au programme, on procède alors à la résolution avec l'aide de dessins sur le cercle trigonométrique, en essayant d'abord de se ramener à une inéquation sur cos ou sin. Voyons deux exemples.

Exemple 38 Résoudre les inéquations ci-après sur $\mathbb{R}$ puis donner les solutions sur $[0, 2\pi]$, et $[-\pi, \pi]$.

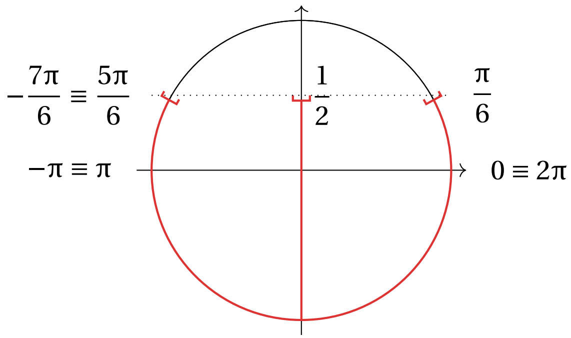
1. $2\sin x - 1 < 0$.

   On se ramène à une inéquation fondamentale : $2\sin x - 1 < 0 \iff \sin x < \frac{1}{2}$. *On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :*

   $\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[}$.

   Et on a : $\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]}$.

Et finalement : $\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right].}$



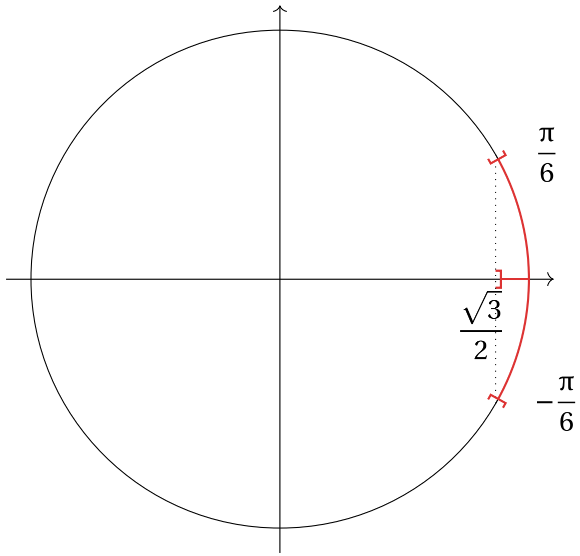
2. $2\cos(2x) > \sqrt{3}$.

On se ramène à une inéquation fondamentale :

$$2\cos(2x) > \sqrt{3} \iff \cos(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\star).$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

$$(\star) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi.$$



On obtient donc :

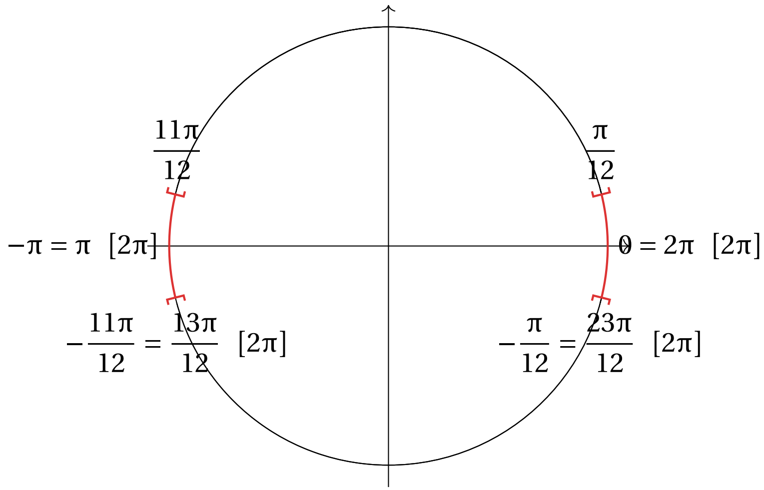
$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right[.}$$

On peut faire un second dessin pour pouvoir en déduire les solutions sur les intervalles demandés. On a :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}\right] \cup \left]\frac{23\pi}{12}, 2\pi\right]}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{11\pi}{12}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right].}$$



6. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Sur les ensembles de nombres :
   - les ensembles classiques ☐
   - les propriétés de l'addition et la multiplication des réels ☐
   - les règles de calcul dans $\mathbb{Q}$ ☐
   - les règles sur les puissances, les racines, ☐
   - les identités remarquables ☐
2. Sur la relation d'ordre des réels :
   - les propriétés de la relation d'ordre ☐
   - les compatibilités ☐
   - le cas des puissances ☐
   - la notion d'intervalle de $\mathbb{R}$ ☐
   - les propriétés de la valeur absolue ☐
   - l'inégalité triangulaire ☐
3. Sur les bornes d'ensembles :
   - connaître la définition d'un majorant et d'un minorant ☐
   - connaître la définition d'un maximum et d'un minimum ☐
   - savoir définir la borne supérieure et la borne inférieure ☐
   - savoir définir la partie entière, connaître les propriétés ☐
4. Sur les résolutions d'équations & d'inéquations ☐
5. Sur la trigonométrie :
   - connaitre la définition géométrique de cos et sin ☐
   - connaitre les formules d'angles associés (à retrouver sur le cercle trigonométrique) ☐
   - connaitre les valeurs remarquables (à retrouver sur le cercle trigonométrique) ☐
   - connaitre les formules d'addition et leur conséquence (duplication) ☐
   - savoir résoudre des équations & inéquations trigonométriques ☐

Parcours du TD

Plusieurs « parcours » sont proposés pour ce TD.

Exercices d'entrainement : ils sont faits pour travailler les notions du cours et sont généralement des applications directes (mais peuvent être techniques). Inutile de travailler forcément tous les exercices de ce parcours.

Exercices classiques : les méthodes à maitriser absolument. Il est conseillé de tous les aborder.

Pour aller plus loin : exercices plus difficiles, ou plus techniques. À ne regarder que si les autres parcours ont été correctement réalisés.

6.1. Puissances & Racines

Exercice 1 | Puissances

1. Factoriser les expressions suivantes (n est un entier naturel) :
$$A = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3\times 3^{2n},\ B = \frac{2}{4^n} - 5\times 2^{-2n-1} + 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n},\ C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n.$$
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^\star$. Réduire les expressions suivantes :
$$A = x^{-1}\times\frac{x^9}{x^5},\quad B = \frac{x^6}{(x^{-2})^3},\quad C = \frac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4}.$$

Solution (exercice 1)

1.
$$A = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3\times 3^{2n} = 9^{n+1} - 9^{n+2} - 3\times 9^n$$
$$= 9^n\left(9 - 9^2 - 3\right) = 3.9^n\left(2 - 3^3\right) = \boxed{-3.5^2.9^n}$$
$$B = \frac{2}{4^n} - 5\times 2^{-2n-1} + 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{2}{2^{2n}} - \frac{5}{2^{2n}.2} + \frac{7}{2^{2n}}$$
$$= \frac{1}{2^{2n}}\left(2 - \frac{5}{2} + 7\right) = \boxed{\frac{13}{2^{n+1}}.}$$
$$C = 3^{2n}(-1)^n - (-9)^n = 9^n(-1)^n - (-1)^n 9^n = \boxed{0.}$$

2.
$$A = x^{-1}\times\frac{x^9}{x^5} = \frac{x^8}{x^5} = \boxed{x^3},$$
$$B = \frac{x^6}{(x^{-2})^3} = \frac{x^6}{x^{-6}} = 1$$
$$C = \frac{x^{-3}y^2}{(xy^{-1})^4} = \frac{x^{-3}y^2}{x^4y^{-4}} = \boxed{\frac{y^6}{x^7}.}$$

Exercice 2 | Racines Simplifier les expressions suivantes.

- $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$,
- $B = \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$,
- $C = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, on précisera notamment le domaine de validité.
- $D = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Solution (exercice 2)

$$A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$$
$$= 4\sqrt{3\times 4\times 2} - 5\sqrt{3\times 4\times 2\times 4} + 4\sqrt{6\times 3^2}$$

$$= 8\sqrt{6} - 20\sqrt{6} + 12\sqrt{6}$$
$$= \boxed{0}.$$

$$B = 7 - 2\sqrt{6} + 7 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})}$$
$$= 14 + 2\sqrt{49 - 4\times 6} = \boxed{24}.$$

$C = \sqrt{(2x+1)^2} = \boxed{|2x+1|}$ l'expression est définie sur $\mathbb{R}$

$$D = \frac{\sqrt{9}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + 3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{3-2} = \boxed{6\sqrt{3}}.$$

6.2. Équations et inéquations

Exercice 3 | **Polynômes** Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geqslant 0$,
2. $x^3 - x^2 - x - 2 < 0$,
3. $(3x-1)(x+2) + (2-6x)(4x+3) > 0$,
4. $32x^6 - 162x^2 < 0$,
5. $\dfrac{2x}{4x^2-1} \leqslant \dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}$,
6. $\dfrac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} < 1$,
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x$,
8. $(x-1)^2 \leqslant 1$,
9. $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{2x}$,
10. $\dfrac{2x+1}{1+x} \geqslant \dfrac{3x-2}{1+x}$,
11. $\dfrac{x^2+10x-4}{x-2} \leqslant \dfrac{16x+2}{x+1}$.

Solution (exercice 3) Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation ou l'inéquation résolue.

1. 1 est racine évidente et on obtient : $x^3 + 4x^2 + x - 6 \geqslant 0 \iff (x-1)(x^2 + 5x + 6) \geqslant 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} = [-3, -2] \cup [1, +\infty[}$.
2. 2 est racine évidente et on obtient : $x^3 - x^2 - x - 2 < 0 \iff (x-2)(x^2+x+1) < 0$ et le discriminant de $x^2 + x + 1$ est négatif donc $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty, 2[}$.
3. On factorise par $3x-1$ et on obtient :
$$\begin{aligned}(3x-1)(x+2) + (2-6x)(4x+3) > 0 &\iff (3x-1)\left[x+2-2(4x+3)\right] > 0\\ &\iff (3x-1)(-7x-4) > 0.\end{aligned}$$
Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\frac{4}{7}, \frac{1}{3}\right[}$.
4. On factorise par $2x^2$ puis on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2$ et on obtient :
$$32x^6 - 162x^2 < 0 \iff 2x^2(16x^4 - 81) < 0 \iff 2x^2(4x^2-9)(4x^2+9) < 0.$$
Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[\setminus \{0\}}$.
5. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $4x^2 - 1 \neq 0$ et $4x^2 - 4x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
$$\begin{aligned}\frac{2x}{(2x+1)(2x-1)} - \frac{2x+1}{(2x-1)^2} \leqslant 0 &\iff \frac{2x(2x-1) - (2x+1)(2x+1)}{(2x-1)^2(2x+1)} \leqslant 0\\ &\iff \frac{-6x-1}{(2x-1)^2(2x+1)} \leqslant 0.\end{aligned}$$
Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[}$.
6. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x^4 - 5x^2 + 4 \neq 0 \iff (x^2-4)(x^2-1) \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$.
On passe tout du même côté et on met tout au même dénominateur. On a :
$$\frac{x^4+x}{x^4-5x^2+4} - 1 < 0 \iff \frac{5x^2+x-4}{(x^2-4)(x^2-1)} < 0.$$
Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} =]-2, -1[\cup \left]-1, \frac{4}{5}\right[\cup]1, 2[}$.
7. $2x^2 - 4x + 2 = 1 - x \iff 2x^2 - 3x + 1 = 0$ donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}}$.
8. $(x-1)^2 \leqslant 1 \iff x(x-2) \leqslant 0$ donc $\boxed{\mathscr{S} = [0, 2]}$.
9. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x - 2 \neq 0$ et $2x \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.
De plus, on a :
$$\frac{1}{x-2} \leqslant \frac{1}{2x} \iff \frac{x+2}{2x(x-2)} \leqslant 0$$
et un tableau de signe donne : $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty, -2] \cup]0, 2[}$.
10. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
$$\frac{2x+1}{x+1} \geqslant \frac{3x-2}{1+x} \iff \frac{-x+3}{1+x} \geqslant 0$$
et un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} =]-1, 3]}$.
11. On commence par le domaine de résolution. L'inéquation est bien définie si et seulement si $x - 2 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.
$$\frac{x^2+10x-4}{x-2} \leqslant \frac{16x+2}{x+1} \iff \frac{x(x^2-5x+36)}{(x-2)(x+1)} \leqslant 0$$

donc un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty,-1[\cup[0,2[}$.

Exercice 4 | **Transformations puissances, exponentielles et logarithmiques** Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $\ln(x^2-4e^2) < 1+\ln(3x)$,
2. $|\ln x| < 1$,
3. $\ln(2x+4)-\ln(6-x) = \ln(3x-2)-\ln(x)$,
4. $2e^{2x}-e^x-1 \leqslant 0$,
5. $2\ln(x)+\ln(2x-1) > \ln(2x+8)+2\ln(x-1)$,
6. $4e^x-3e^{\frac{x}{2}} \geqslant 0$,

Solution (exercice 4)

1. - Domaine de résolution : $\mathscr{D} =]2e,+\infty[$
   - On a : $\ln(x^2-4e^2) < 1+\ln(3x) \iff x^2-3xe-4e^2 < 0$. Un tableau de signe donne $\boxed{\mathscr{S} =]2e,4e[}$.
2. - Domaine de résolution : $\mathscr{D} = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - On distingue deux cas :
     - Si $x \geqslant 1$, alors $|\ln x| = \ln x$ et on doit résoudre $\ln x < 1 \iff x < e$, donc $\mathscr{S}_1 = [1,e[$.
     - Si $0 < x < 1$, alors $|\ln x| = -\ln x$ et on doit résoudre $-\ln x < 1 \iff x > \frac{1}{e}$, donc $\mathscr{S}_2 = \left]\frac{1}{e},1\right[$.

   Ainsi, $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1\cup\mathscr{S}_2$, soit : $\boxed{\mathscr{S} = \left]\frac{1}{e},e\right[}$.
3. - Domaine de résolution : $\mathscr{D} = \left]\frac{2}{3},6\right[$.
   - En utilisant les propriétés du logarithme népérien, on a : $\ln[x(2x+4)] = \ln[(3x-2)(6-x)]$. Ce qui est équivalent à $x(2x+4) = (3x-2)(6-x)$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En passant tout du même côté et en développant, on obtient : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{6}{5},2\right\}}$.
4. - Domaine de résolution : $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
   - On pose $X = e^x$ et on doit résoudre $2X^2-X-1 \leqslant 0$. On obtient $X \in \left]-\frac{1}{2},1\right[$, soit $e^x > -\frac{1}{2}$ et $e^x < 1$. La première équation est toujours vraie, et la deuxième équivaut à $x < 0$. On a donc : $\boxed{\mathscr{S} = [-\infty,0]}$.
5. - Domaine de résolution : $\mathscr{D} =]1,+\infty[$.
   - En utilisant les propriétés du logarithme népérien et le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on doit résoudre $5x^2-14x+8 < 0$. En n'oubliant pas le domaine de définition, on obtient $\boxed{\mathscr{S} =]1,2[}$.
6. - Domaine de résolution : $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
   - On pose $X = e^{\frac{x}{2}}$ et cela revient à résoudre $4X^2-3X \geqslant 0 \iff X(4X-3) \geqslant 0$. Ce qui est équivalent à $e^{\frac{x}{2}} \leqslant 0$ ou $e^{\frac{x}{2}} \geqslant \frac{3}{4}$. La première inéquation est impossible et la deuxième donne $\boxed{\mathscr{S} = \left[2\ln\left(\frac{3}{4}\right),+\infty\right[}$.

Exercice 5 | **Avec radicaux** Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $\sqrt{x+1} = x-1$,
2. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2} \leqslant 1$,
3. $\sqrt{x^2-3} > 5x-9$,
4. $e^x-1 \geqslant \sqrt{e^{x+1}-e^x-e+1}$,
5. $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geqslant 2x-1$,
6. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2} = 1$,
7. $1 \leqslant \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 \leqslant 9$.

Solution (exercice 5)

1. - Domaine de définition : $\mathscr{D} = [-1,+\infty[$
   - Attention, pour pouvoir élever au carré, il faut que les termes des deux côtés soient du même signe ! Il faut toujours faire des cas :
     - **[Cas 1]** si $x < 1$: on ne peut pas élever au carré. Une racine carrée étant toujours positive, on a $\mathscr{S}_1 = \varnothing$.
     - **[Cas 2]** si $x \geqslant 1$: on peut passer au carrée dans l'égalité tout en conservant l'équivalence, les deux membres étant positifs. On obtient comme résultat $x = 0$ ou $x = 3$. Or, on est sous l'hypothèse $x \geqslant 1$ donc $\mathscr{S}_2 = \{3\}$.

     Synthèse : on a $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1\cup\mathscr{S}_2$, soit : $\boxed{\mathscr{S} = \{3\}}$.
2. - Domaine de définition : $\mathscr{D} = [-2,+\infty[$.
   - Les deux termes étant positifs, on peut passer au carré dans l'inégalité tout en conservant l'équivalence et on obtient

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2} \leqslant 1 \iff \sqrt{(x+4)(x+2)} \leqslant -\frac{5}{2}-x.$$

     Il faut ensuite faire deux cas :
     - **[Cas 1]** si $x > -\frac{5}{2}$: on ne peut pas élever au carré. Comme une racine est toujours supérieure ou égale à 0, on obtient $\mathscr{S}_1 = \varnothing$.
     - **[Cas 2]** si $x \leqslant -\frac{5}{2}$: impossible car $\mathscr{D} = [-2,+\infty[$ donc $\mathscr{S}_2 = \varnothing$.

     Synthèse : on a $\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$.
3. - Domaine de définition : $\mathscr{D} = \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right]$.
   - **[On fait deux Cas pour élever au carré]**

◇ **[Cas 1, si** $x \leqslant \frac{9}{5}$**]** on ne peut pas élever au carré. Une racine carrée étant toujours positive ou nulle, et le membre de droite étant négatif, on obtient $\mathscr{S}_1 = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left[\sqrt{3}, \frac{9}{5}\right]$.

◇ Cas 2, si $x > \frac{9}{5}$. Les deux termes de l'inéquation sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient

$$\sqrt{x^2-3} > 5x-9 \iff 4x^2-15x+14 < 0.$$

Les racines sont alors $\frac{7}{4}$ et 2. L'ensemble solution est alors pour ce cas, en n'oubliant pas de regarder à la fois le domaine de définition et l'hypothèse $x > \frac{9}{5}$, $\mathscr{S}_2 = \left]\frac{9}{5}, 2\right[$.

Synthèse : $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 2\right[}$.

4. • Domaine de définition : l'inéquation est bien définie si et seulement si

$$\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + 1 \geqslant 0 \iff (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^x - \mathrm{e} + 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1}$$

car $\mathrm{e}-1 > 0$. Ainsi on obtient que : $\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x - e + 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$ en composant par la fonction ln qui est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R}^+$.

• On peut remarquer que sur $\mathscr{D}$, on a toujours $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$. Ainsi les deux termes de l'inéquation sont toujours positifs et on peut passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient que :

$$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant \sqrt{\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + 1} \iff \mathrm{e}^{2x} - (1+\mathrm{e})\mathrm{e}^x + \mathrm{e} \geqslant 0.$$

On pose alors $\mathrm{X} = \mathrm{e}^x$ et on doit résoudre $\mathrm{X}^2 - (1+\mathrm{e})\mathrm{X} + \mathrm{e} \geqslant 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (\mathrm{e}-1)^2$ et les racines sont 1 et e. Ainsi on obtient :

$$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant \sqrt{\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + 1} \iff \mathrm{e}^x \leqslant 1 \text{ \underline{ou} } \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e} \iff x \leqslant 0 \text{ \underline{ou} } x \geqslant 1$$

en composant par la fonction ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Comme $\mathscr{D} = \mathbb{R}^+$, on obtient que :

$$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant \sqrt{\mathrm{e}^{x+1} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e} + 1} \iff x = 0 \text{ \underline{ou} } x \geqslant 1.$$

• Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = [1, +\infty[\cup \{0\}}$.

5. • Domaine de définition : l'inéquation est bien définie si et seulement si $(x+3)(x-1) \geqslant 0$. Il s'agit d'un polynôme de degré 2 dont les racines sont -3 et 1. Ainsi $\mathscr{D} =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$.

• On étudie deux cas :

◇ **[Cas 1, si** $2x-1 < 0 \iff x < \frac{1}{2}$**]** on ne peut pas élever au carré. On se place donc sur $]-\infty, -3]$. Comme une racine carrée est un nombre positif ou nul, elle est bien toujours supérieure ou égale à un nombre strictement négatif. Ainsi l'inégalité est toujours vérifiée sur cet ensemble et on obtient que $\mathscr{S}_1 = [-\infty, -3]$.

◇ Cas 2, si $2x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{1}{2}$.

On se place donc sur $[1, +\infty[$. Les deux termes sont alors positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient que :

$$\sqrt{(x+3)(x-1)} \geqslant 2x-1 \iff x^2+2x-3 \geqslant 4x^2-4x+1 \iff 3x^2-6x+4 \leqslant 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = -12$ et ainsi pour tout x, on a : $3x^2-6x+4 > 0$. Donc $\mathscr{S}_2 = \emptyset$.

Synthèse : on a $\boxed{\mathscr{S} = [-\infty, -3]}$.

6. • Domaine de définition $\mathscr{D} = [-2, +\infty[$.

• On utilise ici par exemple la forme conjuguée, c'est-à-dire on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité strictement positive $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}$. On obtient alors l'équation équivalente à résoudre

$$\frac{2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}} = 1 \iff 2 = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}.$$

On est ainsi ramené à pratiquement la même équation que tout à l'heure que je vous laisse résoudre. On obtient $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{7}{4}\right\}}$.

7. • Domaine de définition $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• La racine carrée est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et tous les termes de l'inéquation sont bien positifs, on peut donc composer par la racine carrée. On obtient (attention à ne pas oublier la valeur absolue!) :

$$1 \leqslant \left|\frac{x-3}{x-1}\right| \leqslant 3.$$

On fait alors deux Cas pour enlever les valeurs absolues —

◇ Cas 1, $\frac{x-3}{x-1} \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, 1[\cup [3, +\infty[$.

On doit alors résoudre l'inéquation $1 \leqslant \frac{x-3}{x-1} \leqslant 3$. Les réels x doivent donc vérifier $1 \leqslant \frac{x-3}{x-1}$ et $\frac{x-3}{x-1} \leqslant 3$. La résolution de la première inéquation donne :

$$\frac{x-3}{x-1} \geqslant 1 \iff \frac{-2}{x-1} \geqslant 0 \iff x-1 \leqslant 0.$$

Le premier ensemble solution est ainsi $[-\infty, 1]$. La deuxième inéquation donne

$$\frac{x-3}{x-1} \leqslant 3 \iff \frac{x-3}{x-1} - 3 \leqslant 0 \iff \frac{-2x}{x-1} \leqslant 0.$$

Un tableau de signe donne alors que le deuxième ensemble solution est alors $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

On obtient ainsi, en faisant l'intersection de ces deux ensembles et en vérifiant qu'on est bien aussi dans $]-\infty,1[\cup[3,+\infty[$, que $\mathscr{S}_1=[-\infty,0]$.

◇ **[Cas 2]** $\dfrac{x-3}{x-1}\leqslant 0 \iff x\in[1,3]$.

On doit alors résoudre l'inéquation $1\leqslant -\dfrac{x-3}{x-1}\leqslant 3$. Les réels x doivent donc vérifier $1\leqslant\dfrac{3-x}{x-1}$ et $\dfrac{3-x}{x-1}\leqslant 3$. La résolution de la première inéquation donne

$$\frac{3-x}{x-1}\geqslant 1 \iff \frac{-2x+4}{x-1}\geqslant 0.$$

Un tableau de signe permet de trouver le premier ensemble de définition. Le premier ensemble solution est ainsi $[1,2]$. La deuxième inéquation donne

$$\frac{3-x}{x-1}\leqslant 3 \iff \frac{3-x}{x-1}-3\leqslant 0 \iff \frac{-2x+3}{x-1}\leqslant 0.$$

Un tableau de signe donne alors que le deuxième ensemble solution est alors $\left[\dfrac{3}{2},3\right]$.

On obtient ainsi, en faisant l'intersection de ces deux ensembles et en vérifiant qu'on est bien aussi dans $]1,3[$, que $\mathscr{S}_2=\left[\dfrac{3}{2},2\right]$.

Synthèse : l'ensemble des solutions correspond alors à la réunion des deux sous-ensembles $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathscr{S}=]-\infty,0[\cup\left[\dfrac{3}{2},2\right]}$.

Exercice 6 | **Avec valeurs absolues** Résoudre les équations et inéquations ci-après.

1. $|2+x|+2+2x=x^2$,
2. $x^2=|x|$,
3. $|2x-3|\leqslant 2$,
4. $|2x+3|-|-5x+6|\geqslant 3x+2$,
5. $\left|x^2-1\right|\leqslant 2|x|$,
6. $\sqrt{x^2-x-2}\geqslant|3x+2|$,
7. $\dfrac{x^2+\sqrt{2x}}{|x^2-1|+1}\geqslant 1$.

Solution (exercice 6)

1. Il y a une valeur absolue, on doit donc étudier deux cas :
   - **[Cas 1]** si $2+x\geqslant 0$, à savoir si $x\geqslant -2$. L'équation à résoudre est alors :
     $$2+x+2+2x=x^2 \iff x^2-3x-4=0$$
     Le discriminant d'une telle équation est $\Delta=25$, ainsi, les solutions sont $x_1=-1$ et $x_2=4$. Elles sont bien toutes les deux supérieures à -2, donc $\mathscr{S}_1=\{-1,4\}$.
   - **[Cas 2, si $2+x\leqslant 0$, à savoir si $x\leqslant -2$. L'équation à résoudre est alors]**
     $$-2-x+2+2x=x^2 \iff x^2-x=0$$
     Les solutions sont $x_1=0$ et $x_2=-1$. Aucune des deux solutions trouvées n'appartient à l'intervalle $[-\infty,-2]$, ainsi $\mathscr{S}_2=\emptyset$.

   Synthèse : on obtient $\boxed{\mathscr{S}=\{-1,4\}}$.
2. Il y a une valeur absolue, on étudie donc deux cas :
   - **[Cas 1]** si $x\geqslant 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
     $$x^2=x \iff x^2-x=0 \iff x(x-1)=0.$$
     L'ensemble des solutions est alors $\mathscr{S}_1=\{0,1\}$.
   - **[Cas 2]** si $x\leqslant 0$. L'équation à résoudre est alors équivalente à
     $$x^2=-x \iff x^2+x=0 \iff x(x+1)=0.$$
     L'ensemble des solutions est alors $\mathscr{S}_2=\{-1,0\}$.

   Synthèse : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{-1,0,1\}}$.
3. On fait deux cas selon que $2x-3\geqslant 0$ ou $2x-3<0$ et on obtient $\boxed{\mathscr{S}=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right]}$.
4. On commence par faire un tableau récapitulatif et on obtient :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
$\lvert 2x+3\rvert$		$-2x-3$	0	$2x+3$		$2x+3$	
$\lvert -5x+6\rvert$		$-5x+6$		$-5x+6$	0	$5x-6$	
$\lvert 2x+3\rvert-\lvert -5x+6\rvert$		$3x-9$		$7x-3$		$-3x+9$	

   On étudie alors les 3 cas et on obtient au final— $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset.}$
5. On commence par faire un tableau récapitulatif des cas :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$	0	x		x	
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1	0	$-x^2+1$		$-x^2+1$	0	x^2-1	

   Étude de cas :
   - **[Cas 1]** si $x\in[-\infty,-1]$:
     $$\left|x^2-1\right|\leqslant 2|x| \iff x^2-1\leqslant -2x \iff x^2+2x-1\leqslant 0.$$
     Ainsi $\mathscr{S}_1=\left[-1-\sqrt{2},-1\right]$.

- **[Cas 2]** si $x \in]-1,0[$:
$$\left|x^2-1\right| \leqslant 2|x| \iff -x^2+1 \leqslant -2x \iff x^2-2x-1 \geqslant 0.$$
Ainsi $\mathscr{S}_2 = \left[-1, 1-\sqrt{2}\right]$.
- **[Cas 3]** si $x \in [0,1]$:
$$\left|x^2-1\right| \leqslant 2|x| \iff -x^2+1 \leqslant 2x \iff x^2+2x-1 \geqslant 0.$$
Ainsi $\mathscr{S}_3 = [-1+\sqrt{2}, 1]$.
- **[Cas 4]** si $x \in]1,+\infty[$:
$$\left|x^2-1\right| \leqslant 2|x| \iff x^2-1 \leqslant 2x \iff x^2-2x-1 \leqslant 0.$$
Ainsi $\mathscr{S}_4 = \left[1, 1+\sqrt{2}\right]$.

Synthèse : on obtient $\boxed{\mathscr{S} = \left[-1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right[\cup \left[-1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]}$.

6. Les racines de $x \longmapsto x^2-x-2$ sont -1 et 2. On résout donc sur $\mathscr{D} =]-\infty,-1] \cup [2,\infty[$. Les deux membres de l'inéquation étant positifs, nous avons :
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x-2} \geqslant |3x+2| &\iff x^2-x-2 \geqslant (3x+2)^2\\ &\iff x^2-x-2 \geqslant 9x^2+12x+4\\ &\iff 0 \geqslant 8x^2+13x+6.\end{aligned}$$
Ce dernier trinôme est de discriminant négatif, donc est toujours positif. Ainsi, l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty,-1] \cup [2,\infty[}$, l'ensemble de définition.

7. On résout sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ puisque le dénominateur ne s'annule jamais (somme d'un réel strictement positif et d'une quantité positive).
   - **[Cas 1]** $x \in [-1,1]$. Alors :
$$\begin{aligned}\frac{x^2+\sqrt{2}x}{\left|x^2-1\right|+1} \geqslant 1 &\iff \frac{x^2+\sqrt{2}x}{2-x^2} \geqslant 1\\ &\iff \frac{x\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)} \geqslant 1\\ &\iff \frac{x}{\sqrt{2}-x} \geqslant 1\\ &\iff x \geqslant \sqrt{2}-x \quad \sqrt{2}-x \geqslant 0\\ &\iff x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$
On obtient un premier ensemble de solutions : $\mathscr{S}_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.
   - **[Cas 2]** $x \in \complement[-1,1]$. Alors :
$$\begin{aligned}\frac{x^2+\sqrt{2}x}{\left|x^2-1\right|+1} \geqslant 1 &\iff \frac{x^2+\sqrt{2}x}{x^2} \geqslant 1\\ &\iff \frac{x+\sqrt{2}}{x} \geqslant 1\\ &\iff \frac{x+\sqrt{2}}{x} - \frac{x}{x} = \frac{\sqrt{2}}{x} \geqslant 0.\end{aligned}$$
Cette dernière inégalité ne pouvait être vérifiée que pour les x positifs, on déduit un second ensemble de solutions : $\mathscr{S}_2 = [1,\infty[$.

   L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right[}$.

Exercice 7 | ♥ **Avec étude de fonction** Montrer que :

1. $\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x,$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad e^x - \frac{x^2}{2} \geqslant 1.$

Solution (exercice 7)

1. On démontre l'inégalité en deux temps.
   - Montrons d'abord que pour tout $x > 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

     On pose pour cela la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme composée et somme de fonctions dérivables. On obtient pour tout $x \geqslant 0$: $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$. Comme on est sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f'(x) \geqslant 0$, donc f est croissante. Ainsi 0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^+$ et on obtient bien que pour tout $x > 0$: $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geqslant 0$, à savoir $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.
   - On montre de même la deuxième inégalité en étudiant la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = e^x - x.$$
Or on a montré dans le cours (il faudrait refaire le raisonnement) que l'on a

$e^x \geqslant x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors le tableau de variation suivant

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow \infty$

De plus, $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Dconc la fonction f est toujours positive ou nulle d'après le tableau de variations, on a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant \frac{x^2}{2} + 1.}$$

Exercice 8 | ♥ Démontrer que : $\quad \forall x \in [0,1], \quad x + x^2 < 2\sqrt{x}.$

Solution (exercice 8) Il suffit juste de remarquer que

$$x \in]0,1[\implies x^2 < x < \sqrt{x}.$$

L'inégalité précédente est à connaître. En particulier, on a $x^2 < \sqrt{x}$ et $x < \sqrt{x}$ et en additionnant les inégalités, on obtient l'inégalité cherchée. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad x^2 + x < 2\sqrt{x}.}$$

Exercice 9 | ♥

1. Montrer que pour tous réels a et b : $\quad |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. $\quad$ *<u>Indication :</u> On pourra considérer le développement de* $(|a|-|b|)^2$
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\quad \sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}$.

Solution (exercice 9)

1. Soient a et b deux réels. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}(|a|-|b|)^2 &= |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 && \text{car } |a|^2 = a^2 \ |b|^2 = b^2\\ &= a^2 - 2|a||b| + b^2 && \text{car } |a||b| = |ab|\\ &= a^2 - 2|ab| + b^2.\end{aligned}$$

D'autre part, on a $(|a|-|b|)^2 \geq 0$ (un carré étant positif).
On obtient : $a^2 - 2|ab| + b^2 \geq 0$, ce qui donne : $2|ab| \leq a^2 + b^2$, d'où le résultat en divisant par 2 (ce qui ne change pas le sens de l'inégalité). Donc :

$$\boxed{|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)}.$$

2. Soit $x \geq 0$. Il suffit d'utiliser la question précédente avec $a = \sqrt{x}$ et $b = 1$, ce qui donne :

$$\left|\sqrt{x}\right| \leq \frac{\sqrt{x}^2+1}{2}$$

puis : $\quad \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$, sachant que $\left|\sqrt{x}\right| \geq 0$ (puisque $\sqrt{x} \geq 0$) et $\sqrt{x}^2 = x$ par définition. Donc : $\boxed{\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}}$.

Exercice 10 | ⚙ Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $m(x+2) = 2m(3x-4)$,
2. $(m+1)x + 2 - m = 0$,
3. $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$,
4. $\dfrac{m+3}{x} = \dfrac{2m-1}{x-1}$,
5. $x - m = \sqrt{x^2 + mx}$.

Solution (exercice 10)

1.
   - Domaine de résolution : $\mathbb{R}$.
   - On résout par équivalences successives, l'inconnue étant ici x. On obtient ainsi que :

   $$m(x+2) = 2m(3x-4) \iff -5mx = -10m \iff mx = 2m.$$

   On doit donc ici étudier deux cas selon que m est nul ou pas car on ne peut pas diviser une égalité par un nombre nul...
     - ◇ **[Cas 1]** si $m = 0$: l'équation est alors équivalente à : $0 = 0$ et ainsi $\boxed{\mathscr{S}_{m=0} = \mathbb{R}}$.
     - ◇ **[Cas 2]** si $m \neq 0$: l'équation est alors équivalente à : $x = 2$ et ainsi $\boxed{\mathscr{S}_{m\neq 0} = \{2\}}$.
2. Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a :

   $$(m+1)x + 2 - m = 0 \iff (m+1)x = m-2.$$

   - Si $m = -1$, l'équation devient $0 = -1-2 = -3$. On obtient donc : $\boxed{\mathscr{S}_{m=-1} = \emptyset}$.
   - Si $m \neq -1$, on peut alors diviser par $m+1 \neq 0$ et on obtient : $\boxed{\mathscr{S}_{m\neq -1} = \left\{\frac{m-2}{m+1}\right\}}$.

3. Le domaine de résolution est $\mathbb{R}$ et on a

$$e^{2x}-2me^x+1=0 \iff X=e^x \ \underline{\textbf{et}}\ X^2-2mX+1=0.$$

Étude de l'équation $X^2-2mX+1=0$. Son discriminant vaut $\Delta=4(m^2-1)$. On fait des Cas selon le signe de Δ —

- Si $m\in\ ]-1,1[$, alors $\Delta<0$, et $\boxed{\mathcal{S}_{m\in]-1,1[}=\emptyset}$.
- Si $m\in\ ]-\infty,-1[1,+\infty[$, alors $\Delta\geqslant 0$. Il existe donc deux solutions réelles (distinctes si $m\neq -1$ et $m\neq 1$ et égale sinon) qui sont

$$X_1=m+\sqrt{m^2-1}\ \text{et}\ X_2=m-\sqrt{m^2-1}.$$

  Comme $X=e^x$, on doit vérifier si X_1 et X_2 sont bien strictement positives.
  - ◇ étude de X_1 :

$$X_1>0 \iff \sqrt{m^2-1}>-m.$$

    - Si $m\in\ [-\infty,-1]$, alors $-m\geqslant 0$ et on peut passer au carré de chaque côté tout en conservant l'équivalence. Ainsi,

$$\sqrt{m^2-1}>-m \iff m^2-1>m^2 \iff -1>0.$$

      Impossible donc X_1 ne peut pas être solution si $m\in\ [-\infty,-1]$.
    - Si $m\in[1,+\infty[$, alors $-m<0$ et l'inéquation est toujours vérifiée. Ainsi, X_1 est solution si $m\in[1,+\infty[$.
  - ◇ étude de X_2. On refait un raisonnement analogue et on obtient que si $m\in\ ]-\infty,-1]$, X_2 ne peut pas être solution et que si $m\in]1,+\infty]$, X_2 est solution.

  On peut donc conclure dans le Cas où $m\in\ [-\infty,-1]$, on a — $\boxed{\mathcal{S}_{m\in[-\infty,-1]}=\emptyset}$.

  Il nous reste ainsi à finir le Cas où $m\in[1,+\infty[$. Dans ce cas, on a vu que X_1 et X_2 sont strictement positifs. On obtient alors en utilisant le fait que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$—

$$e^{2x}-2me^x+1=0 \iff e^x=m+\sqrt{m^2-1}\ \underline{\textbf{ou}}\ e^x=m-\sqrt{m^2+1}$$
$$\iff x=\ln\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)\ \underline{\textbf{ou}}\ x=\ln\left(m-\sqrt{m^2+1}\right).$$

  Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathcal{S}_{m\in[1,+\infty[}=\left\{\ln\left(m+\sqrt{m^2-1}\right),\ln\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)\right\}}$.

4.
- Domaine de définition : $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.
- On passe tout du même côté et on met tout sur le même dénominateur. On obtient :

$$\frac{m+3}{x}=\frac{2m-1}{x-1} \iff \frac{(4-m)x-(m+3)}{x(x-1)}=0 \iff (4-m)x-(m+3)=0.$$

  On doit donc étudier des cas :
  - ◇ **[Cas 1]** si $m=4$, on obtient : $m+3=0 \iff 7=0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=4}=\emptyset}$.
  - ◇ **[Cas 2]** si $m\neq 4$, on obtient $x=\dfrac{m+3}{4-m}$. Il reste alors à vérifier que ce nombre est bien dans le domaine de résolution, à savoir que $\dfrac{m+3}{4-m}\neq 0$ et $\dfrac{m+3}{4-m}\neq 1$.
    - Si $m=-3$ alors $\dfrac{m+3}{4-m}=0$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=-3}=\emptyset}$.
    - Si $m=\dfrac{1}{2}$ alors $\dfrac{m+3}{4-m}=1$ et ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=\frac12}=\emptyset}$.
    - Sinon $\boxed{\mathcal{S}_{m\in\mathbb{R}\setminus\{4,-3,\frac12\}}=\left\{\dfrac{m+3}{4-m}\right\}}$.

5.
- Domaine de résolution : L'équation est bien définie si $x^2+mx\geqslant 0 \iff x(x+m)\geqslant 0$. Les racines du polynôme de gauche sont 0 et $-m$. On doit donc distinguer trois cas selon que $m>0$, $m=0$ et $m<0$.
  - ◇ **[Cas 1]** si $m>0$:
    Un tableau de signe donne que : $\mathcal{D}=\ ]-\infty,-m[0,+\infty[$.
  - ◇ **[Cas 2]** si $m=0$:
    On doit résoudre $x^2\geqslant 0$ et ainsi : $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.
  - ◇ **[Cas 3]** si $m<0$:
    Un tableau de signe donne que : $\mathcal{D}=\ ]-\infty,0[-m,+\infty[$.
- Résolution :
  Lorsque $x-m<0 \iff x<m$: il n'y a pas de solution car une racine carrée est positive ou nulle. Ainsi on se place dans le Cas où $x\geqslant m$. Dans ce cas là, les deux membres de l'équation sont positifs et on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence. On obtient ainsi—

$$x-m=\sqrt{x^2+mx} \iff x^2-2mx+m^2=x^2+mx \iff 3mx=m^2.$$

  On doit alors distinguer deux Cas selon que $m=0$ ou pas—
  - ◇ **[Cas 2]** $m=0$: dans ce cas, on obtient : $x-m=\sqrt{x^2+mx} \iff x=|x|$ ce qui est vrai si et seulement si $x\geqslant 0$. Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_{m=0}=\mathbb{R}^+}$ car le domaine de résolution est $\mathbb{R}$.
  - ◇ **[Cas 1 et Cas 3]** $m\neq 0$: dans ce cas, on peut diviser par m et on obtient :

$$x-m=\sqrt{x^2+mx} \iff x=\frac{m}{3}.$$

    Il ne reste plus qu'à regarder si un tel x est dans le domaine de définition, et s'il vérifie bien la condition $x\geqslant m$.
    - **[Cas 1]** si $m>0$: on a $\dfrac{m}{3}\in[0,+\infty[\ \subset\mathcal{D}$. Par contre, cette fois on a $\dfrac{m}{3}<m$, donc la solution ne convient pas. Ainsi on obtient que $\boxed{\mathcal{S}_{m>0}=\emptyset}$.
    - **[Cas 3]** si $m<0$: on a bien $\dfrac{m}{3}\in[-\infty,0]\subset\mathcal{D}$, et d'autre part, on a

aussi $\dfrac{m}{3} \geqslant m$. On obtient donc que $\boxed{\mathscr{S}_{m<0} = \left\{\dfrac{m}{3}\right\}.}$

Exercice 11 | Inéquations avec paramètre Résoudre dans $\mathbb{R}$ et selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

1. $x^2 - (m+1)x + m \geqslant 0$, **2.** $\dfrac{m}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{x+2}$,

3. $\sqrt{2x+m} \geqslant x+1$.

Solution (exercice 11)

1. Ici le domaine de résolution est $\mathbb{R}$. On peut remarquer que le coefficient constant du trinôme vaut $m \times 1$, le coefficient du x vaut $-(m+1)$, et le coefficient dominant vaut 1. Les racines sont donc m et 1. Si l'on ne pense pas à utiliser cette propriété, on calcule le discriminant et on obtient que $\Delta = (m-1)^2$. On étudie donc 2 cas :

- **[Cas 1]** si $m = 1$: Alors $\Delta = 0$ et $x = 1$ est la seule solution et $x^2 - (m+1)x + m \geqslant 0 \iff (x-1)^2 \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{\mathscr{S}_{m=1} = \mathbb{R}.}$
- **[Cas 2]** si $m \neq 1$, alors $\Delta > 0$ et les deux solutions réelles distinctes sont $x_1 = \dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $x_2 = \dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. On doit donc distinguer deux cas :
  - ◇ Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient $\boxed{\mathscr{S}_{m<1} =]-\infty, m] \cup [1, +\infty[.}$
  - ◇ Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient $\boxed{\mathscr{S}_{m>1} =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[.}$

2. L'inéquation est définie si $x-1 \neq 0$ et $x+2 \neq 0$. Ainsi, $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Sur cet ensemble, on obtient :

$$\frac{m}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+2} \iff \frac{m(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0$$
$$\iff \frac{x(m-1)+2m+1}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0.$$

- Si $m = 1$, l'inéquation à résoudre devient alors :
$$\frac{m}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+2} \iff \frac{3}{(x-1)(x+2)} \leqslant 0.$$
Un tableau de signe donne alors : $\boxed{\mathscr{S}_{m=1} =]-2, 1[}$.
- Si $m \neq 1$, alors la racine de $x(m-1)+2m+1$ est $\dfrac{2m+1}{1-m}$. Pour pouvoir faire un tableau de signe correct, on doit savoir où elle se situe par rapport à -2 et 1.
  - ◇ Si $m > 1$. La résolution de $\dfrac{2m+1}{1-m} \leqslant -2$ est justement équivalente à $m > 1$. Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est la plus petite des trois. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m > 1 \iff m - 1 > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{2m+1}{1-m}$		-2		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$x+2$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$x-1$		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}_{m>1} = \left]-\infty, \dfrac{2m+1}{1-m}\right] \cup]-2, 1[}$.

  - ◇ Si $0 \leqslant m < 1$. La résolution de $\dfrac{2m+1}{1-m} \geqslant 1$ est équivalente à $0 \leqslant m < 1$. Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est la plus grande des trois. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m < 1 \iff m-1 < 0$:

x	$-\infty$		-2		1		$\frac{2m+1}{1-m}$		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$x-1$		$-$	⋮	$-$	0	$+$	⋮	$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}_{m\in[0,1[} =]-2, 1[\cup \left[\dfrac{2m+1}{1-m}, +\infty\right[}$.

  - ◇ Si $m < 0$. Ainsi, la racine $\dfrac{2m+1}{1-m}$ est entre les racines -2 et 1. On peut alors faire un tableau de signe, en remarquant en particulier que $m < 0 < 1 \iff m - 1 < 0$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{2m+1}{1-m}$		1		$+\infty$
$(m-1)x+2m+1$		$+$	⋮	$+$	0	$-$	⋮	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	⋮	$+$	⋮	$+$	
$x-1$		$-$	⋮	$-$	⋮	$-$	0	$+$	
$\frac{(m-1)x+2m+1}{(x-1)(x+2)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{S}_{m<0} = \left]-2, \frac{2m+1}{1-m}\right] \cup [1,+\infty[}$.

3. • Domaine de résolution. L'inéquation a un sens si : $2x+m \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{m}{2}$.

Ainsi, $\mathscr{D} = \left[-\frac{m}{2}, +\infty\right[$.

• Résolution :

◇ **[Cas 1]** $x+1<0 \iff x<-1$:
L'inéquation est alors toujours vérifiée car une racine carrée est toujours positive.
Pour trouver l'ensemble solution, il faut alors étudier la position de $-\frac{m}{2}$ par rapport à -1.

$$-\frac{m}{2} \leqslant -1 \iff -m \leqslant -2 \iff m \geqslant 2.$$

Ainsi, on obtient

– Si $m \geqslant 2$, alors $\mathscr{S}_{1,m\geqslant 2} = \left[-\frac{m}{2}, -1\right[$.
– Si $m<2$, alors $\mathscr{S}_{1,m<2} = \emptyset$.

◇ **[Cas 2]** $x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$. Les deux termes de l'inéquation sont alors positifs, on peut donc passer au carré tout en conservant l'équivalence et on obtient :

$$\sqrt{2x+m} \geqslant x+1 \iff 2x+m \geqslant x^2+2x+1 \iff x^2+1-m \leqslant 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 4(m-1)$, on a donc

– Si $m<1$, alors $\Delta<0$ et $\mathscr{S}_{2,m<1} = \emptyset$.
– Si $m \geqslant 1$, alors les deux solutions sont $-\sqrt{m-1}$ et $\sqrt{m-1}$. Il faut alors étudier la position de $-\sqrt{m-1}$ par rapport à $-\frac{m}{2}$ et à -1. On a

$$\begin{aligned} -\sqrt{m-1} \geqslant -\frac{m}{2} &\iff \sqrt{m-1} \geqslant \frac{m}{2} \quad \text{\textit{termes positifs}} \\ &\iff m^2-4m+4 \geqslant 0 \\ &\iff (m-2)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vraie. Ainsi, on a, pour $m \geqslant 1$, $-\sqrt{m-1} \geqslant -\frac{m}{2}$.
Un raisonnement analogue montre que

$$-\sqrt{m-1} \leqslant -1 \iff m \geqslant 2.$$

On en déduit les résultats suivants :

– Si $1 \leqslant m < 2$, alors $-\sqrt{m-1} > -1$, $-\frac{m}{2} > -1$ et $-\sqrt{m-1} \geqslant -\frac{m}{2}$, donc $\mathscr{S}_{2,m\in[1,2[} = [-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}]$.
– Si $m \geqslant 2$, alors $-\sqrt{m-1} \leqslant -1$, $-\frac{m}{2} \leqslant -1$ et $-\sqrt{m-1} \geqslant -\frac{m}{2}$, donc $\mathscr{S}_{2,m\geqslant 2} = [-1, \sqrt{m-1}]$.

◇ On peut alors conclure :

– Si $m<1$, alors $\boxed{\mathscr{S}_{m<1} = \emptyset}$.
– Si $1 \leqslant m < 2$, alors $\mathscr{S}_{m\in[1,2[} = \emptyset \cup \left[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}\right]$, soit $\boxed{\mathscr{S}_{m\in[1,2[} = \left[-\sqrt{m-1}, \sqrt{m-1}\right]}$.
– Si $m \geqslant 2$, alors $\mathscr{S}_{m\geqslant 2} = \left[-\frac{m}{2}, -1\right[\cup \left[-1, \sqrt{m-1}\right[$ soit $\boxed{\mathscr{S}_{m\geqslant 2} = \left[-\frac{m}{2}, \sqrt{m-1}\right[}$.

6.3. Partie entière

Exercice 12 | ♥ **Équations/Inéquations avec partie entière** Résoudre :

1. $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$, **2.** $-1 \leqslant \lfloor 2x+1 \rfloor < 1$.

Solution (exercice 12)

1. $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$ si et seulement si $2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3$ par définition de la partie entière. Puisque les trois membres sont positifs, on a :

$$\begin{aligned} 2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3 &\iff 4 \leqslant x^2+1 < 9 \\ &\iff 3 \leqslant x^2 < 8, \\ &\iff x \in \left]-\sqrt{8}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right[. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right[}$.

2. $-1 \leqslant \lfloor 2x+1 \rfloor < 2$ si et seulement si :

$$-1 \leqslant 2x+1 < 0 \ \underline{\textbf{ou}}\ 0 \leqslant 2x+1 < 1.$$

En effet, la partie entière est un entier, et il n'y a que -1 et 0 comme entier supérieur ou égal à -1 et strictement inférieur à 1. De plus :

$$-1 \leqslant 2x+1 < 0 \iff -1 \leqslant x < -\frac{1}{2},$$

$$0 \leqslant 2x+1 < 1 \iff -\frac{1}{2} \leqslant x < 0.$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\boxed{\left[-1, \frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right[}$.

Exercice 13 | Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \left\lfloor \frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Solution (exercice 13) Partons la encore de la définition.

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc en multipliant par n,

$$n\lfloor x \rfloor \leqslant nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$

Puisque $n\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur à nx, on a $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$. Puisque $n\lfloor x \rfloor + n$ est un entier strictement supérieur à nx, on a $\lfloor nx \rfloor + 1 \leqslant n\lfloor x \rfloor + n$, donc finalement :

$$n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant n\lfloor x \rfloor + n - 1.$$

Divisons à présent par n de chaque côté :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + 1 - \frac{1}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Par unicité de la partie entière, on a donc immédiatement :

$$\boxed{\left\lfloor \frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.}$$

Exercice 14 | Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Solution (exercice 14) Pour établir des inégalités sur les parties entières, on utilise en général la définition du cours ci-après : c'est le plus grand entier inférieur ou égal au réel en question. Par ailleurs, la partie entière plus un est le plus petit entier strictement supérieur au réel en question.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de la partie entière, nous avons :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Nous avons donc en sommant :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2. \quad (\star)$$

- Montrons que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$. Pour établir cette majoration, il suffit donc d'établir que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $x+y$ (on aura alors que la partie entière de $x+y$ est supérieure à cette entier, puisque c'est le plus grand). Le réel $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est bien entier, puisque c'est une somme de deux entiers, et on a montré avec $(\star)$ que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x+y$, c'est donc terminé.
- Montrons que $\lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. D'après $(\star)$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ est un entier strictement supérieur à $x+y$, $\lfloor x+y \rfloor + 1$ est le plus petit entier strictement supérieur à $x+y$, donc

$$\lfloor x+y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Donc $\quad \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$

On a donc établi que :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1}.$$

On retiendra donc en particulier de cet exercice que la partie entière d'une somme **n'est pas** la somme des parties entières.

6.4. Maximum et minimum. Borne supérieure et inférieure.

Exercice 15 | Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Traduire à l'aide des quantificateurs les propriétés suivantes :

1. Le nombre -7 est un majorant de A.
2. Le nombre 2 n'est pas un minorant de A.
3. La partie A est bornée.
4. Le nombre $\sqrt{\pi}$ est un minorant de A.
5. La partie A n'est pas majorée.
6. Le nombre 1 est la borne supérieure de A.

Solution (exercice 15)

1. $\boxed{\forall x \in A, \ x \leqslant -7.}$
2. $\boxed{\exists x \in A, \ x < 2.}$
3. $\boxed{\exists m \in \mathbb{R}, \ \exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in A, \ m \leqslant x \leqslant M.}$
4. $\boxed{\forall x \in A, \ x \geqslant \sqrt{\pi}.}$
5. $\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists x \in A, \ x > M.}$
6. $\boxed{\begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leq 1 \\ \forall M < 1, \exists x \in A, \quad x > M. \end{cases}}$ La seconde ligne signifiant que aucun $M < 1$ ne majore A.

6.5. Trigonométrie

Exercice 16 | **Quelques calculs de cosinus et de sinus**

1. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Rappeler les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
2. Calculer les réels suivants :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

<u>*Indication :*</u> *Par exemple, pour le calcul de* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, *on pourra commencer par remarquer que* $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

3. En utilisant cette fois une formule de duplication, calculer :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right),\quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Solution (exercice 16)

1. On a

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

2.
- On a $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, donc :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}}$.
- De-même, on a
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
soit après simplification : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}}$.
- À partir du calcul précédent, on a :
$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}}.$$

3. Il suffit de remarquer que : $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2}$. On pose alors $\theta = \frac{\pi}{8}$ et on obtient par la formule de duplication des angles : $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. Ainsi,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$

Le réel $\frac{\pi}{8}$ est dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et le cosinus est positif sur cet intervalle, ainsi : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}.}$

Une fois le cosinus connu, le sinus se déduit par la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. On obtient ainsi,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Là encore, le sinus étant positif sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient : $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}.}$

Exercice 17 | **Calcul de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ sont bien définis.

1. Rappeler les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

2. En déduire une expression de $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$, puis une expression de

3. **[Application : calcul de $\tan(\pi/8)$.]**

3.1) Montrer que le nombre $x = \tan(\pi/8)$ est solution de l'équation $x^2+2x-1 = 0$.

3.2) En déduire que $x = \sqrt{2}-1$.

3.3) Déterminer avec la même méthode la valeur de $\tan(\pi/12)$.

Solution (exercice 17)

1. On a

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b.$$

2. Ainsi :

$$\tan(a+b) = \frac{\cos a \sin b + \sin a \cos b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\cos a \cos b\left(\frac{\sin b}{\cos b} + \frac{\sin a}{\cos a}\right)}{\cos a \cos b\left(1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}\right)} = \boxed{\frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}.$$

3. **3.1)** En notant $x = \tan(\pi/8)$, la formule donne pour $a = b = \pi/8$:

$$1 = \tan(\pi/4) = \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2x}{1-x^2}$$

ce qui équivaut après simplification à $\boxed{x^2+2x-1 = 0}$.

3.2) On résout l'équation polynomiale de degré 2. On trouve :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Mais puisqu'on sait que $x \geq 0$ on a $\boxed{x = \sqrt{2}-1}$.

3.3) De même si on pose $y = \tan(\pi/12)$ on a

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan(\pi/6) = \frac{2y}{1-y^2}$$

d'où $y^2+2\sqrt{3}y-1 = 0$. Ainsi $y = -\sqrt{3}\pm 2$. Mais puisqu'on sait que $y \geq 0$ on a $\boxed{y = 2-\sqrt{3}}$.

Exercice 18 | Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1. $\cos(5x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\sin(4x) = -\dfrac{1}{2}$

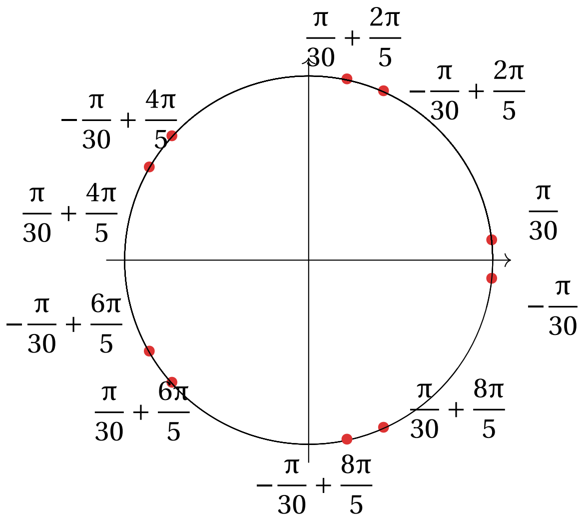
3. $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = -1$ **4.** $\tan(2x) = -\sqrt{3}$

Solution (exercice 18) Il s'agit dans cet exercice d'égalités trigonométriques fondamentales que l'on résout donc en appliquant la méthode du cours.

1. L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\cos(5x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos(5x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 5x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

On obtient donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2k\pi}{5} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

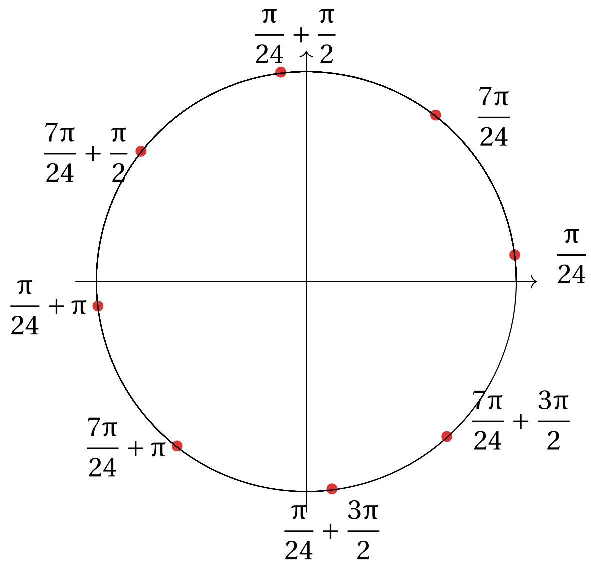


Pour savoir combien de points tracer sur le cercle pour chaque ensemble de solutions, on cherche la première valeur de k pour laquelle on retombe sur la solution de départ modulo 2π. Par exemple, pour le premier ensemble de solution, on cherche k tel que $\dfrac{2k\pi}{5} = 2\pi$, soit $k = 5$: on doit donc tracer 5 points sur le cercle trigonométrique. Même chose pour le deuxième ensemble de solutions.

2. L'égalité est de type équation fondamentale.

$$\sin(4x) = -\frac{1}{2} \iff \sin(4x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 4x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$$



On remarque ici qu'il faut tracer 4 points pour chaque ensemble de solutions : en effet, on doit chercher k tel que $\dfrac{k\pi}{2} = 2\pi$, soit $k = 4$.

3. L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $\dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

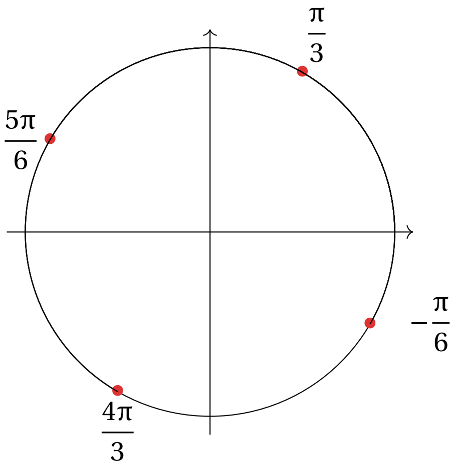
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1 \iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

4. L'égalité est de type équation fondamentale. On peut commencer par chercher le domaine de définition de cette équation. On a, d'après le domaine de définition de la tangente, que : $2x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. On résout ensuite l'équation fondamentale et on vérifiera bien que les solutions trouvées n'appartiennent pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned}\tan(2x)=-\sqrt{3} &\iff \tan(2x)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 2x=-\frac{\pi}{3}+k\pi.\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi.\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}}$.



Exercice 19 | ♥ Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0,2\pi[$ et $[-\pi,\pi]$:

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x)>1$

2. $\sin(3x)\geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\sqrt{2}\cos(3x)\leqslant 1$

4. $\tan(x)\leqslant 1$

Solution (exercice 19)

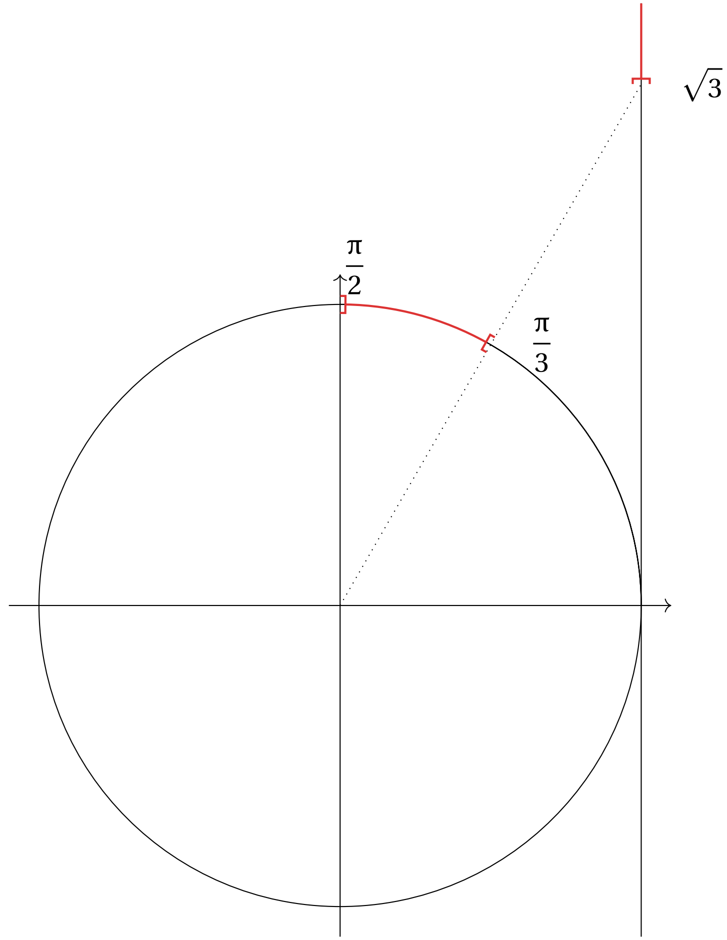
1. On se ramène à une inéquation fondamentale :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\tan(3x)>1 \iff \tan(3x)>\sqrt{3} \quad (\star)$$

On résout alors cette inéquation fondamentale graphiquement :

$$\begin{aligned}(\star) &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{3}+k\pi<3x<\frac{\pi}{2}+k\pi\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}<x<\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}.\end{aligned}$$

On obtient : $\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right[}$.



On refait alors un autre cercle trigonométrique (à faire) afin de placer les angles solutions et on obtient, en prenant $k \in [\![0\,,\,5]\!]$:

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{4\pi}{9},\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{9},\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{10\pi}{9},\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{13\pi}{9},\frac{3\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{16\pi}{9},\frac{11\pi}{6}\right]}.$$

Enfin, on a :

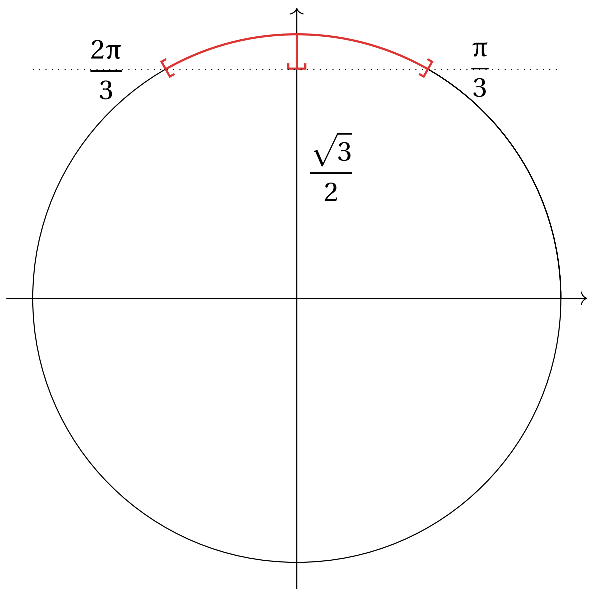
$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\frac{8\pi}{9},-\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{5\pi}{9},-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{6}\right] \cup \left]\frac{4\pi}{9},\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{7\pi}{9},\frac{5\pi}{6}\right[}.$$

2. La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

$$\begin{aligned} &\sin(3x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff &\exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \iff &\exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$



On fait un cercle trigonométrique pour placer les solutions, et on obtient, en prenant $k \in [\![0\,,\,2]\!]$:

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0,\frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9},\frac{10\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{9},\frac{16\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{9},2\pi\right]}.$$

Et finalement :

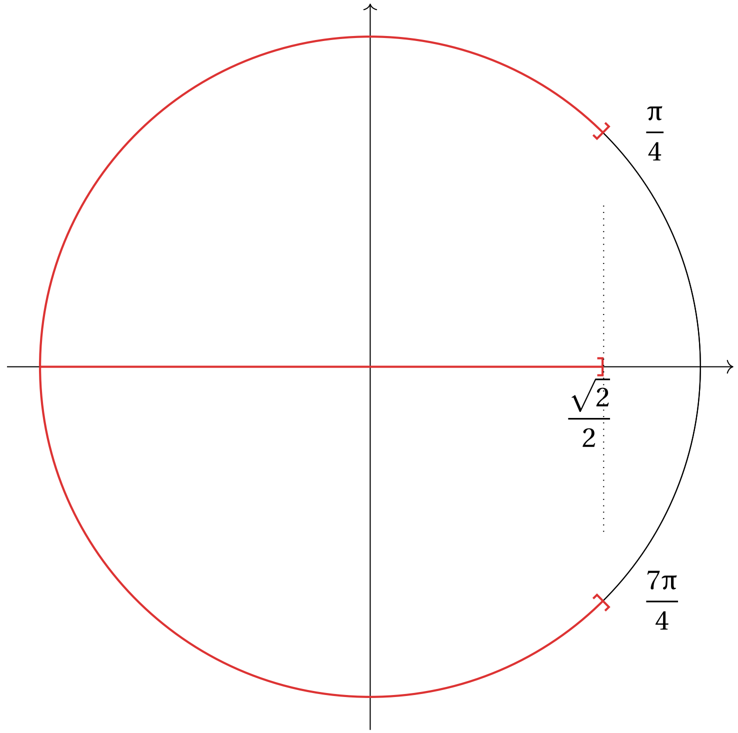
$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi,-\frac{8\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{9},-\frac{2\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{9},\frac{4\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{9},\pi\right]}.$$

3. On a : $\sqrt{2}\cos(3x) \leqslant 1 \iff \cos(3x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. La résolution sur le cercle trigonométrique donne :

$$\begin{aligned} \cos(3x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant 3x \leqslant \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant 3x \leqslant \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right]}.$$



Afin de donner les solutions dans $[0,2\pi[$ et dans $[-\pi,\pi]$, on représente les solutions sur un cercle trigonométrique en prenant $k=0$, $k=1$ et $k=2$. On obtient alors :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12},\frac{15\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12},\frac{23\pi}{12}\right]}.$$

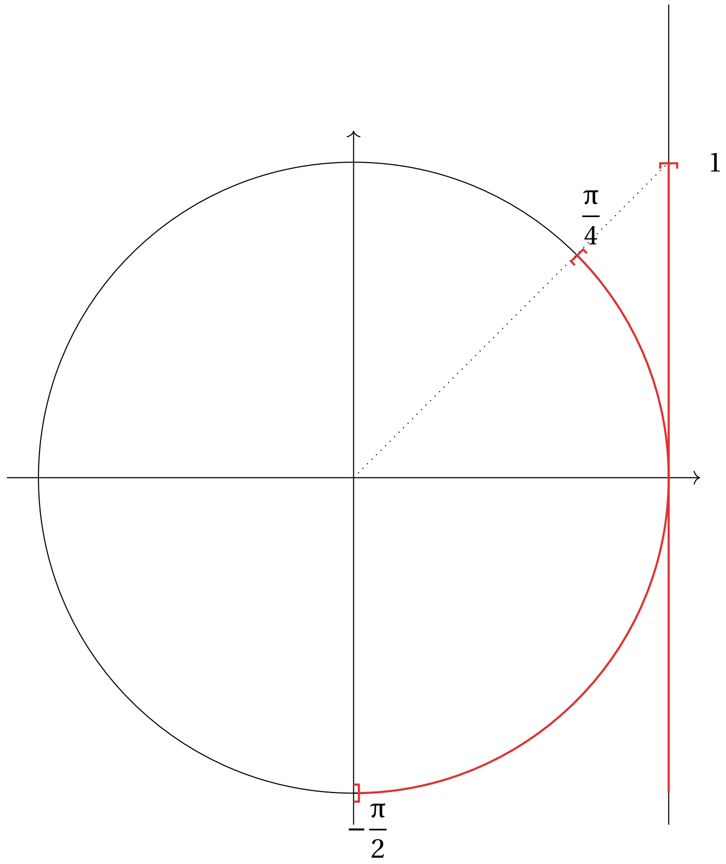
Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi,-\frac{9\pi}{12}\right] \cup \left[-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{9\pi}{12},\pi\right]}.$$

4. La résolution graphique sur le cercle trigonométrique donne :

$$\tan(x) \leqslant 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

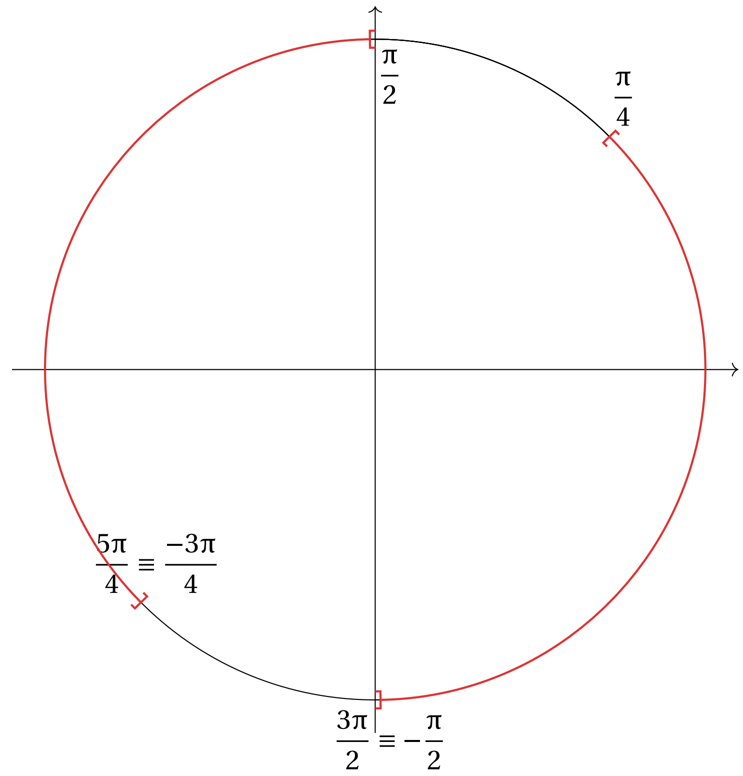
On obtient : $\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]}$.



Attention, les solutions pour la tangente sont définies modulo π, et non 2π. Il y a donc deux intervalles solutions à tracer sur le cercle trigonométrique.

On a donc : $\boxed{\mathscr{S}_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]}$. Et finalement :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[-\pi,\pi]} = \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]}.$$



Exercice 20 | Angle moitié

1. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose : $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, établir les relations suivantes, et indiquer pour quelles valeurs de x elles sont valides :

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \ \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \ \tan x = \frac{2u}{1-u^2}.$$

2. En utilisant ces relations, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos x - 3\sin x + 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0.$$

Solution (exercice 20)

1. Tout d'abord, $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- On a $1 + u^2 > 0$ donc $\frac{1-u^2}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x.$$

- De même, $1+u^2>0$ donc $\dfrac{2u}{1+u^2}$ est bien défini. De plus, on a

$$\frac{2u}{1+u^2}=\frac{2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}=\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin x}{1}=\sin x.$$

- On a $1-u^2\neq 0$ si et seulement si $\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\neq 1$, c'est-à-dire $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\notin\{-1,1\}$. On doit donc avoir $x\in\mathbb{R}\setminus\left(\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$. On a alors :

$$\frac{2u}{1-u^2}=\frac{2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1-\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}}=\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x.$$

2. L'équation est définie pour $\dfrac{x}{2}\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Le domaine de définition est donc $\boxed{\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$.

On pose alors $u=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, et on utilise les formules de la question précédentes pour transformer l'équation. On est ramenés à résoudre

$$\begin{aligned}&\frac{1-u^2}{1+u^2}-3\frac{2u}{1+u^2}+2u-1=0\\ \iff\ &\frac{1-u^2-6u+2u+2u^3-1-u^2}{1+u^2}=0\\ \iff\ &\frac{2u(u^2-u-2)}{1+u^2}=0.\end{aligned}$$

On doit donc trouver les u tels que le numérateur s'annule. On obtient $u\in\{0,-1,2\}$. On doit ensuite revenir à la variable x, on résout donc

- $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=0\iff\dfrac{x}{2}=k\pi, k\in\mathbb{Z}\iff x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=-1\iff\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\iff x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
- $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)=2\iff\dfrac{x}{2}=\arctan(2)+k\pi, k\in\mathbb{Z}\iff x=\arctan(2)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

$$\boxed{S=\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2\arctan 2+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}}$$

Ici, $\arctan 2$ désigne l'unique réel tel que $\tan(\arctan 2)=2$. Nous verrons et comprendrons mieux cette notation plus tard.

II

Deuxième partie

Analyse