Chapitre (AN) 1 Fonctions

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ *en 1673 dans un manuscrit inédit « La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions ».*

— **Le saviez-vous ?**

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est la présentation de généralités sur les fonctions, déjà évoquées dans les classes de lycée (définition, monotonie, parité, *etc.*). Nous développerons la notion de limite de manière plus rigoureuse dans un futur chapitre. Ensuite, nous nous intéresserons aux principales fonctions usuelles à connaître. Des compléments sur la continuité et la dérivabilité seront faits dans le Chapitre (AN) 6 : l'objectif de ce chapitre est pour le moment de savoir faire des études de fonctions de manière efficace, donc un aspect pratique.

Jeune, en mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.

— **J. VON NEUMANN**

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Remarque 1 Tous les exemples de ce chapitre font appel aux fonctions usuelles vues au lycée. En cas de besoin, vous pouvez consulter par anticipation la dernière section du chapitre : la Section 5.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions, opérations de base

Définition 1 | Fonction entre deux ensembles

Soient E, F deux ensembles non vides.

- Une *fonction de* E *dans* F est un processus qui associe à chaque élément x de E au plus un élément y de F (donc soit 0 élément, soit 1 élément). On dit que E est l'*ensemble de départ* de f et que F est l'ensemble d'arrivée de f.
- Lorsque $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}, \mathrm{F} \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ est une *fonction numérique*. *(on écrira simplement « fonction » dans ce chapitre)*
- On appelle *ensemble de définition* de la fonction $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ l'ensemble noté $\mathscr{D}_f \subset \mathrm{E}$ pour lequel f associe une image, c'est-à-dire :
$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathrm{E} \mid \exists y \in \mathrm{F}, y = f(x)\}.$$
Lorsque $\mathscr{D}_f = \mathrm{E}$, c'est-à-dire lorsque l'on peut associer à tout élément de E un élément dans F, alors on dit que f est une *application*.

Remarque 2

- La différence entre les fonctions et les applications est ténue, on ne vous en voudra pas de confondre les deux.
- Les applications seront plus généralement étudiées dans le Chapitre (ALG) 6.
- Pour définir une fonction, on écrira : « Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ la fonction définie par $f(x) = \ldots$ ». C'est seulement ensuite que l'exercice vous demandera de déterminer $\mathscr{D}_f$, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ pour lesquels $f(x)$ existe.
- Pour les fonctions clairement numériques, on écrit parfois même de façon

Lycée Michel MONTAIGNE – Bordeaux

encore plus abusive : « soit la fonction $f : x \longmapsto \dots$ ». C'est le cas du prochain exemple.

- Si $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$, alors f est aussi une fonction de $\mathscr{D}_f$ dans F (dans ce cas, elle associe un élément à tous ceux de l'ensemble de départ).

Exemple 1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

- $f : x \longmapsto x + \ln(\mathrm{e}^x - 1)$

- $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$

- $h : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right)$

Définition 2 | Égalité de fonctions

Soient f, g deux fonctions. Alors f, g sont dites *égales* si :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g \\ \textbf{(ii)} & \forall x \in \mathscr{D}_f (= \mathscr{D}_g), \quad f(x) = g(x). \end{cases}$$

Exemple 2

- Les fonctions $f : x \longmapsto |x|$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x^2}$ sont égales. En effet, elles sont bien définies sur $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_g = \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Les fonctions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{\ln x}$ ne sont pas égales. En effet, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ alors que $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^{+\star}$. *En revanche, puisque :* $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad f(x) = g(x)$, *nous dirons dans le Chapitre (ALG) 6 que la « restriction de f à $\mathbb{R}^{+\star}$ » est égale à g.*

Cadre

Dans toute la suite, nous ne considèrerons que des fonctions numériques, même lorsque cela n'est pas précisé.

Définition 3 | Image d'un élément, Image d'une fonction

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $x \in \mathscr{D}_f$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. On dit que y est ***l'****image* de x par f et que x est **un** *antécédent de y par f.*
- On appelle *image de f* l'ensemble $f(\mathscr{D}_f)$ défini par :
$$f\left(\mathscr{D}_f\right) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}.$$
C'est donc l'ensemble de toutes les images de $\mathscr{D}_f$.
- Si $\mathrm{A} \subset \mathscr{D}_f$, on appelle *image de* A *par f* l'ensemble $f(\mathrm{A})$ défini par :
$$f(\mathrm{A}) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{A}\}.$$
C'est donc l'ensemble des images des éléments de A.
- Soit $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}$. On dit que f est à valeurs dans B si $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathrm{B}$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \in \mathrm{B}.$$

Attention

- Être « à valeurs dans B » ne signifie par « prendre toutes les valeurs de B ». Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais n'atteint pas les éléments de $[0, 1[$ car $x^2 + 1 \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- On prendre garde à ne pas confondre f et $f(x)$, qui sont des objets de natures très différentes.

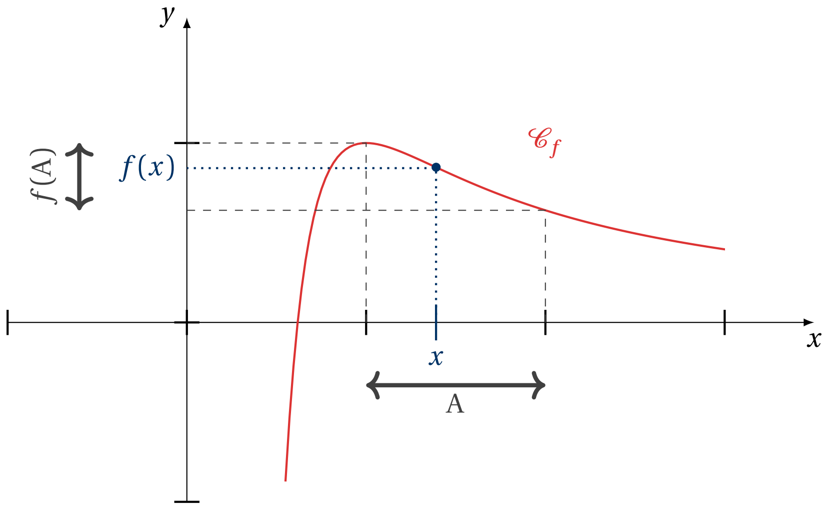
Définition 4 | Graphe

Soit f une fonction. , on appelle *graphe de f* ou *courbe représentative de f* le sous-ensemble noté $\mathscr{C}_f$ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathscr{C}_f = \left\{(x, f(x)) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}.$$

De manière équivalente, on a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x).$$



COURBE REPRÉSENTATIVE ET IMAGE

Remarque 3 Un réel $x \in \mathscr{D}_f$ possède une unique image par f (qui s'appelle $f(x)$). En revanche, un réel y peut :

- avoir un unique antécédent par f,
  exemple : 0 a pour unique antécédent 0 par la fonction carré
- avoir plusieurs antécédents par f,
  exemple : 4 a deux antécédents, -2 et 2 , par la fonction carré
- ne pas avoir d'antécédent par f.
  exemple : -1 n'a pas d'antécédent par la fonction carré

Concrètement, pour calculer des images d'intervalles, nous utiliserons le théorème de la bijection, que nous verrons plus tard dans l'année. Dans l'exemple qui suit, nous nous contentons d'une conjecture sur $f(\mathscr{D}_f)$ à l'aide d'un graphique.

Exemple 3

1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$. Préciser son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, $f(\mathscr{D}_f)$ sans justifier, et le(s) antécédent(s) de 2 par f.

2. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Préciser son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, $f(\mathscr{D}_f)$ sans justifier, et le(s) antécédent(s) de 2 par f.

Maintenant que l'on connaît « l'objet fonction », on peut essayer de réaliser des opérations sur elles, on en définit alors plusieurs autres.

Définition 5 | Opérations

Soient f, g deux fonctions, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions λf, $f + g$, $f \times g$ et $\dfrac{1}{f}$ par :

- **[Multiplication scalaire]** $\lambda f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \times f(x) \end{array} \right.$
- **[Somme]** $f + g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right.$
- **[Produit]** $f \times g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right.$
- **[Inverse]** $\dfrac{1}{f} \left| \begin{array}{ccc} \left\{x \in \mathscr{D}_f \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array} \right.$ si $\left\{x \in \mathscr{D}_f \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\} \neq \emptyset$.

Pour chacune des fonctions précédentes, on réalise l'opération « image par image », puisque « x par x » nous savons multiplier, additionner ... des nombres réels. Nous allons voir maintenant une opération un peu plus singulière. Par exemple, considérons la fonction $h : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^4$. On peut la voir comme

- le produit de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ avec elle-même, *i.e.* $h = f \times f$, puisque $x^4 = x^2 \times x^2$

pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- mais aussi comme l'élévation au carré deux fois de suite, *i.e.* :
$$h : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2.$$
On note $h = f \circ f$ et on parle de « composée de f par f ».

Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 6 | Composition

Soient f et g deux fonctions.

- Alors on définit la composée de f par g notée $g \circ f$ par :
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$
On dira que g est la *fonction extérieure* de la composée $g \circ f$, f est la *fonction intérieure* de la composée $g \circ f$.
- Le domaine de définition de $g \circ f$ est alors :
$$\mathscr{D}_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathscr{D}_f \,\middle|\, f(x) \in \mathscr{D}_g \right\}.$$
- Lorsque $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$ *(c'est-à-dire $f(x) \in \mathscr{D}_g$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$)* , alors : $\mathscr{D}_{g\circ f} = \mathscr{D}_f$.

Exemple 4 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, et les écrire comme une composée.

- $h_1 : x \longmapsto \ln(x+3)$.

- $h_2 : x \longmapsto \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$,

- $h_3 : x \longmapsto \dfrac{1+e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}}$.*Pour la composée, l'une des deux fonctions sera la fonction racine carrée.*

Exemple 5 On considère les deux fonctions $f : x \longmapsto \sqrt{x-1}$ et $g : x \longmapsto \sin(x)$.

- Quels sont leurs ensembles de définition ?

- Calculer, en précisant le domaine de définition, les composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

Les propriétés algébriques de la composition (associativité par exemple) seront étudiées dans le Chapitre (ALG) 6 sur les applications. En revanche, on peut déjà préciser un point de vigilance, mentionné dans l'exemple qui suit.

Exemple 6 On note $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x^2+1$. Calculer $f\circ g$ et $g\circ f$. Qu'en déduire ?

On a donc en règle générale : $f\circ g \neq g\circ f$.

1.2. Propriétés sur les fonctions

La plupart des fonctions usuelles apparaissant dans les prochains exemples sont connues depuis le lycée, mais elles seront revues en fin de chapitre.

Définition 7 | Périodicité

Soit f une fonction. .

- Soit $\mathrm{T}\boxed{>0}$. La fonction f est dite *périodique de période* T ou T-*périodique* si :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x\in\mathscr{D}_f, \quad x+\mathrm{T}\in\mathscr{D}_f \\ \textbf{(ii)} & \forall x\in\mathscr{D}_f, \quad f(x+\mathrm{T})=f(x). \end{cases}$$

- La fonction f est dite *périodique* s'il existe $\mathrm{T}>0$ tel que f soit T-périodique.

Remarque 4 (Non-unicité)

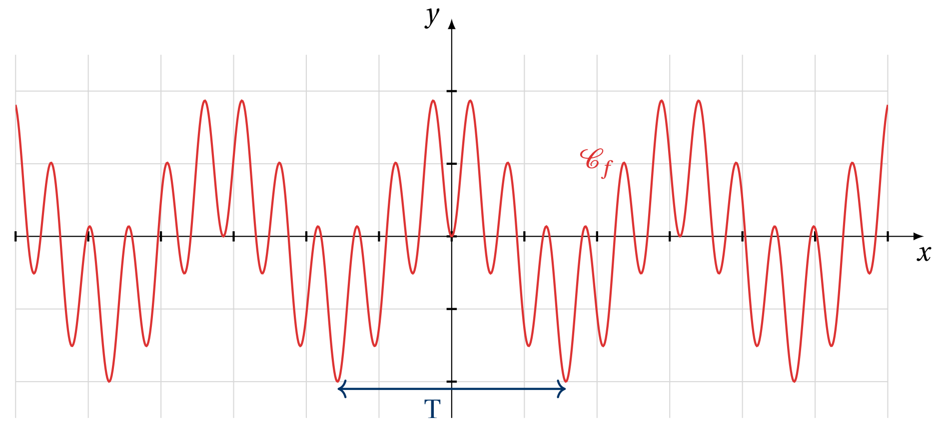
- Par récurrence évidente, on montre qu'alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad f(x+n\mathrm{T})=f(x).$$

Si f est T-périodique, elle est donc également 2T-périodique, 3T-périodique, etc. Plus précisément, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f est nT-périodique.

- Ainsi, on ne dit pas « la » période mais **une** période. En effet, si T convient dans la définition précédente, c'est le cas aussi de 2T, 3T *etc.*. Certaines fonctions possèdent une « plus petite période », mais pas toutes. Par exemple, pour les fonctions constantes tous les réels strictement positifs sont des périodes, et $\mathbb{R}^{+\star}$ ne possède pas de minimum.
- Cela dit, on vous demandera le plus souvent de montrer que des fonctions (possédant une plus petite période) sont périodiques, et de donner la plus petite.

Remarque 5 (Interprétation géométrique) Géométriquement, cela signifie que dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, son graphe est invariant par la translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{i}$.



GRAPHE D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

Exemple 7 La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x) \end{array}\right.$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.

- **[Intuition]** la fonction f avance sur le graphe du cos mais 3 fois plus vite ! Elle risque donc d'avoir une période 3-fois plus petite que celle du cosinus....
- **[Justification]**

En effet, si $x\in\mathbb{R}$ on a bien $x+\dfrac{2\pi}{3}\in\mathbb{R}$ et

$$f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\cos(3x+2\pi)=\cos(3x)=f(x).$$

Remarque 6 (Généralisation) Soit f une fonction $\mathrm{T}>0$-périodique, ainsi que $(\omega,\varphi)\in\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}$. De façon générale,

$$g : x\longmapsto f(\omega x+\varphi) \quad \text{est } \frac{\mathrm{T}}{\omega}\text{-périodique.}$$

Définition 8 | Parité & Imparité

Soit f une fonction. .

- La fonction f est dite *paire* si :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x\in\mathscr{D}_f, \quad -x\in\mathscr{D}_f \\ \textbf{(ii)} & \forall x\in\mathscr{D}_f, \quad f(-x)=f(x). \end{cases}$$

- La fonction f est dite *impaire* si :

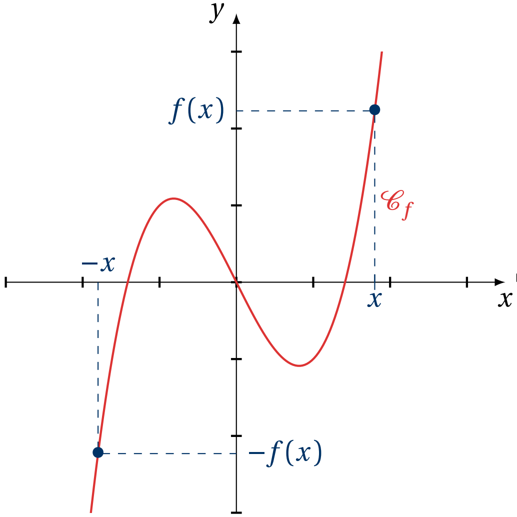
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x\in\mathscr{D}_f, \quad -x\in\mathscr{D}_f \\ \textbf{(ii)} & \forall x\in\mathscr{D}_f, \quad f(-x)=-f(x). \end{cases}$$

Attention
Cela ne signifie pas **du tout** que f prend des valeurs paires ou impaires.

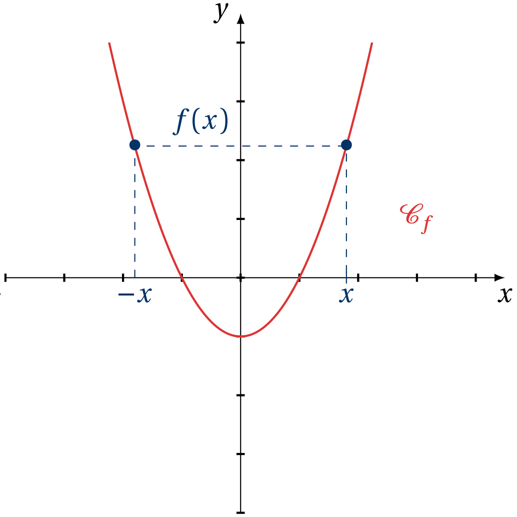
Remarque 7 (Interprétation géométrique) Géométriquement, la parité et l'imparité s'interprètent ainsi.

- Si f est paire alors, dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, son graphe est invariant par la symétrie d'axe $(O,\vec{j})$.
- Si f est impaire alors, dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, son graphe est invariant par la symétrie centrale par rapport au point O.

FONCTION IMPAIRE



FONCTION PAIRE



Exemple 8 Soit $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de f puis montrer que f est impaire.

✎

Exemple 9

1. La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5x \end{array} \right.$ est impaire.
2. La fonction $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ est impaire.
3. La fonction $h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$ est paire.

Conséquence très importante de ces propriétés : on peut réduire le domaine d'étude !

Remarque 8 (Parité/Périodicité et réduction du domaine d'étude) Soit f une fonction. Alors les différentes interprétations géométriques permettent de se contenter d'étudier une fonction sur un domaine plus petit que $\mathscr{D}_f$: après cette étude « réduite », des transformations géométriques simples permettront de récupérer le reste du graphe !

- **[Paire/Impaire]** Si f est paire ou impaire
- **[Périodique]** Si f est T-périodique, on peut réduire l'étude à $\boxed{\mathscr{D}_f \cap [0,T]}$, l'intervalle $[0,T]$ pouvant être remplacé par n'importe quel autre intervalle de longueur T (par exemple, $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ souvent utile ...).
- **[Périodique et Paire/Impaire]** Si f est T-périodique et possède en plus une parité, on peut réduire à : $\boxed{\mathscr{D}_f \cap \left[0,\dfrac{T}{2}\right]}$.

  En effet, dans le détail, la périodicité permet de réduire à $\mathscr{D}_f \cap \left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$, *puis la parité à* $\mathscr{D}_f \cap \left[0,\dfrac{T}{2}\right]$.

Exemple 10 Réduire le domaine d'étude de $f : x \longmapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos(x)$. Préciser ensuite les transformations géométriques nécessaires afin d'obtenir tout le graphe.

✎

1.3. Sens de variation

Définition 9 | Monotonie

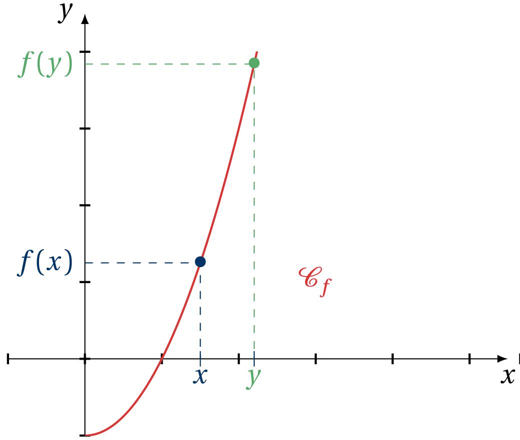
Soit f une fonction.

- On dit que f est *constante* sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad f(x) = f(y).$$
- On dit que f est *croissante* (*resp. strictement*) sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$$
$$\left(\textit{resp.} \quad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)\right).$$
- On dit que f est *décroissante* (*resp. strictement*) sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$
$$\left(\textit{resp.} \quad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y)\right).$$
- On dit que f est monotone (*resp.* strictement) sur $\mathscr{D}_f$ si f est croissante ou décroissante (*resp.* strictement) sur $\mathscr{D}_f$.

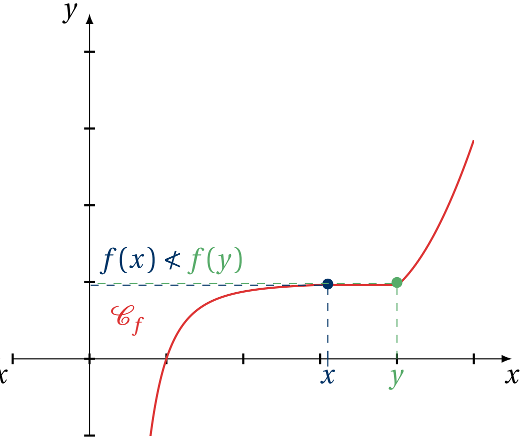
Remarque 9

- On notera qu'une fonction strictement croissante (*resp.* strictement décroissante) est croissante (*resp.* décroissante).
- Une fonction croissante préserve les inégalités. Une fonction décroissante renverse les inégalités.
- Pour les fonctions strictement monotones, on peut remplacer le symbole « $\Longrightarrow$ » par « $\Longleftrightarrow$ » dans la définition, comme nous l'avons vu dans le Chapitre (ALG) 2.

FONCTION STRICTEMENT MONOTONE



FONCTION NON STRICTEMENT MONOTONE



Attention

Il faut bien connaître la définition de fonction monotone, en plus de savoir l'établir éventuellement en dérivant (un des objectifs de la suite du chapitre).

Proposition 1 | Opérations sur les fonctions monotones

Soient f, g deux fonctions. Alors :

- **[Addition]** si f, g ont même monotonie, $f + g$ aussi.
- **[Produit par un scalaire]** Si f est monotone, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est :
  - monotone de même monotonie que f si $\lambda > 0$,
  - et de monotonie inversée à f si $\lambda < 0$.
- **[Produit]**
  - si f, g sont croissantes **positives**, alors fg est croissante,
  - si f, g sont décroissantes **positives**, alors fg est décroissante.
- **[Composition]**
  - si f, g sont monotones de même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante,
  - si f, g sont monotones de monotonies opposées, alors $g \circ f$ est décroissante.

Attention

La fonction « identité » $x \longmapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais quand on la multiplie par elle-même, le résultat $x \longmapsto x^2$ n'est **pas** une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Comme quoi la positivité compte !

Preuve Démontrons par exemple que $g \circ f$ est décroissante, lorsque g est décroissante et f est croissante.

Exemple 11 En utilisant la définition, établir les monotonies ci-après.

1. La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2-\sqrt{x} \end{array} \right.$ est strictement décroissante.

2. La fonction $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ est croissante mais n'est pas strictement croissante. *(l'étude complète de la partie entière sera faite dans la Section 5)*

Nous reverrons plus tard dans le chapitre un moyen plus efficace de prouver que des fonctions sont monotones, autre que la définition.

1.4. *Extrema*

Définition 10 | Majoration, minoration, borne, sup, inf

Soit f une fonction.

- On dit que f est *majorée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est majoré, c'est-à-dire si :
$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$
Dans ce cas, la *borne supérieure de* f, notée $\sup f$, est définie par :
$$\sup f = \sup\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}.$$
- On dit que f est *minorée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est minoré, c'est-à-dire si :
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant m.$$
Dans ce cas, la *borne inférieure de* f, notée $\inf f$, est définie par :
$$\inf f = \inf\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}.$$
- On dit que f est *bornée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est borné ou encore que f est majorée et minorée, c'est-à-dire si :
$$\exists (m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

La notion d'ensemble borné peut se réecrire à l'aide de la valeur absolue, c'est donc aussi le cas des fonctions bornées.

Proposition 2 | Fonction bornée et valeur absolue

Soit f une fonction. . Alors
$$\begin{aligned} f \text{ est bornée sur } \mathscr{D}_f &\iff |f| \text{ est majorée sur } \mathscr{D}_f \\ &\iff \exists \mathscr{M} \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |f(x)| \leqslant \mathscr{M}. \end{aligned}$$

Dans la pratique, on utilise plutôt cette proposition pour montrer qu'une fonction est bornée. La rédaction est souvent plus simple en exploitant les propriétés de la valeur absolue.

Preuve Utiliser le résultat déjà vu sur les ensembles bornés, appliqué à $\mathrm{A} = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$.

Définition 11 | *Extrema* global / local

Soit $\mathscr{D}_f$ un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- **[Global]** On dit que f admet un *maximum global* en x_0 si $x_0 \in \mathscr{D}_f$, et :
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$
On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathscr{D}_f$.
- **[Global]** On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si $x_0 \in \mathscr{D}_f$, et :
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$
On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathscr{D}_f$.
- **[Local]** On dit que f admet en $x_0 \in \mathscr{D}_f$ un *minimum local* (*resp. maximum local*) si l'une des égalités précédentes a lieu uniquement sur un voisinage de x_0, c'est-à-dire un intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$.
- On dit que f admet en x_0 un *extremum* (*resp. extremum local*) si f admet en x_0 un minimum ou un maximum (*resp.* un minimum local ou un maximum local).

Exemple 12

Ici, la fonction f est définie sur $A = [1;9[$.

- f est bornée sur A car : $\quad \forall x \in A, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 4.$
- 0 est un minorant de f sur A, c'est même le minimum global atteint en 3 et sa borne inférieure.
- En revanche 4 est un majorant non atteint de f sur A.
- Il n'y a pas de maximum global.
- Enfin, 1 est un minimum local atteint en 7 et 3 un maximum local atteint en 5.

2. CALCULS DE LIMITES & CONTINUITÉ

Pré-requis

- La notion de limite sera définie proprement dans un prochain chapitre (Chapitre (AN) 6). On supposera donc connue (voir vos cours de lycée) la notion de limite en un point fini ou infini pour une fonction, et leur version à droite ou à gauche.
- On revoie en revanche les règles d'opérations classiques afin de pouvoir effectuer des calculs. La définition de la continuité est rappelée, mais les propriétés complémentaires plus générales (convergence monotone, théorème des valeurs intermédiaires et de la bijection *etc.*) seront vues plus tard dans l'année.

2.1. Voisinage

Définition 12 | Voisinage

- On appelle *voisinage de* $+\infty$ tout intervalle de la forme $]a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.
- On appelle *voisinage de* $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ où $a \in \mathbb{R}$.
- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
  - On appelle *voisinage de* x_0 tout intervalle de la forme $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ où $\eta > 0$.
  - On appelle *voisinage de* x_0^- tout intervalle de la forme $]x_0 - \eta, x_0[$ où $\eta > 0$.
  - On appelle *voisinage de* x_0^+ tout intervalle de la forme $]x_0, x_0 + \eta[$ où $\eta > 0$.

Définition 13 | Propriété vraie sur un voisinage

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit qu'une propriété, dépendant d'une variable x, est vraie *au voisinage de* x_0 *(resp.* x_0^+, x_0^-*)* si elle est vraie pour tout $x \in V_{x_0}$ où V_{x_0} est un voisinage de x_0 (*resp.* x_0^+, x_0^-).

Exemple 13

1. Soit $f : x \longmapsto 2x$. Alors f est positive au voisinage de 0^+, négative au voisinage de 0^- ; mais son signe n'est pas déterminé au voisinage de 0 (c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]-\eta, \eta[$ avec $\eta > 0$).
2. Soit $f : x \longmapsto |x|$. Alors f est positive au voisinage de 0, strictement positive au voisinage de 0^+ et de 0^- ; mais elle n'est pas strictement positive au voisinage de 0.
3. Soit $f : x \longmapsto x^2 + x\cos(x)$, alors f est strictement positive au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

4. Soit $f : x \longmapsto \ln(x)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, définie au voisinage de 0^+ ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.
5. Soit $f : x \longmapsto \ln(-x)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$, définie au voisinage de 0^- ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.
6. Soit $f : x \longmapsto \ln(|x|)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, définie au voisinage de 0^- et de 0^+ ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.

2.2. Généralités

Notation — Limite d'une fonction

Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow x_0} \ell$. On dit que ℓ est la *limite* de f en x_0, ce que l'on note :

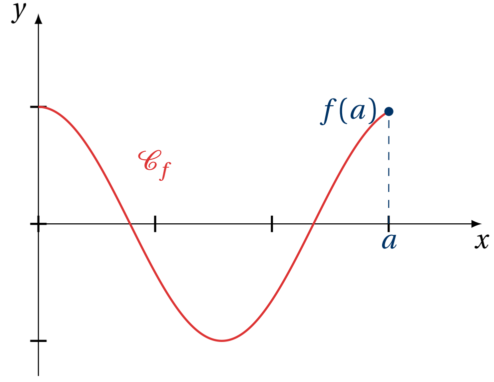
$$\ell = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \ell = \lim_{x_0} f.$$

Attention

Une fonction peut ne pas avoir de limite, nous verrons des exemples plus tard dans l'année.

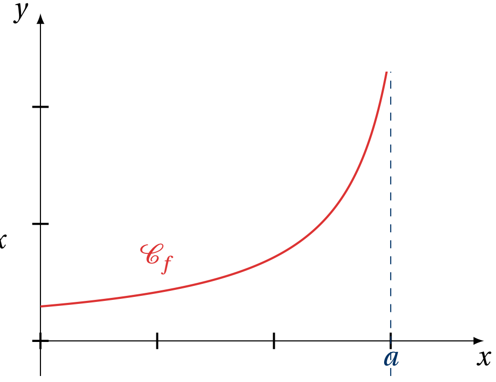
Remarque 10 (Pourquoi la notion de limite ?)

La limite en a est la valeur en a



La notion de limite en a est peu utile ici, puisqu'elle est égale à la valeur en a de la fonction. Nous verrons même plus tard dans l'année que c'est le cas dès que la fonction est définie en a.

La valeur en a n'existe pas



La notion de limite est typiquement la pour mettre des mots sur ce type de comportement, et l'étudier.

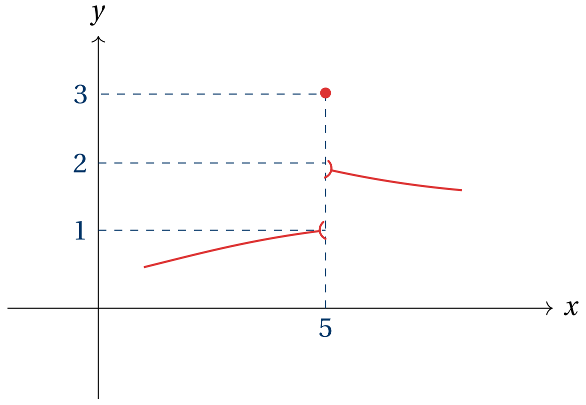
Le théorème suivant sera démontré plus tard dans l'année, comme la plupart des résultats qui vont suivre.

Théorème 1 | Unicité de la limite

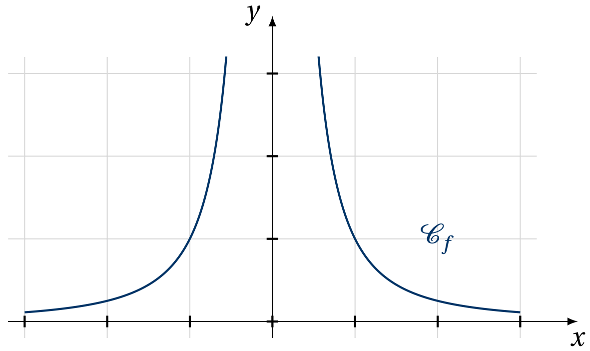
La limite d'une fonction, si elle existe, est unique.

Limite à droite ou à gauche. Une limite peut être caractérisée par une convergence à droite **et** à gauche, cela signifie que x se « rapproche par la droite ou la gauche » du point a. Comme annoncé plus haut, on supposera connue cette notion de limite.

Exemple 14 Dans l'exemple graphique suivant, déterminer : $\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x)$.



Exemple 15 La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ admet une limite à droite et à gauche en 0, égale à $+\infty$. Donc admet une limite en zéro qui vaut $+\infty$.



Rappelons le lien avec la limite à droite et à gauche.

Proposition 3 | Lien limite et limite à droite / gauche

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point à l'intérieur de I (*i.e.* pas au bord de I).

- Si f est définie en x_0, alors :

  f admet une limite en x_0 $\iff$

  $$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite finie à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

  Dans ce cas : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Si f n'est pas définie en x_0, alors :

  f admet une limite en x_0 $\iff$

  $$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x). \end{cases}$$

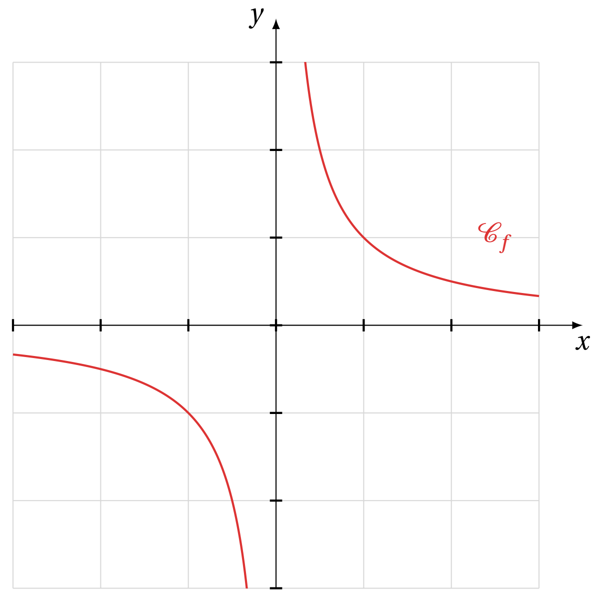
  Dans ce cas : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$.

Il faut savoir adapter ce résultat aussi au cas où une fonction est définie à droite ou à gauche de x_0 uniquement. Cette proposition est cruciale en pratique pour :

- montrer l'existence d'une limite en un point d'une fonction définie en deux morceaux (avec rupture de l'expression au point étudié),
- ou pour montrer que des fonctions n'admettent pas de limites en un point.

Exemple 16 Notons $f \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0, \\ 1-x & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array} \right.$ Alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$.

Exemple 17 **(Fonction inverse)** On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. La fonction $x \in \mathbb{R}^\star \longmapsto \dfrac{1}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?



2.3. Opérations algébriques sur les limites

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, c'est-à-dire x_0 est soit un nombre réel, soit $\pm\infty$) et soient f et g deux fonctions admettant toutes les deux une limite en x_0. Dans toute la suite, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. « FI » désigne une indétermination du résultat de la limite indiqué dans le tableau (à traiter au cas par cas). Chaque résultat présent dans chaque case du tableau peut être démontré en vérifiant la définition de la limite, nous l'admettrons.

Limite de $f + g$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ'	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	+FI	$+\infty$	$+\infty$

Limite de $f \times g$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0$	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$

Limite de g / f

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	FI	0	0	FI
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\dfrac{\ell}{\ell}$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' = 0^+$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$
$+\infty$	FI	0	0	FI

Attention **Pour retenir, mais sans l'écrire**

- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que :
$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$
- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que les formes indéterminées « FI » sont les suivantes :
$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Tout cela avec des gros guillemets donc.

Attention **Puissances variables $u(x)^{v(x)}$**

- Dans le cas d'une limite de la forme $\lim_{x\longrightarrow a} u(x)^{v(x)}$, on revient **toujours** à la définition de la puissance :
$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}.$$
On calcule alors la limite de $v(x)\ln(u(x))$, puis on en déduit la limite recherchée, par passage à l'exponentielle.
- En particulier, « 1^{∞} » est une forme indéterminée !

Exemple 18 **(Attention aux formes indéterminées !)** Une forme indéterminée est, comme son nom l'indique, **indéterminée** ! Tout peut arriver :
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0,$$
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=1,\quad \frac{x(2+\cos x)}{x}\text{n'a pas de limite en } +\infty,$$
alors que le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

COMPOSITION. On ajoute un nouveau résultat : celui sur les limites de fonctions composées.

Théorème 2 | Compositions de limites (ou Changement de variable)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soient x_0 un élément ou une borne, finie ou infinie, de I, y_0 un élément ou une borne, finie ou infinie, de J. Alors :
$$\begin{cases}\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = y_0\\ \lim_{y\longrightarrow y_0} g(y) \text{ existe}\end{cases} \implies \lim_{x\longrightarrow x_0} g\circ f(x) = \lim_{y\longrightarrow y_0} g(y).$$

Remarque 11
- Cet énoncé confirme l'évidence : pour savoir vers quoi tend $g\circ f(x) = g(f(x))$, on regarde déjà vers quoi tend l'expression $f(x)$ à l'intérieur de la parenthèse puis on « applique g » à la limite trouvée, si elle existe.
- Ce théorème est parfois aussi appelé « théorème du changement de variable pour les limites » : on peut penser formellement que l'on pose « $y = f(x)$ », avec $y \longrightarrow b$ lorsque $x \longrightarrow a$.

Exemple 19

1. Déterminer la limite de $x \longmapsto \sqrt{x+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

2. Déterminer la limite de $x \longmapsto \ln\left(2-\frac{x^2-1}{x-1}\right)$ en 1^-.

3. Comparer, en cas d'existence, les limites suivantes :
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}},\quad \text{et}\quad \lim_{y\longrightarrow\infty}\sqrt{y}\ln(y).$$

4. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ existe. Justifier, en effectuant un changement de variable, que $\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ existe aussi, et que :
$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}.$$

Note	*Quand on dit que l'on pose « $h = x - x_0$ », sur le fond on fait apparaitre le terme $\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ comme une composée $f(g(x))$, puis on applique le théorème de composition des limites.*

CROISSANCES COMPARÉES. Il existe des méthodes afin de parfois lever des formes indéterminées sur les limites. Une des plus importantes est l'utilisation d'un résultat sur les « croissances comparées ». Dans cet énoncé apparaissent des puissances réelles, nous (re)verrons cela dans la Section 5 sur les fonctions usuelles. [1]

Théorème 3 | Croissances comparées

Soient a, b et c des réels **strictement positifs**.

- **[En $+\infty$]**
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(\ln(x))^a}{x^b}=0,\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^b}{e^{cx}}=0,\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(\ln(x))^a}{e^{cx}}=0.$$
- **[En 0^+]**
$$\lim_{x\longrightarrow0^+}x^b(\ln(x))^a=0.$$
- **[En $-\infty$]**
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}x^b e^{cx}=0.$$

Remarque 12 Ce théorème s'utilise pour n'importe quels a, b, c strictement positifs, même non entiers. Par exemple si $b=\dfrac{1}{2}$, $x^b=\sqrt{x}$ pour tout $x>0$.

Comment retenir ce théorème ?

Résumé Idée des croissances comparées

On se souviendra que :

- l'exponentielle diverge beaucoup plus vite en $+\infty$ que toute puissance de x, qui elle-même diverge plus vite que toute puissance de logarithme. Ce que l'on peut noter :
$$(\ln x)^a \underset{+\infty}{\ll} x^b \underset{+\infty}{\ll} e^{cx}.$$
- Toute puissance de x l'emporte en zéro sur toute puissance de logarithme :
$$x^b(\ln x)^a \underset{0}{\ll} 1.$$
- L'exponentielle tend très vite vers 0 en $-\infty$ et l'emporte sur toutes les puissances de x :
$$x^b \underset{-\infty}{\ll} e^{cx}.$$

Méthode 1 (Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence)

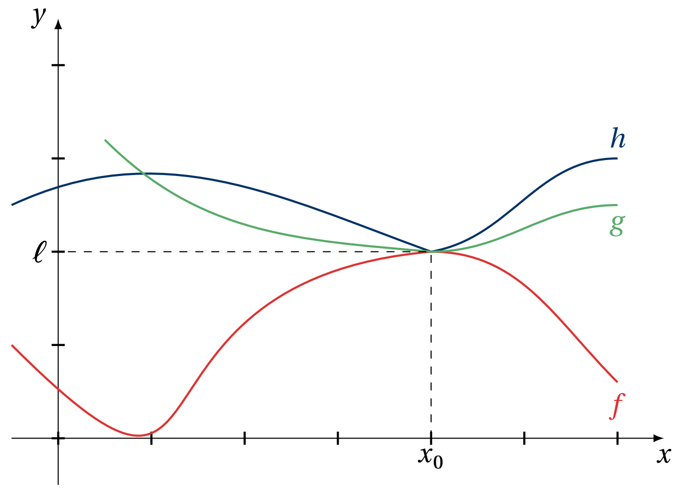
- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparait peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

Exemple 20 Déterminer les limites ci-après.

1. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow0}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}(xe^x-x^2)$,
4. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^{3x}-\ln x}{x^2+\ln x}$,

1. Mais cela n'empêche pas la compréhension de l'énoncé, on peut même considérer pour le moment les puissances comme entières positives.

5. $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{3x}-\ln x}{x^2+\ln x}$,



Théorèmes d'encadrement (ou des « gendarmes »)

Les théorèmes ci-après énoncent des faits intuitivement clairs :

- si une fonction f est minorée par une autre qui diverge en un point vers $+\infty$, alors f diverge aussi vers $+\infty$ en ce point,
- de-même si une fonction f est majorée par une autre qui diverge en un point vers $-\infty$, alors f diverge aussi vers $-\infty$ en ce point.
- Enfin, si f est encadré par deux autres qui tendent vers la même limite en un point, alors f tend aussi vers cette limite en ce point. Ce cas-là est souvent appelé « théorème des gendarmes ».

Théorème 4 | Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soient I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère trois fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)}, \\ \textbf{(ii)} & \text{les deux fonctions } f \text{ et } h \text{ admettent } \ell \text{ pour limite en } x_0. \end{cases}$$

Alors : $\quad g(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} \ell$.

Corollaire 1 | Version valeur absolue & Bornée « × → 0 »

- Soient I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, |f(x)| \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)} \\ \textbf{(ii)} & g(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0. \end{cases}$$

  Alors : $\quad f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0$.
- Le produit d'une fonction bornée au voisinage de x_0 et fonction tendant vers zéro en x_0 est une fonction tendant vers zéro en x_0.

Preuve

- L'hypothèse donne au voisinage de x_0 : $\quad -g \leqslant f \leqslant g$. Donc puisque $g(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0$, $-g(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0$ donc par théorème d'encadrement $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0$.
- Soit f une fonction bornée au voisinage de x_0 disons par $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$, et g fonction tendant vers zéro en x_0. Alors au voisinage de x_0, $0 \leqslant |fg| \leqslant \mathrm{M}|g|$. Comme $|g(x)| \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0$, on conclut à l'aide de la première partie de la preuve.

Théorème 5 | Théorème de minoration

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)} \\ \textbf{(ii)} & f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} +\infty. \end{cases}$$

Alors : $\quad g(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} +\infty$.

Théorème 6 | Théorème de majoration

Soient I un intervalle et $x_0 \in$ I (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0) \\ \textbf{(ii)} & g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} -\infty. \end{cases}$$

Alors : $\quad f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} -\infty$.

Ces deux théorèmes se démontrent, comme celui des gendarmes, à l'aide de la définition rigoureuse de la limite que nous verrons plus tard.

Exemple 21 Calculer les limites ci-après, en justifiant l'existence.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$.

Rappelons que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. *De manière équivalente, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^\star$, *on déduit alors :*

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}} < \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{x}} \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} < \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{x}.$$

Or, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = \infty$. *Donc d'après le théorème de divergence par minoration, on déduit :*

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} = \infty.$$

2. $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cos x}{x^3}$.

- **[Rédaction avec valeurs absolues]**

- **[Rédaction sans valeurs absolues]**

2.4. Continuité

GÉNÉRALITÉS. Intuitivement, les fonctions continues sont des fonctions que l'on peut tracer « sans lever le crayon ».

Définition 14 | Continuité en un point

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est *continue en* x_0 si : $\quad \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Attention

On parle de continuité en un point de **l'ensemble de définition**, puisque $x_0 \in$ I dans la définition précédente. La question ne se pose donc même pas en les points qui ne sont pas dans l'ensemble de définition.

Définition 15 | Continuité à droite, continuité à gauche

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in$ I. On dit que :

- f est *continue à gauche* en x_0 si : $\lim_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- f est *continue à droite* en x_0 si : $\lim_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

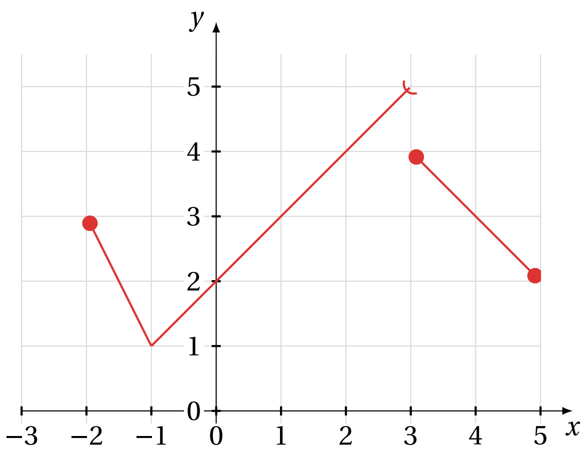
Proposition 4 | Continuité, à gauche et à droite

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Alors :

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0$$
$$\iff \lim_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Note *Attention : puisqu'ici la fonction f est définie en x_0, il ne faut pas oublier l'égalité à $f(x_0)$.*

Exemple 22 Considérons le graphe suivant d'une fonction f :



Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Définition 16 | Continuité sur un intervalle

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- *continue sur* I si : $\forall x_0 \in \mathrm{I}, \quad \lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire si elle est continue en tout $x_0 \in \mathrm{I}$,
- *continue sur* I *sauf en un nombre fini de points* si elle est continue sur $\mathrm{I} \setminus \mathrm{E}$, où E est un sous-ensemble fini de I.

Notation

On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES. Passons maintenant aux propriétés qui vont nous permettre de montrer que des fonctions sont continues en pratique.

Proposition 5 | Opérations sur les fonctions continues en un point

Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

- les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues en x_0.
- De plus, si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 et est continue en x_0.

On déduit immédiatement de la définition d'une fonction continue, des versions locales des deux énoncés précédents leur version globale : « Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Alors les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues sur I. De plus, si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I. »

Théorème 7 | Composition de fonctions continues

Soient I et J deux intervalles, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

- **[Version locale]** Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ est continue en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & g \text{ est continue en } f(x_0) \end{cases} \implies g \circ f \text{ est continue en } x_0.$$
- **[Version globale]** Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

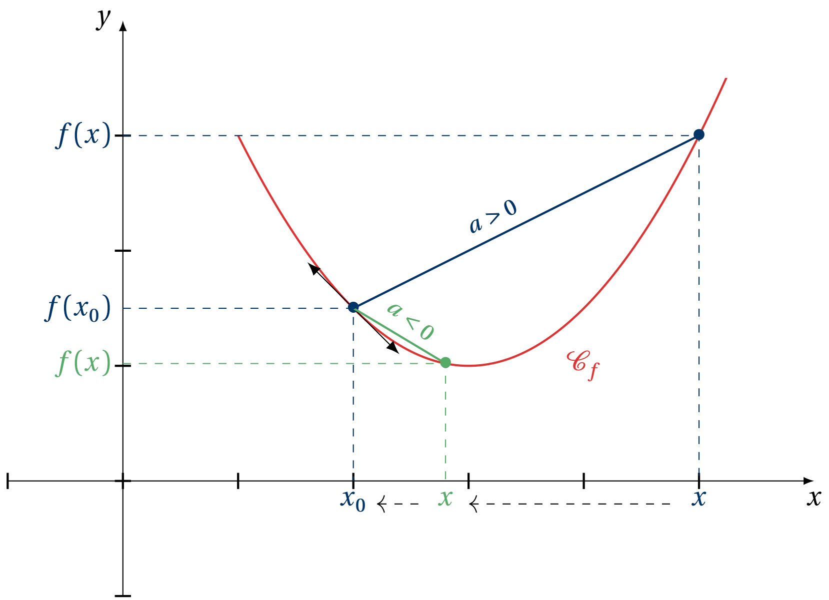
Méthode 2 (Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle) En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition.

3. CALCULS DE DÉRIVÉES

L'objectif de cette section est de rappeler la définition du nombre dérivé, de fonction dérivable, les principales formules à connaitre pour dériver une fonction et de savoir en déduire la monotonie. Les « grands théorèmes » sur les fonctions dérivables seront vus plus tard dans l'année, dans le Chapitre (AN) 6.

3.1. Nombre dérivé, fonction dérivable

Une application principale de la dérivation sera pour nous l'obtention de la monotonie d'une fonction. Considérons $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comment savoir si f croît après x_0 ? Observons la corde reliant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ pour $x > x_0$.



- Sur la corde bleue (à droite au-dessus), on observe un coefficient directeur positif, alors que la courbe décroît juste après x_0.
- Cela montre qu'il faut bien faire « se rapprocher x de x_0 » pour que le signe du coefficient directeur de la corde donne la monotonie localement autour de x_0. Vous voyez l'objet mathématique qui répond à cette problématique : la limite quand x tend vers x_0.

Définition 17 | Dérivabilité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est *dérivable* en x_0 si la fonction
$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \underbrace{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\text{Taux d'accroissement de } f \\ \text{entre } x \text{ et } x_0}} \end{array}\right.$$
admet une limite finie en x_0. La limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en x_0*.
- On dit que f est *dérivable à droite en x_0* (*resp. à gauche*) si on a seulement existence d'une limite à droite ou à gauche.

Remarque 13 (Version « $x_0 + h$ ») La limite du taux d'accroissement peut aussi, par composition des limites (poser « $h = x - x_0 \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$ »), être écrite sous cette forme :
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Notation

On note en général (sous réserve d'existence) :

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f en x_0,
- $f_g'(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à gauche en x_0,
- $f_d'(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à droite en x_0.

On obtient directement des résultats sur les limites, la propriété suivante.

Proposition 6 | Dérivabilité, à gauche et à droite

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :
$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & f_g'(x_0) = f_d'(x_0). \end{cases}$$

Remarque 14

- Une fonction est donc dérivable en x_0 si son taux d'accroissement tend vers une limite finie.
- Le taux d'accroissement s'interprète comme la pente de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x_0 et x. Lorsque f est dérivable en x_0, le nombre $f'(x_0)$ s'interprète alors comme la « pente limite » de ces cordes.

Définition 18 | Tangente

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *tangente à f d'abscisse a* la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

- Si f est dérivable à gauche (*resp.* droite) en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *demi-tangente à gauche (resp. droite) à f d'abscisse x_0* la droite d'équation :

$$y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \left(\textit{resp.} \quad y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right).$$

On dit que f *admet une tangente horizontale en x_0* lorsque $f'(x_0) = 0$.

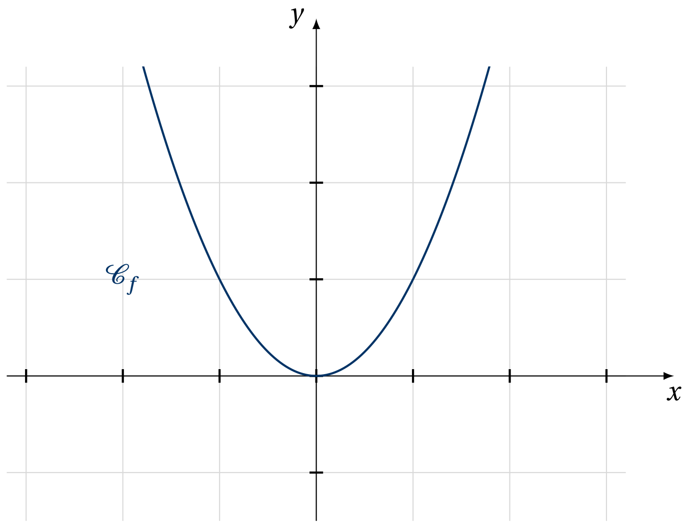
Exemple 23 Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

2. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

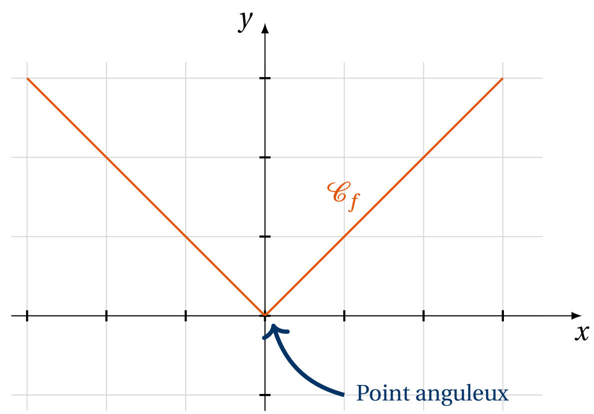
3. Déterminer l'équation de la tangente à T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Même question pour T_1 au point d'abscisse 1.

4. Représenter les tangentes sur le graphique ci-contre.

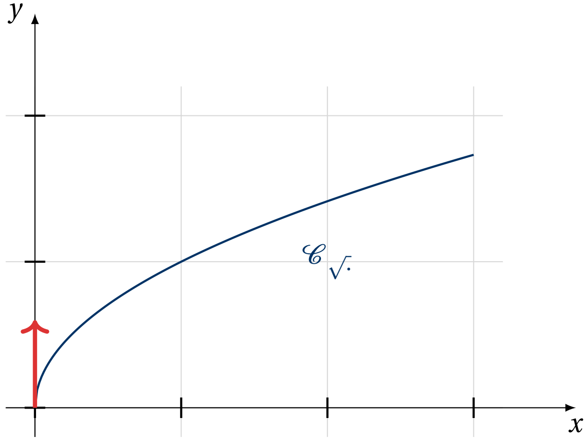


Exemple 24

- La valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.



- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



Notation

On note le nombre dérivé en x_0 par $f'(x_0)$, ou encore en « notation physicien » $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Cette seconde a le mérite de ne faire pas perdre de vue la définition du taux d'accroissement.

Notation Dérivée d'une expression

Soit une expression $f(x)$ dépendant de $x \in \mathbb{R}$, avec f une fonction dérivable. On notera dans la suite indifféremment :

- $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ la fonction f' évaluée en x,
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]$ la dérivée de l'expression $f(x)$ par rapport à x.

En particulier, on n'écriera pas $f(x)'$.

Il y a un lien entre la continuité et la dérivabilité. En effet, toute fonction dérivable est continue.

Théorème 8 | Dérivabilité & Continuité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Preuve On commence par récrire l'expression de la fonction, pour $x \neq x_0$ dans I, nous avons :

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Attention

La réciproque est, en général, fausse. La valeur absolue est continue en zéro, alors qu'elle n'y est pas dérivable comme nous l'avons déjà constaté.

Enfin, en faisant varier x_0 on créer ainsi une nouvelle fonction notée f'.

Définition 19 | Fonction dérivée, Fonction dérivable

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point $x \in \mathrm{I}$. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée de* f.

3.2. Calculs de dérivées

Maintenant, comment calculer concrètement la dérivée d'une fonction ? Comment savoir si une fonction est dérivable ? Pour le second point, on établit une bonne fois pour toute que la plupart des fonctions usuelles le sont. Pour le premier point, nous aurons des formules. Commençons par un exemple.

Exemple 25 (Avec la définition, fonction racine) Considérons $f : x \longmapsto \sqrt{x}$, et montrer que f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}^{+\star}$.

En résumé, on a établi que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et que :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

On peut appliquer cela pour la plupart des fonctions usuelles connues, les résultats seront récapitulés dans la prochaine section, et aussi dans le tableau ci-après.

FORMULAIRE DE DÉRIVATION : POINT D'ÉTAPE. Vous trouverez ci-après le formulaire des dérivées des fonctions connues en fin de Terminale Spécialité (ce formulaire sera élargi en fin de cours).

Dans les tableaux ci-dessous, x est une **variable** réelle, c une **constante** réelle et $n \in \mathbb{N}^\star$

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'} \subset \mathscr{D}_f$
$f(x) = c$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}^\star$	$(\text{ou}\mathbb{R}^\star)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}(\text{ou}\mathbb{R}^\star)$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0, \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

De plus, tout polynôme ou toute fraction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur son domaine de définition.

Maintenant, comment dériver des sommes/produits/quotients *etc.* de fonctions dérivables? Nous avons également des formules, qui se démontrent toutes à l'aide de la définition.

Proposition 7 | Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables sur I.

- **[Linéarité]** pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + g\mu$ est dérivable sur I, et :
$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$
On dit que la dérivation est *linéaire*.
- **[Produit]** fg est dérivable sur I et
$$(fg)' = f'g + fg'.$$
- **[Quotient]** Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in$ I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Remarque 15 En revanche, il n'existe pas de formule au programme pour la dérivée n-ième d'un produit ou quotient.

Exemple 26 **(Dérivée de** tan**)** Soit $\mathscr{D} = \mathbb{R} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Déterminer la dérivée de la fonction tan définie sur $\mathscr{D}$ par : $\forall x \in \mathscr{D}, \quad \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Exemple 27 Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions f suivantes et donner, lorsqu'elle existe, l'équation de la tangente à leur courbe au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ indiqué. On supposera que x appartient à l'ensemble de définition de f que l'on précisera.

1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1} \quad (a = 0)$

2. $f(x) = \cos x \sin x \quad (a = 0)$

3. $f(x) = \dfrac{x^2\cos(x)}{3} + \ln(x) \quad (a = 1)$

4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \quad (a = 1)$

5. $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} \quad (a = 1)$

Dériver une composée. Commençons là encore par traiter un exemple.

Exemple 28 (Avec la définition, fonction carré composée avec $x \longmapsto 3x+1$)
Considérons $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ et $f : x \longmapsto 3x+1$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La composée $h = g \circ f$ est $h : x \longmapsto (3x+1)^2$, on aimerait pouvoir calculer la dérivée de h en fonction de la dérivée de f et g.

En résumé, on a établi que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = 3 \times 2(2x+1) = \underbrace{\boxed{3}}_{\text{nouveau terme}} \times g'(2x+1) = f'(x)g'(f(x)).$$

Quand on dérivé une composée, il y a donc simplement un terme supplémentaire qui apparaît devant : c'est $g'(x)$.

Théorème 9 | Dérivation d'une composée
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}, g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Si f est dérivable sur I, g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $\quad (g \circ f)' = f' \times \left(g' \circ f\right)$.

Preuve Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Il s'agit de montrer que $g \circ f$ est dérivable en x_0, et que :
$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$.
Pour cela fixons-nous $x \in \mathrm{I}$ différent de x_0, et analysons la limite quand x tend vers x_0 de

$$\frac{g(f(x) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \times \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}. \qquad (\star)$$

On suppose que pour x assez proche de x_0, $f(x) \neq f(x_0)$ de sorte que le dernier quotient est bien défini, on admet le cas général.[a]

Résumé **Dérivée d'une composée**

Nous pouvons retenir cette formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(\text{extérieur} \circ \text{intérieur})' &= (\text{extérieur}(\text{intérieur}))' \\ &= \text{intérieur}' \times \left(\text{extérieur}'(\text{intérieur})\right).\end{aligned}$$

Exemple 29 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(|x|). \end{array} \right.$ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.

Continuons avec des exemples usuels théoriquement à connaitre, mais qui se retrouvent très rapidement à partir du théorème précédent, mieux vaut ne pas les apprendre par coeur inutilement.

Exemple 30 **(Formules générales)** Soit u une fonction numérique dérivable. Pour les dérivées ci-après, préciser sous quelle condition sur u la composition est possible, et justifier la dérivabilité, puis donner une formule pour la dérivée.

1. u^n, $n \in \mathbb{Z}^\star$.

2. e^u.

3. $\ln|u|$.

4. $\cos(u), \sin(u)$.

5. $\tan(u)$.

6. $\sqrt{u}$.

a. Il s'agirait de remplacer le terme $\dfrac{g(f(x) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$ qui pose problème dans $(\star)$ par $\dfrac{g(f(x) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$ si $f(x) \neq f(x_0)$, et $g'(f(x_0))$ si $f(x) = f(x_0)$.

POINT D'ÉTAPE : FORMULAIRE DE DÉRIVATION D'UNE COMPOSÉE. Pour u une fonction réelle à valeurs dans l'ensemble de dérivabilité de la fonction par laquelle on compose, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^\star$:

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(e^u)' = u'e^u$	$(\ln\lvert u\rvert)' = \dfrac{u'}{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ si $u > 0$
$(\cos u)' = -u'\sin(u)$	$(\sin u)' = u'\cos u$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'\left(1+\tan^2 u\right)$	

Exemple 31 **(Exemples de dérivées de composées)** Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivées.

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)$

2. $g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{e^{x^2}}$

3.3. Lien avec la monotonie

Théorème 10 | Monotonie et signe de la dérivée

Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors :

- **[Monotonie]**

$$f \text{ est croissante} \iff \forall x \in \mathrm{I},\quad f'(x) \geqslant 0,$$
$$f \text{ est décroissante} \iff \forall x \in \mathrm{I},\quad f'(x) \leqslant 0.$$

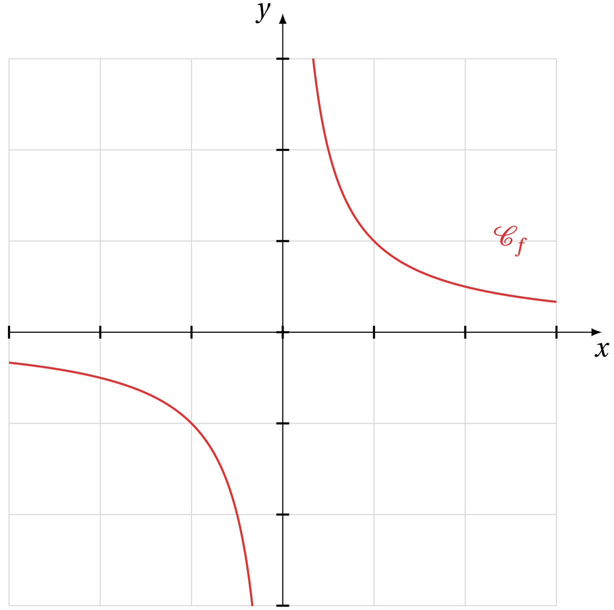
- **[Stricte monotonie]**
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement décroissante.
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement croissante.

Remarque 16

- Pour la stricte monotonie, il n'est donc pas indispensable que le signe soit strict sur tout l'ensemble de définition. Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante, même si sa dérivée s'annule en zéro.
- Un intervalle comme ensemble de définition est cependant crucial : par exemple, pour $f : x \in \mathbb{R}^\star \longmapsto \dfrac{1}{x}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

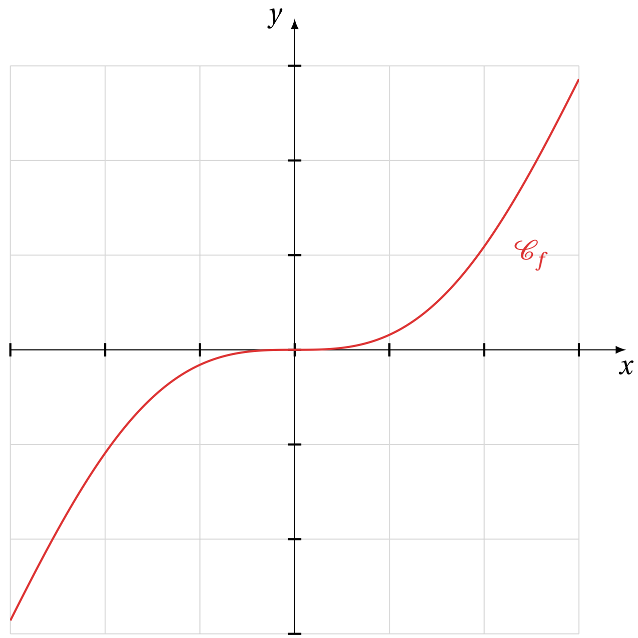
Et pourtant f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à cause du « saut » autour de 0 : $-1<1$ alors que $f(-1)<f(1)$.



Exemple 32 Par exemple, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-\sin(x) \end{array} \right.$$

est strictement croissante alors que sa dérivée s'annule un nombre infini de fois.



3.4. Application aux calculs de limites

Puisqu'un taux de variation est une limite, faisant apparaître en plus une forme indéterminée (le dénominateur tend vers zéro), le calcul d'une dérivée peut donc donner de précieux résultats sur la valeur cherchée de la limite.

Méthode 3 **(Limite calculable par taux de variation)** Si une expression est de la forme suivante, pour $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0, avec x_0 aux bords de I ou dans I, alors :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} f'(x_0).$$

En particulier, si f s'annule en x_0, on a :

$$\frac{f(x)}{x-x_0} \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} f'(x_0).$$

On commence par un exemple simple. Ceux faisant intervenir des fonctions usuelles seront faits dans la prochaine section.

Exemple 33 Calculer la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ selon deux méthodes.

Exemple 34 Calculer la limite $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3.5. Dérivation partielle

Dans de nombreux exemples en physique, les quantités étudiées ne dépendent pas d'une unique variable mais de plusieurs.

Exemple 35 La loi des gaz parfaits affirme que $PV = nRT$ donc en particulier la pression P s'exprime en fonction à la fois de la température et du volume :

$$\underbrace{\mathrm{P}(\mathrm{V},\mathrm{T})}_{\text{P dépend de deux variables}} = \frac{n\mathrm{RT}}{\mathrm{V}}.$$

Définition 20 | Fonction (numérique) de 2 variables

- Une *fonction (numérique) de 2 variables*, ou simplement *fonction de deux variables* dans la suite, est un processus qui associe à chaque élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ au plus un élément y de $\mathbb{R}$ (donc soit 0 élément, soit 1 élément).
- On appelle *ensemble de définition* de la fonction $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'ensemble noté $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ pour lequel f associe une image, c'est-à-dire :
$$\mathscr{D}_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \exists z\in\mathbb{R}, z = f(x,y)\right\}.$$

Exemple 36 Donner et représenter dans le plan le domaine de définition des fonctions suivantes.

1. $f:(x,y)\longmapsto \dfrac{2y}{x^2+1}$

2. $g:(x,y)\longmapsto \dfrac{1}{x-y}$

3. $u:(x,y)\longmapsto \sqrt{y-x^2}$

4. $v:(x,y)\longmapsto \ln(2x+y+1)$.

Définition 21 | Dérivées partielles

Notons $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que : $\mathcal{D}_f = \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ où I, J sont deux intervalles non réduits à un point. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On dit que :

- f admet une dérivée partielle en x au point (x_0, y_0) si la fonction *(d'une variable!)* $x \longmapsto f(x, y_0)$ est dérivable. Dans ce cas on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ la valeur de cette dérivée,
- f admet une dérivée partielle en y au point (x_0, y_0) si la fonction *(d'une variable!)* $y \longmapsto f(x_0, y)$ est dérivable. Dans ce cas on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ la valeur de cette dérivée.

Remarque 17 Concrètement, pour calculer la dérivée de $x \longmapsto f(x, y_0)$, il suffit simplement d'imaginer que x est notre variable de dérivation tandis que y est « fixée » et égale à y_0. Même chose pour dériver selon y.

Exemple 37

- Soit P la fonction définie par $\mathrm{P}(\mathrm{V}, \mathrm{T}) = \dfrac{n\mathrm{RT}}{\mathrm{V}}$. Soit $(\mathrm{V}, \mathrm{T}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
- On a : $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}}(\mathrm{V}, \mathrm{T}) = -\dfrac{n\mathrm{RT}}{\mathrm{V}^2}$
- On a : $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{V}}(\mathrm{V}, \mathrm{T}) = \dfrac{n\mathrm{R}}{\mathrm{V}}$.

Exemple 38 Calculer les dérivées partielles en x et y des fonctions f, g, u, v définies dans un exemple précédent.

1.

2.

3.

4.

4. PLAN D'ÉTUDE D'UNE FONCTION

L'objectif majeur de ce chapitre est de savoir étudier complètement une fonction. Rappelons l'exercice typique sur le sujet.

Pré-requis

- Étudier si nécessaire l'ensemble de définition.
- Rechercher les propriétés géométriques de la courbe : si la fonction est paire ou impaire, on se contente de l'étudier sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$; si la fonction est T-périodique, on peut se contenter d'une étude sur une période.
- Justifier le caractère dérivable de la fonction sur un certain intervalle. *(à ce stade de l'année, en invoquant les résultats sur les opérations de fonctions dérivables)*
- Calculer la dérivée de la fonction sur cet intervalle, et étudier son signe. Le calcul de la dérivée donne aussi les tangentes remarquables (horizontales en particulier).
- Déterminer les limites et les éventuelles asymptotes aux bornes de l'ensemble d'étude.

- Dresser le tableau des variations de la fonction. Calculer la valeur des éventuels *extrema* et quelques valeurs remarquables si nécessaire.
- Étudier éventuellement la position relative de la courbe représentant la fonction par rapport à certaines de ces tangentes ou asymptotes.
- Tracer une représentation graphique de la fonction.

Afin d'illustrer cela, traitons deux exemples complets.

Exemple 39 Soit la fonction : $f(x) = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 - 1}$.

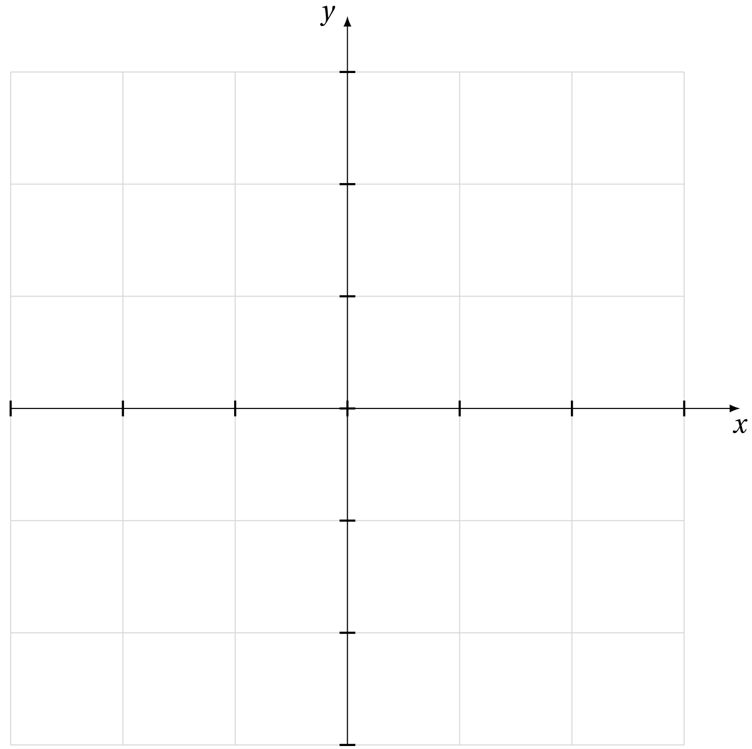
1. Déterminer le domaine de définition et le signe de f.

2. La fonction f est-elle paire/impaire ? Réduire le domaine d'étude.

3. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.

4. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur le domaine d'étude. La fonction f admet-elle des *extrema* locaux ?

5. Tracer le graphe complet de la fonction f.



5. FONCTIONS USUELLES

Pour chaque fonction, nous donnons :

- la forme de son expression, quelques propriétés, la dérivée et le domaine de dérivabilité,
- sa représentation graphique.
- certaines limites remarquables,
- Et un contexte (mathématique, physique, ...) où intervient ladite fonction.

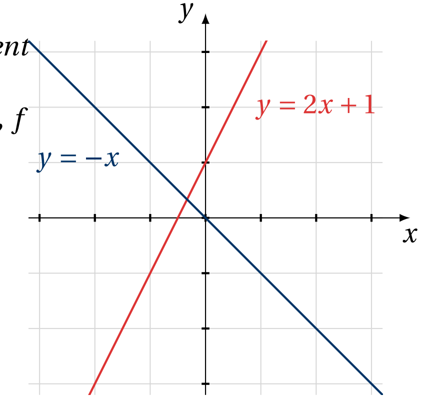
Tous ces points doivent être maitrisés car ils sont susceptibles d'intervenir dans les exercices.

5.1. Fonctions polynomiales

Définition/Proposition 1 | Fonctions affines

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Le réel a est appelé le *coefficient directeur* de f, b son ordonnée à l'origine.
- Si $b=0$, on dit que f est *linéaire*. Si $a=0$, f est constante.
- **[Dérivée]** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a.$
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (ax+b) = -\infty$, si $a>0$,
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (ax+b) = +\infty$, si $a>0$,
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (ax+b) = +\infty$, si $a<0$,
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (ax+b) = -\infty$, si $a<0$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

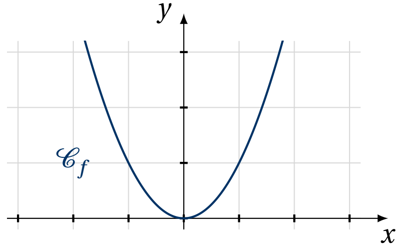


Exemple 40 D'après la loi d'Ohm, la tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle à l'intensité : $\mathrm{U(I)} = \mathrm{RI}$ avec les notations du cours de physique. La tension est donc une fonction linéaire de l'intensité.

Définition/Proposition 2 | Fonction carré, cas $n=2$

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array} \right.$
- **[Propriété(s)]** f est paire.
- **[Dérivée]** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x.$
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^2 = +\infty$,
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} x^2 = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

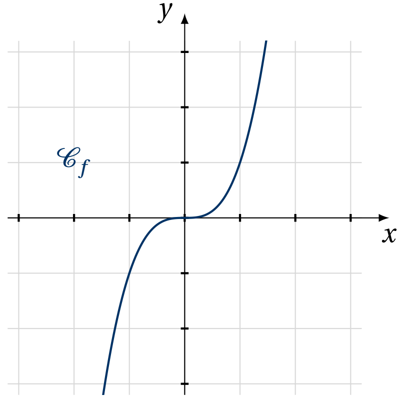


Exemple 41 L'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse du corps : $\mathrm{E}_c(v) = \dfrac{1}{2}mv^2$ avec les notations du cours de physique.

Définition/Proposition 3 | Fonction cube, cas $n=3$

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3. \end{array} \right.$
- **[Propriété(s)]** f est impaire.
- **[Dérivée]** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2.$
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^3 = -\infty$,
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} x^3 = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

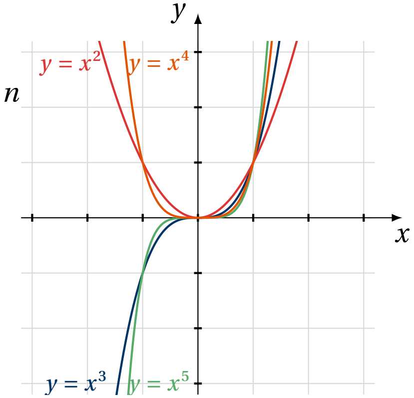


Définition/Proposition 4 | Fonction monôme $x \longmapsto x^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = nx^{n-1}.$$
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair,
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair,
  - $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^n = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Définition/Proposition 5 | Fonction polynomiale de degré n

- **[Définition]** $\mathrm{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array} \right.$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels appelés les *coefficients* du polynôme.
- **[Dérivée]** P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$
- **[Limites]** $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} \mathrm{P}(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} (a_n x^n)$, c'est-à-dire celle donnée par la plus

grand puissance.

Preuve Démontrons la propriété sur la limite en $\pm\infty$.

Méthode 4 **(Limite d'un quotient de polynpomes)** Pour déterminer la limite en $\pm\infty$ de :

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

on factorise au numérateur par $a^n x^n$ et au dénominateur par $b_m x^m$ et on simplifie le quotient de ces deux termes en $\dfrac{a_n x^{n-m}}{b_m}$, avant de passer à la limite. On dit que l'on « met en facteur les monômes de plus haut degré ».

Attention

Cette méthode ne fonctionne que pour les limites en $\pm\infty$.

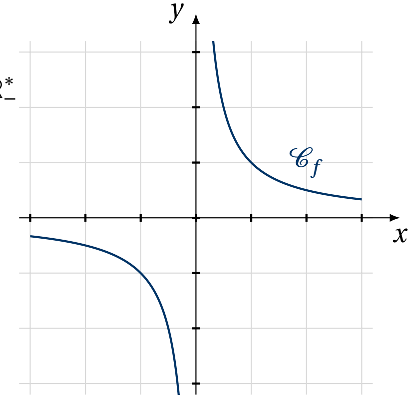
Exemple 42 Déterminer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^7+4x^2-1}{x^9+1}$.

5.2. Fonction monôme inverse

Définition/Proposition 6 | Fonction inverse, cas $n = 1$

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est impaire.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cdot.$
- **[Limites]**
  - $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$
  - $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$
  - $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

Courbe représentative



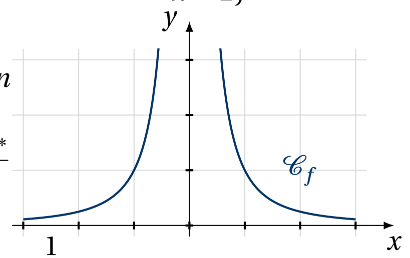
Exemple 43 D'après la loi des gaz parfaits, la pression est inversement proportionnelle au volume : $\mathrm{P(V)} = \dfrac{n\mathrm{RT}}{\mathrm{V}}$ avec les notations du cours de physique.

Définition/Proposition 7 | Fonction carrée inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.[2]

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^n}. \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\quad f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}.$
-
  - $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0\,,$
  - $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty.$
  - $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$

Courbe représentative (cas $n = 2$)



Exemple 44 Si un corps A et un corps B de masses m_A et m_B sont séparés par une distance d, alors la valeur F de la force de gravitation qui s'exerce entre eux est : $\mathrm{F} = \mathrm{G}\dfrac{m_\mathrm{A} m_\mathrm{B}}{d^2}$ avec les notations du cours de physique.

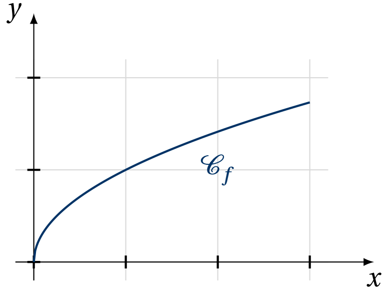
2. Pour $n = 0$, on retrouve une fonction affine, donc déjà étudiée.

5.3. Fonction racine carrée

Définition/Proposition 8 | Fonction racine carrée

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
Elle n'est pas dérivable en zéro.
- **[Limites]** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Exemple 45 Le principe de TORRICELLI est un principe de mécanique des fluides qui établit que le carré de la vitesse d'écoulement d'un fluide sous l'effet de la pesanteur est proportionnel à la hauteur de fluide située au-dessus de l'ouverture par laquelle il s'échappe du cylindre qui le contient.
$$v^2 = 2gh, \qquad v = \sqrt{2gh},$$
avec les notations du cours de physique.

Méthode 5 **(Expression conjuguée pour les F.I. avec racines)** Pour calculer des limites d'expressions de la forme $\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}$ avec $\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} v(x) = \infty$ le plus souvent polynomiale, on a souvent recours à à la technique de l'expression conjuguée :
$$\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)} = \frac{\left(\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}\right)\left(\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}\right)}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}} = \frac{u(x) - v(x)}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}}.$$
Sous cette forme, la limite n'est souvent plus indéterminée après avoir mis dans la racine les monômes les plus importants en facteur.

Exemple 46 Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1}\right)$.

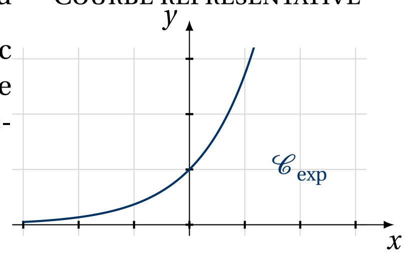
5.4. Fonctions exponentielles, logarithme et puissances

5.4.1. Exponentielle et logarithme

Définition/Proposition 9 | Fonction exponentielle

- **[Définition]** $\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x), \end{array} \right.$ ou encore e^x comme notation pour $\exp(x)$, avec e la constante de NÉPER, et définie comme $e = \exp(1)$. La fonction exp est l'unique fonction f dérivable, vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



- **[Principales propriétés]**
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \; e^{x+y} = e^x e^y, \; e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$
- **[Dérivée]** exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$$
- **[Limites]**
  - ◇ $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$,
  - ◇ $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$,
  - ◇ **[Taux]** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exemple 47

- La loi de décroissance radioactive affirme que le nombre de noyaux désintégrés au bout d'une durée t s'exprime comme
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$
où N_0 est le nombre de noyau à $t = 0$ et λ est la constante radioactive, caractéristique du noyau radioactif considéré.

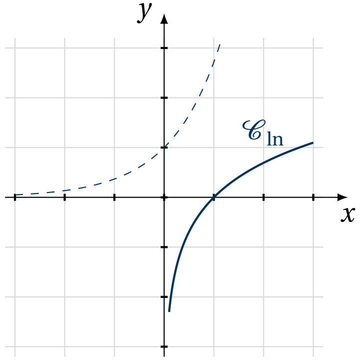
- Le modèle de dynamique des populations de MALTHUS affirme que le nombre d'individus $N(t)$ au temps $t \geqslant 0$ s'exprime comme :
$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$
où N_0 est le nombre d'individus au temps initial et λ est le taux de croissance de la population.

5.4.2. Fonction logarithme népérien ln et décimal log

Définition/Proposition 10 | Logarithme népérien

- **[Définition]** $\ln \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x). \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]**
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
- **[Dérivée]** ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

COURBE REPRÉSENTATIVE



- **[Limites]** $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

  [Taux] $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- **[Réciproque de l'exponentielle]**
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad \exp \circ \ln(x) = e^{\ln(x)} = x,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln \circ \exp(x) = \ln(e^x) = x.$$

La dernière propriété signifie que exp, ln sont réciproques l'une de l'autre, nous étudierons plus en détail cela dans le Chapitre (ALG) 6.

Exemple 48 En physique statistique, la formule de BOLTZMANN (1877) définit l'entropie microcanonique d'un système physique à l'équilibre macroscopique, libre d'évoluer à l'échelle microscopique entre Ω micro-états différents. Elle s'écrit :
$$S = k_B \ln(\Omega)$$
où k_B est la constante de BOLTZMANN.

Dans certaines disciplines, notamment en Physique–Chimie pour des grandeurs variant sur des puissances de 10, par exemple entre 10^{-10} et 10^{10}, il peut être plus pratique de manipuler des « logarithmes décimaux » plutôt que le logarithme népérien.

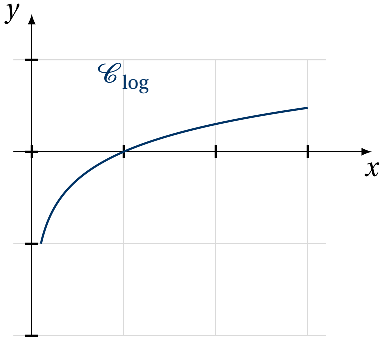
Par exemple, si $k \in \mathbb{N}$, $\ln(10^k) = \ln(e^{k \ln 10}) = k \ln 10 (\star)$. Plutôt que de manipuler des ln 10 dans certains calculs, on préfère considérer la fonction $\log = \dfrac{\ln}{10}$, de sorte qu'$(\star)$ se simplifie en $\log(10^k) = k$.

Mathématiquement, cette fonction ne représente que peu d'intérêts puisqu'elle est égale à une constante près à une fonction déjà connue (le logarithme népérien).

Définition/Proposition 11 | Fonction logarithme décimal

- **[Définition]**
$$\log \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}. \end{array} \right.$$
- **[Principales propriétés]**
  - $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
  - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $10^{\log(x)} = x$,
  - $\forall a \in \mathbb{R}$, $\log(10^a) = a$.
- **[Dérivée]** log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \ln'(x) = \frac{1}{\ln(10) x}.$$
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$,
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Exemple 49
- En milieu dilué, on définit le pH par la relation
$$pH = -\log([H_3O^+]),$$
où $[H_3O^+]$ désigne la concentration en H_3O^+.
- La magnitude locale d'un séisme se calcule comme
$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$
où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

5.4.3. Puissances générales & Exponentielle en base a

Rappelons les puissances que nous connaissons déjà.

- a^n avec $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^\star$, $n \in \mathbb{Z}$. Nous l'avons vu dans le Chapitre (ALG) 2 sur les nombres réels.

- Nous avions également défini $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ lorsque $a \geqslant 0$, et $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Nous allons à présent définir a^b pour tout $b \in \mathbb{R}$, lorsque $a > 0$. Réecrivons notre définition du Chapitre (ALG) 2 à l'aide de l'exponentielle et du logarithme. On a d'après les propriétés de l'exponentielle :

$$a^n = \left(e^{\ln a}\right)^n = e^{n \ln a}.$$

Il apparaît que cette écriture de la puissance peut être étendue à n'importe quelle autre puissance réelle (pas seulement un entier n). On aboutit donc à la définition ci-après.

Définition 22 | Puissances généralisées

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On définit le *réel* a^b par : $\quad a^b = e^{b \ln a}$.

Exemple 50 Écrire sous forme exponentielle $(2)^{\frac{1}{3}}$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Exemple 51

1. Montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad x^n \geqslant 10.$$

(Vous pourrez noter que, après le cours sur les suites, cela sera une conséquence directe du fait que $x^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ (car $x > 1$, résultat classique sur les suites géométriques))

2. Montrer en revanche que :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad x^n \geqslant 10 \quad \text{est fausse.}$$

Remarque 18 Cette définition a le bout goût de généraliser l'exposant (autorisé à être réel cette fois). Cependant, puisque ln est défini uniquement sur $\mathbb{R}^{+\star}$, elle est moins générale vis-à-vis de a que la définition $a^n = a \times \cdots \times a$. On ne peut pas tout avoir.

Constatons que pour différentes valeurs de b, on retrouver diverses quantités usuelles déjà définies dans le Chapitre (ALG) 2.

Proposition 8 | Puissances particulières

Soient $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- $[b = 1/2]$ $\quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$,
- $[b = 1/3]$ $\quad x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Attention

La racine cubique d'un réel strictement positif s'écrit donc sous forme d'une puissance $\dfrac{1}{3}$. En revanche, nous n'avons rien dit des réels négatifs (dont la racine cubique existe).

Preuve D'après la définition du Chapitre (ALG) 2, il s'agit de montrer que : $x^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$, et que $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$.

On vérifie sans peine que toutes les propriétés classiques sur les puissances restent valables.

Proposition 9 | Règles sur les puissances

Soit $(a, a_1, a_2) \in (\mathbb{R}^{+\star})^3$ et $(b, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

- $a^{b_1+b_2} = a^{b_1} \times a^{b_2} \quad (a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 \times b_2} \quad (a_1 \times a_2)^b = a_1^b \times a_2^b$.
- $\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^b = \dfrac{a_1^b}{a_2^b}, \quad \dfrac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1-b_2} = \dfrac{1}{a^{b_2-b_1}}$.

Remarque 19 **(On peut faire encore mieux)** Nous pouvons faire encore mieux dans le cas des puissances $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec q un **entier impair**. Nous verrons cela dans le Chapitre (ALG) 6 une fois le théorème de la bijection revu.

Remarque 20 **(Constante de Néper)** En début de section, nous avions écrit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $\mathrm{e} = \exp(1)$. Afin de pouvoir utiliser cette notation, il faudrait alors justifier que :

$$\exp(x) = (\exp(1))^x.$$

En effet c'est le cas puisque $\quad (\exp(1))^x = \exp(x \ln \exp(1)) = \exp(x)$.

Faire varier b : exponentielle en base. On peut aussi à présent faire varier la puissance b et étudier la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ pour tout $a > 0$. C'est une fonction qui aura donc des propriétés similaires à la fonction exponentielle. On la note en général $\exp_a$.

Définition/Proposition 12 | Fonction exponentielle en base a

- **[Définition]**

$$\exp_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}. \end{array} \right.$$

- **[Principales propriétés]**

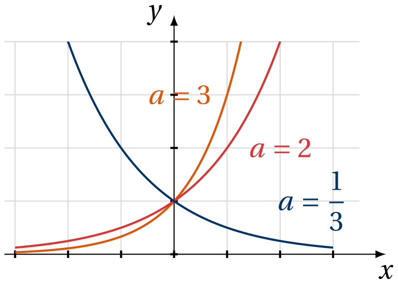
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

- **[Dérivée]** $\quad \exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a'(x) = \frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x \ln a}\right)}{\mathrm{d}x} = \ln(a) a^x.$$

- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad$ si $a < 1$,
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad$ si $a < 1$,
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad$ si $a > 1$,
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad$ si $a > 1$.

Courbe représentative



Remarque 21 Pour $a = \mathrm{e}$, étant donné que $\ln(\mathrm{e}) = 1$, on retrouve l'exponentielle. En d'autres termes : $\quad \exp_{\mathrm{e}} = \exp$. Pour savoir si $\exp_a$ est croissante ou décroissante, on analyse simplement le signe de $\ln a$, cela revient à comparer a à 1.

Faire varier a. On peut aussi à présent faire varier a dans $\mathbb{R}^{+\star}$ et étudier la fonction $x \in \mathbb{R}^{+\star} \longmapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. C'est une fonction qui unifie à la fois la racine carrée $\alpha = \dfrac{1}{2}$, la racine cubique $\alpha = \dfrac{1}{3}$, mais aussi la fonction carré $\alpha = 2$, cube $\alpha = 3$, *etc.* et même l'identité avec $\alpha = 0$.

Définition/Proposition 13

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **[Définition]**

$$p_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}. \end{array} \right.$$

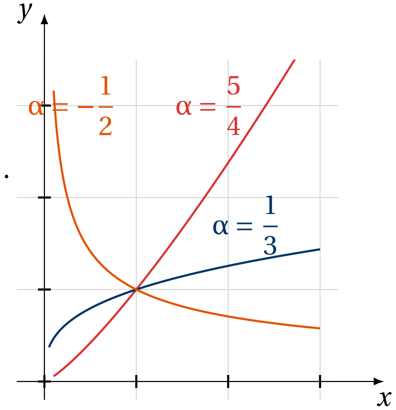
- **[Principales propriétés]**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$

- **[Dérivée]** $\quad p_\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad p_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Courbe représentative



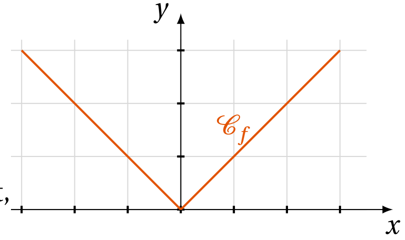
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty \quad$ si $\alpha > 0$,
  - $\lim\limits_{x \to \infty} x^\alpha = +\infty \quad$ si $\alpha > 0$,
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty \quad$ si $\alpha < 0$,
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0 \quad$ si $\alpha < 0$.

5.5. Fonction valeur absolue

La valeur absolue avait étudiée dans le Chapitre (ALG) 2, mais nous ne l'avions pas vue encore comme une fonction. C'est ce que nous analysons ici.

Définition/Proposition 14 | Valeur absolue

COURBE REPRÉSENTATIVE



- **[Définition]**

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

- **[Principales propriétés]** f est paire.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une part, $\mathbb{R}_-^*$ d'autre part et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Elle n'est pas dérivable en zéro.

- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} |x| = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} |x| = +\infty$

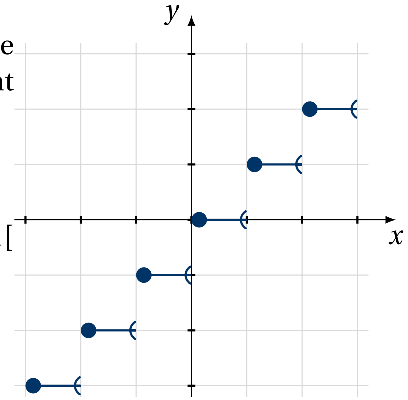
Exemple 52 Un modèle très simple d'évolution de la température lors d'une journée consiste à supposer qu'elle augmente régulièrement de 6h à 16h puis diminue régulièrement jusqu'à minuit. La température $\mathrm{T}(t)$ s'exprime alors en fonction du temps écoulé t depuis 6h comme suit :

$$\mathrm{T}(t) = a|t-10| + b.$$

5.6. Fonction partie entière

Définition/Proposition 15 | Fonction partie entière

COURBE REPRÉSENTATIVE



- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est constante par morceaux, discontinue en chaque point $n \in \mathbb{Z}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- **[Dérivée]**
f est dérivable sur chaque intervalle $]n; n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et

$$\forall x \in]n; n+1[, \quad f'(x) = 0.$$

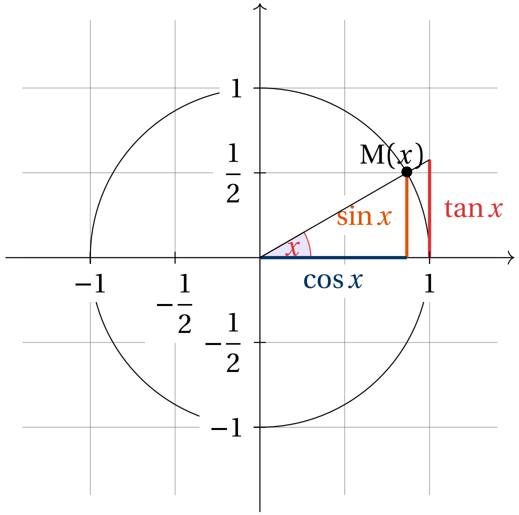
f n'est pas dérivable en tout $n \in \mathbb{Z}$.

- **[Limites]**
  - ◇ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$,
  - ◇ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$,
  - ◇ $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim\limits_{x \longrightarrow k^-} \lfloor x \rfloor = k-1, \; \lim\limits_{x \longrightarrow k^+} \lfloor x \rfloor = k.$

Preuve Montrons les deux limites ci-après : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$.

5.7. Fonctions circulaires

Rappelons que pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus, sinus et tangente de x peuvent être visualisés avec la figure ci-après.



On voit qu'en faisant varier x dans $\mathbb{R}$, le cosinus et le sinus semblent « osciller » entre -1 et 1, et semblent revenir sur les anciennes valeurs après un intervalle de longueur 2π.

Dans toute la suite, on admettra le lemme suivant[3]. Il va nous permettre d'établir l'expression des dérivées de cos et sin.

Lemme 1 | Deux limites

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sin(h)}{h}=1,\qquad \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1-\cos(h)}{h}=0.$$

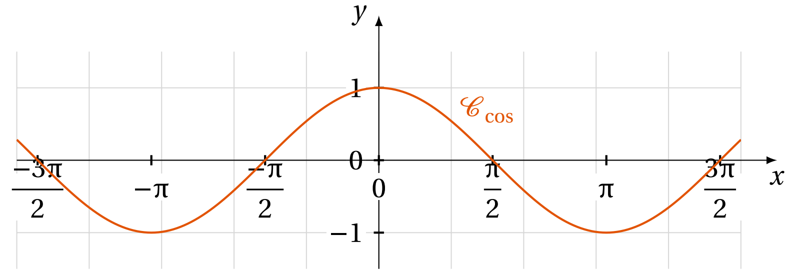
Il est possible de démontrer la seconde avec la première à l'aide de formules de trigonométries (duplication) : en effet, on sait que pour tout $h\in\mathbb{R}$:

$$\cos(h)=1-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\implies\frac{1-\cos(h)}{h}=\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$

On peut ensuite conclure par composition des limites (puisque $h/2\xrightarrow{h\longrightarrow 0}0$). Commençons à présent l'étude des fonctions trigonométriques par le cosinus.

Définition/Proposition 16 | Fonction cosinus

- **[Définition]** $\cos\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\cos(x)\end{array}\right.$
- **[Principales propriétés]** cos est 2π-périodique et paire.
- **[Dérivée]** cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos'(x)=-\sin(x).$$
- **[Limites]** La fonction cosinus n'admet pas de limite en $\pm\infty$, et
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$



3. se démontre à l'aide de considérations géométriques sur le cercle trigonométrique

Preuve **[Dérivabilité]** Soient $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}^\star$.

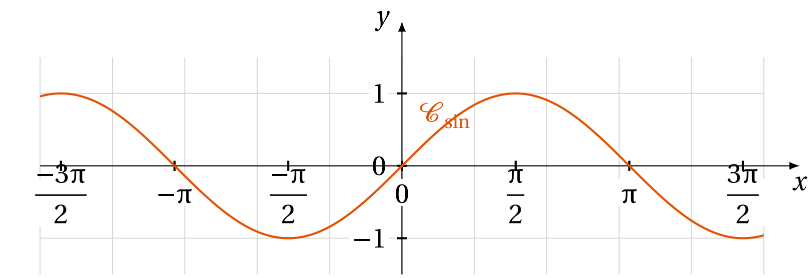
Exemple 53 Lorsqu'un pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale), il se met à osciller. La position d'un pendule simple est repérée par l'angle θ qu'il fait avec la verticale descendante. En l'absence de frottements et pour des petites oscillations, on a

$$\forall t\geqslant 0,\quad \theta(t)=\theta_0\sin(\omega_0 t)$$

où θ_0 repère la position initiale du pendule et ω_0 est la pulsation.

Définition/Proposition 17 | Fonction sinus

- **[Définition]** $\sin\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\ x&\longmapsto&\sin(x).\end{array}\right.$
- **[Principales propriétés]** sin est 2π-périodique et impaire.
- **[Dérivée]** sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin'(x)=\cos(x).$$
- **[Limites]** La fonction sinus n'admet pas de limite en $\pm\infty$,
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



Preuve **[Dérivabilité]** Procéder comme pour le cosinus.

Pour la tangente, on voit que le point semble être « envoyé vers $+\infty$ » lorsque x tend vers $+\dfrac{\pi}{2}$. Mathématiquement, cela sera traduit avec la notion de limite.

Définition/Proposition 18 | Fonction tangente

- **[Définition]**

$$\tan \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{\tan} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array} \right.$$

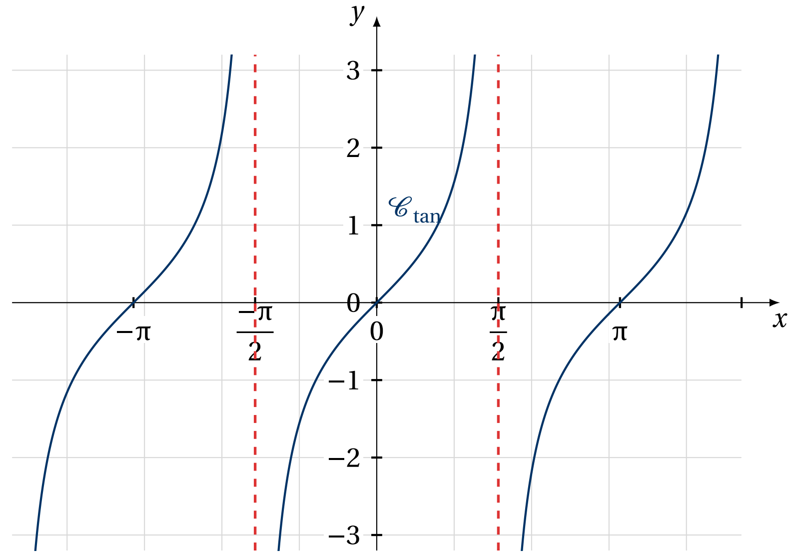
avec

$$\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- **[Principales propriétés]** tan est π-périodique et impaire.
- **[Dérivée]** tan est dérivable sur $\mathscr{D}_{\tan}$ et

$$\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\pi/2^+} \tan(x) = -\infty,$
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow \pi/2^-} \tan(x) = +\infty,$
  - **[Taux]** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1.$



Preuve

- **[Périodicité]**

- **[Imparité]**

- **[Taux]**

FORMULAIRE DE DÉRIVÉES

Dans les tableaux ci-dessous, x est une **variable** réelle et a une **constante** réelle. Ce tableau est encore partiel, il nous manque une fonction usuelle (arctan, que nous allons étudier dans le Chapitre (ALG) 6).

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'} \subset \mathscr{D}_f$
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a, \ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+\star}$ si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^\star$ si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0, \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi k \in \mathbb{Z}\right\}$

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode 1 (Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence)

- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparait peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

Méthode 2 (Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle) En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition.

Méthode 3 (Limite calculable par taux de variation) Si une expression est de la forme suivante, pour $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0, avec x_0 aux bords de I ou dans I, alors :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} f'(x_0).$$

En particulier, si f s'annule en x_0, on a :

$$\frac{f(x)}{x - x_0} \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} f'(x_0).$$

Méthode 4 (Limite d'un quotient de polynpomes) Pour déterminer la limite en $\pm\infty$ de :

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

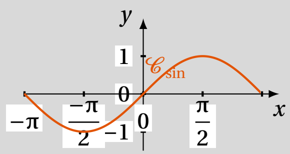
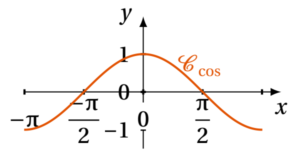
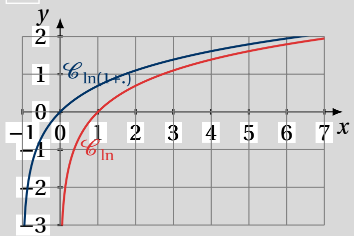
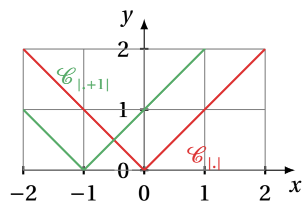
on factorise au numérateur par $a^n x^n$ et au dénominateur par $b_m x^m$ et on simplifie le quotient de ces deux termes en $\dfrac{a_n x^{n-m}}{b_m}$, avant de passer à la limite. On dit que l'on « met en facteur les monômes de plus haut degré ».

Méthode 5 (Expression conjuguée pour les F.I. avec racines) Pour calculer des limites d'expressions de la forme $\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}$ avec $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} u(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} v(x) = \infty$ le plus souvent polynomiale, on a souvent recours à à la technique de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{u(x)}-\sqrt{v(x)}=\frac{\left(\sqrt{u(x)}-\sqrt{v(x)}\right)\left(\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}\right)}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}}=\frac{u(x)-v(x)}{\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}}.$$

Sous cette forme, la limite n'est souvent plus indéterminée après avoir mis dans la racine les monômes les plus importants en facteur.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Si f est la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(x)=\sqrt{1-x}$ sur l'intervalle $]0,1[$, déterminer l'expression de sa dérivée sur $]0,1[$	*Soit* $x\in]0,1[$, $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$	
Allure de la représentation graphique de la fonction sin sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$		
Allure de la représentation graphique de la fonction cos sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$		
Allure des représentations graphiques des fonctions $x\longmapsto \ln(x)$ et $x\longmapsto \ln(1+x)$		
Allure des représentations graphiques des fonctions $x\longmapsto \lvert x\rvert$ et $x\longmapsto \lvert x+1\rvert$		
Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan	$\tan'=1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$ *sur* $\mathscr{D}_{\tan}$	*Savoir aussi qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition*

Équation de la tangente de la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a	*Si f est dérivable en a, elle admet pour tangente en a la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$*	
Dérivée d'une composée $f \circ g$	$(f \circ g)' = f' \circ g \times g'$ *si* $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}, f : \mathrm{K} \subset \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dérivables*	

6. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir déterminer certaines caractéristiques d'une fonction :
   - parité et périodicité . . . . ☐
   - monotonie avec la définition par manipulations d'encadrement . . . . ☐
2. Connaître la définition des limites :
   - connaître les limites usuelles et les croissances comparées . . . . ☐
   - savoir utiliser les théorèmes d'addition, multiplication, quotient de limites . . . . ☐
   - savoir calculer la limite d'une composée de fonction . . . . ☐
   - reconnaître les limites liées au taux d'accroissement . . . . ☐
3. Savoir lever les indéterminations classiques :
   - polynômes et fractions rationnelles . . . . ☐
   - fonctions avec des radicaux (expression conjuguée) . . . . ☐
4. Savoir appliquer les théorèmes d'existence de limites (théorème d'encadrement, de comparaison) . . . . ☐
5. Savoir déterminer le comportement asymptotique d'une fonction (limites, asymptotes) . . . . ☐
6. Savoir montrer qu'une fonction est continue par opérations (à l'aide de fonctions usuelles) . . . . ☐
7. Savoir montrer qu'une fonction est dérivable par opérations (à l'aide de fonctions usuelles) . . . . ☐
8. Savoir calculer des dérivées de somme, produit, quotient, ou composée . . . . ☐
9. Connaître les fonctions usuelles (variations, dérivées, limites, représentation graphique) :
   - fonctions affines et trinômes du second degré . . . . ☐
   - fonctions valeur absolue, racine carrée et inverse . . . . ☐
   - fonction partie entière . . . . ☐
   - fonctions ln, exp et puissances . . . . ☐
   - fonctions trigonométriques (cos, sin, tan) . . . . ☐
10. Savoir étudier complètement une fonction . . . . ☐

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

Exercice 1 | **Vrai ou Faux ?** [Solution] Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Toute fonction bornée sur $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$.
3. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en x_0.
4. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable :
   - si f est paire sur $\mathbb{R}$, alors f' est paire sur $\mathbb{R}$;
   - si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors f' est paire sur $\mathbb{R}$;
   - si f est périodique de période $T > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est aussi T-périodique.
5. Pour toutes fonctions f et g telles que :
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leqslant g(x) \implies \forall x \in [0,1], \quad f'(x) \leqslant g'(x).$$

Exercice 2 | **Propositions sur les fonctions** [Solution] Soit (f, g) deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier.

1. L'application f est croissante.
2. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geqslant 0$.
3. La fonction f est paire.
4. La fonction f ne s'annule jamais.
5. La fonction f est inférieure à la fonction g.
6. La fonction f est périodique.

6.1. Ensembles de définition

Exercice 3 | [Solution] Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$.

Exercice 4 | **Avec paramètre** [Solution] Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :
$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + m}.$$

Exercice 5 | **Composée** [Solution] Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ après avoir indiqué pour quels réels cela a un sens :

1. $f : x \longmapsto 2x^2 - x + 1$ et $g : x \longmapsto 2\sqrt{x-3}$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2 - 8}{x}$ et $g : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$.

6.2. Parité, imparité, périodicité, symétrie

Exercice 6 | [Solution] Dans chacun des cas suivants, étudier la parité et l'imparité de la fonction f. Indiquer aussi la périodicité lorsqu'elle est manifeste :

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$
2. $f(x) = x^2 + x^4 + x^6 + x^8$
3. $f(x) = x + x^3 + x^5 + 2x^7$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 + |x|}$
6. $f(x) = |x+1| - |x-1|$
7. $f(x) = \sin x + \cos x$
8. $f(x) = \cos x + \cos(2x)$

Exercice 7 | **Propriétés générales** [Solution] Montrer les résultats suivants.

1. La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
2. La composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.
3. La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
4. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

6.3. Calculs de limites

Exercice 8 | [Solution] Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2)\right)$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(e^{3x} - \ln x\right)$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (2x - \sin x)$

Exercice 9 | [Solution] Soit $f : x \longmapsto \dfrac{|x-3| - 2x}{4x - 6 - |x+3|}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier l'existence d'une limite en 3, d'une limite à droite en 3 et d'une limite à gauche en 3.

6.4. Calculs de dérivées

Exercice 10 | [Solution] Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées :

1. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f(x) = \sqrt{e^x}$
4. $f(x) = e^{x\cos(x)}$
5. $f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}$
7. $f(x) = \sin(\ln x)$
8. $f(x) = \ln(e^x + x^2)$
9. $f(x) = \dfrac{x-e^x}{e^x+1}$
10. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^4}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{2^{x+1}}$
13. $f(x) = (e^{2x}-1)^\pi$
14. $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4$
15. $f(x) = 2^{\ln x}$
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$
17. $f(x) = \ln(\ln x)$
18. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$
19. $f(x) = \dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}$

Exercice 11 | **Avec valeurs absolues** [Solution] Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis leur ensemble de dérivabilité, et calculer leur dérivée.

1. $f(x) = \dfrac{\ln\left(|x^2-1|\right)}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|e^x-1|+1}}$.

6.5. Fonctions usuelles & Études de fonctions

Exercice 12 | **Valeurs absolues** [Solution] On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto |2x-3|+|x-5|$, $g : x \longmapsto \left|2x^2-5\right| - \left|x^2-1\right|$.

Simplifier les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction des valeurs de x. En déduire les représentations graphiques de ces deux fonctions.

Exercice 13 | [Solution] Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1-x}{2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f, étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les limites de f aux bords de $\mathscr{D}_f$ et dresser son tableau de variations.
3. Étudier les asymptotes.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x = 1$.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = -1 - f(x)$. Donner une interprétation graphique.
6. Tracer la courbe représentative de f.
7. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et les déterminer. Que représentent ces solutions pour la courbe représentative de f ?

Exercice 14 | [Solution] Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$
2. Dresser le tableau des variations de f. On précisera ses limites aux bornes du domaine.
3. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (f(x)-(x+1))$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (f(x)-(x+1))$.
4. Tracer la courbe représentant f et placer sur le même graphique la droite d'équation $y = x+1$.
5. Montrer que la courbe représentant f admet le point de coordonnées $(1,2)$ comme centre de symétrie.

Exercice 15 | [Solution] Étude complète de la fonction : $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x^2}}{x}$.

Exercice 16 | [Solution] Soit la fonction h définie par :
$$h(x) = x\exp|\ln|x||.$$

1. Donner l'ensemble de définition de h.
2. Représenter graphiquement la fonction h.

Exercice 17 | **Fonctions trigonométriques** [Solution] Soit f une fonction définie par :
$$f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est π périodique, paire et que : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = f(x)$. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?

3. Montrer soigneusement que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.

Exercice 18 | **Fonctions trigonométriques** [Solution] Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 3\cos x - \cos(3x).$$

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$. Déterminer les abscisses pour lesquelles la tangente est horizontale.
5. Représenter f sur l'intervalle $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1. $\boxed{\text{VRAI.}}$ La fonction f est au moins dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de telles fonctions.
On étudie la dérivabilité de f en 0 à l'aide du taux d'accroissement. Pour tout $x>0$,
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\sqrt{x}-0\sqrt{0}}{x}=\frac{x\sqrt{x}}{x}=\sqrt{x},$$
donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. La fonction f est alors dérivable en 0 et $f'(0)=0$. Ainsi :
$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$$
2. $\boxed{\text{FAUX.}}$ Considérer par exemple la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\lfloor x\rfloor$. La fonction f est bien bornée (minorée par 0, majorée par 1) mais non continue en 1 (puisque : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=0$ et $f(1)=1$).
3. $\boxed{\text{FAUX.}}$ Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais non dérivable en 0.
4.
   - $\boxed{\text{FAUX.}}$ Considérer par exemple f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Cette fonction est paire et a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=2x$, une fonction impaire.
   - $\boxed{\text{VRAI.}}$ Supposons f paire : pour tout nombre réel x, $f(-x)=-f(x)$. En dérivant par rapport à x des deux côtes de l'égalité (si deux fonctions sont égales alors elles ont même dérivée), on obtient : $\forall x\in\mathbb{R}, -f'(-x)=-f'(x)$ (où on a dérivé l'expression de gauche comme une composée). D'où : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(-x)=f'(x)$. On en déduit que f' est paire sur $\mathbb{R}$.
   - $\boxed{\text{VRAI.}}$ Supposons f périodique de période T, où $T>0$. On a ainsi : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+T)=f(x)$. En dérivant par rapport à x des deux côtes de l'égalité, on obtient bien : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x+T)=f'(x)$.
5. $\boxed{\text{FAUX.}}$ Considérons par exemple les fonctions f et g définies respectivement sur $[0,1]$ par $f(x)=2x$ et $g(x)=x+4$. On peut vérifier que pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)\leqslant g(x)$ et $f'(x)>g'(x)$.

Solution (exercice 2) [Énoncé] Étude de chaque propriété :

1. $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2\ (a\leqslant b \Longrightarrow f(a)\leqslant f(b))$
Négation : $\exists (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a\leqslant b$ et $f(a)>f(b)$.
2. $\exists x\in\mathbb{R}^+, f(x)\geqslant 0$
Négation : $\forall x\in\mathbb{R}^+, f(x)<0$.
3. $\forall x\in\mathbb{R}, f(-x)=f(x)$
Négation : $\exists x\in\mathbb{R}, f(-x)\neq f(x)$.
4. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 0$
Négation : $\exists x\in\mathbb{R}, f(x)=0$.
5. $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\leqslant g(x)$
Négation : $\exists x\in\mathbb{R}, f(x)>g(x)$.
6. $\exists T\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, f(x+T)=f(x)$
Négation : $\forall T\in\mathbb{R}, \exists x\in\mathbb{R}, f(x+T)\neq f(x)$.

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. $x\in\mathscr{D}_f \iff x^3\geqslant 0 \iff x\geqslant 0$ d'après le graphe de la fonction cube. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^+}$.
2. $x\in\mathscr{D}_f \iff \begin{cases} x\neq 0\\ x-\frac{1}{x}\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases} x\neq 0\\ \frac{x^2-1}{x}\neq 0\end{cases} \iff x\notin\{-1,0,1\}$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}}$.
3. $x\in\mathscr{D}_f \iff \begin{cases} x-3\geqslant 0\\ 5+x\geqslant 0\\ x\neq 0\end{cases}$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathscr{D}_f=[3,+\infty[}$.
4. $x\in\mathscr{D}_f \iff \begin{cases} \frac{e^x+1}{e^x-1}>0\\ e^x-1\neq 0\end{cases}$. Comme le numérateur est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs, on a :
$$\frac{e^x+1}{e^x-1}>0 \iff e^x-1>0 \iff x>0.$$
Donc : $\boxed{\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^{+\star}}$.
5. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{2-x}{x+4}>0$ et $x+4\neq 0$ (faire un tableau de signe). Donc $\boxed{\mathscr{D}_f=]-4,2[}$.

Solution (exercice 4) [Énoncé] La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2-(m+1)x+m\geqslant 0$. Le discriminant donne : $\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2$.

- Cas 1 : si $m=1$: On obtient alors $\Delta=0$ et ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $x^2-(m+1)x+m\geqslant 0$. Ainsi : $\boxed{\mathscr{D}_{m=1}=\mathbb{R}}$.
- Cas 2 : si $m\neq 1$: On obtient alors $\Delta>0$ et les deux racines distinctes sont alors : $\dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $\dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. Afin de calculer la valeur absolue, on doit encore distinguer deux cas :
  - Si $m>1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient ainsi : $\boxed{\mathscr{D}_{m>1}=]-\infty,1]\cup[m,+\infty[}$.
  - Si $m<1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient ainsi : $\boxed{\mathscr{D}_{m<1}=]-\infty,m]\cup[1,+\infty[}$.

Solution (exercice 5) [Énoncé]

1. • Étude de $f \circ g$:

◇ Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_g$ et $g(x) \in \mathscr{D}_f$. Comme $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_g$, à savoir si et seulement si $x - 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathscr{D}_{f\circ g} = [3, +\infty[}$.

◇ Expression : Pour tout $x \geqslant 3$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2(g(x))^2 - (g(x)) + 1 = 8(x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1 = 8x - 23 - 2\sqrt{x-3}$.

• Étude de $g \circ f$:

◇ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_f$ et $f(x) \in \mathscr{D}_g$. Comme $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $f(x) \in \mathscr{D}_g$, à savoir si et seulement si $f(x) - 3 \geqslant 0 \iff 2x^2 - x - 2 \geqslant 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 17$ et les deux racines sont $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathscr{D}_{g\circ f} = \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[}$.

◇ Expression : Pour tout $x \in \mathscr{D}_{g\circ f}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sqrt{2x^2 - x - 2}$.

2. • Étude de $f \circ g$:

◇ Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_g$ et $g(x) \in \mathscr{D}_f$. Comme $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathscr{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $g(x) \neq 0$. On a : $g(x) \neq 0 \iff \dfrac{x^2+1}{x} \neq 0 \iff x^2 + 1 \neq 0$: toujours vrai. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}^\star}$.

◇ Expression : Pour tout $x \neq 0$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = \dfrac{2(g(x))^2 - 8}{g(x)} = \dfrac{2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 8}{\frac{x^2+1}{x}} = \dfrac{2(x^2+1)^2 - 8x^2}{x^2} \times \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{2x^4 - 4x^2 + 2}{x(x^2+1)}$.

• Étude de $g \circ f$:

◇ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_f$ et $f(x) \in \mathscr{D}_g$. Comme $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathscr{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. On a : $f(x) \neq 0 \iff 2x^2 - 8 \neq 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_{g\circ f} = \mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 0, 2\}}$.

◇ Expression : Soit $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 0, 2\}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = f(x) + \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{2x^2-8}{x} + \dfrac{x}{2x^2-8} = \dfrac{4x^4 - 31x^2 + 64}{x(2x^2-8)}$.

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. • Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x^2 \geqslant 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

• Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f(-x) = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = f(x)$. Donc la fonction f est paire.

2. • Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

• Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0 et : $\forall x \in \mathscr{D}_f : f(-x) = (-x)^2 + (-x)^4 + (-x)^6 + (-x)^8 = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 = f(x)$. Donc la fonction f est paire.

3. • Domaine de définition : la fonction f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

• Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -x + (-x)^3 + (-x)^5 + 2(-x)^7 = -x - x^3 - x^5 - 2x^7 = -(x + x^3 + x^5 + 2x^7) = -f(x)$ Donc la fonction f est impaire.

4. • Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\dfrac{1-|x|}{2-|x|} \geqslant 0$ et $2 - |x| \neq 0$. Comme il y a une valeur absolue, on fait des cas :

◇ Si $x \geqslant 0$: on doit résoudre : $\dfrac{1-x}{2-x} \geqslant 0$. Un tableau de signe en prenant en compte le fait que $x \geqslant 0$ donne : $x \in [0,1] \cup]2, +\infty[$.

◇ Si $x < 0$: on doit résoudre : $\dfrac{1+x}{2+x} \geqslant 0$. Un tableau de signe en prenant en compte le fait que $x < 0$ donne : $x \in]-\infty, -2[\cup [-1, 0]$.

Ainsi, on obtient $\mathscr{D}_f =]-\infty, -2[\cup [-1, 1] \cup]2; +\infty[$.

• Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f(-x) = \sqrt{\dfrac{1-|-x|}{2-|-x|}} = \sqrt{\dfrac{1-|x|}{2-|x|}} = f(x)$ car $|-x| = |-1| \times |x| = |x|$. Donc la fonction f est paire.

5. • Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 + |x| \neq 0$. Or cette expression est toujours positive, comme somme de termes positif, et s'annule uniquement si les deux termes s'annule, c'est-à-dire si et seulement si $x = 0$. Ainsi, on obtient $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

• Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f : f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3x}{(-x)^2 + |-x|} = \dfrac{-x^3 - 3x}{x^2 + |x|} = -f(x)$. Donc la fonction f est impaire.

6. • Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

• Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f : f(-x) = |-x+1| - |-x-1| = |-(x-1)| - |-(x+1)| = |-1||x-1| - |-1||x+1| = |x-1| - |x+1| = -(|x+1| - |x-1|) = -f(x)$. Donc la fonction f est impaire.

7. • Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

- Étude de la parité : pas de parité : la fonction f n'est ni paire, ni impaire.
- Étude de la périodicité : $\forall x \in \mathscr{D}_f$, $x+2\pi \in \mathscr{D}_f$ et $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité des fonctions sinus et cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.

8.
- Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
- Étude de la parité : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$: $f(-x) = \cos(-x) + \cos(-2x) = \cos x + \cos 2x = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire. Donc la fonction f est paire.
- Étude de la périodicité : $\forall x \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $x+2\pi \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \cos(2(x+2\pi)) = \cos x + \cos(2x+4\pi) = \cos(x) + \cos(2x) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.

Solution (exercice 7) [Énoncé] On considère deux fonctions f et g toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f \circ g$ est impaire.
- $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est elle aussi impaire, on obtient : $f[-g(x)] = -f[g(x)] = -f \circ g(x)$. Ainsi : $f \circ g(-x) = -f \circ g(x)$.

Donc $f \circ g$ est impaire et on a bien montré que :

$$\boxed{\text{la composée de deux fonctions impaires est impaire.}}$$

2. On suppose par exemple que f est paire et que g est impaire. Montrons que $f \circ g$ est paire.
- $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est paire, on obtient : $f[-g(x)] = f[g(x)] = f \circ g(x)$. Ainsi : $f \circ g(-x) = f \circ g(x)$.

Donc $f \circ g$ est paire et on a bien montré que :

$$\boxed{\text{la composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est paire}}.$$

3. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f+g$ est impaire :
- $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$: $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f+g)(-x) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x)$.

Donc $f+g$ est impaire et on a bien montré que $\boxed{\text{la somme de deux fonctions impaires est impaire.}}$

4. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f \times g$ est paire :
- $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
- Soit $x \in \mathbb{R}$: $(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times (-g(x))$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f \times g)(-x) = f(x) \times g(x) = (f \times g)(x)$.

Donc $f \times g$ est paire et on a bien montré que :

$$\boxed{\text{le produit de deux fonctions impaires est paire}}.$$

Solution (exercice 8) [Énoncé]

1. Notons que pour $x \neq 2$:
$$\frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x+1.$$
Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3.}$

2. Pour la limite $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{x-2}$:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x(1-\frac{2}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{1-\frac{2}{x}} = \boxed{\infty}.$$

3. Pour la limite $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2)\right)$:
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4x+3} - (x+2) &= \frac{(x^2+4x+3)-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)} \\ &= \frac{(x^2+4x+3)-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)} \\ &\xrightarrow{x\to\infty} \boxed{0}.\end{aligned}$$

4. Pour la limite $\lim_{x\to+\infty} (e^{3x} - \ln x)$, on utilise des croissances comparées :
$$\lim_{x\to+\infty} (e^{3x} - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} e^{3x}(1 - \ln x e^{-3x}).$$
Or, par croissances comparées, $1 - \ln x e^{-3x} \xrightarrow{x\to\infty} 1$. Ainsi,
$$\lim_{x\to+\infty} (e^{3x} - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} e^{3x} = \boxed{+\infty}.$$

5. Pour la limite $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sin x)$, on peut encadrer.

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad -1\leqslant \sin x\leqslant 1 \implies 2x-1\leqslant 2x-\sin x\leqslant 2x+1.$$

Or, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(2x-1)=+\infty$ donc par divergence par minoration, on a :

$\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(2x-\sin x)=+\infty.}$

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. - Si $x\leq -3, f(x)=\dfrac{3-4x}{5x-3}$: ce quotient a une valeur interdite, $\dfrac{3}{5}$, mais celle-ci n'est pas inférieure ou égale à -3.
   - Si $-3<x<3, f(x)=\dfrac{3-4x}{3x-9}$: ce quotient a une valeur interdite, 3, mais celle-ci n'est pas strictement inférieure à 3.
   - Si $x\geqslant 3, f(x)=\dfrac{-(x+3)}{3x-9}$: ce quotient a une valeur interdite, 3 , qui est bien supérieure ou égale à 3.

   On en déduit que le domaine de définition de f est $\boxed{\mathbb{R}\backslash\{3\}}$.
2. - $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{-(x+3)}{3x-9}=-\infty$ par quotient car $3x-9\geqslant 0$.
   - $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3-4x}{3x-9}=+\infty$ par quotient car $3x-9\leqslant 0$.

Donc les limites à gauche et à droite en 3 existent, mais comme elles ne sont pas égales, $\boxed{f \text{ n'admet pas de limite en } 3}$.

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x\neq 0$. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^\star$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée et produit de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}(2x+1).}$
2. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est définie si et seulement si $x^2+1\geqslant 0$ et $\sqrt{x^2+1}\neq 0$. Ainsi elle est bien définie si et seulement si $x^2+1>0$ ce qui est toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et car $x^2+1>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
   $$f'(x)=\frac{\cos x\sqrt{x^2+1}-\sin x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}=\frac{(x^2+1)\cos x-x\sin x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$
3. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est définie si et seulement si $e^x\geqslant 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** Comme pour tout $x\in\mathbb{R}$: $e^x>0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}}$.
4. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x)=[\cos(x)-x\sin(x)]\,e^{x\cos x}.}$
5. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x-x^2\geqslant 0$. C'est un polynôme de deré 2 dont les racies sont 0 et 1. Donc $\mathcal{D}_f=[0,1]$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable si $x-x^2>0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme somme, coposée et produti de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x\in]0,1[$, on a : $\boxed{f'(x)=\left[\dfrac{(1-x)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}}-1\right]e^{\sqrt{x-x^2}}.}$
6. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $2+\cos(5x)\neq 0 \iff \cos(5x)\neq -2$: impossible car un cosinus est toujours compris entre -1 et 1. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme produit, composée, somme et quotient de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a :
   $$f'(x)=\frac{\sin^2(2x)}{(2+\cos(x))^2}\times[12\cos(2x)+6\cos(2x)\cos(5x)+5\sin(2x)\sin(5x)].$$
7. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x>0$. Donc $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^{+\star}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x)=\dfrac{\cos(\ln x)}{x}.}$
8. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est définie si et seulement si $e^x+x^2>0$: toujours vrai comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x + 2x}{e^x + x^2}$.

9.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $e^x + 1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes tous les deux strictement positifs, une exponentielle étant toujours strictement positive. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1 - xe^x}{(e^x+1)^2}}$.

10.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}} > 0$. Comme une racine carrée est toujours positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $x + 2 > 0$. La première condition est un polynôme de degré 2 dont les racines sont $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$. Donc $\mathscr{D}_f = \left]-2, -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ (car ce qui est sous la racine est déjà strictement positif) comme produit, sommes, composées et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2(9x+2)}{(x+2)(9x^2-4)}}$.

11.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos^4(x) \neq 0 \iff \cos x \neq 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{4\sin(x)}{(\cos(x))^5}}$.

12.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $2^{x+1} \neq 0 \iff e^{(x+1)\ln 2} \neq 0$: toujours vrai car une exponentielle est toujours strictement positive. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit, composée et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-\ln 2}{2^{x+1}}}$. On peut pour cela remarquer que $f(x) = e^{-(x+1)\ln 2}$.

13.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $e^{2x} - 1 > 0$ car on a : $(e^{2x}-1)^\pi = e^{\pi \ln(e^{2x}-1)}$. Or $e^{2x} - 1 > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff x > 0$ par passage au logarithme népérien qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée, somme et produit de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{2\pi e^{2x}}{e^{2x}-1}(e^{2x}-1)^\pi}$.

14.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 + 3x \geqslant 0$ et $3^x = e^{x\ln 3} \neq 0$. La deuxième condition est toujours vérifiée car une exponentielle est toujours strictement positive. Pour la première condition, on reconnaît un polynôme de degré 2 dont les racines sont 0 et -3. Donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$ car on doit avoir $x^2 + 3x > 0$ puis comme sommes, produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{2(x^2+3x)}{3^{4x}}[2x + 3 - 2(x^2+3x)\ln 3]}$.

15.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ en écrivant que $2^{\ln x} = e^{\ln(x)\ln 2}$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x} 2^{\ln x}}$.

16.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$, $\ln x \geqslant 0$ et $x \neq 0$. La deuxième condition donne : $\ln x \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$. Donc $\mathscr{D}_f = [1, +\infty[$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir $\ln x > 0$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{2x^2\sqrt{\ln x}}}$.

17.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) > 0$. Or on a : $\ln(x) > 0 \iff x > 1$. Donc $\mathscr{D}_f =]1, +\infty[$.
- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}}$.

18.
- **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{x^2-1} + x > 0 \iff \sqrt{x^2-1} > -x$ et $x^2 - 1 \geqslant 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On doit donc étudier deux cas afin de résoudre la première inéquation :
  - ◇ Si $x \geqslant 1$, alors $-x \leqslant -1$ et l'inéquation est toujours vérifiée car une ra-

cine carrée est toujours supérieure à un nombre négatif.

◇ Si $x \leqslant -1$ alors $-x \geqslant 1$ et on peut donc passer au carrée tout en conservant l'équivalence, la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors : $\sqrt{x^2-1} > -x \iff x^2-1 > x^2 \iff -1 > 0$. Toujours faux.

Donc $\mathscr{D}_f = [1, +\infty[$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir en plus $x^2-1>0$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$.

19. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} \neq 0$. La deuxième inéquation est toujours vérifiée, une exponentielle étant toujours strictement négative. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$ (on commence par écrire que : $\dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x} = \dfrac{\cos(x)e^{(x-1)\ln(3)}}{\mathrm{e}^{x\ln x}}$).

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{(x-1)\ln(3)}}{x^x} \times [-\sin(x) + \ln(3)\cos(x) - \cos(x)(\ln(x)+1)].$$

Solution (exercice 11) [Énoncé]

1. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $|x^2-1| > 0$ et $x \neq 0$. Or une valeur absolue est toujours positive ou nulle donc on a : $|x^2-1| > 0 \iff x^2-1 \neq 0 \iff x \notin \{-1,1\}$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme somme, composée et quotient de fonctions dérivables (il y a une valeur absolue mais on a bien $x^2-1 \neq 0$ sur $\mathscr{D}_f$ donc le domaine de dérivabilité est bien égal au domaine de définition).
- **[Dérivée]** Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1	
$f(x)$		$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	‖	$\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$	‖	$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	

On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

◇ Si $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$: on a alors $f'(x) = \dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$.

◇ Si $x \in]-1,0[\cup]0,1[$: on a alors $f'(x) = \dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(1-x^2)}{x^2(x^2-1)}$.

On peut remarquer que l'on peut regrouper ces deux cas en une formule générale en utilisant de nouveau la valeur absolue et on obtient : $\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln|x^2-1|}{x^2(x^2-1)}}$.

2. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $|\mathrm{e}^x-1|+1>0$: toujours vrai comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif car $1>0$ et une valeur absolue est toujours positive ou nulle. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable si et seulement si $x \in \mathscr{D}_f$ et $\mathrm{e}^x-1 \neq 0$ (à cause de la présence de la valeur absolue). Or on a : $\mathrm{e}^x-1 \neq 0 \iff x \neq 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme composée et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert\mathrm{e}^x-1\rvert$		$1-\mathrm{e}^x$	0	e^x-1	
$f(x)$		$\dfrac{x}{\sqrt{2-\mathrm{e}^x}}$	‖	$\dfrac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^x}}$	

On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

◇ $\boxed{\text{Si } x \in]-\infty, 0[\text{ : on a alors } f'(x) = \dfrac{4-2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x}{2(2-\mathrm{e}^x)\sqrt{2-\mathrm{e}^x}}.}$

◇ $\boxed{\text{Si } x \in]0, +\infty[\text{ : on a alors } f'(x) = \dfrac{2-x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}.}$

Solution (exercice 12) [Énoncé]

1. Étude de f : on fait un tableau donnant les valeurs de f selon la valeur de x :

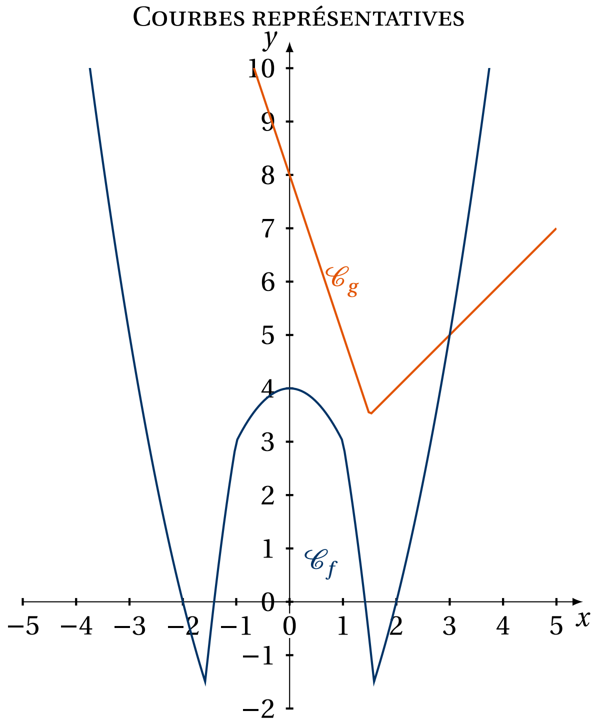
x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$		$-2x+3$	0	$2x-3$		$2x-3$	
$\lvert x-5\rvert$		$-x+5$		$-x+5$	0	$x-5$	
$f(x)$		$-3x+8$		$x+2$		$3x-8$	

On peut alors tracer la fonction qui correspond à 3 bouts de droite, qui se rejoignent en $\frac{3}{2}$ et en 5.

2. Étude de g : On fait de même pour la fonction g :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5/2}$		-1		1		$\sqrt{5/2}$		$+\infty$
$\lvert 2x^2-5\rvert$		$2x^2-5$	0	$5-2x^2$		$5-2x^2$		$5-2x^2$	0	$2x^2-5$	
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1		x^2-1	
$g(x)$		x^2-4		$-3x^2+6$		$-x^2+4$		$-3x^2+6$		x^2-4	

On peut alors tracer les fonctions.



Solution (exercice 13) [Énoncé]

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $2x \neq 0$ et ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2}$.

2.
- Limites en $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$ d'après le théorème des monomes de plus haut degré. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ au voisinage de $\pm\infty$.
- Limites en 0 : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les somme et quotient de limites. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{2}$

3. Déjà fait à la question précédente.

4. La fonction f est dérivable en 1 ainsi la tangente T_1 à la courbe au point d'abscisse 1 existe bien et son équation est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Les calculs donnent : $y = -\frac{1}{2}(x-1)$.

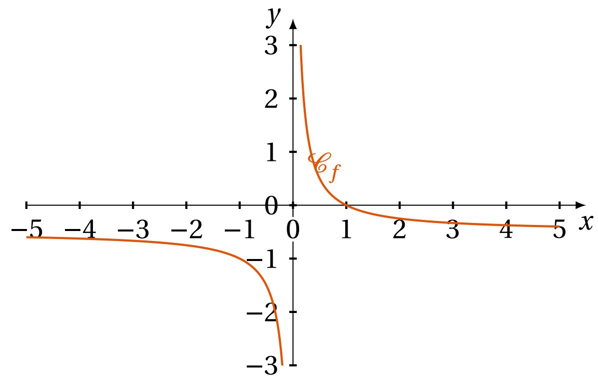
5.
- Le domaine de définition est bien centré en 0 car : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, -x \in \mathbb{R}^\star$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, on a : $f(-x) = \dfrac{x+1}{-2x} = -\dfrac{x+1}{2x}$ et $-1 - f(x) = \dfrac{-2x+x-1}{2x} = -\dfrac{x+1}{2x}$. Ainsi, on a bien : $f(-x) = -1 - f(x)$.

On cherche alors une symétrie s entre les points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$ sur le graphe de f, soit s telle que $(-x, f(-x)) = s(x, f(x))$. Pour cela, essayons de trouver quelles conditions doit vérifier $(x, f(x))$ pour que le point soit inchangé par la symétrie. Le point $(x, f(x))$ est un point fixe de s si on a $s(x, f(x)) = (x, f(x))$. Or $s(x, f(x)) = (-x, f(-x))$, donc on doit avoir :

$$\begin{cases} -x &= x \\ f(-x) &= f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x &= 0 \\ -1-f(x) &= f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x &= 0 \\ f(x) &= -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Le seul point fixe de la transformation est $\Omega\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$. On vérifie alors que l'on a bien : $\dfrac{x+(-x)}{2} = 0$ et $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = -\dfrac{1}{2}$, autrement dit que Ω est le milieu entre les points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$. On obtient alors que la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

6. Graphe de f :



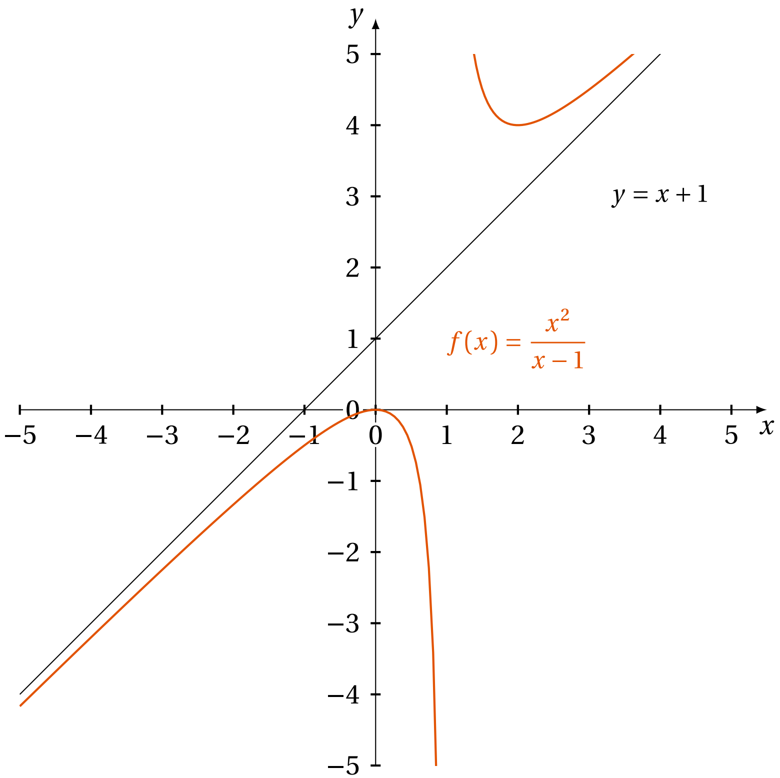
7. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$: $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \dfrac{-x+1-2x^2}{2x} = 0 \iff -2x^2 - x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 9$ et les deux racines sont -1 et $\dfrac{1}{2}$. Ces solutions correspondent aux abscisses des points fixes pour la fonction f.

Solution (exercice 14) [Énoncé]

1. Réduisons au même dénominateur : on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
$$\frac{ax(x-1) + b(x-1) + c}{x-1} = \frac{ax^2 + (b-a)x + (c-b)}{x-1}.$$
Par identification, on cherche a, b, c vérifiant :
$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-a &= 0 \\ c-b &= 0 \end{cases} \iff a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1.$$
Ainsi, on a :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}}.$$

2. Nous devons calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$
On obtient de-même en zéro. Ainsi :
$$\boxed{\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} (f(x) - (x+1)) = 0.}$$

3.



4. Il suffit de montrer que $f(2-x) = 2 - f(x)$, pour tout $x \neq 1$. Calculons :

$$f(2-x) = \frac{(2-x)^2}{2-x-1} = \frac{(2-x)^2}{1-x}.$$

Par ailleurs, on montre que $2 - f(x) = \dfrac{(2-x)^2}{1-x}$. Ainsi,

$$\boxed{\text{la courbe admet bien le point } (1,2) \text{ comme centre de symétrie.}}$$

Solution (exercice 15) Énoncé

- Domaine de définition : $x \in \mathscr{D}_f \iff x \neq 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
- La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ en quotient de telles fonctions à dénominateur non nul. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f'(x) = \frac{(2x)e^{x^2}x - e^{x^2}}{x^2} = \frac{e^{x^2}(2x^2-1)}{x^2}.$$

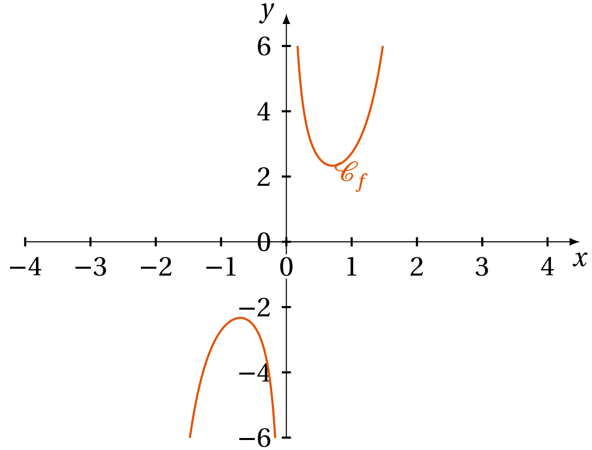
De plus, $2x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \dfrac{1}{2} \iff x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On déduit alors le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en zéro proviennent de règles usuelles, celles en $\pm\infty$ des croissances comparées.

- On peut maintenant tracer cette fonction.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Solution (exercice 16) Énoncé

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi on a : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star$.

2. On commence par donner l'expression de $f(x)$ selon les valeurs de x.

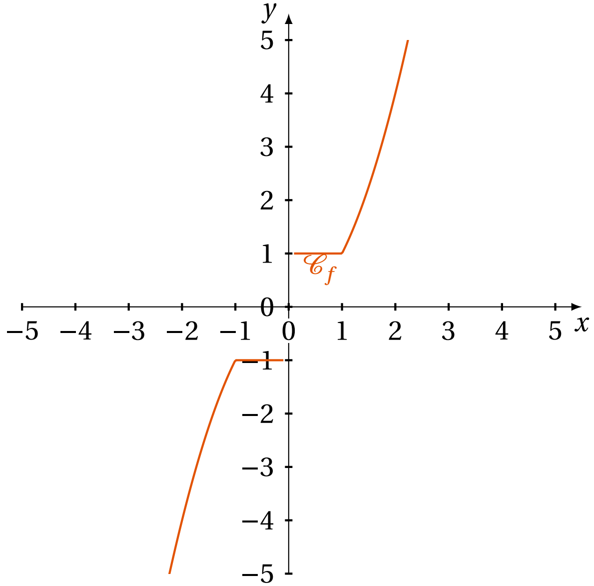
- Si $x > 0$, on a : $f(x) = xe^{|\ln x|}$. Il s'agit alors d'étudier le signe de $\ln x$.
  - ◇ Si $x \geqslant 1$, on obtient : $f(x) = xe^{\ln x} = x^2$.
  - ◇ Si $0 < x < 1$, on obtient : $f(x) = xe^{-\ln x} = xe^{\ln\frac{1}{x}} = x \times \dfrac{1}{x} = 1$.
- Si $x < 0$, on a : $f(x) = xe^{|\ln(-x)|}$. Là encore, il s'agit d'étudier le signe de $\ln(-x)$:
  - ◇ Si $-1 \leqslant x < 0$ alors $0 < -x \leqslant 1$ et on obtient : $f(x) = xe^{-\ln(-x)} = xe^{\ln\frac{-1}{x}} = x \times \dfrac{-1}{x} = -1$.
  - ◇ Si $x < -1$ alors $-x > 1$, on obtient : $f(x) = xe^{\ln(-x)} = -x^2$.

Ainsi, on obtient les valeurs suivantes pour f selon les valeurs de x :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-x^2$	-1	1	x^2	

On peut alors tracer la fonction :

Courbe représentative



Solution (exercice 17) [Énoncé]

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos x \sin x \neq 0$. Or on a : $\cos x \sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\quad x = k\pi$. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Réduction d'intervalle :

- Montrons que f est π périodique : pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a bien $x + \pi \in \mathscr{D}_f$ et $f(x+\pi) = \ln|\cos(x+\pi)\sin(x+\pi)| = \ln|-\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$. Ainsi la fonction f est π périodique et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
- Montrons que f est paire : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f(-x) = \ln|\cos(-x)\sin(-x)| = \ln|\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire et le fait que $|-1| = 1$. Ainsi la fonction f est paire et on peut restreindre l'étude à $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- Soit $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| = \ln|\sin x \cos x| = f(x)$ en utilisant le formulaire de trigonométrie.
  On peut faire un dessin pour s'en rendre compte mais une telle égalité signifie que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie pour la courbe.
  Ainsi on peut étudier la fonction sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis faire la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$ pour obtenir la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

3. La fonction $x \longmapsto \cos x \sin x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme produit de fonctions dérivables. De plus, sur cet ensemble, cette fonction ne s'annule pas. Comme la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on obtient que $x \longmapsto |\cos x \sin x|$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition. Comme sur cet intervalle, la fonction est à valeurs strictement positives et que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, f est bien dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition.

De plus, en étudiant des cas, on sait que $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ si u dérivable. Ainsi ici on obtient que : $f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\cos(2x)}{\cos x \sin x}$.

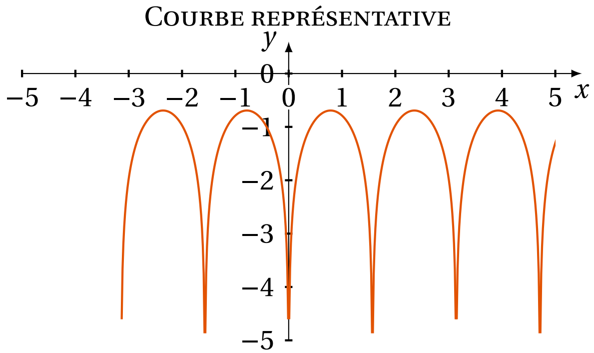
Sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ et $\cos(2x) \geqslant 0$ car $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi on a : $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$-\ln 2$

En effet : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les produit et composées de limites.

4. Graphe de f :

COURBE REPRÉSENTATIVE



Solution (exercice 18) [Énoncé]

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

- Étude de la parité : $\mathbb{R}$ est centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 3\cos(-x) - \cos(-3x) = 3\cos x - \cos(3x)$ car la fonction f est paire. Ainsi $f(-x) = f(x)$, et la fonction f est paire.
- Étude de la périodicité : vérifions que la fonction est 2π périodique :
  - ◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.
  - ◇ Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3(x+2\pi)) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3x+6\pi) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus.

  Ainsi la fonction f est 2π périodique.

Par 2π périodicité, on peut restreindre l'étude à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. Puis par parité, on peut restreindre l'intervalle à $[0, \pi]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ sera alors obtenue par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -3\sin x + 3\sin(3x) = -3(\sin x - \sin(3x)) = -3 \times 2\cos(2x)\sin(-x) = 6\cos(2x)\sin(x)$ en utilisant une formule de trigonométrie et le fait que la fonction sinus est impaire.

3. étude du signe de f' sur $[0, \pi]$:
Sur $[0, \pi]$, on a : $\sin(x) \geqslant 0$ et ainsi le signe de f' ne dépend que du signe de $\cos(2x)$. On a : $\cos(2x) \geqslant 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + k\pi$. En faisant un cercle trigonométrique, on remarque que sur $[0, \pi]$, on obtient : $\cos(2x) \geqslant 0 \iff x \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$. On obtient ainsi le tableau des variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	-2

4.
- La fonction f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ existe bien et son équation est : $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. On obtient ainsi : $y = -6\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$. On obtient donc : $f'(x) = 0 \iff \cos(2x) = 0$ ou $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\quad x = k\pi$.

5. Graphe de f :