Séance 4 : soutien récurrence

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n - 1$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 2

1. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2} \end{cases}$

1. Déterminer la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Etudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

4. Que peut-on en déduire concernant la suite (u_n) ?

Exercice 4

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction g et justifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chaque intervalle de son domaine de définition.

2. Démontrer que pour tout réel x non nul et pour tout entier naturel n, on a $g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.

Exercice 5

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$.

Exercice 6

On rappelle qu'un nombre premier est un entier supérieur ou égal à 2 qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.
Montrer à l'aide d'une récurrence forte que tout entier supérieur ou égal à 2 est divisible par un nombre premier.