Chapitre # (AN) 1 Fonctions

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm LEIBNIZ *en 1673 dans un manuscrit inédit « La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions ».*

— **Le saviez-vous ?**

Jeune, en mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.

— **J. VON NEUMANN**

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est la présentation de généralités sur les fonctions, déjà évoquées dans les classes de lycée (définition, monotonie, parité, *etc.*). Nous développerons la notion de limite de manière plus rigoureuse dans un futur chapitre. Ensuite, nous nous intéresserons aux principales fonctions usuelles à connaître. Des compléments sur la continuité et la dérivabilité seront faits dans le Chapitre (AN) 5 : l'objectif de ce chapitre est pour le moment de savoir faire des études de fonctions de manière efficace, donc un aspect pratique.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Remarque 1 Tous les exemples de ce chapitre font appel aux fonctions usuelles vues au lycée. En cas de besoin, vous pouvez consulter par anticipation la dernière section du chapitre : la Section 4.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions, opérations de base

Définition 1 | Fonction entre deux ensembles

Soient E, F deux ensembles non vides.

- Une *fonction de* E *dans* F est un processus qui associe à chaque élément x de E au plus un élément y de F (donc soit 0 élément, soit 1 élément). On dit que E est l'*ensemble de départ* de f et que F est l'ensemble d'arrivée de f.
- Lorsque $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : E \longrightarrow F$ est une *fonction numérique*.
- On appelle *ensemble de définition* de la fonction $f : E \longrightarrow F$ l'ensemble noté $\mathscr{D}_f \subset E$ pour lequel f associe une image, c'est-à-dire :
$$\mathscr{D}_f = \{x \in E \mid \exists y \in F, y = f(x)\}.$$
Lorsque $\mathscr{D}_f = E$, c'est-à-dire lorsque l'on peut associer à tout élément de E un élément dans F, alors on dit que f est une *application*.

Remarque 2

- La différence entre les fonctions et les applications est ténue, on ne vous en voudra pas de confondre les deux.
- Les applications seront plus généralement étudiées dans le Chapitre (ALG) 5.
- Si $f : E \longrightarrow F$, alors f est aussi une fonction de $\mathscr{D}_f$ dans F (dans ce cas, elle associe un élément à tous ceux de l'ensemble de départ). Dans la pratique,

écrira plutôt

$$f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathrm{F}, \quad \text{plutôt que } f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}.$$

Par exemple, privilégier

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right., \quad \text{plutôt que :} \quad f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array} \right.$$

Cadre

Dans toute la suite, nous ne considèrerons que des fonctions numériques, même lorsque cela n'est pas précisé.

Définition 2 | Image d'un élément, Image d'une fonction

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $x \in \mathscr{D}_f$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. On dit que y est ***l'****image* de x par f et que x est **un** *antécédent de y par f*.
- On appelle *image de f* l'ensemble $f(\mathscr{D}_f)$ défini par :
  $$f\left(\mathscr{D}_f\right) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}.$$
  Si $\mathrm{A} \subset \mathscr{D}_f$, on appelle *image de* A *par f* l'ensemble $f(\mathrm{A})$ défini par :
  $$f(\mathrm{A}) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{A}\}.$$
  C'est donc l'ensemble des images des éléments de A.
- Soit $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}$. On dit que f est à valeurs dans B si $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathrm{B}$, c'est-à-dire :
  $$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \in \mathrm{B}.$$

Attention

Être « à valeurs dans B » ne signifie par « prendre toutes les valeurs de B ». Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ mais n'atteint pas les éléments de $[0, 1[$ car $x^2 + 1 \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Concrètement, pour calculer des images d'intervalles, nous utiliserons le plus souvent des tableaux de variations en plus d'une hypothèse de continuité. Ce sera fait plus tard.

Définition 3 | Graphe

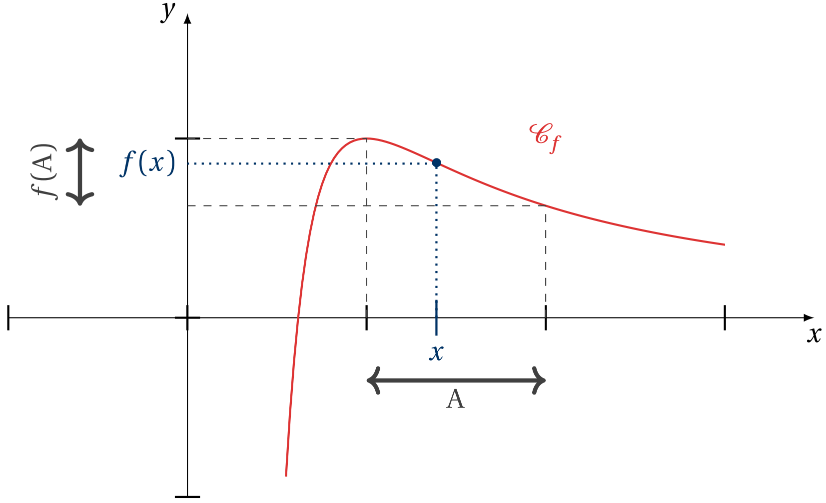
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle *graphe de f* ou *courbe représentative de f* le sous ensemble noté $\mathscr{C}_f$ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathscr{C}_f = \left\{(x, f(x)) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}.$$

De manière équivalente, on a pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x).$$

COURBE REPRÉSENTATIVE ET IMAGE



Attention

On prendre garde à ne pas confondre f et $f(x)$, qui sont des objets de natures très différentes.

Attention Nécessité de préciser l'ensemble de définition

Quand on définit une fonction réelle à valeurs réelles on **doit** donner son ensemble de définition. On n'écrit pas « Soit $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ » mais :

- « Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+2}{x-1}, \end{array} \right.$ »
- ou encore « Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :
  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$ ».

Exemple 1

1. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$. Préciser son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, $f(\mathscr{D}_f)$ sans justifier, et le(s) antécédent(s) de 2 par f.

2. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Préciser son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$, $f(\mathscr{D}_f)$ sans justifier, et le(s) antécédent(s) de 2 par f.

Maintenant que l'on connaît « l'objet fonction », on peut essayer de réaliser des opérations sur elles, on en définit alors plusieurs autres.

Définition 4 | Opérations

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions λf, $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{1}{f}$ par :

- **[Multiplication scalaire]** $\lambda f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \times f(x) \end{array} \right.$
- **[Somme]** $f+g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$
- **[Produit]** $f \times g \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right.$
- **[Inverse]** $\dfrac{1}{f} \left| \begin{array}{ccc} \left\{x \in \mathscr{D}_f \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array} \right.$ si $\left\{x \in \mathscr{D}_f \,\middle|\, f(x) \neq 0\right\} \neq \emptyset$.

Pour chacune des fonctions précédentes, on réalise l'opération « image par image », puisque « x par x » nous savons multiplier, additionner ... des nombres réels. Nous allons voir maintenant une opération un peu plus singulière. Par exemple, considérons la fonction $h : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^4$. On peut la voir comme

- le produit de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ avec elle-même, *i.e.* $h = f \times f$, puisque $x^4 = x^2.x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- mais aussi comme l'élévation au carré deux fois de suite, *i.e.* :
  $$h : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2.$$
  On note $h = f \circ f$ et on parle de « composée de f par f ».

Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 5 | Composition

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathscr{D}_g \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors si $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$, on définit la composée de f par g notée $g \circ f$ par : $g \circ f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)). \end{array} \right.$

On dira que :

- g est la *fonction extérieure* de la composée $g \circ f$,
- f est la *fonction intérieure* de la composée $g \circ f$.

Exemple 2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, et les écrire comme une composée.

- $h_1 : x \longmapsto \ln(x+3)$.
- $h_2 : x \longmapsto \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$,
- $h_3 : x \longmapsto \dfrac{1+e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}}$. *Pour la composée, l'une des deux fonctions sera la fonction racine carrée.*

Attention

Il est très important de vérifier la condition $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$, elle garantit que pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x)$ est bien dans le domaine de définition de g et donc que l'on peut lui appliquer g.

Remarque 3 On peut aussi omettre dans la définition la condition $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$, et indiquer en ensemble de départ (à supposer non vide) de $g \circ f$:

$$\mathscr{D}_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) \in \mathscr{D}_g\right\}.$$

Lorsque g est définie sur $\mathbb{R}$, la composée $g \circ f$ existe toujours. Par exemple, si $g = \exp$.

On représente souvent les composées avec des diagrammes comme ci-après.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Les propriétés algébriques de la composition (associativité par exemple) seront étudiées dans le Chapitre (ALG) 5 sur les applications. En revanche, on peut déjà préciser un point de vigilance.

Attention **La composition n'est pas commutative**

En règle générale, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple 3 On note $f : x \longmapsto x^2, g : x \longmapsto x^2 + 1$. Calculer $f \circ g, g \circ f$. Qu'en déduire?

1.2. Propriétés sur les fonctions

La plupart des fonctions usuelles apparaissant dans les prochains exemples sont connues depuis le lycée, mais elles seront revues en fin de chapitre.

Définition 6 | Périodicité

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Soit $\mathrm{T}\boxed{> 0}$. La fonction f est dite *périodique de période* T ou T-*périodique* si :
  - $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad x + \mathrm{T} \in \mathscr{D}_f$,
  - $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x+\mathrm{T}) = f(x)$.
- La fonction f est dite *périodique* s'il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que f soit T-périodique.

Remarque 4 Par récurrence évidente, on montre qu'alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(x + n\mathrm{T}) = f(x).$$

Cela permet de réduire le domaine d'étude d'une fonction à $\mathscr{D}_f \cap [0, \mathrm{T}]$, l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ pouvant être remplacé par n'importe quel autre intervalle de longueur T. Par exemple, si la fonction possède une parité (voir ci-après), il vaut mieux choisir : $\mathscr{D}_f \cap \left[-\frac{\mathrm{T}}{2}, \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$.

Attention

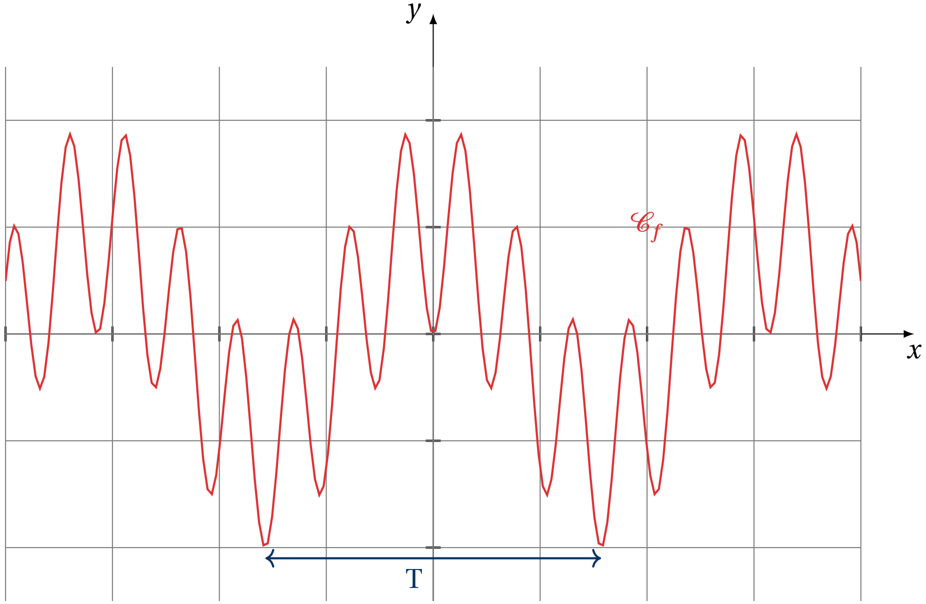
On ne dit pas « la » période mais **<u>une</u>** période. En effet, si T convient dans la définition précédente, c'est le cas aussi de $2\mathrm{T}, 3\mathrm{T}$ *etc.*. Certaines fonctions possèdent une « plus petite période », mais pas toutes. Par exemple, pour les fonctions constantes tous les réels strictement positifs sont des périodes, et $\mathbb{R}^{+\star}$ ne possède pas de minimum.

Géométriquement, cela signifie que dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, son graphe est invariant par la translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{i}$.

Attention **Non-unicité de la période**

Si f est T-périodique alors elle est également 2T-périodique, 3T-périodique, etc. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est nT-périodique.

Exemple 4 La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(3x) \end{array} \right.$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{3}$.



Graphe d'une fonction périodique

> ✎ *En effet, si* $x \in \mathbb{R}$ *on a bien* $x + \dfrac{2\pi}{3} \in \mathbb{R}$ *et*
> $$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos(3x + 2\pi) = \cos(3x) = f(x).$$

Définition 7 | Parité & Imparité

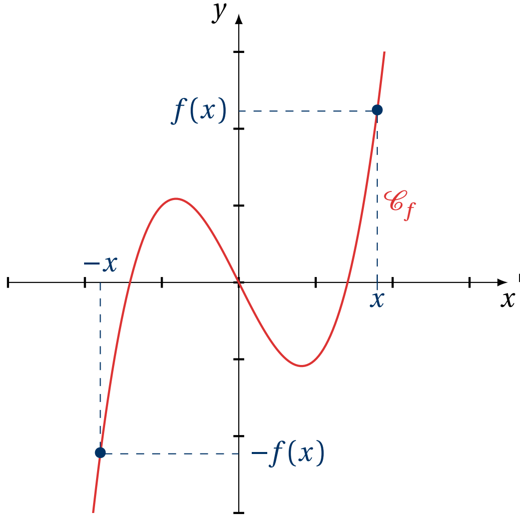
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. La fonction f est dite *paire* si :
   - $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$
   - $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$.
2. La fonction f est dite *impaire* si :
   - $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$
   - $\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$.

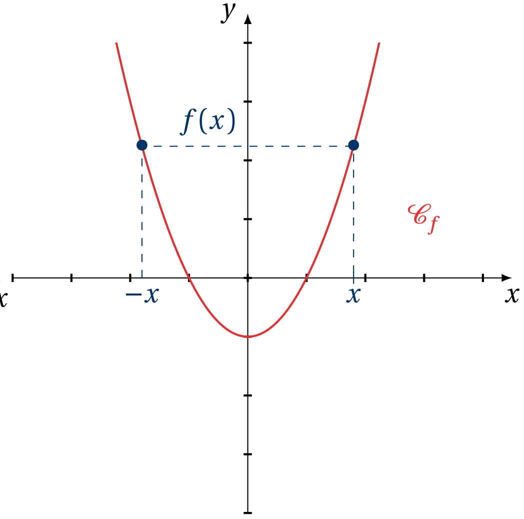
Géométriquement, la parité et l'imparité s'interprètent ainsi.

- Si f est paire alors, dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, son graphe est invariant par la symétrie d'axe $(\mathrm{O}, \vec{j})$.
- Si f est impaire alors, dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, son graphe est invariant par la symétrie centrale par rapport au point O.

Fonction impaire



Fonction paire



Exemple 5

1. La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5x \end{array} \right.$ est impaire.
2. La fonction $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$ est impaire.
3. La fonction $h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$ est paire.

Ces différentes propriétés seront largement utilisées ultérieurement, notamment dans l'étude de fonctions afin de réduire l'ensemble d'étude. Lorsqu'une fonction est périodique l'étude sur une période suffira, lorsqu'une fonction est paire/impaire l'étude sur $\mathbb{R}^+$ suffira.

1.3. Sens de variation

La notion de croissance ou décroissance est intuitivement claire, mais comment la définir proprement ? Pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on aurait envie de dire qu'elle est croissante si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h \geqslant 0, \quad f(x+h) \geqslant f(x). \quad (\star)$$

C'est-à-dire que la valeur de f en $x + h$ est située au-dessus de celle en x. Après un petit jeu de changement de nom de variable, on obtient la définition ci-après.

Définition 8 | Monotonie

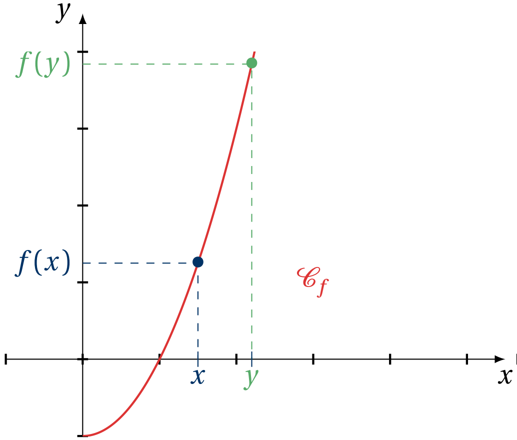
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est *constante* sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad f(x) = f(y).$$
- On dit que f est *croissante* (*resp. strictement*) sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$$
$$\Big(\textit{resp.} \quad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) < f(y)\Big).$$
- On dit que f est *décroissante* (*resp. strictement*) sur $\mathscr{D}_f$ si
$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y)$$
$$\Big(\textit{resp.} \quad \forall (x,y) \in \mathscr{D}_f^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) > f(y)\Big).$$
- On dit que f est monotone (*resp.* strictement) sur $\mathscr{D}_f$ si f est croissante ou décroissante (*resp.* strictement) sur $\mathscr{D}_f$.

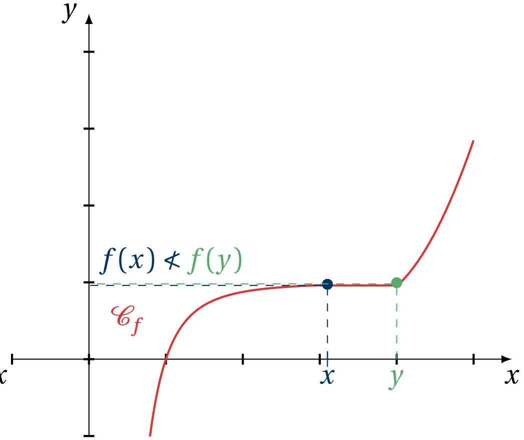
Remarque 5

- On notera qu'une fonction strictement croissante (*resp.* strictement décroissante) est croissante (*resp.* décroissante).
- Une fonction croissante préserve les inégalités. Une fonction décroissante renverse les inégalités.
- Pour les fonctions strictement monotones, on peut remplacer le symbole « $\Longrightarrow$ » par « $\Longleftrightarrow$ » dans la définition.

FONCTION STRICTEMENT MONOTONE



FONCTION NON STRICTEMENT MONOTONE



Attention

Il faut bien connaître la définition de fonction monotone, en plus de savoir l'établir éventuellement en dérivant (un des objectifs de la suite du chapitre).

Proposition 1 | Opérations sur les fonctions monotones

Soient $f, g : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :

- **[Addition]** si f, g ont même monotonie, $f + g$ aussi.
- **[Produit par un scalaire]** Si f est monotone, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est :
  - monotone de même monotonie que f si $\lambda > 0$,
  - et de monotonie inversée à f si $\lambda < 0$.
- **[Produit]**
  - si f, g sont croissantes **positives**, alors fg est croissante,
  - si f, g sont décroissantes **positives**, alors fg est décroissante.
- **[Composition]** Supposons de plus que $g \circ f$ existe, *i.e.* $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_g$:
  - si f, g sont monotones de même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante,
  - si f, g sont monotones de monotonies opposées, alors $g \circ f$ est décroissante.

Attention

La fonction « identité » $x \longmapsto x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais quand on la multiplie par elle-même, le résultat $x \longmapsto x^2$ n'est **pas** une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Comme quoi la positivité compte !

Preuve Démontrons par exemple que $g \circ f$ est décroissante, lorsque g est décroissante et f est croissante.

Exemple 6 En utilisant la définition, établir les monotonies ci-après.

1. La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2 - \sqrt{x} \end{array} \right.$ est strictement décroissante.

2. La fonction $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$ est croissante mais n'est pas strictement croissante.*L'étude complète de la partie entière sera faite dans la Section 4*.

Nous reverrons plus tard dans le chapitre un moyen plus efficace de prouver que des fonctions sont monotones que la définition.

1.4. *Extrema*

Définition 9 | Majoration, minoration, borne, sup, inf

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est *majorée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est majoré, c'est-à-dire si :
$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$
Dans ce cas, la *borne supérieure de* f, notée $\sup f$, est la borne supérieure de $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$.
- On dit que f est *minorée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est minoré, c'est-à-dire si :
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant m.$$
Dans ce cas, la *borne inférieure de* f, notée $\inf f$, est la borne inférieure de $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$.
- On dit que f est *bornée* sur $\mathscr{D}_f$ si l'ensemble $\left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathscr{D}_f\right\}$ est borné ou encore que f est majorée et minorée, c'est-à-dire si :
$$\exists (m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}.$$

La notion d'ensemble borné peut se réecrire à l'aide de la valeur absolue, c'est donc aussi le cas des fonctions bornées.

Proposition 2 | Caractérisation des fonctions bornées à l'aide de la valeur absolue

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} f \text{ est bornée sur } \mathscr{D}_f &\iff |f| \text{ est majorée sur } \mathscr{D}_f \\ &\iff \exists \mathrm{M} \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{M}. \end{aligned}$$

Dans la pratique, on utilise plutôt cette proposition pour montrer qu'une fonction est bornée. La rédaction est souvent plus simple en exploitant les propriétés de la valeur absolue.

Preuve

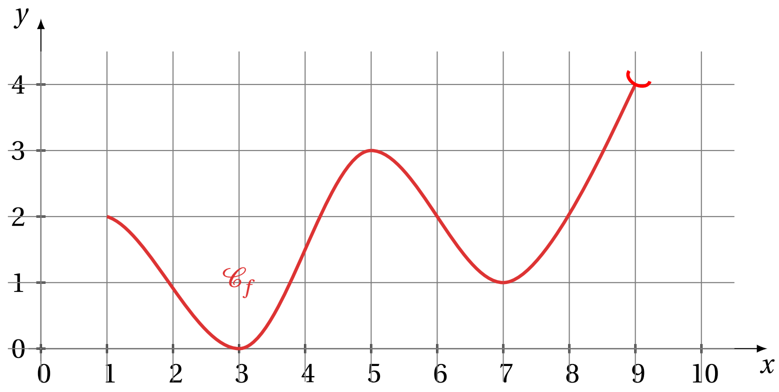
Définition 10 | *Extrema* global / local

Soit $\mathscr{D}_f$ un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$, f une fonction de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- **[Global]** On dit que f admet un *maximum global* en x_0 si $x_0 \in \mathscr{D}_f$, et :
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$
On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathscr{D}_f$.
- **[Global]** On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si $x_0 \in \mathscr{D}_f$, et :
$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$
On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathscr{D}_f$.
- **[Local]** On dit que f admet en $x_0 \in \mathscr{D}_f$ un *minimum local* (*resp. maximum*

local) si l'une des égalités précédentes a lieu uniquement sur un voisinage de x_0, c'est-à-dire un intervalle de la forme $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$.
- On dit que f admet en x_0 un *extremum* (*resp. extremum local*) si f admet en x_0 un minimum ou un maximum (*resp.* un minimum local ou un maximum local).

Exemple 7



Ici, la fonction f est définie sur $A = [1;9[$.
- f est bornée sur A car : $\forall x \in A, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 4$.
- 0 est un minorant de f sur A, c'est même le minimum global atteint en 3 et sa borne inférieure.
- En revanche 4 est un majorant non atteint de f sur A.
- Il n'y a pas de maximum global et $\sup\limits_{x\in A} f(x) = 4$.
- Enfin, 1 est un minimum local atteint en 7 et 3 un maximum local atteint en 5.

2. CALCULS DE LIMITES & CONTINUITÉ

Nous voyons dans cette section une définition intuitive de la limite (une définition rigoureuse sera étudiée dans le Chapitre (AN) 5) et les règles d'opérations classiques afin de pouvoir effectuer des calculs. Les propriétés complémentaires plus générales (convergence monotone, théorème des valeurs intermédiaires et de la bijection *etc.*) seront vus plus tard dans l'année.

2.1. Généralités

Définition 11 | Voisinage
- On appelle *voisinage de* $+\infty$ tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.
- On appelle *voisinage de* $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$.
  - On appelle *voisinage de a* tout intervalle de la forme $]a-\eta, a+\eta[$ où $\eta > 0$.
  - On appelle *voisinage de* a^- tout intervalle de la forme $]a-\eta, a[$ où $\eta > 0$.
  - On appelle *voisinage de* a^+ tout intervalle de la forme $]a, a+\eta[$ où $\eta > 0$.

Définition 12
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit qu'une propriété, dépendant d'une variable x, est vraie *au voisinage de a (resp.* a^+, a^-*)* si elle est vraie pour tout $x \in V_a$ où V_a est un voisinage de a (*resp.* a^+, a^-).

Exemple 8
1. Soit $f : x \longmapsto 2x$. Alors f est positive au voisinage de 0^+, négative au voisinage de 0^- ; mais son signe n'est pas déterminé au voisinage de 0 (c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]-\eta, \eta[$ avec $\eta > 0$).
2. Soit $f : x \longmapsto |x|$. Alors f est positive au voisinage de 0, strictement positive au voisinage de 0^+ et de 0^- ; mais elle n'est pas strictement positive au voisinage de 0.
3. Soit $f : x \longmapsto \ln(x)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, définie au voisinage de 0^+ ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.
4. Soit $f : x \longmapsto \ln(-x)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$, définie au voisinage de 0^- ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.
5. Soit $f : x \longmapsto \ln(|x|)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, définie au voisinage de 0^- et de 0^+ ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.

Définition 13 | Limite
Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et f une fonction. On note :
- $f(x) \xrightarrow[]{x\to a} \ell$ si :
  - f est définie au voisinage de a^+ et a^-, *(Et donc pas obligatoirement en a...)*
  - et si : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, si x est assez proche de a ».
- $f(x) \xrightarrow[]{x\to a} +(resp. -)\infty$ si :
  - f est définie au voisinage de a^+ et a^-,
  - et si : « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut (*resp.* petit), si x est assez proche de a ».

  Graphiquement, on dit que la droite $x = a$ est une *asymptote verticale* à la courbe.

- $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow+(resp.-)\infty} \ell$ si :
  - f est définie au voisinage de $+\infty$ (*resp.* $-\infty$),
  - et si : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, si x est assez grand (*resp.* petit) ».

  Graphiquement, on dit que la droite $y=\ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe.
- $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow+/-\infty} +/-\infty$ si :
  - f est définie au voisinage de $+/-\infty$,
  - et si : « $f(x)$ est aussi grand / petit que l'on veut, si x est assez grand / petit ».

Remarque 6 Quand on suppose l'existence d'une limite en a dans un théorème, cela supposera donc implicitement qu'elle est définie sur un voisinage approprié de a.

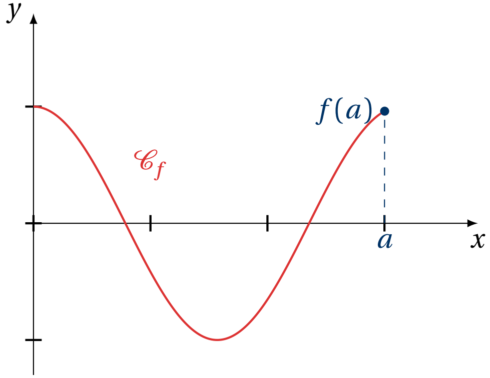
Définition 14 | Limite d'une fonction
Soient $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ tels que $f(x)\xrightarrow[]{x\longrightarrow a}\ell$. On dit que ℓ est la *limite* de f en a, ce que l'on note :

$$\ell=\lim_{x\longrightarrow a} f(x) \quad \text{ou, plus simplement,} \quad \ell=\lim_a f.$$

Attention
Une fonction peut ne pas avoir de limite, nous verrons des exemples plus tard dans l'année.

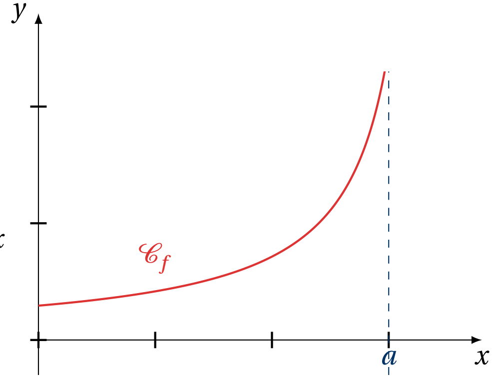
Remarque 7 (Pourquoi la notion de limite ?)

La limite en a est la valeur en a



La notion de limite en a est peu utile ici, puisqu'elle est égale à la valeur en a de la fonction. Nous verrons même plus tard dans l'année que c'est le cas dès que la fonction est définie en a.

La valeur en a n'existe pas



La notion de limite est typiquement là pour mettre des mots sur ce type de comportement, et l'étudier.

Le théorème suivant sera démontré plus tard dans l'année, comme la plupart des résultats qui vont suivre.

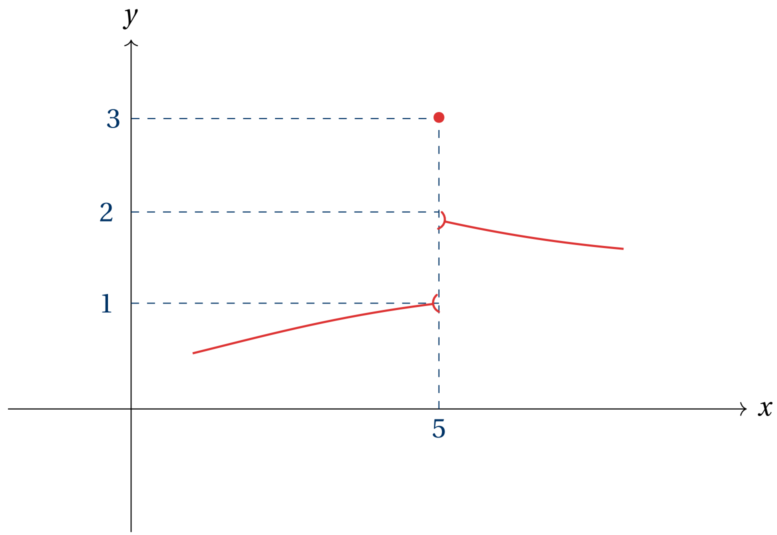
Théorème 1 | Unicité de la limite
La limite d'une fonction, si elle existe, est unique.

Limite à droite ou à gauche. Une limite peut être caractérisée par une convergence à droite <u>et</u> à gauche, cela signifie que x se « rapproche par la droite ou la gauche » du point a.

Définition 15 | Limite à droite/gauche
Soient $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $\ell\in\mathbb{R}$ et f une fonction. On note :

- $f(x)\xrightarrow[]{x\longrightarrow a^+}\ell$ (*resp.* $f(x)\xrightarrow[]{x\longrightarrow a^-}\ell$) si :
  - f est définie au voisinage de a^+ (*resp.* a^-) *(Et donc pas obligatoirement en a...)*
  - et si : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, si x est assez proche de a par valeurs inférieures (*resp.* supérieures) ».
- $f(x)\xrightarrow[]{x\longrightarrow a^+/a^-} +/-\infty$ si :
  - f est définie au voisinage de a^+ (*resp.* a^-),
  - et si : « $f(x)$ est aussi grand / petit que l'on veut, si x est assez proche de a par valeurs supérieures / inférieures ».

Exemple 9 Dans l'exemple graphique suivant, déterminer : $\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x)$.



Proposition 1 | Lien limite et limite à droite / gauche

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, f définie au voisinage de a^+ et a^-.

- Si f est définie en a, alors :

$$f \text{ admet une limite en } a \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite finie à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a). \end{cases}$$

- Si f n'est pas définie en a, alors :

$$f \text{ admet une limite en } a \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite finie à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x). \end{cases}$$

Remarque 8 Il faut savoir adapter ce résultat aussi au cas où une fonction est définie à droite ou à gauche de a uniquement ($x \longmapsto \ln(x)$ par exemple, qui est définie uniquement au voisinage de 0^+).

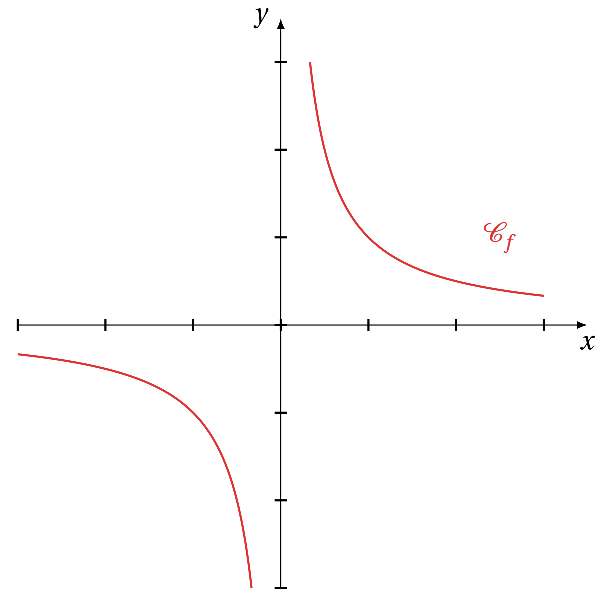
Cette proposition est cruciale en pratique pour :

- montrer l'existence d'une limite en un point d'une fonction définie en deux morceaux (avec rupture de l'expression au point étudié),
- ou pour montrer que des fonctions n'admettent pas de limites en un point.

Exemple 10 La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ admet une limite à droite et à gauche en 0, égale à $+\infty$. Donc admet une limite en zéro qui vaut $+\infty$.

Exemple 11 Notons $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0, \\ 1-x & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array} \right.$ Alors : $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$.

Exemple 12 **(Fonction inverse)** On a : $\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. La fonction $x \in \mathbb{R}^\star \longmapsto \frac{1}{x}$ admet-elle une limite en zéro ?



2.2. Opérations sur les limites

Addition, produit, multiplication. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, c'est-à-dire a est soit un nombre réel, soit $\pm\infty$) et soient f et g deux fonctions admettant toutes les deux une limite en a. Dans toute la suite, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. « FI » désigne une indétermination du résultat de la limite indiqué dans le tableau (à traiter au cas par cas). Chaque résultat présent dans chaque case du tableau peut être démontré en vérifiant la définition de la limite, nous l'admettrons.

Limite de $f+g$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ'	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

Limite de $f \times g$

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0$	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$

Limite de f/g

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	FI	0	0	FI
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\dfrac{\ell}{\ell}$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' = 0^+$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$
$+\infty$	FI	0	0	FI

Attention **Pour retenir, mais sans l'écrire**

- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que :
$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$
- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que les formes indéterminées « FI » sont les suivantes :
$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Tout cela avec des gros guillemets donc.

Exemple 13 **(Attention aux formes indéterminées !)** Une forme indéterminée est, comme son nom l'indique, **indéterminée** ! Tout peut arriver :

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty,\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0,$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=1,\quad \frac{x(2+\cos x)}{x}\text{ n'a pas de limite en }+\infty,$$

alors que le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

Composition. On ajoute un nouveau résultat : celui sur les limites de fonctions composées.

Théorème 1 | Compositions de limites (ou changement de variable)

Soient I et J deux intervalles, $a, b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de a et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de b deux fonctions avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ et $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Alors :

$$\begin{cases}\textbf{(i)} & f(x) \xrightarrow{x\longrightarrow a} b,\\ \textbf{(ii)} & g(y) \xrightarrow{y\longrightarrow b} \ell\end{cases} \implies g\circ f(x) = g(f(x)) \xrightarrow{x\longrightarrow a} \ell.$$

Remarque 9

- Cet énoncé confirme l'évidence : pour savoir vers quoi tend $g\circ f(x) = g(f(x))$, on regarde déjà vers quoi tend l'expression $f(x)$ à l'intérieur de la parenthèse puis on « applique g » à la limite trouvée, si elle existe.
- Ce théorème est parfois aussi appelé « théorème du changement de variable pour les limites » : on peut penser formellement que l'on pose « $y = f(x)$ », avec $y \longrightarrow b$ lorsque $x \longrightarrow a$.

Exemple 14

1. Déterminer la limite de $x \longmapsto \sqrt{x+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0}$ existe. Justifier, en effectuant un changement de variable, que $\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h}$ existe aussi, et que :

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h}.$$

Note : *Quand on dit que l'on pose « $h = x - x_0$ », sur le fond on fait apparaitre le terme $\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h}$ comme une composée $f(g(x))$, puis on applique le théorème de composition des limites.*

Théorèmes d'encadrement (ou des « gendarmes ») Les théorèmes ci-après énoncent des faits intuitivement clairs :

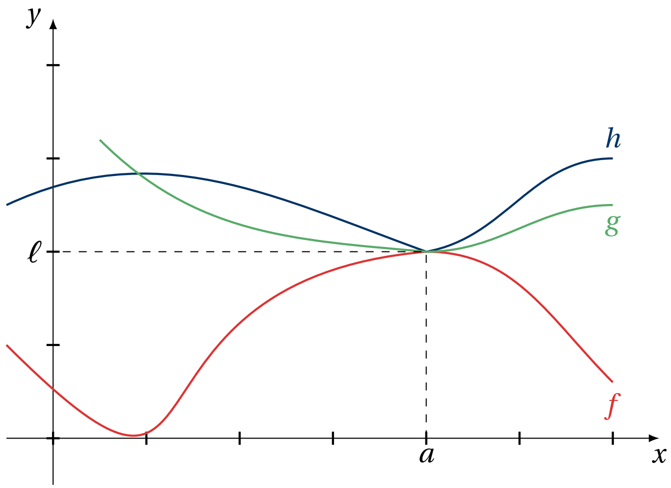
- si une fonction f est minorée par une autre qui diverge en un point vers $+\infty$, alors f diverge aussi vers $+\infty$ en ce point,
- de-même si une fonction f est majorée par une autre qui diverge en un point vers $-\infty$, alors f diverge aussi vers $-\infty$ en ce point.
- Enfin, si f est encadré par deux autres qui tendent vers la même limite en un point, alors f tend aussi vers cette limite en ce point. Ce cas-là est souvent appelé « théorème des gendarmes ».

Théorème 2 | Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases}\textbf{(i)} & f \leqslant g \leqslant h \quad \text{(au moins sur un voisinage de } a\text{)},\\ \textbf{(ii)} & \text{les deux fonctions } f \text{ et } h \text{ admettent } \ell \text{ pour limite en } a.\end{cases}$$

Alors : $g(x) \xrightarrow{x\longrightarrow a} \ell$.



Corollaire 1 | Version valeur absolue & Bornée « × → 0 »

- Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} \quad |f| \leqslant g \quad \text{(au moins sur un voisinage de } a) \\ \textbf{(ii)} \quad g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} 0. \end{cases} \Longrightarrow f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} 0.$$

- Le produit d'une fonction bornée au voisinage de a et fonction tendant vers zéro en a est une fonction tendant vers zéro en a.

Preuve

- L'hypothèse donne au voisinage de a : $\quad -g \leqslant f \leqslant g$. Puisque $g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} 0$, $-g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} 0$, on déduit du théorème d'encadrement : $\quad f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} 0$.
- Soit f une fonction bornée au voisinage de a disons par $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$, et g fonction tendant vers zéro en a. Alors au voisinage de a, $0 \leqslant |fg| \leqslant \mathrm{M}\,|g|$. Comme $|g(x)| \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} 0$, on conclut à l'aide de la première partie du corollaire.

Théorème 3 | Théorème de minoration

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} \quad f \leqslant g \quad \text{(au moins sur un voisinage de } a) \\ \textbf{(ii)} \quad f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} +\infty. \end{cases} \Longrightarrow g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} +\infty.$$

Théorème 4 | Théorème de majoration

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} \quad f \leqslant g \quad \text{(au moins sur un voisinage de } a) \\ \textbf{(ii)} \quad g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} -\infty. \end{cases} \Longrightarrow f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} -\infty.$$

Ces deux théorèmes se démontrent, comme celui des gendarmes, à l'aide de la définition rigoureuse de la limite que nous verrons plus tard.

Exemple 15 Calculer les limites ci-après, en justifiant l'existence.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}}$.

Rappelons que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. *De manière équivalente, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^\star$*, on déduit alors :*

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}} < \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{x}} \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} < \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} \leqslant \sqrt{x}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \infty$. *Donc d'après le théorème de divergence par minoration, on déduit :*

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}} = \infty.$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^3}$.

- **[Rédaction avec valeurs absolues]**

- **[Rédaction sans valeurs absolues]**

Croissances comparées. Il existe des méthodes afin de parfois lever des formes indéterminées sur les limites. Une des plus importantes est l'utilisation d'un résultat sur les « croissances comparées ». Dans cet énoncé apparaissent des puissances réelles, nous (re)verrons cela dans la Section 4 sur les fonctions usuelles. [1]

Théorème 5 | Croissances comparées

Soient a, b et c des réels **strictement positifs**.

- **[En $+\infty$]**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(\ln(x))^a}{x^b}=0,\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^b}{e^{cx}}=0,\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(\ln(x))^a}{e^{cx}}=0.$$

- **[En 0^+]**

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}x^b(\ln(x))^a=0.$$

- **[En $-\infty$]**

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}x^b e^{cx}=0.$$

Remarque 10 Ce théorème s'utilise pour n'importe quels a,b,c strictement positifs, même non entiers. Par exemple si $b=\frac{1}{2}$, $x^b=\sqrt{x}$ pour tout $x>0$.

Comment retenir ce théorème?

Résumé Idée des croissances comparées

On se souviendra que :

- l'exponentielle diverge beaucoup plus vite en $+\infty$ que toute puissance de x, qui elle-même diverge plus vite que toute puissance de logarithme. Ce que l'on peut noter :

$$(\ln x)^a \underset{+\infty}{\ll} x^b \underset{+\infty}{\ll} e^{cx}.$$

- Toute puissance de x l'emporte en zéro sur toute puissance de logarithme :

$$x^b(\ln x)^a \underset{0}{\ll} 1.$$

- L'exponentielle tend très vite vers 0 en $-\infty$ et l'emporte sur toutes les puissances de x :

$$x^b \underset{-\infty}{\ll} e^{cx}.$$

1. Mais cela n'empêche pas la compréhension de l'énoncé, on peut même considérer pour le moment les puissances comme entières positives.

Méthode Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence

- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparait peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

Exemple 16 Déterminer les limites ci-après.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$,

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$,

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(xe^x-x^2\right)$,

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}-\ln x}{x^2+\ln x}$,

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - \ln x}{x^2 + \ln x}$,

2.3. Continuité

GÉNÉRALITÉS. Intuitivement, les fonctions continues sont des fonctions que l'on peut tracer « sans lever le crayon ».

Définition 16 | Continuité

Soit f une fonction.

- **[Locale]** Soit $a \in \mathscr{D}_f$. On dit que f est :
  - *continue en* a si : $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)$,
  - *continue à droite en* a (*resp. continue à gauche en* a) si :
  $$\lim_{x\longrightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \left(\textit{resp.} \lim_{x\longrightarrow a^-} f(x) = f(a)\right).$$
- **[Globale]** On dit que f est *continue sur* I si elle est continue en tout $a \in$ I.

Attention

On parle de continuité en un point de **l'ensemble de définition**, puisque $a \in \mathscr{D}_f$ dans la définition précédente. La question ne se pose donc même pas en les points qui ne sont pas dans l'ensemble de définition.

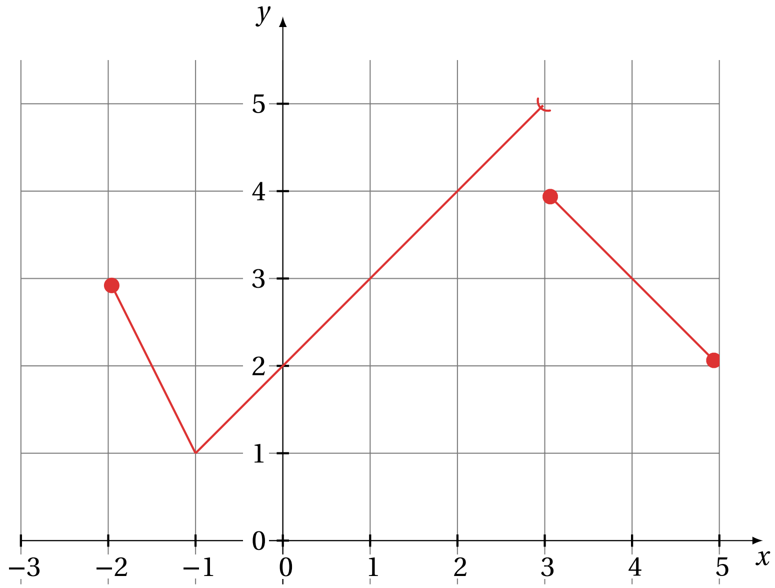
Notation

On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Exemple 17

- Les fonctions affines et la valeur absolue sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple 18 Considérons le graphe suivant d'une fonction f :



Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Théorème 2 | Lien entre continuité, continuité à gauche & continuité à droite

Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathscr{D}_f$. Alors :

f est continue en a $\iff$ f est continue à gauche et à droite en a.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES. Passons maintenant aux propriétés qui vont nous permettre de montrer que des fonctions sont continues en pratique.

Proposition 3 | Opérations sur les fonctions continues en un point

Soient f, g deux fonctions définies sur I un intervalle, et $a \in$ I. Alors :

- les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues en a.
- De plus, si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de a et est continue

en a.

Théorème 3 | Composition de fonctions continues
Toute composée de fonctions continues en un point est encore continue.

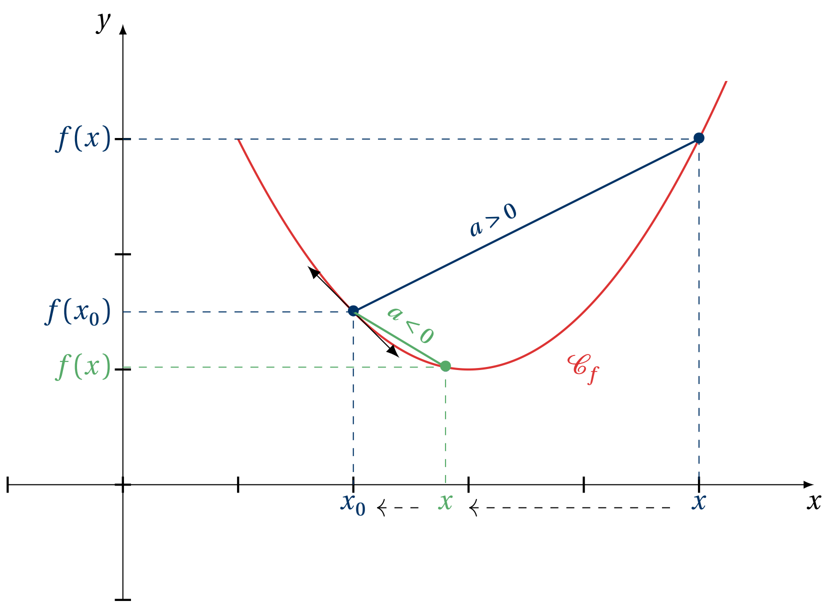
Remarque 11 Les résultats précédents sont encore vraies lorsqu'on remplace la continuité en un point par la continuité sur un intervalle.

3. CALCULS DE DÉRIVÉES

L'objectif de cette section est de rappeler la définition du nombre dérivé, de fonction dérivable, les principales formules à connaitre pour dériver une fonction et de savoir en déduire la monotonie. Les « grands théorèmes » sur les fonctions dérivables seront vus plus tard dans l'année, dans le Chapitre (AN) 5.

3.1. Nombre dérivé, fonction dérivable

Une application principale de la dérivation sera pour nous l'obtention de la monotonie d'une fonction. Considérons $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Comment savoir si f croît après x_0 ? Observons la corde reliant les points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ pour $x > x_0$.



- Sur la corde bleue (à droite au-dessus), on observe un coefficient directeur positif, alors que la courbe décroît juste après x_0.
- Cela montre qu'il faut bien faire « se rapprocher x de x_0 » pour que le signe du coefficient directeur de la corde donne la monotonie localement autour de x_0. Vous voyez l'objet mathématique qui répond à cette problématique : la limite quand x tend vers x_0.

Définition 17 | Dérivabilité
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est *dérivable* en x_0 si la fonction
$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}\right.$$
admet une limite finie en x_0. La limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en x_0*.
- Le nombre $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé le *taux d'accroissement de f entre x_0 et x*.
- On dit que f est *dérivable à droite en x_0* (*resp. à gauche*) si on a seulement existence d'une limite à droite ou à gauche.

Notation
On note en général :

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f en x_0,
- $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à gauche en x_0,
- $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à droite en x_0.

On obtient directement des résultats sur les limites, la propriété suivante.

Proposition 4 | Dérivabilité, à gauche et à droite
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :
$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & f'_g(x_0) = f'_d(x_0). \end{cases}$$

Remarque 12

- Une fonction est donc dérivable en x_0 si son taux d'accroissement tend vers une limite finie.
- Le taux d'accroissement s'interprète comme la pente de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x_0 et x. Lorsque f est dérivable en x_0, le nombre

$f'(x_0)$ s'interprète alors comme la « pente limite » de ces cordes.

Remarque 13 **(Version « x_0+h »)** La limite du taux d'accroissement peut aussi, par composition des limites (poser « $h = x - x_0 \xrightarrow[]{x\to x_0} 0$ »), être écrite sous cette forme :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Définition 18 | Tangente

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *tangente à f d'abscisse a* la droite d'équation :
$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$
- Si f est dérivable à gauche (*resp.* droite) en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *demi-tangente à gauche (resp. droite) à f d'abscisse x_0* la droite d'équation :
$$y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \quad \left(\textit{resp.} \quad y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right).$$

On dit que f *admet une tangente horizontale en x_0* lorsque $f'(x_0) = 0$.

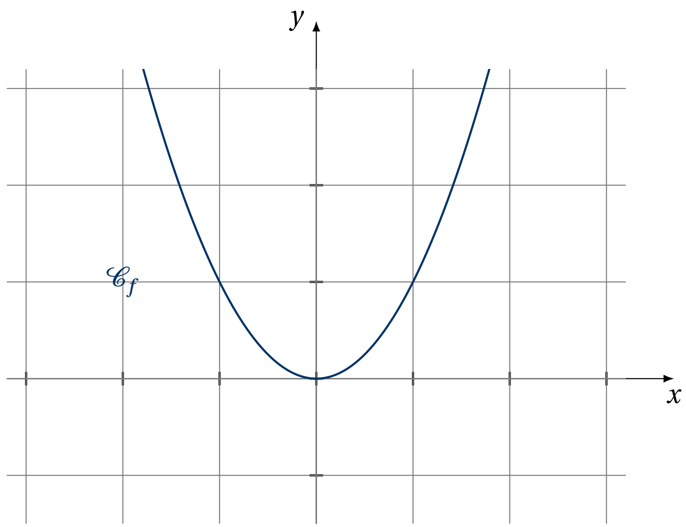
Exemple 19 Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

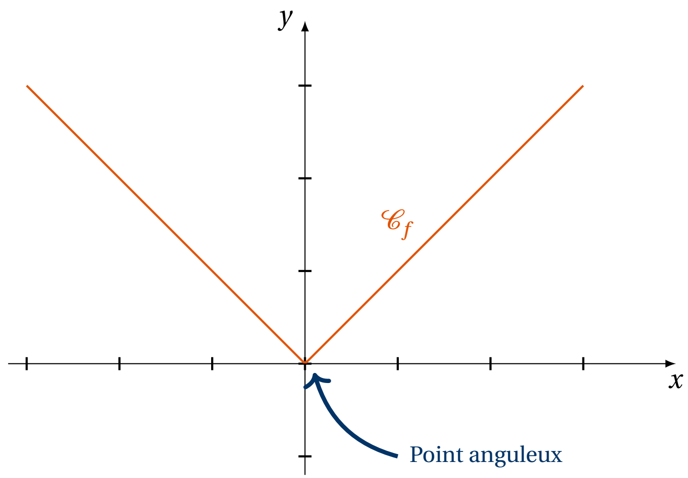
2. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

3. Déterminer l'équation de la tangente à T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. Même question pour T_1 au point d'abscisse 1.

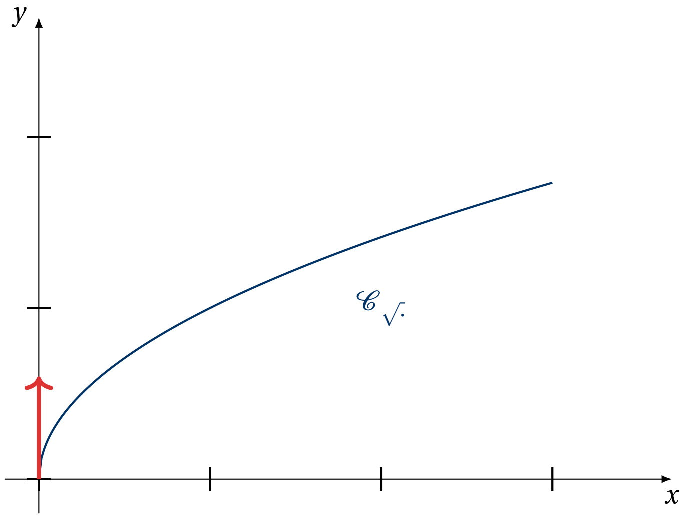
4. Représenter les tangentes sur le graphique ci-contre.



Exemple 20 La valeur absolue n'est pas dérivable en zéro.



Exemple 21 La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



Notation

On note le nombre dérivé en x_0 par $f'(x_0)$, ou encore en « notation physicien » $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Cette seconde a le mérite de ne faire pas perdre de vue la définition du taux d'accroissement.

Notation **Dérivée d'une expression**

Soit une expression $f(x)$ dépendant de $x \in \mathbb{R}$, avec f une fonction dérivable. On notera dans la suite indifféremment :

- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ la fonction f' évaluée en x,
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]$ la dérivée de l'expression $f(x)$ par rapport à x.

En particulier, on n'écriera pas $f(x)'$.

Il y a un lien entre la continuité et la dérivabilité. En effet, toute fonction dérivable est continue.

Théorème 4 | Dérivabilité & Continuité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Preuve On commence par récrire l'expression de la fonction, pour $x \neq x_0$ dans I, nous avons :

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Attention

La réciproque est, en général, fausse. La valeur absolue est continue en zéro, alors qu'elle n'y est pas dérivable comme nous l'avons déjà constaté.

Enfin, en faisant varier x_0 on créer ainsi une nouvelle fonction notée f'.

Définition 19 | Fonction dérivée, Fonction dérivable

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point $x \in \mathrm{I}$. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée de* f.

Notation

On note $\mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles.

Dérivées d'ordre supérieur. Lorsque f' est encore dérivable, on appelle la dérivée de f' la dérivée *seconde* de f, et ainsi de suite.

Définition 20 | Dérivabilité n-ième
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit, sous réserve d'existence, les *dérivées successives* de f en posant $f^{(0)} = f$ et pour $n \in \mathbb{N}$:
$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Définition 21 | Classe $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^n$

- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur I si :
  - f est dérivable sur I,
  - et si f' est **continue** sur I.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^n$ sur I si :
  - f est n fois dérivable sur I,
  - et si $f^{(n)}$ est **continue** sur I.
- La fonction est dite *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention au vocabulaire
On dit bien « f dérivable à dérivée continue » pour signifier que f est $\mathscr{C}^1$ et pas « f est continue dérivable » qui signifie simplement que f est dérivable ! (car dérivable implique continue).

Notation

- L'application $f^{(n)}$ est aussi notée ou $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. On note encore f'', f''', *etc*, pour $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, *etc*.
- On note $\mathscr{D}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n-fois dérivables.
- On note $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$ (*resp.* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (*resp.* $\mathscr{C}^\infty$) sur I et à valeurs réelles.

3.2. Calculs de dérivées

Maintenant, comment calculer concrètement la dérivée d'une fonction ? Comment savoir si une fonction est dérivable ? Pour le second point, on établit une bonne fois pour toute que la plupart des fonctions usuelles le sont. Pour le premier point, nous aurons des formules. Commençons par un exemple.

Exemple 22 (Avec la définition, fonction carré) Considérons $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$, et montrer que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = 2x_0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. On utilise au choix la définition, ou la version « $x_0 + h$ ».

- Soient $x_0, x \in \mathbb{R}$.

- Soient $x_0, h \in \mathbb{R}$.

En résumé, on a établi que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \qquad f'(x_0) = 2x_0.$$

On peut appliquer cela pour la plupart des fonctions usuelles connues, les résultats seront récapitulés dans la prochaine section, et aussi dans le tableau ci-après.

Formulaire de dérivation : point d'étape. Vous trouverez ci-après le formulaire des dérivées des fonction connues en fin de Terminale Spécialité (ce formulaire sera élargi en fin de cours).

Dans les tableaux ci-dessous, x est une **variable** réelle, c une **constante** réelle et $n \in \mathbb{N}^\star$

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'} \subset \mathscr{D}_f$
$f(x)=c$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^n, n\in\mathbb{N}^\star$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}^\star$	$\mathbb{R}^*$	$-nx^{-n-1}=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases}1 \text{ si } x>0,\\ -1 \text{ si } x<0\end{cases}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

De plus, tout polynôme ou toute fraction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur son domaine de définition.

Maintenant, comment dériver des sommes/produits/quotients *etc.* de fonctions dérivables? Nous avons également des formules, qui se démontrent toutes à l'aide de la définition.

Proposition 5 | Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables sur I.

- **[Linéarité]** pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda f+g\mu$ est dérivable sur I, et :
$$(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'.$$
On dit que la dérivation est *linéaire*.
- **[Produit]** fg est dérivable sur I et
$$(fg)'=f'g+fg'.$$
- **[Quotient]** Si $g(x)\neq 0$ pour tout $x\in$ I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Plus généralement, nous avons la proposition suivante.

Proposition 6 | Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n/\mathscr{D}^n$

Toute combinaison linéaire, produit et quotient à dénominateur non nul de fonctions $\mathscr{C}^n$ (*resp.* $\mathscr{D}^n$) est encore $\mathscr{C}^n$ (*resp.* $\mathscr{D}^n$).

Remarque 14 En revanche, il n'existe pas de formule au programme pour la dérivée n-ième d'un produit ou quotient.

Exemple 23 (Dérivée de tan) Soit $\mathscr{D}=\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Déterminer la dérivée de la fonction tan définie sur $\mathscr{D}$ par : $\forall x\in\mathscr{D},\quad \tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Exemple 24 Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions f suivantes et donner, lorsqu'elle existe, l'équation de la tangente à leur courbe au point d'abscisse $a\in\mathbb{R}$ indiqué. On supposera que x appartient à l'ensemble de définition de f que l'on précisera.

1. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1}\quad (a=0)$

2. $f(x)=\cos x\sin x\quad (a=0)$

3. $f(x) = \dfrac{x^2\cos(x)}{3} + \ln(x) \quad (a = 1)$

4. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \quad (a = 1)$

5. $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} \quad (a = 1)$

Exemple 25 Déterminer les dérivées n-ièmes pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3 - 2x + 1$.

DÉRIVER UNE COMPOSÉE. Commençons là encore par traiter un exemple.

Exemple 26 **(Avec la définition, fonction carré composée avec $x \longmapsto 3x + 1$)** Considérons $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ et $f : x \longmapsto 3x + 1$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$. La composée $h = g \circ f$ est $h : x \longmapsto (3x + 1)^2$, on aimerait pouvoir calculer la dérivée de h en fonction de la dérivée de f et g en $x_0 \in \mathbb{R}$.

En résumé, on a établi que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = 3 \times 2(2x + 1) = \underbrace{\boxed{3}}_{\text{nouveau terme}} \times g'(2x + 1) = f'(x)g'(f(x)).$$

Quand on dérivé une composée, il y a donc simplement un terme supplémentaire qui apparaît devant : c'est $g'(x)$.

Théorème 6 | Dérivation d'une composée

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Si f est dérivable sur I, g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $\quad (g \circ f)' = f' \times \left(g' \circ f\right)$.

Preuve Soit $a \in \mathrm{I}$. Il s'agit de montrer que $g \circ f$ est dérivable en a, et que :
$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$
Pour cela fixons-nous $x \in \mathrm{I}$ différent de a, et analysons la limite quand x tend vers a de
$$\frac{g(f(x) - g(f(a))}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \frac{g(f(x) - g(f(a))}{f(x)-f(a)}. \qquad (\star)$$
On suppose que pour x assez proche de a, $f(x) \neq f(a)$ de sorte que le premier quotient est bien défini, on admet le cas général. [a]

Résumé Dérivée d'une composée

Nous pouvons retenir cette formule de la manière suivante :
$$\begin{aligned}(\text{extérieur} \circ \text{intérieur})' &= (\text{extérieur}(\text{intérieur}))' \\ &= \text{intérieur}' \times \big(\text{extérieur}'(\text{intérieur})\big).\end{aligned}$$

Exemple 27 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(|x|.) \end{array} \right.$ Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.

Continuons avec des exemples usuels théoriquement à connaitre, mais qui se retrouvent très rapidement à partir du théorème précédent, mieux vaut ne pas les apprendre par coeur inutilement.

a. Il s'agirait de remplacer le terme $\dfrac{g(f(x) - g(f(a))}{f(x)-f(a)}$ qui pose problème dans $(\star)$ par $\dfrac{g(f(x) - g(f(a))}{f(x)-f(a)}$ si $f(x) \neq f(a)$, et $g'(f(a))$ si $f(x) = f(a)$.

Exemple 28 (Formules générales) Soit u une fonction numérique dérivable. Pour les dérivées ci-après, préciser sous quelle condition sur u la composition est possible, et justifier la dérivabilité, puis donner une formule pour la dérivée.

1. u^n, $n \in \mathbb{Z}^\star$.

2. e^u.

3. $\ln|u|$.

4. $\cos(u), \sin(u)$.

5. $\tan(u)$.

6. $\sqrt{u}$.

POINT D'ÉTAPE : FORMULAIRE DE DÉRIVATION D'UNE COMPOSÉE. Pour u une fonction réelle à valeurs dans l'ensemble de dérivabilité de la fonction par laquelle on compose, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}^\star$:

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(e^u)' = u'e^u$	$(\ln\|u\|)' = \dfrac{u'}{u}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\cos u)' = -u'\sin(u)$	$(\sin u)' = u'\cos u$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'\left(1+\tan^2 u\right)$	

Exemple 29 **(Exemples de dérivées de composées)** Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer leur dérivées.

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\right)$

2. $g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{e^{x^2}}$

Proposition 7 | Compositions de fonctions de classe $\mathscr{C}^n/\mathscr{D}^n$
Toute composée de fonctions $\mathscr{C}^n$ (*resp.* $\mathscr{D}^n$) est encore $\mathscr{C}^n$ (*resp.* $\mathscr{D}^n$).

3.3. Lien avec la monotonie

Théorème 7 | Monotonie et signe de la dérivée
Soit I **un intervalle** non-vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors :

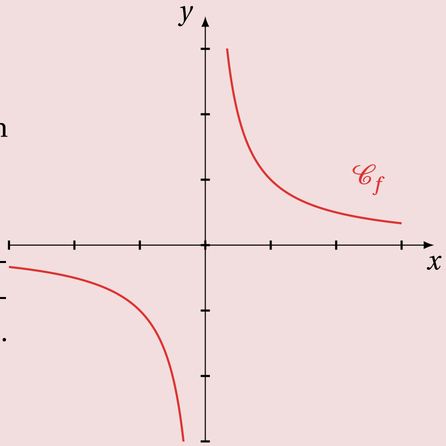
- **[Monotonie]**
$$f \text{ est croissante sur I} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \geqslant 0,$$
$$f \text{ est décroissante sur I} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \leqslant 0.$$
- **[Stricte monotonie]**
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement décroissante.
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement croissante.

Attention **Un intervalle comme ensemble de définition est crucial**

Par exemple, pour $f : x \in \mathbb{R}^\star \longrightarrow \dfrac{1}{x}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Et pourtant f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ à cause du « saut » autour de 0 : $-1 < 1$ alors que $f(-1) < f(1)$.



Remarque 15 Pour la stricte monotonie, il n'est donc pas indispensable que le signe soit strict sur tout l'ensemble de définition.
Par exemple, la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante, même si sa dérivée s'annule en zéro.

Exemple 30 Par exemple, la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \sin(x) \end{array} \right.$$

est strictement croissante alors que sa dérivée s'annule un nombre infini de fois.

3.4. Application aux calculs de limites

Puisqu'un taux de variation est une limite, faisant apparaître en plus une forme indéterminée (le dénominateur tend vers zéro), le calcul d'une dérivée peut donc donner de précieux résultats sur la valeur cherchée de la limite.

Méthode **Limite calculable par taux de variation**

Si une expression est de la forme suivante, pour $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en a, a aux bords de I ou dans I, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} f'(a).$$

En particulier, si f s'annule en a, on a :

$$\frac{f(x)}{x - a} \xrightarrow[]{x \longrightarrow a} f'(a).$$

On commence par un exemple simple. Ceux faisant intervenir des fonctions usuelles seront faits dans la prochaine section.

Exemple 31 Calculer la limite $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ selon deux méthodes.

Exemple 32 Calculer la limite $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4. FONCTIONS USUELLES

Pour chaque fonction, nous donnons :

- la forme de son expression, quelques propriétés, la dérivée et le domaine de dérivabilité,
- certaines limites remarquables,
- sa représentation graphique.
- Et un contexte (mathématique, physique, ...) où intervient ladite fonction.

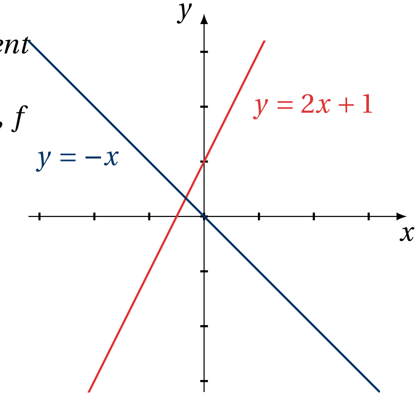
Tous ces points doivent être maitrisés car ils sont susceptibles d'intervenir dans les exercices.

4.1. Fonctions polynomiales

Définition/Proposition 1 | Fonctions affines

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Le réel a est appelé le *coefficient directeur* de f, b son ordonnée à l'origine.
- Si $b = 0$, on dit que f est *linéaire*. Si $a = 0$, f est constante.
- **[Dérivée]** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a$.
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (ax+b) = -\infty$, si $a > 0$,
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (ax+b) = +\infty$, si $a > 0$,
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (ax+b) = +\infty$, si $a < 0$,
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (ax+b) = -\infty$, si $a < 0$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

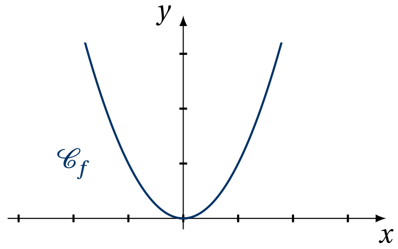


Exemple 33 D'après la loi d'Ohm, la tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle à l'intensité : $\mathrm{U(I) = RI}$ avec les notations du cours de physique. La tension est donc une fonction linéaire de l'intensité.

Définition/Proposition 2 | Fonction carré, cas $n = 2$

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array} \right.$
- **[Propriété(s)]** f est paire.
- **[Dérivée]** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x$.
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^2 = +\infty$,
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} x^2 = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

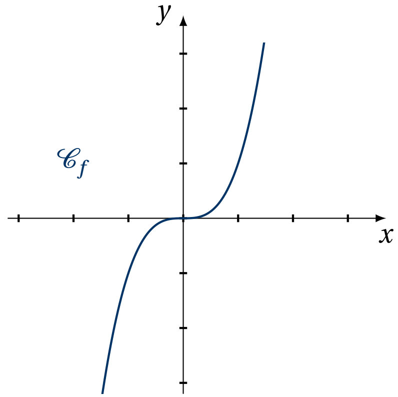


Exemple 34 L'énergie cinétique est l'énergie que possède un corps du fait de son mouvement par rapport à un référentiel donné. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse du corps : $\mathrm{E}_c(v) = \dfrac{1}{2}mv^2$ avec les notations du cours de physique.

Définition/Proposition 3 | Fonction cube, cas $n = 3$

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3. \end{array} \right.$
- **[Propriété(s)]** f est impaire.
- **[Dérivée]** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2$.
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^3 = -\infty$,
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} x^3 = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE

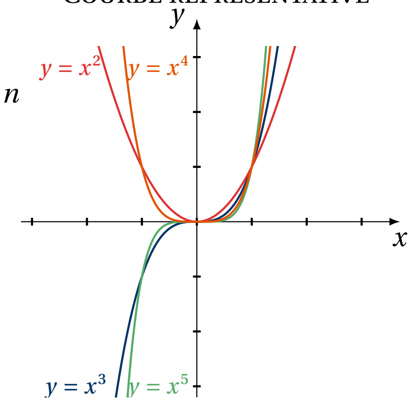


Définition/Proposition 4 | Fonction monôme $x \longmapsto x^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n. \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** : f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = nx^{n-1}.$$
- **[Limites]**
  - ◇ $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair,
  - ◇ $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ si n est impair,
  - ◇ $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

Courbe représentative



Définition/Proposition 5 | Fonction polynomiale de degré n

- **[Définition]** $\mathrm{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array} \right.$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels appelés les *coefficients* du polynôme.
- **[Dérivée]** P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$
- **[Limites]** $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{P}(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n)$, c'est-à-dire celle donnée par la plus grand puissance.

Preuve Démontrons la propriété sur la limite en $\pm\infty$.

Méthode Limite d'un quotient de polynpomes

Pour déterminer la limite en $\pm\infty$ de :
$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$
on factorise au numérateur par $a^n x^n$ et au dénominateur par $b_m x^m$ et on simplifie le quotient de ces deux termes en $\dfrac{a_n x^{n-m}}{b_m}$, avant de passer à la limite. On dit que l'on « met en facteur les monômes de plus haut degré ».

Attention

Cette méthode ne fonctionne que pour les limites en $\pm\infty$.

Exemple 35 Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^7 + 4x^2 - 1}{x^9 + 1}$.

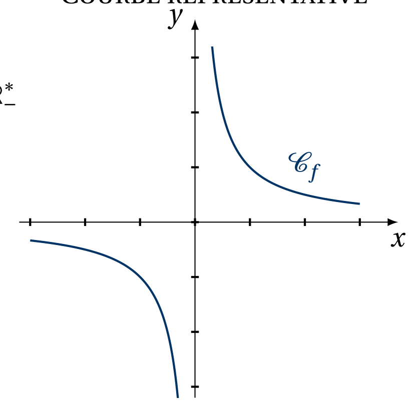
Remarque 16 On étudiera de manière plus approfondie les polynômes dans un chapitre ultérieur (le Chapitre (ALG) 9), la définition précédente ne s'intéresse qu'aux propriétés analytiques des polynômes.

4.2. Fonction monôme inverse

Définition/Proposition 6 | Fonction inverse, cas $n = 1$

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est impaire.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\cdot$.
- **[Limites]**
  - $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$,
  - $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$,
  - $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Courbe représentative



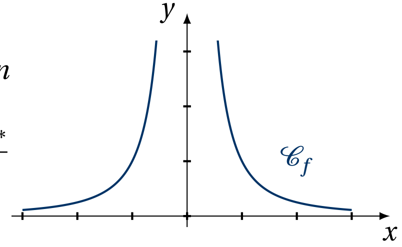
Exemple 36 D'après la loi des gaz parfaits, la pression est inversement proportionnelle au volume : $\mathrm{P(V)} = \dfrac{n\mathrm{RT}}{\mathrm{V}}$ avec les notations du cours de physique.

Définition/Proposition 7 | Fonction carrée inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.[2]

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^n}. \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est paire si n pair et impaire si n est impair.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.
-
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$,
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$

COURBE REPRÉSENTATIVE (cas $n = 2$)



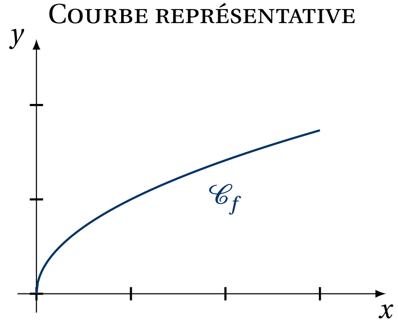
Exemple 37 Si un corps A et un corps B de masses m_A et m_B sont séparés par une distance d, alors la valeur F de la force de gravitation qui s'exerce entre eux est : $\mathrm{F} = \mathrm{G}\dfrac{m_\mathrm{A} m_\mathrm{B}}{d^2}$ avec les notations du cours de physique.

4.3. Fonction racine carrée

Définition/Proposition 8 | Fonction racine carrée

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
  $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
  Elle n'est pas dérivable en zéro.
- **[Limites]** $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



2. Pour $n = 0$, on retrouve une fonction affine, donc déjà étudiée.

Exemple 38 Le principe de TORRICELLI est un principe de mécanique des fluides qui établit que le carré de la vitesse d'écoulement d'un fluide sous l'effet de la pesanteur est proportionnel à la hauteur de fluide située au-dessus de l'ouverture par laquelle il s'échappe du cylindre qui le contient.

$$v^2 = 2gh, \qquad v = \sqrt{2gh},$$

avec les notations du cours de physique.

Méthode Expression conjuguée pour les F.I. avec racines

Pour calculer des limites d'expressions de la forme $\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}$ avec $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} u(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} v(x) = \infty$ le plus souvent polynomiale, on a souvent recours à à la technique de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)} = \frac{\left(\sqrt{u(x)} - \sqrt{v(x)}\right)\left(\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}\right)}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}} = \frac{u(x) - v(x)}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)}}.$$

Sous cette forme, la limite n'est souvent plus indéterminée après avoir mis dans la racine les monômes les plus importants en facteur.

Exemple 39 Calculer la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2 - 3x - 1}\right)$.

4.4. Fonctions exponentielles, logarithme et puissances

4.4.1. Exponentielle et logarithme

Motivons l'introduction de l'exponentielle *via* un exemple physique. Si l'on considère une population macroscopique de noyaux radioactifs, une loi physique nous dit que le nombre moyen de noyaux qui se désintègrent pendant un intervalle de temps de longueur h depuis un instant t (où il y a $N(t)$ noyaux) est proportionnelle à $hN(t)$. En notant λ ce coefficient de proportionnalité, on peut alors effectuer un bilan de noyaux entre les instants t et $t+h$:

$$N(t+h) = N(t) + \ldots.$$

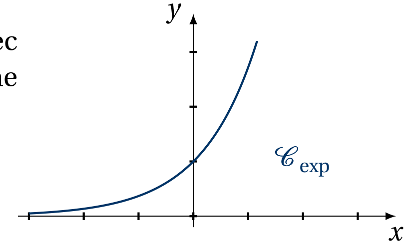
Ainsi, en faisant $h \longrightarrow 0$, on déduit que la fonction N, supposée dérivable vérifie :

✎

Définition/Proposition 9 | Fonction exponentielle

- **[Définition]** $\exp \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x), \end{array} \right.$ ou encore e^x comme notation pour $\exp(x)$, avec e la constante de Néper, et définie comme $e = \exp(1)$.
- **[Principales propriétés]** :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{x+y} = e^x e^y,\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$
- **[Dérivée]** exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$$
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \exp(x) = 0,$
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty,$
  - **[Taux]** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Courbe représentative



Exemple 40

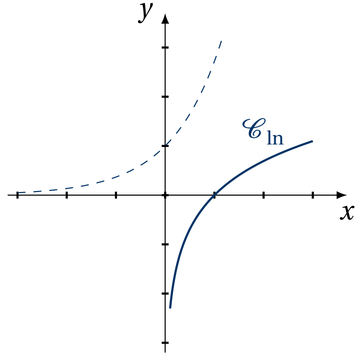
- La loi de décroissance radioactive affirme que le nombre de noyaux désintégrés au bout d'une durée t s'exprime comme
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$
où N_0 est le nombre de noyau à $t=0$ et λ est la constante radioactive, caractéristique du noyau radioactif considéré.
- Le modèle de dynamique des populations de Malthus affirme que le nombre d'individus $N(t)$ au temps $t \geqslant 0$ s'exprime comme :
$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$
où N_0 est le nombre d'individus au temps initial et λ est le taux de croissance de la population.

4.4.2. Fonction logarithme népérien ln et décimal log

Définition/Proposition 10 | Logarithme népérien

- **[Définition]** $\ln \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x). \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]**
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
- **[Dérivée]** ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty,$
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty,$
  - **[Taux]** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
- **[Réciproque de l'exponentielle]**
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \quad \exp \circ \ln(x) = e^{\ln(x)} = x,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln \circ \exp(x) = \ln\left(e^x\right) = x.$$

Courbe représentative



La dernière propriété signifie que exp, ln sont réciproques l'une de l'autre, nous étudierons plus en détail cela dans le Chapitre (ALG) 5.

Exemple 41 En physique statistique, la formule de Boltzmann (1877) définit l'entropie microcanonique d'un système physique à l'équilibre macroscopique, libre d'évoluer à l'échelle microscopique entre Ω micro-états différents. Elle s'écrit :

$$S = k_B \ln(\Omega)$$

où k_B est la constante de Boltzmann.

Dans certaines disciplines, notamment en Physique–Chimie pour des grandeurs variant sur des puissances de 10, par exemple entre 10^{-10} et 10^{10}, il peut être plus pratique de manipuler des « logarithmes décimaux » plutôt que le logarithme népérien. Par exemple, si $k \in \mathbb{N}$, $\ln\left(10^k\right) = \ln\left(e^{k\ln 10}\right) = k \ln 10 (\star)$. Plutôt que de manipuler des

$\ln 10$ dans certains calculs, on préfère considérer la fonction $\log = \frac{\ln}{10}$, de sorte qu'($\star$) se simplifie en $\log(10^k) = k$.

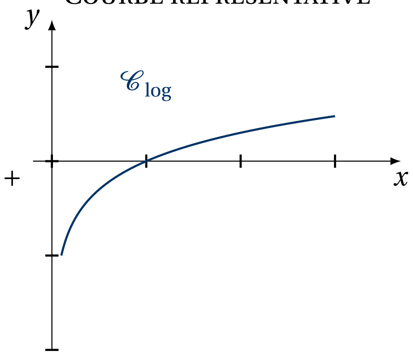
Mathématiquement, cette fonction ne représente que peu d'intérêts puisqu'elle est égale à une constante près à une fonction déjà connue (le logarithme népérien).

Définition/Proposition 11 | Fonction logarithme décimal

- **[Définition]**

$$\log \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \end{array} \right. .$$

COURBE REPRÉSENTATIVE



- **[Principales propriétés]** :
  - $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y)$,
  - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 10^{\log(x)} = x$,
  - $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \log(10^a) = a$.
- **[Dérivée]** log est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log'(x) = \frac{1}{\ln(10)} \ln'(x) = \frac{1}{\ln(10)x}.$$

- **[Limites]**
  - $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \log(x) = -\infty$,
  - $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$.

Exemple 42

- En milieu dilué, on définit le pH par la relation

$$p\mathrm{H} = -\log([\mathrm{H_3O^+}]),$$

où $[\mathrm{H_3O^+}]$ désigne la concentration en $\mathrm{H_3O^+}$.

- La magnitude locale d'un séisme se calcule comme

$$\mathrm{M} = \log\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_0}\right)$$

où A représente l'amplitude maximale relevée par le sismographe et A_0 une amplitude de référence.

4.4.3. Puissances générales & Exponentielle en base a

Rappelons les puissances que nous connaissons déjà.

- a^n avec $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^\star, n \in \mathbb{Z}$. Nous l'avons vu dans le Chapitre (ALG) 2 sur les nombres réels.
- Nous avions également défini $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ lorsque $a \geqslant 0$, et $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Nous allons à présent définir a^b pour tout $b \in \mathbb{R}$, lorsque $a > 0$. Réecrivons notre définition du Chapitre (ALG) 2 à l'aide de l'exponentielle et du logarithme. On a d'après les propriétés de l'exponentielle :

$$a^n = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = \mathrm{e}^{n \ln a}.$$

Il apparaît que cette écriture de la puissance peut être étendue à n'importe quelle autre puissance réelle (pas seulement un entier n). On aboutit donc à la définition ci-après.

Définition 22 | Puissances généralisées

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On définit le *réel* a^b par : $\quad a^b = \mathrm{e}^{b \ln a}$.

Remarque 17 Cette définition a le bout goût de généraliser l'exposant (autorisé à être réel cette fois). Cependant, puisque ln est défini uniquement sur $\mathbb{R}^{+\star}$, elle est moins générale vis-à-vis de a que la définition $a^n = a \times \cdots \times a$. On ne peut pas tout avoir.

On vérifie sans peine que toutes les propriétés classiques sur les puissances restent valables.

Proposition 8 | Règles sur les puissances

Soit $(a, a_1, a_2) \in \left(\mathbb{R}^{+\star}\right)^3$ et $(b, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

- $a^{b_1+b_2} = a^{b_1} \times a^{b_2} \qquad \left(a^{b_1}\right)^{b_2} = a^{b_1 \times b_2} \qquad (a_1 \times a_2)^b = a_1^b \times a_2^b$.
- $\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^b = \dfrac{a_1^b}{a_2^b}, \qquad \dfrac{a^{b_1}}{a^{b_2}} = a^{b_1 - b_2} = \dfrac{1}{a^{b_2 - b_1}}$.

Remarque 18 (On peut faire encore mieux) Nous pouvons faire encore mieux dans le cas des puissances $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec q un **entier impair**. Nous verrons cela dans le Chapitre (ALG) 5 une fois le théorème de la bijection revu.

Remarque 19 (Constante de Néper) En début de section, nous avions écrit $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où $\mathrm{e} = \exp(1)$. Afin de pouvoir utiliser cette notation, il faudrait alors justifier que :

$$\exp(x) = (\exp(1))^x.$$

En effet c'est le cas puisque $\quad (\exp(1))^x = \exp(x \ln \exp(1)) = \exp(x)$.

Constatons que pour différentes valeurs de b, on retrouver diverses quantités usuelles déjà définies dans le Chapitre (ALG) 2.

Proposition 9 | Puissances particulières

Soient $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- **[$b = 1/2$]** , $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$,
- **[$b = 1/3$]** , $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Attention

La racine cubique d'un réel strictement positif s'écrit donc sous forme d'une puissance $\frac{1}{3}$. En revanche, nous n'avons rien dit des réels négatifs (dont la racine cubique existe).

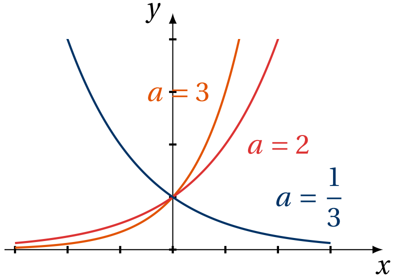
Preuve

FAIRE VARIER b : EXPONENTIELLE EN BASE. On peut aussi à présent faire varier la puissance b et étudier la fonction $x \in \mathbb{R} \longrightarrow a^x = e^{x \ln a}$ pour tout $a > 0$. C'est une fonction qui aura donc des propriétés similaires à la fonction exponentielle. On la note en général $\exp_a$.

Définition/Proposition 12 | Fonction exponentielle en base a

- **[Définition]**

$$\exp_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & a^x = e^{x \ln(a)} \end{array} \right. .$$



- **[Principales propriétés]** :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

- **[Dérivée]** $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a'(x) = \frac{d\left(e^{x \ln a}\right)}{dx} = \ln(a) a^x.$$

- **[Limites]**
  - $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ si $a < 1$,
  - $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ si $a < 1$,
  - $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ si $a > 1$,
  - $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ si $a > 1$.

Remarque 20 Pour $a = e$, étant donné que $\ln(e) = 1$, on retrouve l'exponentielle. En d'autres termes : $\exp_e = \exp$. Pour savoir si $\exp_a$ est croissante ou décroissante, on analyse simplement le signe de $\ln a$, cela revient à comparer a à 1.

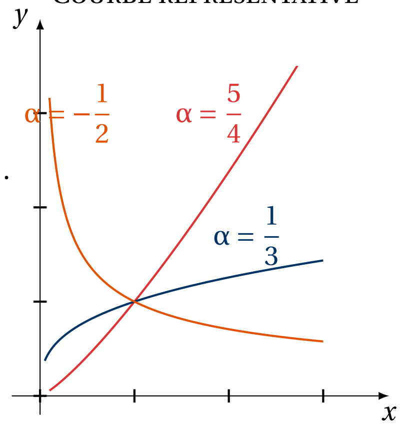
FAIRE VARIER a. On peut aussi à présent faire varier a dans $\mathbb{R}^{+\star}$ et étudier la fonction $x \in \mathbb{R}^{+\star} \longrightarrow x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. C'est une fonction qui unifie à la fois la racine carrée $\alpha = \frac{1}{2}$, la racine cubique $\alpha = \frac{1}{3}$, mais aussi la fonction carré $\alpha = 2$, cube $\alpha = 3$, *etc.* et même l'identité avec $\alpha = 0$.

Définition/Proposition 13

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **[Définition]**

$$p_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{array} \right. .$$



- **[Principales propriétés]** :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$

- **[Dérivée]** p_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

- **[Limites]**
  - $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$,
  - $\lim_{x \to \infty} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha > 0$,
  - $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$ si $\alpha < 0$,
  - $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ si $\alpha < 0$.

4.5. Fonction valeur absolue

La valeur absolue avait étudiée dans le Chapitre (ALG) 2, mais nous ne l'avions pas vue encore comme une fonction. C'est ce que nous analysons ici.

Définition/Proposition 14 | Valeur absolue

- **[Définition]** :

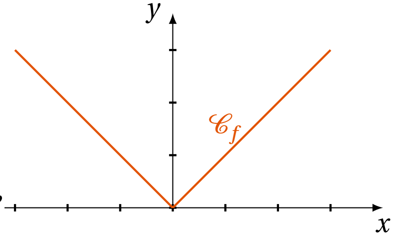
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

- **[Principales propriétés]** f est paire.
- **[Dérivée]** f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une part, $\mathbb{R}_-^*$ d'autre part et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Elle n'est pas dérivable en zéro.
- **[Limites]**
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} |x| = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} |x| = +\infty$

COURBE REPRÉSENTATIVE



Exemple 43 Un modèle très simple d'évolution de la température lors d'une journée consiste à supposer qu'elle augmente régulièrement de 6h à 16h puis diminue régulièrement jusqu'à minuit. La température $\mathrm{T}(t)$ s'exprime alors en fonction du temps écoulé t depuis $6h$ comme suit :

$\mathrm{T}(t) = a|t-10| + b.$

4.6. Fonction partie entière

Définition/Proposition 15 | Fonction partie entière

- **[Définition]** $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** f est constante par morceaux, discontinue en chaque point $n \in \mathbb{Z}$. De plus,

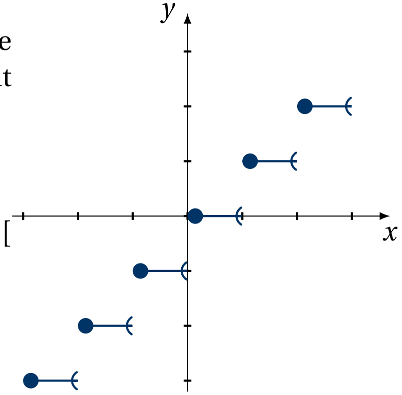
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- **[Dérivée]**
f est dérivable sur chaque intervalle $]n; n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et

$$\forall x \in]n; n+1[, \quad f'(x) = 0.$$

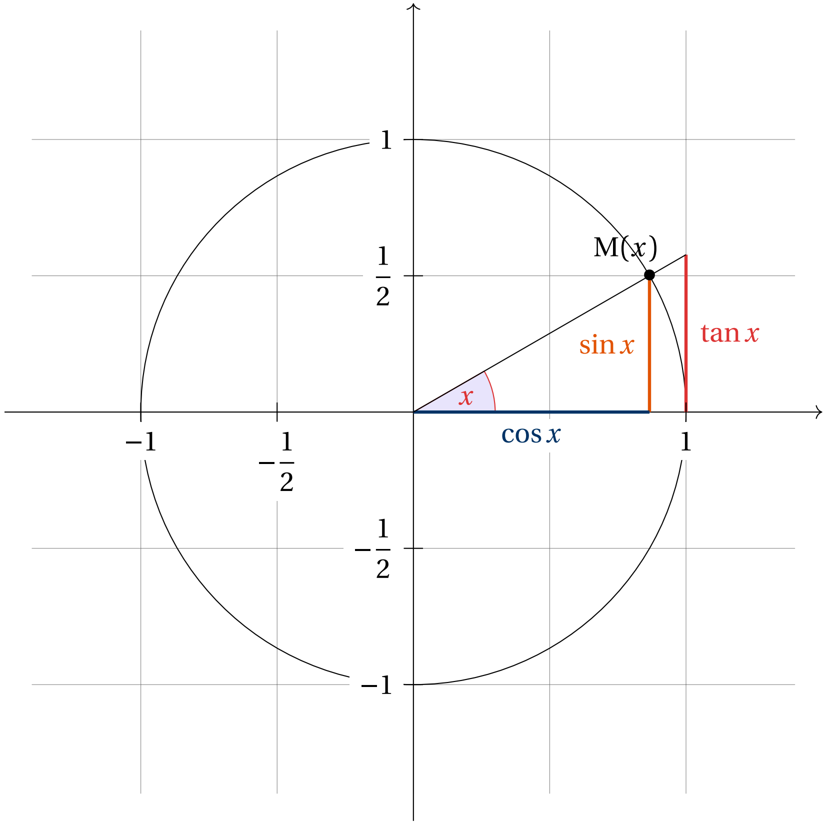
f n'est pas dérivable en tout $n \in \mathbb{Z}$.
- **[Limites]**
  - ◇ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$,
  - ◇ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$,
  - ◇ $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \lim\limits_{x \longrightarrow k^-} \lfloor x \rfloor = k-1, \ \lim\limits_{x \longrightarrow k^+} \lfloor x \rfloor = k.$

COURBE REPRÉSENTATIVE



4.7. Fonctions circulaires

Rappelons que pour $x \in \mathbb{R}$, le cosinus, sinus et tangente de x peuvent être visualisés avec la figure ci-après.



On voit qu'en faisant varier x dans $\mathbb{R}$, le cosinus et le sinus semblent « osciller » entre -1 et 1, et semblent revenir sur les anciennes valeurs après un intervalle de longueur 2π.

Dans toute la suite, on admettra le lemme suivant [3]. Il va nous permettre d'établir l'expression des dérivées de cos et sin.

Lemme 1 | Deux limites

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{\sin(h)}{h}=1,\quad \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1-\cos(h)}{h}=0.$$

Il est possible de démontrer la seconde avec la première à l'aide de formules de trigonométries (duplication) : en effet, on sait que pour tout $h\in\mathbb{R}$:

$$\cos(h)=1-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)\implies\frac{1-\cos(h)}{h}=\frac{2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}.$$

3. se démontre à l'aide de considérations géométriques sur le cercle trigonométrique

On peut ensuite conclure par composition des limites. Commençons à présent l'étude des fonctions trigonométriques par le cosinus.

Définition/Proposition 16 | Fonction cosinus

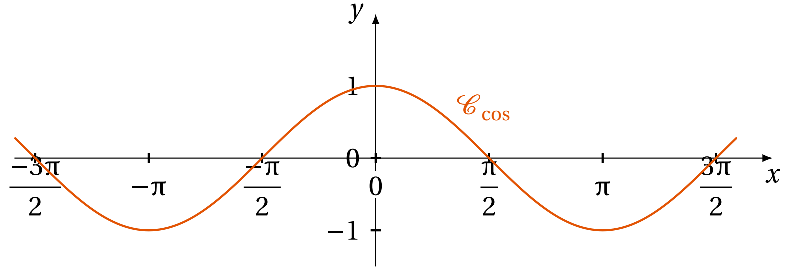
- **[Définition]** $\cos\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos(x)\end{array}\right.$
- **[Principales propriétés]** cos est 2π-périodique et paire.
- **[Dérivée]** cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos'(x)=-\sin(x).$$

- **[Limites]** La fonction cosinus n'admet pas de limite en $\pm\infty$, et

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos x-1}{x}=0.$$

Courbe représentative



Preuve

- **[Dérivabilité]** Soient $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$.

- **[Taux]**

Exemple 44 Lorsqu'un pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale), il se met à osciller. La position d'un pendule simple est repérée par l'angle θ qu'il fait avec la verticale descendante. En l'absence de frottements et pour des petites oscillations, on a

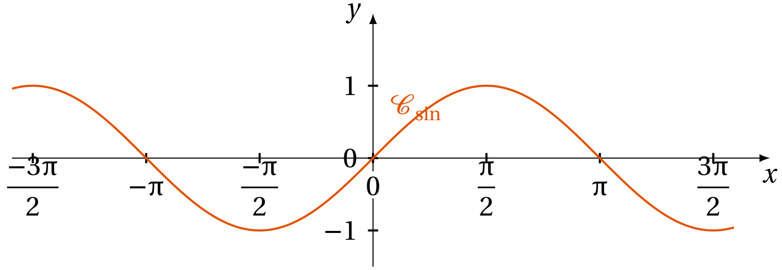
$$\forall t \geqslant 0, \quad \theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t)$$

où θ_0 repère la position initiale du pendule et ω_0 est la pulsation.

Définition/Proposition 17 | Fonction sinus

- **[Définition]** $\sin \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$
- **[Principales propriétés]** sin est 2π-périodique et impaire.
- **[Dérivée]** sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x).$$
- **[Limites]** La fonction sinus n'admet pas de limite en $\pm\infty$,
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

COURBE REPRÉSENTATIVE



Preuve

- **[Dérivabilité]** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.
- **[Taux]**

Exemple 45 La fonction sin est $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

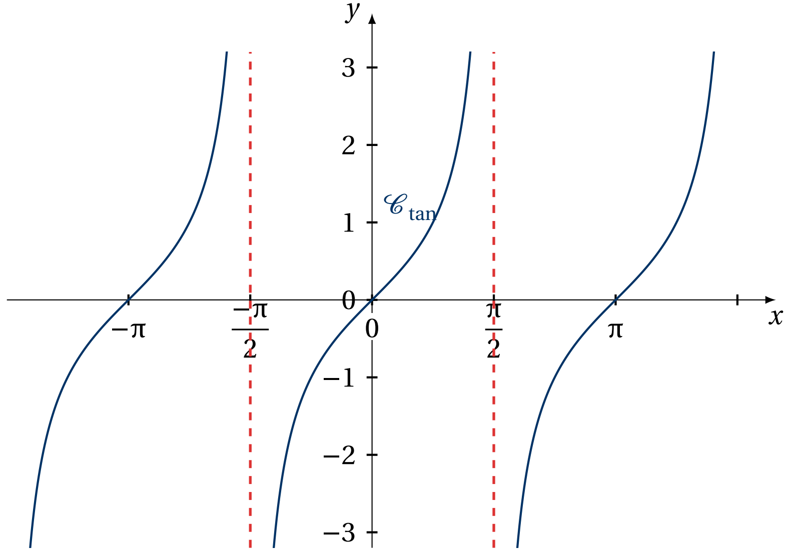
Pour la tangente, on voit que le point semble être « envoyé vers $+\infty$ » lorsque x tend vers $+\frac{\pi}{2}$. Mathématiquement, cela sera traduit avec la notion de limite.

Définition/Proposition 18 | Fonction tangente

- **[Définition]** :
$$\tan \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{\tan} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array} \right.$$
avec
$$\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
- **[Principales propriétés]** tan est π-périodique et impaire.
- **[Dérivée]** tan est dérivable sur $\mathscr{D}_{\tan}$ et
$$\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$
- **[Limites]**
  - $\lim_{x \longrightarrow -\pi/2} \tan(x) = -\infty,$

- $\lim\limits_{x \longrightarrow \pi/2} \tan(x) = +\infty$,
- **[Taux]** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Preuve

- **[Périodicité]**

- **[Imparité]**

- **[Taux]**

5. FORMULAIRE DE DÉRIVÉES : BILAN DES COURSES

Dans les tableaux ci-dessous, x est une **variable** réelle et a une **constante** réelle.

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'} \subset \mathscr{D}_f$
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a, \ a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{+\star}$ si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^{\star}$ si $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0, \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi k \in \mathbb{Z}\right\}$

6. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir déterminer certaines caractéristiques d'une fonction :
   - parité et périodicité ☐
   - monotonie avec la définition par manipulations d'encadrement ☐
2. Connaître la définition des limites :
   - connaître les limites usuelles et les croissances comparées ☐
   - savoir utiliser les théorèmes d'addition, multiplication, quotient de limites ☐
   - savoir calculer la limite d'une composée de fonction ☐
   - reconnaître les limites liées au taux d'accroissement ☐
3. Savoir lever les indéterminations classiques :
   - polynômes et fractions rationnelles ☐
   - fonctions avec des radicaux (expression conjuguée) ☐
4. Savoir appliquer les théorèmes d'existence de limites (théorème d'encadrement, de comparaison) ☐
5. Savoir déterminer le comportement asymptotique d'une fonction (limites, asymptotes) ☐
6. Savoir montrer qu'une fonction est continue par opérations (à l'aide de fonctions usuelles) ☐
7. Savoir montrer qu'une fonction est dérivable par opérations (à l'aide de fonctions usuelles) ☐
8. Savoir calculer des dérivées de somme, produit, quotient, ou composée ☐
9. Connaître les fonctions usuelles (variations, dérivées, limites, représentation graphique) :
   - fonctions affines et trinômes du second degré ☐
   - fonctions valeur absolue, racine carrée et inverse ☐
   - fonction partie entière ☐
   - fonctions ln, exp et puissances ☐
   - fonctions trigonométriques (cos, sin, tan) ☐
10. Savoir étudier complètement une fonction ☐

Note : vous pouvez utiliser GeoGebra (logiciel libre) pour vérifier vos résultats. Allez dans menu "affichage", sélectionnez "calcul formel" puis utilisez une des commandes "Résoudre", "Dérivée" ou "Limite". Tracer par exemple la fonction étudiée vous aidera à vérifier vos résultats. De plus, l'utilisation de ce logiciel est autorisée au concours Agro-Véto.

Exercice 1 | **Vrai ou Faux ?** Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Toute fonction bornée sur $[0,1]$ est continue sur $[0,1]$.
3. Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en x_0.
4. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable :
   - si f est paire sur $\mathbb{R}$, alors f' est paire sur $\mathbb{R}$;
   - si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors f' est paire sur $\mathbb{R}$;
   - si f est périodique de période $T > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors f' est aussi T-périodique.
5. Pour toutes fonctions f et g dérivables sur $[0,1]$ telles que : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leq g(x)$, on a : $\forall x \in [0,1], \quad f'(x) \leq g'(x)$.

Solution (exercice 1)

1. $\boxed{\text{VRAI.}}$ La fonction f est au moins dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de telles fonctions.
   On étudie la dérivabilité de f en 0 à l'aide du taux d'accroissement. Pour tout $x > 0$,
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\sqrt{x}-0\sqrt{0}}{x} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x},$$
   donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. La fonction f est alors dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Ainsi :
   $$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$$
2. $\boxed{\text{FAUX.}}$ Considérer par exemple la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor$. La fonction f est bien bornée (minorée par 0, majorée par 1) mais non continue en 1 (puisque : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ et $f(1) = 1$).
3. $\boxed{\text{FAUX.}}$ Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais non dérivable en 0.
4. - $\boxed{\text{FAUX.}}$ Considérer par exemple f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Cette fonction est paire et a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$, une fonction impaire.
   - $\boxed{\text{VRAI.}}$ Supposons f paire : pour tout nombre réel x, $f(-x) = -f(x)$. En dérivant par rapport à x des deux côtes de l'égalité (si deux fonctions sont égales alors elles ont même dérivée), on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, -f'(-x) = -f'(x)$ (où on a dérivé l'expression de gauche comme une composée). D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = f'(x)$. On en déduit que f' est paire sur $\mathbb{R}$.
   - $\boxed{\text{VRAI.}}$ Supposons f périodique de période T, où $T > 0$. On a ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$. En dérivant par rapport à x des deux côtes de l'égalité, on obtient bien : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x+T) = f'(x)$.
5. $\boxed{\text{FAUX.}}$ Considérons par exemple les fonctions f et g définies respectivement sur $[0,1]$ par $f(x) = 2x$ et $g(x) = x+4$. On peut vérifier que pour tout $x \in$

$[0,1], f(x) \leq g(x)$ et $f'(x) > g'(x)$.

6.1. Ensembles de définition

Exercice 2 | Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$
3. $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$

Solution (exercice 2)

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$: la fonction f est bien définie si et seulement si $x^3 \geq 0 \iff x \geq 0$ car la fonction racine cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$. La fonction f est bien définie si et seulement si : $x \neq 0$ et $x - \dfrac{1}{x} \neq 0 \iff \dfrac{x^2-1}{x} \neq 0 \iff x \neq \pm 1$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}}$.
3. $f(x) = \sqrt{x-3} + \dfrac{\sqrt{5+x}}{x}$. La fonction f est bien définie si et seulement si $x - 3 \geq 0$, $5 + x \geq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi, on obtient : $\boxed{\mathscr{D}_f = [3, +\infty[}$.
4. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0$ et $e^x - 1 \neq 0$. Comme le numérateur est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs, on a : $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff x > 0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+*}}$.
5. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$. La fonction f est bien définie si $\dfrac{2-x}{x+4} > 0$ et $x + 4 \neq 0$ (faire un tableau de signe). Donc $\boxed{\mathscr{D}_f =]-4, 2[}$.

Exercice 3 | **Avec paramètre** Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble de définition de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - (m+1)x + m}.$$

Solution (exercice 3) La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Le discriminant donne : $\Delta = (m+1)^2 - 4m = (m-1)^2$.

- Cas 1 : si $m = 1$: On obtient alors $\Delta = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 - (m+1)x + m \geq 0$. Ainsi : $\boxed{\mathscr{D}_{m=1} = \mathbb{R}}$.
- Cas 2 : si $m \neq 1$: On obtient alors $\Delta > 0$ et les deux racines distinctes sont alors : $\dfrac{m+1+|m-1|}{2}$ et $\dfrac{m+1-|m-1|}{2}$. Afin de calculer la valeur absolue, on doit encore distinguer deux cas :
  - Si $m > 1$: les deux racines sont alors 1 et m et on obtient ainsi : $\boxed{\mathscr{D}_{m>1} =]-\infty, 1] \cup [m, +\infty[}$.
  - Si $m < 1$: les deux racines sont alors m et 1 et on obtient ainsi : $\boxed{\mathscr{D}_{m<1} =]-\infty, m] \cup [1, +\infty[}$.

Exercice 4 | **Composée** Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ après avoir indiqué pour quels réels cela a un sens :

1. $f : x \longmapsto 2x^2 - x + 1$ et $g : x \longmapsto 2\sqrt{x-3}$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-8}{x}$ et $g : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$.

Solution (exercice 4)

1. - Étude de $f \circ g$:
     - Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_g$ et $g(x) \in \mathscr{D}_f$. Comme $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_g$, à savoir si et seulement si $x - 3 \geq 0 \iff x \geq 3$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathscr{D}_{f\circ g} = [3, +\infty[}$.
     - Expression : Pour tout $x \geq 3$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = 2(g(x))^2 - (g(x)) + 1 = 8(x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1 = 8x - 23 - 2\sqrt{x-3}$.
   - Étude de $g \circ f$:
     - Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_f$ et $f(x) \in \mathscr{D}_g$. Comme $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $f(x) \in \mathscr{D}_g$, à savoir si et seulement si $f(x) - 3 \geq 0 \iff 2x^2 - x - 2 \geq 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 17$ et les deux racines sont $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$. Ainsi on obtient : $\boxed{\mathscr{D}_{g\circ f} = \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}, +\infty\right[}$.
     - Expression : Pour tout $x \in \mathscr{D}_{g\circ f}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = \sqrt{2x^2 - x - 2}$.
2. - Étude de $f \circ g$:
     - Domaine de définition : La fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement

si $x \in \mathscr{D}_g$ et $g(x) \in \mathscr{D}_f$. Comme $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathscr{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $g(x) \neq 0$. On a : $g(x) \neq 0 \iff \frac{x^2+1}{x} \neq 0 \iff x^2+1 \neq 0$: toujours vrai. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_{f\circ g} = \mathbb{R}^\star}$.

◇ Expression : Pour tout $x \neq 0$, on a : $f \circ g(x) = f[g(x)] = \frac{2(g(x))^2-8}{g(x)} = \frac{2\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-8}{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{2(x^2+1)^2-8x^2}{x^2} \times \frac{x}{x^2+1} = \frac{2x^4-4x^2+2}{x(x^2+1)}$.

- Étude de $g \circ f$:

◇ Domaine de définition : La fonction $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $x \in \mathscr{D}_f$ et $f(x) \in \mathscr{D}_g$. Comme $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star = \mathscr{D}_g$, la fonction $f \circ g$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. On a : $f(x) \neq 0 \iff 2x^2-8 \neq 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{-2,0,2\}}$.

◇ Expression : Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,0,2\}$, on a : $g \circ f(x) = g[f(x)] = f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{2x^2-8}{x} + \frac{x}{2x^2-8} = \frac{4x^4-31x^2+64}{x(2x^2-8)}$.

6.2. Parité, imparité, périodicité, symétrie

Exercice 5 | Dans chacun des cas suivants, étudier la parité et l'imparité de la fonction f. Indiquer aussi la périodicité lorsqu'elle est manifeste :

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$
2. $f(x) = x^2+x^4+x^6+x^8$
3. $f(x) = x+x^3+x^5+2x^7$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}}$
5. $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+|x|}$
6. $f(x) = |x+1|-|x-1|$
7. $f(x) = \sin x + \cos x$
8. $f(x) = \cos x + \cos(2x)$

Solution (exercice 5)

1. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x^2 \geq 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f(-x) = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = f(x)$. Donc la fonction f est paire.
2. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0 et : $\forall x \in \mathscr{D}_f : f(-x) = (-x)^2 + (-x)^4 + (-x)^6 + (-x)^8 = x^2+x^4+x^6+x^8 = f(x)$. Donc la fonction f est paire.
3. - Domaine de définition : la fonction f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -x+(-x)^3 + (-x)^5 + 2(-x)^7 = -x-x^3-x^5-2x^7 = -(x+x^3+x^5+2x^7) = -f(x)$ Donc la fonction f est impaire.
4. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $\frac{1-|x|}{2-|x|} \geq 0$ et $2-|x| \neq 0$. Comme il y a une valeur absolue, on fait des cas :
     ◇ Si $x \geq 0$: on doit résoudre : $\frac{1-x}{2-x} \geq 0$. Un tableau de signe en prenant en compte le fait que $x \geq 0$ donne : $x \in [0,1] \cup]2,+\infty[$.
     ◇ Si $x < 0$: on doit résoudre : $\frac{1+x}{2+x} \geq 0$. Un tableau de signe en prenant en compte le fait que $x < 0$ donne : $x \in]-\infty,-2[\cup [-1,0]$.
     Ainsi, on obtient $\mathscr{D}_f =]-\infty,-2[\cup [-1,1] \cup]2;+\infty[$.
   - Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f(-x) = \sqrt{\frac{1-|-x|}{2-|-x|}} = \sqrt{\frac{1-|x|}{2-|x|}} = f(x)$ car $|-x| = |-1| \times |x| = |x|$. Donc la fonction f est paire.
5. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2+|x| \neq 0$. Or cette expression est toujours positive, comme somme de termes positif, et s'annule uniquement si les deux termes s'annule, c'est-à-dire si et seulement si $x = 0$. Ainsi, on obtient $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   - Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f : f(-x) = \frac{(-x)^3-3x}{(-x)^2+|-x|} = \frac{-x^3-3x}{x^2+|x|} = -f(x)$. Donc la fonction f est impaire.
6. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f : f(-x) = |-x+1| - |-x-1| = \left|-(x-1)\right| - \left|-(x+1)\right| = |-1||x-1| - |-1||x+1| = |x-1| - |x+1| = -(|x+1|-|x-1|) = -f(x)$. Donc la fonction f est impaire.
7. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : pas de parité : la fonction f n'est ni paire, ni impaire.
   - Étude de la périodicité : $\forall x \in \mathscr{D}_f$, $x+2\pi \in \mathscr{D}_f$ et $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \cos(x+2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité des fonctions sinus et cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.
8. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R} : f(-x) = \cos(-x) + \cos(-2x) = \cos x + \cos 2x = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire. Donc la fonction f est paire.
   - Étude de la périodicité : $\forall x \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $x+2\pi \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et $f(x+2\pi) =$

$\cos(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi)) = \cos x + \cos(2x+4\pi) = \cos(x)+\cos(2x) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.

Exercice 6 | **Propriétés générales** Montrer les résultats suivants.

1. La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
2. La composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.
3. La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
4. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

Solution (exercice 6) On considère deux fonctions f et g toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f\circ g$ est impaire.
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x\in\mathbb{R}$: $f\circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est elle aussi impaire, on obtient : $f[-g(x)] = -f[g(x)] = -f\circ g(x)$. Ainsi : $f\circ g(-x) = -f\circ g(x)$.

   Donc $f\circ g$ est impaire et on a bien montré que $\boxed{\text{la composée de deux fonctions impaires est impaire.}}$
2. On suppose par exemple que f est paire et que g est impaire. Montrons que $f\circ g$ est paire.
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x\in\mathbb{R}$: $f\circ g(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)]$ car la fonction g est impaire. Puis comme la fonction f est paire, on obtient : $f[-g(x)] = f[g(x)] = f\circ g(x)$. Ainsi : $f\circ g(-x) = f\circ g(x)$.

   Donc $f\circ g$ est paire et on a bien montré que $\boxed{\text{la composée d'une fonction paire et d'une fonction impaire est paire}}$.
3. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f+g$ est impaire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x\in\mathbb{R}$: $(f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) = -f(x)-g(x)$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f+g)(-x) = -(f(x)+g(x)) = -(f+g)(x)$.

   Donc $f+g$ est impaire et on a bien montré que $\boxed{\text{la somme de deux fonctions impaires est impaire.}}$
4. On suppose que f et g sont deux fonctions impaires. Montrons que $f\times g$ est paire :
   - $\mathbb{R}$ est bien centré en 0.
   - Soit $x\in\mathbb{R}$: $(f\times g)(-x) = f(-x)\times g(-x) = -f(x)\times(-g(x))$ car les fonctions f et g sont impaires. Puis on obtient : $(f\times g)(-x) = f(x)\times g(x) = (f\times g)(x)$.

   Donc $f\times g$ est paire et on a bien montré que $\boxed{\text{le produit de deux fonctions impaires est paire}}$.

6.3. Calculs de dérivées

Exercice 7 | Donner l'ensemble de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivées :

1. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2+1}}$
3. $f(x) = \sqrt{e^x}$
4. $f(x) = e^{x\cos(x)}$
5. $f(x) = (1-x)e^{\sqrt{x-x^2}}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{2+\cos(5x)}$
7. $f(x) = \sin(\ln x)$
8. $f(x) = \ln(e^x+x^2)$
9. $f(x) = \dfrac{x-e^x}{e^x+1}$
10. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}}\right)$
11. $f(x) = \dfrac{1}{(\cos(x))^4}$
12. $f(x) = \dfrac{1}{2^{x+1}}$
13. $f(x) = (e^{2x}-1)^\pi$
14. $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4$
15. $f(x) = 2^{\ln x}$
16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$
17. $f(x) = \ln(\ln x)$
18. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$
19. $f(x) = \dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x}$

Solution (exercice 7)

1.
   - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x\neq 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée et produit de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x\in\mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2x+1).}$

2. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est définie si et seulement si $x^2+1 \geq 0$ et $\sqrt{x^2+1} \neq 0$. Ainsi elle est bien définie si et seulement si $x^2+1 > 0$ ce qui est toujours vrai. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et car $x^2+1>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f'(x) = \frac{\cos x\sqrt{x^2+1} - \sin x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{(x^2+1)\cos x - x\sin x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$
3. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est définie si et seulement si $\mathrm{e}^x \geq 0$: toujours vrai. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x > 0$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}$.
4. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = [\cos(x) - x\sin(x)]\,\mathrm{e}^{x\cos x}.}$
5. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x - x^2 \geq 0$. C'est un polynôme de deré 2 dont les racies sont 0 et 1. Donc $\mathscr{D}_f = [0,1]$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable si $x - x^2 > 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $]0,1[$ comme somme, coposée et produti de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\boxed{f'(x) = \left[\dfrac{(1-x)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} - 1\right]\mathrm{e}^{\sqrt{x-x^2}}.}$
6. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $2+\cos(5x) \neq 0 \iff \cos(5x) \neq -2$: impossible car un cosinus est toujours compris entre -1 et 1. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit, composée, somme et quotient de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :
   $$f'(x) = \frac{\sin^2(2x)}{(2+\cos(x))^2} \times [12\cos(2x) + 6\cos(2x)\cos(5x) + 5\sin(2x)\sin(5x)].$$
7. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}.}$
8. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est définie si et seulement si $\mathrm{e}^x + x^2 > 0$: toujours vrai comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 2x}{\mathrm{e}^x + x^2}$.
9. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $\mathrm{e}^x + 1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes tous les deux strictement positifs, une exponentielle étant toujours strictement positive. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme somme et quotient de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.}$
10. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2 - 4 > 0$ et $\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2-4}} > 0$. Comme une racine carrée est toujours positive, la fonction f est bien définie si et seulement si $9x^2-4>0$ et $x+2>0$. La première condition est un polynôme de degré 2 dont les racines sont $-\dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{2}{3}$. Donc $\mathscr{D}_f = \left]-2, -\dfrac{2}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$.
    - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ (car ce qui est sous la racine est déjà strictement positif) comme produit, sommes, composées et quotient de fonctions dérivables.
    - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2(9x+2)}{(x+2)(9x^2-4)}.}$
11. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos^4(x) \neq 0 \iff \cos x \neq 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
    - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
    - **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{4\sin(x)}{(\cos(x))^5}.}$
12. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement

si $2^{x+1} \neq 0 \iff \mathrm{e}^{(x+1)\ln 2} \neq 0$: toujours vrai car une exponentielle est toujours strictement positive. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit, composée et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-\ln 2}{2^{x+1}}}$. On peut pour cela remarquer que $f(x) = \mathrm{e}^{-(x+1)\ln 2}$.

13. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$ car on a : $(\mathrm{e}^{2x}-1)^{\pi} = \mathrm{e}^{\pi \ln(\mathrm{e}^{2x}-1)}$. Or $\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{2x} > 1 \iff x > 0$ par passage au logarithme népérien qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée, somme et produit de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{2\pi \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}-1}(\mathrm{e}^{2x}-1)^{\pi}}$.

14. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x^2 + 3x \geq 0$ et $3^x = \mathrm{e}^{x\ln 3} \neq 0$. La deuxième condition est toujours vérifiée car une exponentielle est toujours strictement positive. Pour la première condition, on reconnaît un polynôme de degré 2 dont les racines sont 0 et -3. Donc $\mathscr{D}_f =]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$ car on doit avoir $x^2 + 3x > 0$ puis comme sommes, produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{2(x^2+3x)}{3^{4x}}\left[2x+3-2(x^2+3x)\ln 3\right]}$.

15. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ en écrivant que $2^{\ln x} = \mathrm{e}^{\ln(x)\ln 2}$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{\ln 2}{x} 2^{\ln x}}$.

16. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$, $\ln x \geq 0$ et $x \neq 0$. La deuxième condition donne : $\ln x \geq 0 \iff x \geq 1$. Donc $\mathscr{D}_f = [1, +\infty[$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir $\ln x > 0$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{2x^2\sqrt{\ln x}}}$.

17. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) > 0$. Or on a : $\ln(x) > 0 \iff x > 1$. Donc $\mathscr{D}_f =]1, +\infty[$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme composée de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}}$.

18. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $\sqrt{x^2-1} + x > 0 \iff \sqrt{x^2-1} > -x$ et $x^2 - 1 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On doit donc étudier deux cas afin de résoudre la première inéquation :

- ◇ Si $x \geq 1$, alors $-x \leq -1$ et l'inéquation est toujours vérifiée car une racine carrée est toujours supérieure à un nombre négatif.
- ◇ Si $x \leq -1$ alors $-x \geq 1$ et on peut donc passer au carrée tout en conservant l'équivalence, la fonction carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors : $\sqrt{x^2-1} > -x \iff x^2 - 1 > x^2 \iff -1 > 0$. Toujours faux.

Donc $\mathscr{D}_f = [1, +\infty[$.

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ car on doit avoir en plus $x^2 - 1 > 0$ comme somme et composée de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$.

19. • **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} \neq 0$. La deuxième inéquation est toujours vérifiée, une exponentielle étant toujours strictement négative. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$ (on commence par écrire que : $\dfrac{3^{x-1}\cos x}{x^x} = \dfrac{\cos(x)e^{(x-1)\ln(3)}}{\mathrm{e}^{x\ln x}}$).

- **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme produit, composées et quotient de fonctions dérivables.
- **[Dérivée]** Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{(x-1)\ln(3)}}{x^x} \times \left[-\sin(x) + \ln(3)\cos(x) - \cos(x)(\ln(x)+1)\right]$$

Exercice 8 | **Avec valeurs absolues** Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis leur ensemble de dérivabilité, et calculer leur dérivée.

1. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\left|x^2-1\right|\right)}{x}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{|\mathrm{e}^x - 1| + 1}}$.

Solution (exercice 8)

1. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $\left|x^2-1\right|>0$ et $x\neq 0$. Or une valeur absolue est toujours positive ou nulle donc on a : $\left|x^2-1\right|>0 \iff x^2-1\neq 0 \iff x\notin\{-1,1\}$. Donc $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ comme somme, composée et quotient de fonctions dérivables (il y a une valeur absolue mais on a bien $x^2-1\neq 0$ sur $\mathscr{D}_f$ donc le domaine de dérivabilité est bien égal au domaine de définition).
   - **[Dérivée]** Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\left\|x^2-1\right\|$		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1	
$f(x)$		$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	‖	$\dfrac{\ln(1-x^2)}{x}$	‖	$\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$	

On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

◇ Si $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$: on a alors $f'(x)=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$.

◇ Si $x\in]-1,0[\cup]0,1[$: on a alors $f'(x)=\dfrac{2x^2-(x^2-1)\ln(1-x^2)}{x^2(x^2-1)}$.

On peut remarquer que l'on peut regrouper ces deux cas en une formule générale en utilisant de nouveau la valeur absolue et on obtient :

$$\boxed{\forall x\in\mathscr{D}_f,\ f'(x)=\frac{2x^2-(x^2-1)\ln\left|x^2-1\right|}{x^2(x^2-1)}.}$$

2. - **[Ensemble de définition]** La fonction f est bien définie si et seulement si $|e^x-1|+1>0$: toujours vrai comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif car $1>0$ et une valeur absolue est toujours positive ou nulle. Donc $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$.
   - **[Ensemble de dérivabilité]** La fonction f est dérivable si et seulement si $x\in\mathscr{D}_f$ et $e^x-1\neq 0$ (à cause de la présence de la valeur absolue). Or on a : $e^x-1\neq 0 \iff x\neq 0$. Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme composée et quotient de fonctions dérivables.
   - **[Dérivée]** Comme il y a une valeur absolue, on étudie des cas afin d'enlever la valeur absolue. On a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\|e^x-1\|$		$1-e^x$	0	e^x-1	
$f(x)$		$\dfrac{x}{\sqrt{2-e^x}}$	‖	$\dfrac{x}{\sqrt{e^x}}$	

On obtient donc ainsi l'expression de f' en dérivant l'expression de f selon les cas :

◇ $\boxed{\text{Si } x\in]-\infty,0[\text{ : on a alors } f'(x)=\dfrac{4-2e^x+xe^x}{2(2-e^x)\sqrt{2-e^x}}.}$

◇ $\boxed{\text{Si } x\in]0,+\infty[\text{ : on a alors } f'(x)=\dfrac{2-x}{2\sqrt{e^x}}.}$

6.4. Calculs de limites

Exercice 9 | **Avec fonctions logarithmes & exponentielles** Calculer les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur domaine de définition. On justifiera correctement les résultats.

1. $f(x)=e^{x^2+x+1}$
2. $f(x)=e^{2x}-e^x$
3. $f(x)=\dfrac{e^x+x^2+x+1}{e^{2x}+1}$
4. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$
5. $f(x)=e^{x^2}-e^{x+1}$
6. $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
7. $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{2x+1}\right)$
8. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$
9. $f(x)=\dfrac{2^x}{x^2+1}$
10. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln x$
11. $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
12. $f(x)=e^x-x^{\frac{2}{3}}$
13. $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$
14. $f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x-2}}$

15. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$

Solution (exercice 9) On ne détaille pas tous les calculs.

1. - **[Domaine de définition]** La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Limite en $-\infty$]** Par le en mettant en facteur le monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} x^2+x+1 = +\infty$. Donc par propriété sur la composition de limite, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
   - **[Limite en $+\infty$]** Par propriété sur les sommes et composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. - **[Domaine de définition]** La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Limite en $-\infty$]** Par propriété sur les composition et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
   - **[Limite en $+\infty$]** FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{2x}. On obtient que : $f(x) = \mathrm{e}^{2x}(1-\mathrm{e}^{-x})$. Puis par propriété sur les composition, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. - **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $\mathrm{e}^{2x}+1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes strictement positifs. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Limite en $-\infty$]** Par le en mettant en facteur le monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} x^2+x+1 = +\infty$. Puis par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
   - **[Limite en $+\infty$]** FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur (e^x) et au dénominateur e^{2x}. On obtient alors que par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.
4. - **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $x-1 \neq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
   - **[Limite en $-\infty$]** Par le en mettant en facteur le monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = 1$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$.
   - **[Limite en $+\infty$]** Par le en mettant en facteur le monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$. Donc par propriété sur les composée et produit de limites : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = 1$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
   - **[Limite en 0^-]** Par propriété sur les somme, quotients et composée de limites : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 0$.
   - **[Limite en 0^+]** FI. On fait apparaître une croissance comparée en posant $\mathrm{X} = \dfrac{1}{x}$ et écrivant que : $f(x) = \mathrm{F}(\mathrm{X}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{1-\mathrm{X}}$. Quand x tend vers 0^+, X tend vers $+\infty$. Donc on a encore une FI. On fait alors apparaître une croissance comparée en écrivant que : $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} \times \dfrac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim\limits_{\mathrm{X}\longrightarrow +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} = +\infty$ et par théorème sur les monômes de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{\mathrm{X}\longrightarrow +\infty} \dfrac{\mathrm{X}}{1-\mathrm{X}} = -\infty$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim\limits_{\mathrm{X}\longrightarrow +\infty} \mathrm{F}(\mathrm{X}) = -\infty$. Enfin par propriété sur la composition de limite, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0^+$.
   - **[Limite en 1^-]** Par propriété sur les somme, quotients, composée et produit de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1^-$.
   - **[Limite en 1^+]** Par propriété sur les somme, quotients, composée et produit de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1^+$.
5. - **[Domaine de définition]** La fonction f est toujours bien définie. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Limite en $-\infty$]** Par propriété sur les sommes et composées de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
   - **[Limite en $+\infty$]** FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^{x^2}. On obtient que $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}(1-\mathrm{e}^{-x^2+x+1})$. Par le en mettant en facteur le monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} -x^2+x+1 = -\infty$. Ainsi par propriété sur les sommes, composées etb produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
6. - **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1} > 0$ et $\mathrm{e}^x - 1 \neq 0$. Comme le numérateur est strictement positif comme somme de deux termes strictement positifs, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1} > 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff x > 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
   - **[Limite en 0^+]** Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote

verticale d'équation $x = 0$.

- **[Limite en $+\infty$]** FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^x. On obtient alors $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)$. Puis par propriétés sur les composées, sommes, quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

7. - **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $\dfrac{e^x+x^2}{2x+1} > 0$ et $2x+1 \neq 0$. Comme le numérateur est toujours strictement positif comme somme de deux nombres positifs dont l'un est strictement positif, on a : $\dfrac{e^x+x^2}{2x+1} > 0 \iff 2x+1 > 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
   - **[Limite en $-\frac{1}{2}^+$]** Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.
   - **[Limite en $+\infty$]** FI donc on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur à savoir e^x au numérateur et x au dénominateur. On obtient que : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1+\frac{x^2}{e^x}}{2+\frac{1}{x}}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les sommes, quotients, produit et composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

8. - **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $\dfrac{2-x}{x+4} > 0$ et $x+4 \neq 0$ (faire un tableau de signe). Donc $\mathscr{D}_f =]-4, 2[$.
   - **[Limite en -4^+]** Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$.
   - **[Limite en 2^-]** Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

9. - **[Domaine de définition]** La fonction f est toujours bien définie car $x^2+1 \neq 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   - **[Limite en $-\infty$]** Par propriété sur les produits, somme, composée et quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.
   - **[Limite en $+\infty$]** FI donc on fait apparaître une croissance comparée en mettant en facteur x^2 terme dominant au dénominateur. On obtient que $f(x) = \dfrac{e^{\ln 2x}}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\ln 2x}}{x^2} = +\infty$. Puis par propriété sur les quotients, somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

10. - **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $x > 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - **[Limite en 0^+]** Par propriété sur les produits et composée de limites, on a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
    - **[Limite en $+\infty$]** FI car $f(x) = \ln(x)e^{-x\ln 2}$. On va faire apparaître une croissance comparée en multipliant et divisant par x. On obtient que : $f(x) = \dfrac{x}{e^{\ln 2x}} \times \dfrac{\ln x}{x}$. Par croissances comparées, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{\ln 2x}} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$. Ainsi par propriété sur le produit de limite, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

11. - **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $x \geq 0$ et $x \neq 0$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - **[Limite en 0^+]** Par propriété sur les composée et quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
    - **[Limite en $+\infty$]** FI donc on transforme l'expression afin de faire apparaître une croissance comparée. On pose par exemple $X = \sqrt{x}$ et on obtient que $f(x) = F(X) = \dfrac{e^X}{X^4}$. Ainsi par croissance comparée : $\lim\limits_{X\to+\infty} F(X) = +\infty$. Puis par propriété sur la composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

12. - **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $x > 0$ car $x^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\ln x}$. Donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
    - **[Limite en 0^+]** Par propriété sur les produit, composée et somme de limites, on a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$.
    - **[Limite en $+\infty$]** FI donc on met en facteur le terme dominant à savoir e^x. On obtient que : $f(x) = e^x\left(1 - \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x}\right)$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x} = 0$. Puis par propriété sur les somme et produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

13. • **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $x-2\neq 0$. Donc $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\smallsetminus\{2\}$.

• Par propriété sur les sommes, quotient et composée de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=0$.

14. • **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $x-2\neq 0$. Donc $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\smallsetminus\{2\}$.

• Par propriété sur les sommes, quotient, composée et produit de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=0$.

15. • **[Domaine de définition]** La fonction f est bien définie si $x^2+1>0$ et $x\neq 0$ La première inéquation est toujours vraie comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Donc $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}^\star$.

• **[Limite en $-\infty$]** FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x)=2\dfrac{\ln|x|}{x}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{\ln|x|}{x}=0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=0$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.

• **[Limite en $+\infty$]** FI donc on met en facteur le terme dominant x^2 dans le logarithme afin de faire apparaître une croissance comparée. On obtient que : $f(x)=2\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$. Par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et par propriété sur les quotients, somme et composée de limites : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=0$. Donc par propriété sur les sommes de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=0$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

• **[Limite en 0]** FI donc on fait apparaître la limite connue suivante $\lim\limits_{X\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ en écrivant que : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\times x$. On a ainsi d'après les limites usuelles et par composition que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}=1$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=0$.

Exercice 10 | **Avec exponentielles & logarithmes** Calculer, en cas d'existence, les limites aux points indiqués.

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}}} \mathrm{e}^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (1+\mathrm{e}^x)^{1/x}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\cos(x^2)+\ln(2x)-x^3}{3x^3+\sin x-x}$

Solution (exercice 10)

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}=\lim\limits_{X\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{\frac{X-1}{X+1}}=\mathrm{e}$ par composition et et en mettant en facteur le monôme de plus haut degré.
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}=\lim\limits_{X\longrightarrow-\infty} \mathrm{e}^{\frac{X-1}{X+1}}=\mathrm{e}$ par composition et et en mettant en facteur le monôme de plus haut degré.
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}}^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}=\lim\limits_{X\longrightarrow-1^+} \mathrm{e}^{\frac{X-1}{X+1}}=0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}}^-} \mathrm{e}^{\frac{\ln x-1}{\ln x+1}}=\lim\limits_{X\longrightarrow-1^-} \mathrm{e}^{\frac{X-1}{X+1}}=+\infty$ par composition et par propriété sur les limites. Il n'y a donc pas de limite en $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (1+\mathrm{e}^x)^{1/x}=\mathrm{e}$ en mettant le terme prépondérant e^x en facteur dans le logarithme népérien et en séparant avec $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ puis propriétés sur les limites.
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\cos(x^2)+\ln(2x)-x^3}{3x^3+\sin x-x}=-\dfrac{1}{3}$. On met en facteur x^3 au numérateur et au dénominateur car c'est le terme prépondérant puis on utilise une croissance comparée et le corollaire du théorème d'encadrement pour le cosinus et le sinus.

Exercice 11 | **Avec polynômes & fractions rationnelles** Calculer, en cas d'existence, les limites aux points indiqués.

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow -5^+} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x^3-2x}{2x^2-1}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^5-1}{x^3-1}$
7. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{x^3+8}{|x+2|}$
8. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos^2 x-\cos x}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$
9. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(x^2-3x+1-x|x-3|\right)$
10. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(x^2-3x+1-x|x-3|\right)$

Solution (exercice 11) On ne donne ici que les résultats et l'idée d'une méthode possible pour obtenir la limite.

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}=-\infty$: en mettant en facteur le monôme de plus haut degré.
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-}\dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4x^2}=+\infty$: on met x en facteur puis propriété sur les limites.
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow1^-}\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+4x-5}=\dfrac{4}{3}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites.
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow-5^+}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5}=\dfrac{4}{3}$: on met $x+5$ en facteur.
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{x^3-2x}{2x^2-1}=-\infty$: en mettant en facteur le monôme de plus haut degré.
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}=\dfrac{5}{3}$: on met $x-1$ en facteur puis propriété sur les limites ou on peut aussi reconnaître un taux d'accroissement.
7. $\lim\limits_{x\longrightarrow-2^+}\dfrac{x^3+8}{|x+2|}=12$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-2^-}\dfrac{x^3+8}{|x+2|}=-12$: on met $x+2$ en facteur au numérateur puis propriété sur les limites.
8. $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\dfrac{\cos^2x-\cos x}{2\cos^2x-3\cos x+1}=\lim\limits_{X\longrightarrow1}\dfrac{X^2-X}{2X^2-3X+1}=1$: on met $X-1$ en facteur puis propriété sur les limites.
9. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x^2-3x+1-x|x-3|=1$ car on peut prendre $x>3$ et par propriété de la valeur absolue.
10. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}x^2-3x+1-x|x-3|=+\infty$ car on peut prendre $x<3$ et par propriété de la valeur absolue.

Exercice 12 | **Avec des racines** Calculer, en cas d'existence, les limites aux points indiqués.

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}\right)$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow-1}\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}\right)$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{x^2+1}+x$
7. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}$
8. $\lim\limits_{x\longrightarrow1}\dfrac{\sqrt{7+2x}-3}{x^2-1}$
9. $\lim\limits_{x\longrightarrow2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$
10. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

Solution (exercice 12)

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}\dfrac{|x|}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1$ par propriété de la valeur absolue.
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x^3}=+\infty$ en utilisant la quantité conjuguée et en mettant en facteur le terme prépondérant.
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^-}\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+}\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}=-\infty$ en mettant sur le même dénominateur qui est $(x+1)^3$.
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}=+\infty$ car en simplifiant par la racine en haut et en bas on obtient $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}=1$ en mettant en facteur le terme prépondérant x^2 dans la racine et en le sortant de la racine.
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{x^2+1}+x=0$ en utilisant la quantité conjuguée.
7. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}=2$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme prépondérant.
8. $\lim\limits_{x\longrightarrow1}\dfrac{\sqrt{7+2x}-3}{x^2-1}=\dfrac{1}{3}$ en utilisant la quantité conjuguée puis en mettant en facteur $x-1$ au numérateur et au dénominateur.
9. $\lim\limits_{x\longrightarrow2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\dfrac{3}{2}$ en utilisant la quantité conjuguée pour le numérateur et pour le dénominateur.
10. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$ en utilisant la quantité conjuguée et en mettant ensuite en facteur le terme prépondérant au dénominateur.

Exercice 13 | **Avec fonctions trigonométriques**

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow0}\sin x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\sin x}{x^2-\ln x}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}$ *Indication : On pourra reconnaître un taux d'accroissement*

Solution (exercice 13)

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème d'encadrement. On peut essayer le théorème d'encadrement, mais le fait ne pas connaitre le signe de x nécessiterait de faire des sous-cas : on privilégie plutôt la valeur absolue. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^\star$:
$$0 \leqslant \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1 \implies 0 \leqslant \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|.$$
Or $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} |x| = 0$, donc par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème d'encadrement. Il faut par contre distinguer 2 cas : $x > 0$ et $x < 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$.
   - CAS 1 : si $x > 0$, par exemple $x \in]0,\pi[$. On a alors comme $x \in]0,\pi[$: $\sin(x) > 0$ et donc $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1 \iff -\sin x \leqslant \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \sin x$. Puis comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} -\sin x = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \sin x = 0$, le théorème d'encadrement assure que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
   - CAS 2 : si $x < 0$, par exemple $x \in]-\pi,0[$. On a alors comme $x \in]-\pi,0[$: $\sin(x) < 0$ et donc $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1 \iff \sin(x) \leqslant \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant -\sin(x)$. Puis comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} -\sin x = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \sin x = 0$, le théorème d'encadrement assure que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

   Comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, la limite en 0 existe bien et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. On a en effet :
$$0 \leqslant \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1 \implies 0 \leqslant \left|\sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |\sin x|.$$
Or $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} |\sin x| = 0$, donc par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème d'encadrement :
$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff -\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{x\sin x}{x^2+1} \leqslant \frac{x}{x^2+1}$$
car $\frac{x}{x^2+1} > 0$ car on calcule la limite en $+\infty$. De plus $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} -\frac{x}{x^2+1}$ d'après le en mettant en facteur le monôme de plus haut degré.
On obtient alors bien que $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1} = 0$ en utilisant le théorème d'encadrement.

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x} = 0$ en utilisant l'encadrement du sinus et le théorème d'encadrement. En effet,
$$\frac{\sin x}{x^2 - \ln x} = \frac{\sin x}{x^2}\,\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x^2}}.$$
Le deuxième terme tend vers 1 par croissances comparées. On applique le théorème d'encadrement au premier :
$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \iff -\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{\sin x}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}.$$
De plus $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2}$. On obtient alors bien que $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$ en utilisant le théorème d'encadrement, puis que $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \ln x} = 0}$.

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x - 1}{2\sin x - \sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ en mettant 2 en facteur et en reconnaissant deux taux d'accroissements.

Exercice 14 | Avec partie entière

1. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $g(x) = x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
2. La fonction h définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $h(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
3. Soient a et b strictement positifs. Calculer :
   1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor$
   2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor$
   3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor$
4. Étudier $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(1 - x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right)$.

Solution (exercice 14)

1. On remarque que, pour $x > 1$, la fonction g est nulle. En effet :
$$\forall x > 1,\ 0 < \frac{1}{x} < 1$$
et donc : $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ admet une limite en } +\infty \text{ qui est nulle.}}$
2. Par le même raisonnement que ci-dessus, on sait que :
$$\forall x > 1,\ h(x) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} h(x)=0$.

3. **3.1)** On utilise ici l'inégalité caractéristique de la partie entière, à savoir :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x.$$

- Ainsi, pour $x>0$, on obtient : $\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}<\dfrac{x}{a}\left\lfloor\dfrac{b}{x}\right\rfloor\leqslant\dfrac{b}{a}$. Et ainsi par le théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}\dfrac{x}{a}\left\lfloor\dfrac{b}{x}\right\rfloor=\dfrac{b}{a}$.
- Et pour $x<0$, on obtient que : $\dfrac{b}{a}<\dfrac{x}{a}\left\lfloor\dfrac{b}{x}\right\rfloor\leqslant\dfrac{b}{a}-\dfrac{x}{a}$. Et ainsi par le théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-}\dfrac{x}{a}\left\lfloor\dfrac{b}{x}\right\rfloor=\dfrac{b}{a}$.

Ainsi la limite en 0 existe et vaut $\dfrac{b}{a}$.

3.2) Par définition de la partie entière, on a, comme $a>0$: $\forall x\in\,]0,a[,\quad \left\lfloor\dfrac{x}{a}\right\rfloor=0\implies\forall x\in]0,a[,\quad \dfrac{b}{x}\left\lfloor\dfrac{x}{a}\right\rfloor=0$. Ainsi, la limite en 0^+ existe et vaut 0.

3.3) Par définition de la partie entière, on a, comme $a>0$:

$$\forall x\in]-a,0[,\quad \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor=-1\implies\forall x\in]-a,0[,\quad \frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor=-\frac{b}{x}.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-}\dfrac{b}{x}\left\lfloor\dfrac{x}{a}\right\rfloor=+\infty$ car $b>0$.

4. On utilise l'inégalité caractéristique de la partie entière et on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R}^\star,\qquad \frac{1}{x}-1<\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant\frac{1}{x}.$$

On distingue alors les cas $x>0$ et $x<0$ puisqu'on a envie de multiplier par x, et on obtient :

- Cas $x>0$: on a :
$$1-x<\quad x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant\quad 1-1\leqslant\quad -x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor<\quad x-10\leqslant\quad 1-x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor<\quad x.$$
Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}\left(1-x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\right)=0$.
- Cas $x<0$: on a par le même type de raisonnement que :
$$x<1-x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant0.$$
Ainsi toujours par le théorème d'encadrement, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-}\left(1-x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor\right)=0$.

Ainsi la limite à gauche et à droite étant la même, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow0}1-x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$.

Exercice 15 | **Valeurs absolues** On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f:x\longmapsto|2x-3|+|x-5|\quad\text{et}\quad g:x\longmapsto\left|2x^2-5\right|-\left|x^2-1\right|.$$

Simplifier les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction des valeurs de x. En déduire les représentations graphiques de ces deux fonctions.

Solution (exercice 15)

1. Étude de f : on fait un tableau donnant les valeurs de f selon la valeur de x :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$		$-2x+3$	0	$2x-3$		$2x-3$	
$\lvert x-5\rvert$		$-x+5$		$-x+5$	0	$x-5$	
$f(x)$		$-3x+8$		$x+2$		$3x-8$	

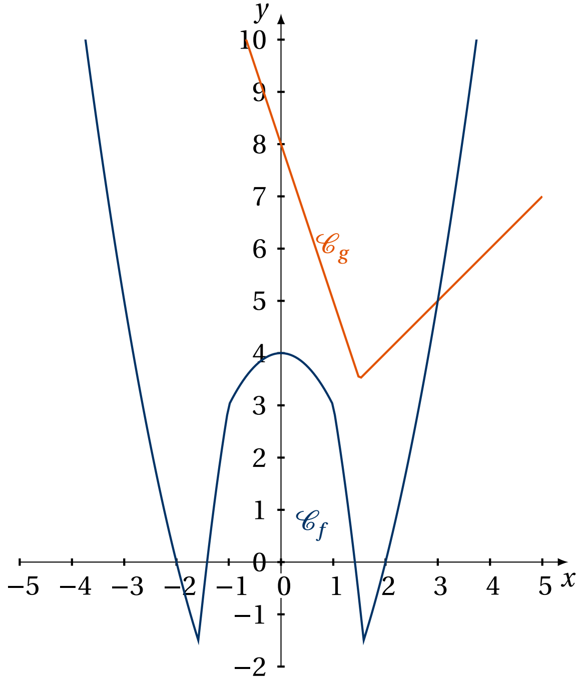
On peut alors tracer la fonction qui correspond à 3 bouts de droite, qui se rejoignent en $\dfrac{3}{2}$ et en 5.

2. Étude de g : On fait de même pour la fonction g :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5/2}$		-1		1		$\sqrt{5/2}$		$+\infty$
$\lvert 2x^2-5\rvert$		$2x^2-5$	0	$5-2x^2$		$5-2x^2$		$5-2x^2$	0	$2x^2-5$	
$\lvert x^2-1\rvert$		x^2-1		x^2-1	0	$1-x^2$	0	x^2-1		x^2-1	
$g(x)$		x^2-4		$-3x^2+6$		$-x^2+4$		$-3x^2+6$		x^2-4	

On peut alors tracer les fonctions.

COURBES REPRÉSENTATIVES



Exercice 16 | Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1-x}{2x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f, étudier sa dérivabilité et calculer sa dérivée.
2. Déterminer les limites de f aux bords de $\mathscr{D}_f$ et dresser son tableau de variations.
3. Étudier les asymptotes.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x = 1$.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ -x \in \mathscr{D}_f$ et $f(-x) = -1 - f(x)$. Donner une interprétation graphique.
6. Tracer la courbe représentative de f.
7. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et les déterminer. Que représentent ces solutions pour la courbe représentative de f ?

Solution (exercice 16)

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $2x \neq 0$ et ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2}$.
2.
   - Limites en $\pm\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ d'après le théorème des monomes de plus haut degré. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ au voisinage de $\pm\infty$.
   - Limites en 0 : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les somme et quotient de limites. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

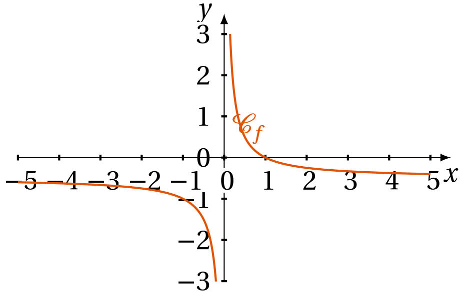
   On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$-\frac{1}{2}$ ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{2}$

3. Déjà fait à la question précédente.
4. La fonction f est dérivable en 1 ainsi la tangente T_1 à la courbe au point d'abscisse 1 existe bien et son équation est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Les calculs donnent : $y = -\dfrac{1}{2}(x-1)$.
5.
   - Le domaine de définition est bien centré en 0 car : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, -x \in \mathbb{R}^\star$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}^\star$, on a : $f(-x) = \dfrac{x+1}{-2x} = -\dfrac{x+1}{2x}$ et $-1 - f(x) = \dfrac{-2x+x-1}{2x} = -\dfrac{x+1}{2x}$. Ainsi, on a bien : $f(-x) = -1 - f(x)$.

   On cherche alors une symétrie s entre les points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$ sur le graphe de f, soit s telle que $(-x, f(-x)) = s(x, f(x))$. Pour cela, essayons de trouver quelles conditions doit vérifier $(x, f(x))$ pour que le point soit inchangé par la symétrie. Le point $(x, f(x))$ est un point fixe de s si on a $s(x, f(x)) = (x, f(x))$. Or $s(x, f(x)) = (-x, f(-x))$, donc on doit avoir :
   $$\begin{cases} -x &= x \\ f(-x) &= f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x &= 0 \\ -1-f(x) &= f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x &= 0 \\ f(x) &= -\frac{1}{2} \end{cases}.$$
   Le seul point fixe de la transformation est $\Omega\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$. On vérifie alors que l'on a bien : $\dfrac{x+(-x)}{2} = 0$ et $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = -\dfrac{1}{2}$, autrement dit que Ω est le milieu entre les points $(x, f(x))$ et $(-x, f(-x))$. On obtient alors que la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

6. Graphe de f :



7. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$: $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \dfrac{-x+1-2x^2}{2x} = 0 \iff -2x^2 - x + 1 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 9$ et les deux racines sont -1 et $\dfrac{1}{2}$. Ces solutions correspondent aux abscisses des points fixes pour la fonction f.

Exercice 17 | Soit la fonction h définie par $h(x) = x \exp|\ln|x||$.

1. Donner l'ensemble de définition de h.
2. Représenter graphiquement la fonction h.

Solution (exercice 17)

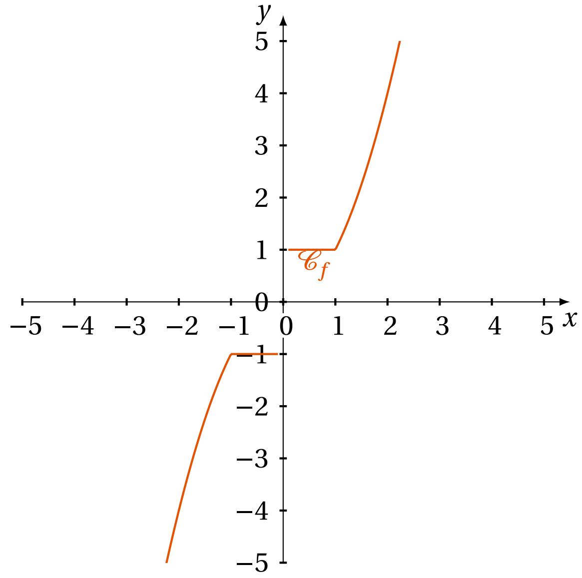
1. La fonction f est bien définie si et seulement si $x \neq 0$. Ainsi on a : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star$.
2. On commence par donner l'expression de $f(x)$ selon les valeurs de x.
   - Si $x > 0$, on a : $f(x) = xe^{|\ln x|}$. Il s'agit alors d'étudier le signe de $\ln x$.
     - Si $x \geq 1$, on obtient : $f(x) = xe^{\ln x} = x^2$.
     - Si $0 < x < 1$, on obtient : $f(x) = xe^{-\ln x} = xe^{\ln \frac{1}{x}} = x \times \dfrac{1}{x} = 1$.
   - Si $x < 0$, on a : $f(x) = xe^{|\ln(-x)|}$. Là encore, il s'agit d'étudier le signe de $\ln(-x)$:
     - Si $-1 \leq x < 0$ alors $0 < -x \leq 1$ et on obtient : $f(x) = xe^{-\ln(-x)} = xe^{\ln \frac{-1}{x}} = x \times \dfrac{-1}{x} = -1$.
     - Si $x < -1$ alors $-x > 1$, on obtient : $f(x) = xe^{\ln(-x)} = -x^2$.

   Ainsi, on obtient les valeurs suivantes pour f selon les valeurs de x :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-x^2$	-1	1	x^2	

   On peut alors tracer la fonction :

Courbe représentative



Exercice 18 | **Fonctions trigonométriques** Soit f une fonction définie par : $f(x) = \ln|\cos(x)\sin(x)|$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est π périodique, paire et que : $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = f(x)$. A quel intervalle peut-on réduire l'étude de la fonction f ?
3. Montrer soigneusement que f est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.
4. Tracer la courbe de f en justifiant sa construction.

Solution (exercice 18)

1. La fonction f est bien définie si et seulement si $\cos x \sin x \neq 0$. Or on a : $\cos x \sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\quad x = k\pi$. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Réduction d'intervalle :
   - Montrons que f est π périodique : pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a bien $x + \pi \in \mathscr{D}_f$ et $f(x+\pi) = \ln|\cos(x+\pi)\sin(x+\pi)| = \ln|-\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$. Ainsi la fonction f est π périodique et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.
   - Montrons que f est paire : $\mathscr{D}_f$ est centré en 0, et : $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f(-x) =$

$\ln|\cos(-x)\sin(-x)| = \ln|\cos x \times (-\sin x)| = \ln|\cos x \sin x| = f(x)$ en utilisant le fait que la fonction cosinus est paire, la fonction sinus impaire et le fait que $|-1| = 1$. Ainsi la fonction f est paire et on peut restreindre l'étude à $]0, \frac{\pi}{2}[$.

- Soit $x \in \mathscr{D}_f$, on a : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| = \ln|\sin x \cos x| = f(x)$ en utilisant le formulaire de trigonométrie.
  On peut faire un dessin pour s'en rendre compte mais une telle égalité signifie que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie pour la courbe.
  Ainsi on peut étudier la fonction sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis faire la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$ pour obtenir la courbe sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

3. La fonction $x \longmapsto \cos x \sin x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ comme produit de fonctions dérivables. De plus, sur cet ensemble, cette fonction ne s'annule pas. Comme la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, on obtient que $x \longmapsto |\cos x \sin x|$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition. Comme sur cet intervalle, la fonction est à valeurs strictement positives et que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, f est bien dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ par composition.

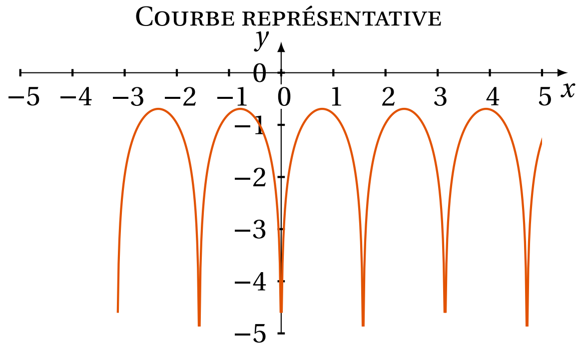
De plus, en étudiant des cas, on sait que $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ si u dérivable. Ainsi ici on obtient que : $f'(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{\cos(2x)}{\cos x \sin x}$.

Sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $\cos x > 0$, $\sin x > 0$ et $\cos(2x) \geq 0$ car $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi on a : $f'(x) \geq 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

x	0 $\frac{\pi}{4}$
f	$-\infty$ ↗ $-\ln 2$

En effet : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ par propriétés sur les produit et composées de limites.

4. Graphe de f :



Exercice 19 | **Fonctions trigonométriques** Soit la fonction f définie par :

$f(x) = 3\cos x - \cos(3x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$. Déterminer les abscisses pour lesquelles la tangente est horizontale.
5. Représenter f sur l'intervalle $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Solution (exercice 19)

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - Étude de la parité : $\mathbb{R}$ est centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 3\cos(-x) - \cos(-3x) = 3\cos x - \cos(3x)$ car la fonction f est paire. Ainsi $f(-x) = f(x)$, et la fonction f est paire.
   - Étude de la périodicité : vérifions que la fonction est 2π périodique :
     - ◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathbb{R}$.
     - ◇ Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3(x+2\pi)) = 3\cos(x+2\pi) - \cos(3x+6\pi) = f(x)$ en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus.

     Ainsi la fonction f est 2π périodique.

   Par 2π périodicité, on peut restreindre l'étude à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. Puis par parité, on peut restreindre l'intervalle à $[0, \pi]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ sera alors obtenue par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -3\sin x + 3\sin(3x) = -3(\sin x - \sin(3x)) = -3 \times 2\cos(2x)\sin(-x) = 6\cos(2x)\sin(x)$ en utilisant une formule de trigonométrie et le fait que la fonction sinus est impaire.
3. étude du signe de f' sur $[0, \pi]$:

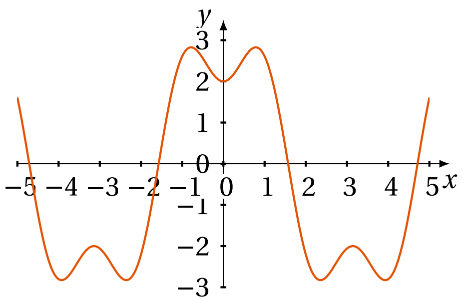
Sur $[0,\pi]$, on a : $\sin(x) \geq 0$ et ainsi le signe de f' ne dépend que du signe de $\cos(2x)$. On a : $\cos(2x) \geq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{4}+k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}+k\pi$. En faisant un cercle trigonométrique, on remarque que sur $[0,\pi]$, on obtient : $\cos(2x) \geq 0 \iff x \in [0,\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4},\pi]$. On obtient ainsi le tableau des variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2

4. • La fonction f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ existe bien et son équation est : $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. On obtient ainsi : $y = -6\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

• La tangente est horizontale lorsque $f'(x) = 0$. On obtient donc : $f'(x) = 0 \iff \cos(2x) = 0$ ou $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ ou $\exists k \in \mathbb{Z},\quad x = k\pi$.

5. Graphe de f :



Troisième partie

Aléatoire & Statistiques