Chapitre (ALG) 4 Calculs de sommes et produits

1 Notations $\sum$ et $\prod$ .....

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme .....

3 Sommes doubles .....

4 Exercices .....

$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5$

— **Le saviez-vous ?**

Résumé & Plan

Vous avez peut-être déjà rencontré la notation $\sum$ dans les classes antérieures. Nous allons la revoir dans ce chapitre, et en complément voir son analogue pour les produits. Enfin on termine avec les sommes doubles ainsi qu'une généralisation des identités remarquables : la formule du binôme de Newton.

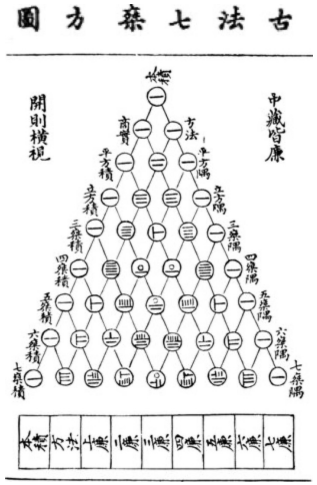
- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST1, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Pour commencer, nous allons introduire diverses notations et règles de calculs.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. ***L'ensemble $\mathbb{C}$ désigne les « nombres complexes », que nous étudierons dans un prochain chapitre. Les exemples de ce cours resteront donc dans $\mathbb{R}$ pour le moment.***

On rappelle que pour tout couple d'entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \leqslant b$, l'ensemble $[\![a\,,\,b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ contient $b - a + 1$ éléments.



Le triangle de Pascal était déjà connu en Orient et au Moyen-Orient plusieurs siècles avant la publication de Blaise Pascal.

— **Le saviez-vous ?**

1 NOTATIONS $\sum$ ET $\prod$

1.1 Sommes

Au lycée, vous avez peut-être déjà rencontré des formules de ce type. « Pour $q \neq 1$, on a :

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\text{».}$$

L'utilisation des points de suspension pour écrire cette somme rend l'écriture assez lourde et potentiellement compliquée à manipuler. Ce chapitre introduit une notation plus concise. En lieu et place de la formule précédente, nous noterons plutôt :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n.$$

Il faut la comprendre ainsi : on additionne tous les q^k avec k parcourant tout l'intervalle entier $[\![0\,,\,n]\!]$.

Notation **Symbole $\sum$**

- Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \leqslant m$ et $(a_n,\dots,a_m) \in \mathbb{K}^{m-n+1}$. On appelle *somme des* $a_k, n \leqslant k \leqslant m$, la quantité notée $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k$ ou encore $\sum\limits_{n\leqslant k\leqslant m} a_k$, $\sum\limits_{k\in[\![n,m]\!]} a_k$ et définie par :
$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n + \cdots + a_m.$$
L'écriture avec « … » est généralement appelée l'écriture *en extension* de la somme.
- On appelle *bornes de la somme* les entiers relatifs n, m, *indice de la somme* la variable k et $a_k, n \leqslant k \leqslant m$ le terme général d'ordre k.
- **[Convention]** [1] Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n > m$, alors on pose :
$$\sum_{k=n}^{m} a_k = 0.$$

Ainsi, lorsque les bornes ne sont pas dans le bon ordre, la somme est décrétée être égale à zéro : cette convention sera justifiée plus tard.

Attention **L'indice d'une somme est « muet »**

En effet, il n'apparaît que dans la notation $\sum$ et non dans ce qu'elle représente. On peut donc écrire :
$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{j=n}^{m} a_j.$$
L'indice n'a de sens qu'à l'intérieur de la somme ; en dehors, il n'est plus défini. S'il vous reste un indice dans l'expression après le calcul de la somme, c'est que vous vous êtes trompé ! [2]

Remarque 1 **(Définition plus rigoureuse : par récurrence)** L'usage des points de suspension pour définir la notation somme n'est pas parfaitement satisfaisante. D'un point de vue purement formel, on préfèrerait donc une définition qui s'appuie sur le caractère récursif de la somme. En effet, si on sait définir une somme jusqu'au rang n, alors il suffit de rajouter un seul élément pour avoir une somme jusqu'au rang $n+1$. Ainsi, on peut formuler une définition équivalente de la somme à l'aide du principe de récurrence : avec les mêmes notations qu'avant, on définit $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k = u_m$ où $(u_k)_{k\geqslant m}$ est la suite vérifiant la relation de récurrence :
$$\forall k < m,\ u_k = 0, \quad \forall k \geqslant m, \quad u_{k+1} = u_k + a_{k+1}.$$

Exemple 1 Écrire en extension les sommes ci-après. Préciser à chaque fois le nombre de termes, et devinez une relation en fonction des bornes lorsqu'il est non nul.

Somme	Nombre de termes
$\sum\limits_{k=3}^{5} a_k =$	
$\sum\limits_{k=103}^{103} a_k =$	
$\sum\limits_{k=0}^{10} k =$	
$\sum\limits_{k=1}^{n} 1 =$	
$\sum\limits_{k=n+1}^{n-1} \ln\left(1+(\cos k - \sin k)^2\right) =$	

PROPRIÉTÉS ET TECHNIQUES DE CALCUL.

Les propriétés ci-après découlent directement de la définition de la somme, on peut les établir sans difficulté par récurrence.

Exemple 2 Calculer

- $\sum_{k=2}^{5} k^2$,
- $\sum_{k=1}^{4} \ln(k)$.

1. Pour des bornes mal ordonnées
2. Ce n'est pas le cas en Python où on peut récupérer la valeur du dernier indice d'une boucle `for` après la fin de la boucle, nous le verrons en Informatique.

Proposition 1 | Propriétés des sommes

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$, $c, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$, $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$.

- **[Nombre de termes dans une somme]** Une somme dont les bornes sont p et n contient $n-p+1$ termes. En particulier une somme allant de 1 à n contient n termes, et une somme allant de 0 à n en contient $n+1$.
- **[Somme d'une constante]**
$$\sum_{k=p}^{n} c = c \times (n-p+1).$$
- **[Linéarité]** Soit $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$. Alors :
$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k + \mu \sum_{k=p}^{n} b_k.$$
- **[Relation de CHASLES]** Soit de plus $r \in \mathbb{N}$, $p \leqslant r \leqslant n$. Alors :
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{n} a_k.$$

Attention

Dans la relation de CHASLES, attention à bien recommencer à l'indice $p+1$, et non à l'indice p pour ne compter qu'une seule fois le terme d'indice p.

Remarque 2 **(Utilité de la convention)** Que donne la relation de CHASLES lorsque par exemple $r = n$?

Exemple 3 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (3^k - 2^k)$.

2. Calculons la somme $1+3+5+7+\cdots+99$ des entiers impairs entre 1 à 99, en commençant par la réecrire avec un symbole somme.

3. Calculer $\sum_{k=0}^{10} \min(k,7)$.

Passons maintenant à une technique très importante pour calculer une somme : celle du changement d'indice. Commençons par un exemple :
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^2.$$
On a constaté que lorsque $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, $(k+1)^2$ décrit $\mathscr{E} = \{1^2, \dots, (n+1)^2\}$. Mais lorsque $\ell \in [\![1\,,\,n+1]\!]$, ℓ^2 décrit ce même ensemble $\mathscr{E}$. En résumé :
$$k \in [\![0,n]\!] \quad \overset{\ell=k+1}{\Longleftrightarrow} \quad \ell \in [\![1,n+1]\!].$$

Méthode (ALG) 4.1 (Changement d'indice de translation « $\ell = k+1, \ell = k+?$ »)

- **[Décalage d'un rang]**

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+1}^{n+1} a_{\ell-1} \quad \begin{cases} (\rightarrow) \text{ en posant } \ell = k+1 \\ (\leftarrow) \text{ en posant } k = \ell - 1. \end{cases}$$

- **[Décalage de plusieurs rangs]** Soit N un entier. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+\mathrm{N}}^{n+\mathrm{N}} a_{\ell-\mathrm{N}} \quad \begin{cases} (\rightarrow) \text{ en posant } \ell = k+\mathrm{N} \\ (\leftarrow) \text{ en posant } k = \ell - \mathrm{N}. \end{cases}$$

Pour justifier la formule de changement d'indice, simplement écrire la définition d'une somme. Nous verrons parfois des changements d'indice plus compliqués. Ce qu'il faut toujours garantir, c'est qu'on n'a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale, mais qu'on a juste changé le nom de l'indice.

Attention On ne peut pas « poser n'importe quoi » !

Dans $\sum_{k=p}^{n} a_k$, on ne **peut pas** poser :

- « $k = \ell^2$ » (dans ce cas on oublierait les indices qui ne sont pas des carrés),
- ou encore « $k = 2\ell + 1$ » (dans ce cas on oublierait les indices qui ne sont pas des pairs) *etc.*.

Seuls les changements d'indices mentionnés dans ce cours sont autorisés.

Lors d'un changement d'indice, ce qu'il faut toujours garantir, c'est qu'on n'a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale.

Exemple 4 Compléter les pointillés (où $n \in \mathbb{N}$).

$$\sum_{k=0}^{3} a_k = \sum_{\ell=1}^{\dots} a_{\dots} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{\ell=\dots}^{\dots} a_\ell \qquad \sum_{k=6}^{n+1} a_{k-3} = \sum_{\ell=\dots}^{\dots} a_\ell.$$

Exemple 5 Déterminer une expression de $\mathrm{G}_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ avec $q \neq 1$ pour $n \geqslant 0$ sans symbole somme, en commençant par effectuer le changement $\ell = k+1$.

- Montrons que : $\mathrm{G}_n = \frac{1}{q}\left(\mathrm{G}_n + q^{n+1} - 1\right)$.

- Déduisons la valeur de G_n.

Méthode (ALG) 4.2 (Changement d'indice de renversement « $\ell = n - k$ »)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell} \quad \begin{cases} (\rightarrow) \text{ en posant } \ell = n-k \\ (\leftarrow) \text{ en posant } k = n - \ell. \end{cases}$$

À droite, on doit conserver une borne de début de somme qui est inférieure à la borne de fin de somme pour ne pas avoir une somme vide (gardez à l'esprit la convention d'ordre des bornes).

Exemple 6 Déterminer une expression de $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} k$ pour $n \geqslant 0$ sans symbole somme, en commençant par effectuer le changement $\ell = n - k$.

Passons maintenant à un type de somme particulier qui se calculent par simplifications successives des termes : les sommes téléscopiques.

Proposition 2 | Somme téléscopique décalée de 1

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$ et $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p.$$

Une somme de la forme précédente est appelée *somme téléscopique*.

Preuve

- Une première preuve peut utiliser directement la définition d'une somme.

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - \cancel{a_n} + \cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}} + \cdots + \cancel{a_{p+1}} - a_p = a_{n+1} - a_p.$$

- Une seconde preuve consiste à utiliser un changement d'indice.

Exemple 7

1. Soit $k \geqslant 1$. Réduire au même dénominateur $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. Établir une expression de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

Exemple 8 Déterminer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, pour $n \geqslant 1$.

Exemple 9 **(Téléscopage généralisé)**

1. Avec les mêmes notations que dans la proposition précédente, proposer une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (a_{k+2} - a_k)$.

- **[1ère Méthode : en se ramenant à un téléscopage classique]**

- **[2ème Méthode : en utilisant un changement d'indice]**

2. De la même manière, on établirait que :

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+3}-a_k)=a_{n+3}+a_{n+2}+a_{n+1}-a_{p+2}-a_{p+1}-a_p.$$

Méthode (ALG) 4.3 **(Séparation de somme en indices pairs/impairs)** Lorsque le signe change en fonction de la parité de l'indice, il est parfois intéressant de séparer la somme des indices pairs de celle des indices impairs. En d'autres termes :

$$\sum_{k=0}^{2n}a_k=a_0+a_1+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$$

$$=(a_0+a_2+\cdots+a_{2n})+(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$$
$$=\sum_{k=0}^{n}a_{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}a_{2k+1}.$$

Exemple 10 **(Somme alternée)** Établir une expression de $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k$ pour $n\in\mathbb{N}$.

SOMMES USUELLES. Vous devez connaître certaines sommes usuelles qui figurent dans le programme, les voici.

Proposition 3 | Sommes usuelles

Soient $n, n_0\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{K}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\qquad \sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\begin{cases}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1,\\ n+1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

La première et la troisième formule seront généralisées dans le Chapitre (AN) 4, car elles sont des cas particuliers des formules de sommation de termes de suites arithmétiques et géométriques.

Preuve

- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $U_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. Montrons le résultat en deux étapes. *(Une récurrence serait là encore possible!)*
  - ⋄ Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$
  - ⋄ Conclure.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $G_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On calcule $(1-q)G_n$. *(Une récurrence serait là encore possible!)*

Plus généralement, les sommes 1 et 4 précédentes peuvent être généralisées à une borne du bas non nulle. Formules que l'on peut établir de nouveau par récurrence, ou bien exploitant la relation de CHASLES.

Proposition 4 | Sommes usuelles

Soient $n, n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ et $q \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\sum_{k=n_0}^{n} k = \frac{(n_0+n)(n-n_0+1)}{2}, \qquad \sum_{k=n_0}^{n} q^k = \begin{cases} q^{n_0}\frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n-n_0+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

- Si $n_0 = 0$, la formule a déjà été établie. Supposons $n_0 \in \mathbb{N}^\star$, alors :
$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n_0-1} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n_0-1)(n_0-1+1)}{2} = \frac{n(n+1)-n_0(n_0-1)}{2}.\end{aligned}$$
formules précédentes

  Or, $n(n+1)-n_0(n_0-1) = n^2-n_0^2+n+n_0 = (n-n_0)(n+n_0)+n+n_0 = (n_0+n)(n-n_0+1)$, on déduit alors la formule.
- Si $n_0 = 0$, la formule a déjà été établie. Supposons $n_0 \in \mathbb{N}^\star$. La formule est évidente si $q = 1$, on suppose donc que $q \neq 1$. Alors :
$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} q^k \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^{n_0}}{1-q} = \frac{q^{n_0}-q^{n+1}}{1-q} \\ &= q^{n_0}\frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}.\end{aligned}$$
formules précédentes

L'énoncé précédent peut être retenu plutôt sous la forme ci-après, puisque $n-n_0+1$ correspond au nombre de termes des sommes, et pour la seconde q^{n_0} au premier terme.

Résumé **Sommes de termes arithmétiques et géométriques**

Nous pouvons retenir ces formules de la manière suivante :
$$\sum \text{suite arithmétique} = \text{nb termes} \times \underbrace{\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}},$$
$$\sum \text{suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nb termes}}}{1-\text{raison}},$$
la suite $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant arithmétique de raison 1, tandis que $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q.

Exemple 11

1. Calculer $1+2+4+8+\cdots+1024$, en commençant par l'écrire sous forme d'une somme.

2. Calculer $\sum_{k=5}^{10} k^2$ et $\sum_{k=7}^{10} k^3$.

CODAGE INFORMATIQUE D'UNE SOMME. Passons maintenant à l'aspect informatique du symbole somme.

(Calcul de $\sum_{k=p}^{n} a_k$)

```
def somme_a(p, n):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += a_k # le terme a_k est à taper à la main en \
        ↪ fonction de la somme
    return S
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def somme_cos(p, n, x):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += ma.cos(k*x)
    return S
>>> somme_cos(0, 10, 1)
```

```
-0.4174477464559059
>>> somme_cos(0, 10, 0) # résultat attendu car on somme 1, onze \
↪ fois
11.0
```

Remarque 3 Vous noterez qu'ils n'est pas utile de préciser la convention $n < p$ (somme nulle) : en effet, si `n < p`, le `range` sera vide et on retournera bien la variable `S` restée à 0.

Exemple 12 Écrire une fonction d'argument `somme_ent(n)` prenant en argument un entier `n`, et retournant la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.

1.2 Produits

Notation **Notation $\prod$**

- Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \leqslant m$ et $(a_n, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m-n+1}$. On appelle *produit des* $a_k, n \leqslant k \leqslant m$, la quantité notée $\prod_{k=n}^{m} a_k$ ou encore $\prod_{m \leqslant k \leqslant n} a_k$, $\prod_{k \in [\![m,n]\!]} a_k$ et définie par :
$$\prod_{k=n}^{m} a_k = a_n \times \cdots \times a_m.$$
L'écriture avec « … » est généralement appelée l'écriture *en extension* du produit.
- On appelle *bornes du produit* les entiers relatifs n, m, *indice de la somme* la variable k et $a_k, n \leqslant k \leqslant m$ le terme général d'ordre k.
- **[Convention]**[3] Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n > m$, alors on pose :
$$\prod_{k=n}^{m} a_k = 1.$$

Remarque 4 **(Définition plus rigoureuse : par récurrence)** Comme pour les sommes, une définition équivalente plus rigoureuse du produit serait : avec les mêmes notations qu'avant, on définit $\prod_{k=n}^{m} a_k = u_m$ où $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est la suite vérifiant la relation de récurrence :
$$\forall k < m,\ u_k = 1, \quad \forall k \geqslant m,\ u_{k+1} = u_k \times a_{k+1}.$$

Remarque 5 **(À propos des conventions)** Lorsqu'une somme est vide, elle vaut 0, cela correspond à l'élément neutre pour le $+$. En effet, additionner 0 ne change pas la valeur d'un nombre. De même, lorsqu'un produit est vide, il vaut l'élément neutre de $\times$, c'est-à-dire 1 car si on multiplie un nombre par 1, il est inchangé. Parfois, l'utilisation d'une somme ou d'un produit vide peut simplifier l'expression de certaines propriétés en évitant de traiter des cas particuliers à part.

Exemple 13 Calculer $\prod_{k=5}^{8} k$.

Attention **L'indice d'un produit est « muet »**

Comme pour les sommes, il n'apparaît que dans la notation $\prod$ et non dans ce qu'elle représente. On peut donc écrire :
$$\prod_{k=n}^{m} a_k = \prod_{i=n}^{m} a_i = \prod_{j=n}^{m} a_j.$$

Proposition 5 | Propriété des produits

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$, $c \in \mathbb{K}$ et $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$, $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$.

- $\prod_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k$, $\quad \prod_{k=p}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=p}^{n} a_k}{\prod_{k=p}^{n} b_k}$.

3. Pour des bornes mal ordonnées

- $\prod_{k=p}^{n} c = c^{n-p+1}$
- $\prod_{k=p}^{n} (c \times a_k) = c^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *(tel que toutes les puissances soient définies)* $\prod_{k=p}^{n} (a_k^{\alpha}) = \left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)^{\alpha}$.
- **[Relation de CHASLES]** Soit de plus $r \in \mathbb{N}$, $p \leqslant r \leqslant n$. Alors :
$$\prod_{k=p}^{n} a_k = \prod_{k=p}^{r} a_k \times \prod_{k=r+1}^{n} a_k.$$

Remarque 6 Les changements d'indice se réalisent de la même façon qu'avec les sommes, nous ne revenons pas dessus.

Proposition 6 | Compatibilité avec exp / ln

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$, $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-p+1}$. Alors :
- $\sum_{k=p}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)$ si $a_k > 0$ pour tout $k \in [\![p\,,\,n]\!]$.
- $\prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{a_k} = \mathrm{e}^{\sum_{k=p}^{n} a_k}$.

Preuve Conséquence directe des propriétés sur l'exponentielle et le logarithme.

Exemple 14 Calculer $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2^k}$.

Proposition 7 | Produits téléscopiques

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geqslant p$ et $(a_p, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$ non nuls. Alors :
$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$
Un produit de la forme précédente est appelé *produit téléscopique.*

Preuve

- Une première preuve peut utiliser directement la définition d'un produit.
$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}} \times \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n-1}}} \times \cdots \times \frac{\cancel{a_{p+1}}}{a_p} = \frac{a_{n+1}}{a_p}.$$
- Une seconde preuve consiste à utiliser un changement d'indice.

Exemple 15 Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k}$.

- **[1ère Méthode : en se ramenant à un téléscopage classique]**

- **[2ème Méthode : en utilisant un changement d'indice]**

Remarque 7 Les téléscopages plus généraux se traitent comme ceux des sommes, nous n'y revenons pas ici.

Attention **Il n'existe pas de formule pour ....**

$$\prod_k (a_k + b_k) = ?, \quad \sum (a_k \times b_k) = ?, \quad \sum (a_k^2) = ?.$$

Autrement dit :

- on sépare facilement une somme en deux s'il y a une somme ou une soustraction entre les termes.
- On sépare facilement un produit en deux s'il y a un produit ou une division entre les termes.

On termine par une grandeur qui va nous intéresser dans la suite.

Définition 1 | Factorielle d'un entier positif

Soit $n \geqslant 0$. Alors on appelle *factorielle de n*, notée $n!$, la quantité suivante :

$$n! = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Note | *Vous pouvez noter que le cas $n = 0$ est inclus dans le 1er puisque $\prod_{k=1}^{0} k = 1$ par convention.*

Exemple 16 Calculer $n!$ pour $n \in [\![0, 6]\!]$.

Proposition 8 | Par récurrence

La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$a_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n.$$

Preuve

Exemple 17 Simplifier les expressions suivantes.

1. $\dfrac{8!}{6!}$
2. $\dfrac{11!}{9!2!}$,
3. $\dfrac{13! - 12!}{12!}$,
4. $\dfrac{4}{12!} - \dfrac{4}{11!} + \dfrac{4}{10!}$.

Exemple 18 Calculer $\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}(k+3)$ pour $n \geqslant 1$, exprimer le résultat à l'aide de factorielles.

Méthode (ALG) 4.4 **(Séparation de produit en indices pairs/impairs)** Il est parfois intéressant aussi de séparer les produits selon leurs termes impairs et pairs. En d'autres termes, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{2n} a_k &= \prod_{k=0}^{n} a_{2k} \times \prod_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} \\ &= (a_0 \times a_2 \times \cdots \times a_{2n}) \times (a_1 \times a_3 \times \ldots \times a_{2n-1}).\end{aligned}$$

Exemple 19 **(Produit des pairs et impairs avec la factorielle)** Exprimer en fonction de factorielles les produits ci-dessous, soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\prod_{k=1}^{n}(2k)$.
2. $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$.

Exemple 20 **(Produit des négatifs)** Exprimer en fonction de factorielles les produits ci-dessous.

1. $\prod_{k=1}^{n}(-k)$.
2. $\prod_{k=1}^{n}(-2k)$.

Remarque 8 La factorielle est une suite qui grandit très vite, plus que les suites exponentielles ! Pour l'exemple, le nombre d'arbres phylogénétiques théoriquement possibles grandit en fonction du nombre d'espèces considérées comme une factorielle.

CODAGE INFORMATIQUE D'UN PRODUIT. Passons maintenant à l'aspect informatique du symbole produit.

(Calcul de $\prod_{k=p}^{n} a_k$)

```python
def produit(p, n):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= a_k # à adapter en fonction de la somme
    return P
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```python
def produit(p, n, x):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= ma.exp(k*x)
    return P
```

```
>>> produit(0, 10, 1)
7.694785265142015e+23
>>> produit(0, 10, 0) # résultat attendu
1.0
```

Remarque 9

- Vous noterez qu'ils n'est pas utile de préciser la convention $n < p$ (produit valant 1) : en effet, si `n < p`, le `range` sera vide et on retournera bien la variable `P` restée à 1.
- Lorsque $n \geqslant p$, calculer le produit : $\prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{kx}$.

Exemple 21 Écrire une fonction d'argument `produit_cos(n)` prenant en argument un entier `n`, et retournant la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \cos(k)$.

2 COEFFICIENTS BINOMIAUX ET FORMULE DU BINÔME

2.1 Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux seront revus dans le Chapitre (ALG) 8 dans un contexte de dénombrement. Pour le moment, nous nous intéressons qu'à l'aspect calculatoire et analytique.

Définition 2 | Coefficients binomiaux
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit alors :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 22 (Quelques coefficients binomiaux) Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{-1} = 0$. En effet,

- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. En effet,
  - ◇ **[Cas $n \geqslant 2$: expression factorielle]**

  - ◇ **[Cas $n \in \{0,1\}$: vérification « à la main »]**

- $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. En effet,
  - ◇ **[Cas $n \geqslant 3$: expression factorielle]**

  - ◇ **[Cas $n \in \{0,1,2\}$: vérification « à la main »]**

Proposition 9 | Propriété des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- **[Forme simplifiée]** Si $0 \leqslant k \leqslant n$,
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}.$$

- **[Valeurs remarquables]**
$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$

- **[Symétrie]**
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

- **[Formule d'absorption]**
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

- **[Formule de Pascal]**
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Preuve Pour simplifier, nous faisons les preuves uniquement dans le cas où l'expression factorielle est en vigueur. Les autres cas se traitent à part sans difficulté.

- L'idée à retenir c'est qu'on peut simplifier $n!$ avec $(n-k)!$. On a plus formellement :
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{k! \times \prod_{i=1}^{n-k} i} = \frac{\cancel{\prod_{i=1}^{n-k} i} \times \prod_{i=n-k+1}^{n} i}{k! \times \cancel{\prod_{i=1}^{n-k} i}} = \frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{k!} = \frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{k!}.$$
  On obtient alors la première forme. On a par ailleurs, en faisant un changement d'indice au numérateur :
$$\begin{aligned}\frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{k!} &= \frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} i} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{k}(n-k+j)}{\prod_{i=1}^{n} i} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{k}(n-k+i)}{\prod_{i=1}^{n} i} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}.\end{aligned}$$
  $i = n-k+j \iff j = i-n+k$

- Valeurs remarquables déjà vues partiellement, les valeurs $\binom{n}{n}$ et $\binom{n}{n-1}$ sont une conséquence de la symétrie que nous allons justifier plus tard.
- Supposons que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors on a $0 \leqslant n-k \leqslant n$ à l'aide d'opérations élémentaires sur l'encadrement. On a alors :
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$
- Nous faisons uniquement la preuve dans le cas $0 < k \leqslant n$, les autres se vérifient à part. On a alors $1 \leqslant k \leqslant n$ donc en particulier $0 \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant k-1 \leqslant n-1$, l'expression factorielle

est en vigueur.

- Nous faisons uniquement la preuve dans le cas $0 \leqslant k < n$, les autres cas se vérifient à part.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+(n-k)}{(n-k)(k+1)}\right)\\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\frac{n+1}{(n-k)(k+1)}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}\\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

VISUALISATION À L'AIDE DU TRIANGLE DE PASCAL. La formule de PASCAL permet aussi de calculer la valeur des premiers coefficients binomiaux, de manière « récursive » (*i.e.* en utilisant les valeurs calculées précédemment).

$n\downarrow\ k\rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Dans le tableau ci-contre, les cases contiennent les valeurs de $\binom{n}{k}$. D'après la formule ci-dessus, chaque case est la somme de celle directement au-dessus, et de celle au-dessus à gauche puisque la formule de PASCAL est :

$$\forall k, n \in \mathbb{N}^2, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}.$$

Par exemple :

$$\binom{4}{3} = \binom{3}{3}+\binom{2}{2}$$

$$4 = 1+3.$$

Exemple 23 Dans cet exemple, deux exercices classiques (indépendants) sur les coefficients binomiaux. Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$.

1. Justifier que : $\frac{1}{p+1}\binom{n}{p} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{p+1}$.

2. 2.1) Montrer, en utilisant la formule de PASCAL, que : $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

2.2) Interpréter (à l'aide d'un dessin sur le triangle de PASCAL) la formule précédente.

La formule de PASCAL permet aussi de démontrer un fait qui pour l'instant n'était pas évident : les coefficients binomiaux sont des entiers.

Corollaire 1
Les coefficients binomiaux sont des entiers positifs.

Preuve Montrons la propriété $\mathscr{P}(n)$ «$\forall k \leqslant n,\ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$» pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence simple sur n. *(notez que la propriété ne dépend que de n, l'indice k étant muet à cause du symbole $\forall$)*

Initialisation. Montrons que : $\forall k \leqslant 0,\ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

- Si $k < 0$, alors $\binom{n}{k} = 0 \in \mathbb{N}$.
- Si $k = 0$, alors $\binom{n}{0} = 1 \in \mathbb{N}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\forall k \leqslant n,\ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Montrons que :

$$\forall k \leqslant n+1,\ \binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}.$$

Soit donc $k \leqslant n+1$.

- Si $k = n+1$, alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}$.
- Si $k \leqslant n$. Alors d'après la formule de PASCAL :

$$\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in\mathbb{N}\ (\text{H.R.})} + \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\in\mathbb{N}\ (\text{H.R.})} \in \mathbb{N}.$$

Le corollaire est donc établi par principe de récurrence.

Théorème 1 | Formule du binôme de NEWTON

Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}_{\text{version en général utilisée pour citer la formule}} \quad \underbrace{\left(= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right)}_{\text{version en général utilisée pour développer}}.$$

Preuve Constatons d'abord que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Initialisation. On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \textit{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \textit{en posant } i = k+1 \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} && \textit{formule de PASCAL} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

Remarque 10 Dans la formule du binôme de NEWTON, que nous utiliserons pour l'instant seulement dans des cas où n a une valeur précise (et petite) :

1. tous les termes sont des produits d'une puissance de a et d'une puissance de b, de telle sorte que la somme de ces puissances monrougeonne n. Et toutes les possibilités apparaissent.
2. Le coefficient binomial devant le terme $a^k b^{n-k}$ est $\binom{n}{k}$ ou (c'est pareil) $\binom{n}{n-k}$, autrement dit c'est la puissance de a ou de b parmi la puissance totale n.
3. En particulier les coefficients devant $a^k b^{n-k}$ et devant $a^{n-k} b^k$ sont les mêmes. La formule est donc symétrique par rapport au « milieu » de la somme.
4. Quand n est petit, il suffit donc souvent de calculer jusqu'à $\binom{n}{2}$, au pire des cas jusqu'à $\binom{n}{3}$ et ceci peut se faire facilement avec la formule avec la factorielle ou le triangle de PASCAL.
5. Traditionnellement, lorsqu'on applique la formule, on commence par les grandes puissances de a (forme entre parenthèses de la formule).

Exemple 24 Développer, pour a et b deux éléments de $\mathbb{K}$, $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4, (a+b)^5$. Complétez en même temps le triangle de PASCAL dans la colonne de droite.

$(a+b)^2 =$	
$(a+b)^3 =$	
$(a+b)^4 =$	
$(a+b)^5 =$	

Exemple 25 Écrire une formule pour $(a-b)^n$.

Le résultat qui suit n'est à apprendre par coeur, mais est très classique.

Corollaire 2 | Deux cas particuliers

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

Exemple 26 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$:

$$\mathrm{L} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \mathrm{E} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Note | *Toute l'assemblée aura bien sûr reconnu l'espérance d'une loi binomiale dans* E

3 SOMMES DOUBLES

Dans cette dernière section, on s'intéresse à la notion de somme double, *i.e.* de termes possédant deux indices et notés $a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$ avec $n, p \geqslant 0$. Afin d'alléger la présentation, on suppose donc que les indices i, j sont définis à partir de 1, mais naturellement ces notions peuvent être étendues à des sommes doubles plus générales, comme pour les sommes simples.

$i \backslash j$	1	2	3	…	p
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	…	$a_{1,p}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	…	$a_{2,p}$
3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	…	$a_{3,p}$
⋮	⋮			…	
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	…	$a_{n,p}$

On peut alors imaginer que les termes sont regroupés dans un tableau à deux entrées. La zone sur fond rouge correspond alors ce que nous appellerons dans la suite

la *surdiagonale du tableau.*

3.1 Sommes doubles libres

Commençons par une propriété qui nous servira dans la suite : on peut toujours permuter deux sommes simples.

Proposition 10 | Permuation de sommes simples
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

La formule se justifie sans trop de difficultés en revenant à la définition de somme simple. Mais de manière plus visuelle, constatons qu'elle signifie qu'il revient au-même de sommer tous les termes du tableau en le parcourant ligne après ligne ou colonne après colonne. Logique ! Plus précisément,

- pour i fixé, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ correspond à la somme des coefficients sur la ligne i,
- pour j fixé, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ correspond à la somme des coefficients sur la colonne j.

L'ordre de sommation n'a pas d'importance et on peut adopter la notation compacte :

Notation Somme double libre
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$.

- On appelle *somme double des* $a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$, la quantité notée $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$ ou encore $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$, définie par :
$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$
- Et lorsqu'on somme sur la même plage d'indices, c'est-à-dire $n = p$, on note :
$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Remarque 11 Même si ci-dessus il n'y a qu'un symbole somme, on a bien deux sommes simples cachées derrière.

Exemple 27 Calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (j-i)$.

CAS PARTICULIER : SOMMES DOUBLES À INDICES SÉPARABLES. On précise ici le cas de sommes doubles libres s'écrivant sous une forme particulière. Commençons par un premier exemple.

Exemple 28 Calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{1}{2^{i+j}}$ pour $n \geqslant 1$.

De manière générale, on a la formule suivante.

Proposition 11 | Somme double à « variables séparables »
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right).$$

Preuve On a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = a_i \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)$ par linéarité de la somme (a_i est une constante par rapport à la somme en j).
Or, $\mathrm{B} = \sum_{j=1}^{p} b_j$ est une constante par rapport à i, donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{B} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\mathrm{B} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right).$$

3.2 Sommes doubles sous contrainte

L'idée est ici de définir la somme sur le triangle supérieur du tableau (en rouge clair). Cela consiste à instaurer une contrainte entre les deux indices. Regardons la seconde ligne du tableau, pour $i = 2$, alors j parcourt $2 = 2, 3, \dots, p$, plus généralement on a ligne par ligne la relation $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$.

Proposition 12 | Permuation de sommes triangulaires
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$ **avec** $n = p$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=\mathbf{i}}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\mathbf{j}} a_{i,j}.$$

Attention
Contrairement à la somme sur un rectangle, les bornes de la somme intérieure dépendent de l'indice de la somme extérieure.

Méthode (ALG) 4.5 (Permuter des sommes simples à indices liés) Pour retenir

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j},$$

toujours garder à l'esprit l'encadrement entre les indices : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$. Ainsi, pour $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$:

- si i n'existe pas, j se balade entre 1 et p, ce qui explique la somme extérieure en j.
- Si j est fixé entre 1 et n, alors i se balade entre 1 et j, ce qui explique la somme intérieure en i.

Notation Somme double sous contrainte
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$ **avec** $n = p$. On appelle alors :

- *somme double sur le triangle supérieur* la somme
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j},$$
- *somme double sur le triangle supérieur strict* la somme
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{p}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}.$$

Exemple 29

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (j-i)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

Codage informatique d'une somme double. Passons maintenant à l'aspect informatique du symbole somme double.

(Calcul de $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$)

```
def somme(p, n):
    S = 0
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, p+1):
            S += a_{i,j} # à adapter en fonction de la somme
    return S
```

On adapte aussi facilement aux sommes doubles à indices liés.

(Calcul de $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}$)

```
def somme(p):
    S = 0
    for i in range(1, p+1):
        for j in range(i, p+1):
            S += a_{i,j} # à adapter en fonction de la somme
    return S
```

Exemple 30 Écrire deux fonctions d'en-têtes `sommedouble1(n, p)` et `sommedouble2(n, p)` prenant en argument deux entiers `n` et `p`, et retournant les valeurs des sommes ci-dessous.

- $\sum_{p\leqslant i,j\leqslant n} (j-i)^2$
- $\sum_{p\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{\frac{i}{j}}$.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (ALG) 4.1 (Changement d'indice de translation « $\ell = k+1, \ell = k+?$ »)

- **[Décalage d'un rang]**

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+1}^{n+1} a_{\ell-1} \quad \begin{cases} (\rightarrow) \text{ en posant } \ell = k+1 \\ (\leftarrow) \text{ en posant } k = \ell - 1. \end{cases}$$

- **[Décalage de plusieurs rangs]** Soit N un entier. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+\mathrm{N}}^{n+\mathrm{N}} a_{\ell-\mathrm{N}} \quad \begin{cases} (\rightarrow) \text{ en posant } \ell = k+\mathrm{N} \\ (\leftarrow) \text{ en posant } k = \ell - \mathrm{N}. \end{cases}$$

Méthode (ALG) 4.2 (Changement d'indice de renversement « $\ell = n-k$ »)

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell} \quad \begin{cases} (\rightarrow) \text{ en posant } \ell = n-k \\ (\leftarrow) \text{ en posant } k = n-\ell. \end{cases}$$

À droite, on doit conserver une borne de début de somme qui est inférieure à la borne de fin de somme pour ne pas avoir une somme vide (gardez à l'esprit la convention d'ordre des bornes).

Méthode (ALG) 4.3 (Séparation de somme en indices pairs/impairs) Lorsque le signe change en fonction de la parité de l'indice, il est parfois intéressant de séparer la somme des indices pairs de celle des indices impairs. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} a_k &= a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n} \\ &= (a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n}) + (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}. \end{aligned}$$

Méthode (ALG) 4.4 (Séparation de produit en indices pairs/impairs) Il est parfois intéressant aussi de séparer les produits selon leurs termes impairs et pairs. En d'autres termes, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{2n} a_k &= \prod_{k=0}^{n} a_{2k} \times \prod_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} \\ &= (a_0 \times a_2 \times \cdots \times a_{2n}) \times (a_1 \times a_3 \times \ldots \times a_{2n-1}). \end{aligned}$$

Méthode (ALG) 4.5 (Permuter des sommes simples à indices liés) Pour retenir

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j},$$

toujours garder à l'esprit l'encadrement entre les indices : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$. Ainsi, pour $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$:

- si i n'existe pas, j se balade entre 1 et p, ce qui explique la somme extérieure en j.
- Si j est fixé entre 1 et n, alors i se balade entre 1 et j, ce qui explique la somme intérieure en i.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Pour n un entier naturel, rappeler les valeurs des sommes $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$	$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	
Pour n et k entiers naturels, donner l'expression du coefficient binomial $\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$	*Ne pas oublier les conventions.*
Formule de PASCAL sur les coefficients binomiaux	$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.	

4 EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître les manipulations sur les sommes et produits :
   - connaître la définition de la somme et sa convention ..... ☐
   - savoir passer d'une notation en extension à une notation avec le symbole $\sum, \prod$ ☐
   - connaître la définition de produit et sa convention ..... ☐
   - connaître les sommes usuelles ..... ☐
   - savoir utiliser la linéarité, la relation de CHASLES ..... ☐
   - connaître les différentes propriétés des sommes et produits ..... ☐
2. Savoir utiliser les méthodes de calcul de sommes et produits :
   - le changement de variable ..... ☐
   - les sommes et produits télescopiques ..... ☐
3. Concernant les notions de factorielle et coefficients binomiaux :
   - connaître les définitions et propriétés de la factorielle ..... ☐
   - connaître les définitions et propriétés des coefficients binomiaux ..... ☐
   - savoir utiliser la formule du binôme de NEWTON ..... ☐
4. Concernant les sommes doubles :
   - connaître la définition d'une somme double ..... ☐
   - savoir effectuer une permutation de sommes ..... ☐

Signalétique du TD

- Le logo désigne les exercices que vous traiterez en devoir à la maison. Vous pouvez m'en rendre un ou plusieurs, au plus tard le lundi qui précède un devoir surveillé concernant ce chapitre. Ce travail est facultatif mais fortement conseillé.
- Le logo désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler : **19**

4.1 Factorielles

Exercice 1 | Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{7!}{6!}, \quad B = \frac{3 \times 4!}{(3!)^2}, \quad C = \frac{n!}{(n-1)!}, \quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!}, \quad E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

Solution (exercice 1)

- $A = \frac{7!}{6!} = \frac{7\times 6!}{6!} = \boxed{7}$
- $B = \frac{3\times 4!}{(3!)^2} = \frac{3\times 4\times 3!}{3!\times 3\times 2} = \boxed{2.}$
- $C = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\times(n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n.}$
- $D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} = \frac{(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)!}{(n-3)!} = \boxed{(n+1)n(n-1)(n-2).}$
- $E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1)+n = n(n^2-1+1) = \boxed{n^3.}$

4.2 Sommes

Exercice 2 | Des points de suspension au symbole $\sum$ Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$:

1. $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \cdots + \ln 10$,
2. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{15}$,
3. $2+4+6+8+\cdots+1024$,
4. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$,
5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{10}{1024}$,
6. $2-4+6-8+\ldots+50$.

Exercice 3 | Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Remplacer le symbole $*$ dans les égalités suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k = \sum_{j=*}^{*} j a_*$,
2. $\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=*}^{*} a_j$,
3. $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{j=*}^{*} a_j$,
4. $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} = \sum_{j=*}^{*} a_j$.

Solution (exercice 3)

1. $\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k = \sum_{j=2}^{n+1} j a_{j-1}$,
2. $\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=1}^{n+2} a_j$,
3. $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{j=-1}^{n-1} a_j$,
4. $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n+1} = \sum_{j=2}^{2n+1} a_j$.

Exercice 4 | Calculs de sommes (hors téléscopage) Calculer les sommes suivantes (où n désigne un entier naturel non nul) :

1. $\sum_{k=1}^{10} k$,
2. $\sum_{\ell=2000}^{2022} \pi$,
3. $\sum_{i=0}^{6} i^2$,
4. $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$,
5. $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$,
6. $\sum_{k=0}^{n} 5^{2k}$,
7. $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}}$,
8. $\sum_{k=0}^{n}\left(2^k+k^2+2\right)$,
9. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-1}{k+1}$.
10. $\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$, $\sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1}$,
11. $\sum_{k=0}^{n} 2^{3k}x^{-k}$ avec $x\neq 0$,
12. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3$,
13. $\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1)$,
14. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right)$.

Solution (exercice 4)

1. $\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10(10+1)}{2} = \boxed{55}$.
2. $\sum_{\ell=2000}^{2022} \pi = (2022-2000+1)\times\pi = \boxed{23\pi}$.
3. $\sum_{i=0}^{6} i^2 = \frac{\cancel{6}\times(6+1)\times(2\times 6+1)}{\cancel{6}} = 7\times 13 = \boxed{91}$.
4. On a : $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Puisque $\frac{1}{2}\neq 1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$
5. $\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \cancel{2}\times\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + n = n(n+1)+n = \boxed{n(n+2)}$.
6. On a : $\sum_{k=0}^{n} 5^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(5^2)^k = \sum_{k=0}^{n} 25^k$. Puisque $25\neq 1$, on a : $\sum_{k=0}^{n} 25^k = \frac{1-25^{n+1}}{1-25} = \boxed{\frac{1}{24}(25^{n+1}-1)}$.
7. $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k$. Puisque $\frac{3}{4}\neq 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-1}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}}.$$
D'où :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}} = \cancel{\frac{1}{4}}\times\frac{3}{4}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\cancel{\frac{1}{4}}} = \boxed{\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}.$$

8. Puisque $2 \neq 1$ (pour la calcul de la somme géométrique), on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(2^k+k^2+2\right)=\sum_{k=0}^{n}2^k+\sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}2=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2(n+1),$$

donc : $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\left(2^k+k^2+2\right)=2^{n+1}-1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2(n+1)}$.

9. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-1}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\cancel{(k+1)}}{\cancel{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\sum_{\ell=0}^{n-1}\ell=\boxed{\frac{(n-1)n}{2}}$.

10. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k}=(x^2)^k$: $\sum_{k=0}^{n}x^{2k}=\sum_{k=0}^{n}(x^2)^k=$ $\boxed{\begin{cases}\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} & \text{si } x\neq 1 \text{ \textbf{et} } x\neq -1 n+1 \quad \text{si } x=1 \text{ ou } x=-1.\end{cases}}$.

On reconnaît pour la deuxième la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k+1}=(x^2)^k\times x$:

$$\sum_{k=0}^{n}x^{2k+1}=x\sum_{k=0}^{n}(x^2)^k$$

$$=\boxed{\begin{cases}x\times\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} & \text{si } x\neq 1, x\neq -1,\\ n+1 & \text{si } x=1,\\ -(n+1) & \text{si } x=-1.\end{cases}}$$

11. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $a^k2^{3k}x^{-k}=a^k(2^3)^k\times\frac{1}{x^k}=a^k\times 8^k\times\left(\frac{1}{x}\right)^k=\left(\frac{8a}{x}\right)^k$:

$$\sum_{k=0}^{n}a^k2^{3k}x^{-k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{8a}{x}\right)^k=\boxed{\begin{cases}\frac{1-\left(\frac{8a}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{8a}{x}\right)} & \text{si } x\neq 8a,\\ n+1 & \text{si } x=8a.\end{cases}}.$$

12. On commence par développer la puissance cube à l'intérieur de la somme puis on utilise la linéarité de la somme. On obtient donc : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3=\sum_{i=1}^{n}\left(8i^3-12i^2+6i-1\right)=8\sum_{i=1}^{n}i^3-12\sum_{i=1}^{n}i^2+6\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}1$. On utilise ensuite le formulaire sur les sommes et on obtient alors : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3=8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+6\frac{n(n+1)}{2}-n=\boxed{n^2(4n^2+4n+1).}$

13. $\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1)=3\sum_{k=1}^{n}2^k+\sum_{k=1}^{n}1=3\times 2\times\frac{1-2^n}{1-2}+n$ par linéarité et car $2\neq 1$.

Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1)=6(2^n-1)+n.}$

14. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k=\frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ car $e^{\frac{1}{n}}\neq 1$. Ainsi $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}.}$

Exercice 5 | Calculs de sommes avec formule du binôme

Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j$, $\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j$ avec $a\in\mathbb{R}$,

2. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i$, $\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i$,

3. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$,

4. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

5. $S_1=\sum_{j=0}^{n}j\binom{n}{j}$

6. $T=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}$,

7. puis $S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$,

8. $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

Solution (exercice 5)

1. $\boxed{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j=(1+a)^n}$ en reconnaissant un binôme de NEWTON car $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j1^{n-j}$. Pour la seconde, on se ramène à la formule du binôme de NEWTON en utilisant la relation de CHASLES : $\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j-\binom{n}{0}a^0+\binom{n}{n+1}a^{n+1}$. Par convention, on a : $\binom{n}{n+1}=0$ et ainsi on obtient en utilisant le binôme de NEWTON : $\boxed{\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j=(1+a)^n-1.}$

2. $\boxed{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j=0}$ grâce au binôme de NEWTON car $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j1^{n-j}=(1-1)^n$. Pour la seconde, on se ramène à la formule du binôme de NEWTON en utilisant la relation de CHASLES :

$\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(-1)^i - \binom{n+1}{0}(-1)^0 - \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1} = (1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} = -1 + (-1)^{n+2} = -1 + (-1)^n = (-1)^n - 1.$

Ainsi on obtient que : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = (-1)^n - 1.}$

3. On se ramène à la formule du binôme de NEWTON en utilisant les propriétés sur les puissances. On obtient : $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}} = \frac{-1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{-1}{2}\right)^j = \frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{-1}{2^{n+1}}.}$

4. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k}$. Afin de pouvoir utiliser la formule du binôme de NEWTON, on utilise la relation de CHASLES pour obtenir : $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \boxed{\frac{4^n-1}{3^n}.}$

5. On peut déjà remarquer que : $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = 0\times\binom{n}{0} + \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}$. Ici on ne sait pas calculer la somme sans transformation car il y a le j. On utilise d'abord une propriété des coefficients binomiaux, et on obtient :

$$S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1} = n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}$$

car n est alors indépendant de l'indice de sommation donc on peut le sortir de la somme. Pour se ramener à du binôme de NEWTON, on commence par poser le changement d'indice : $i = j-1$ et on obtient $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$ (c'est ici qu'il est mieux d'être passé au début d'une somme allant de 0 à n à une somme allant de 1 à n car sinon on aurait un indice commencant à -1. Si on n'a pas changé la somme au début, une autre méthode est alors de faire ici une relation de CHASLES afin d'isoler l'indice -1). On reconnaît alors un binôme de NEWTON et on obtient $\boxed{S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}.}$

6. Il s'agit ici d'appliquer deux fois de suite la propriété sur les coefficients binomiaux : $T = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}$ en reprenant les calculs faits au-dessus. On pourra aussi remarquer que la somme T peut être commencée à 2. Puis en réappliquant la propriété sur les coefficients binomiaux : $(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2}$, on obtient que : $T = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$. On effectue alors le changement d'indice $j = k-2$ et on obtient $T = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}$. Donc en utilisant le binôme de NEWTON, on a : $\boxed{T = n(n-1)2^{n-2}.}$ **Calcul de** $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ **:** Comme $k^2 = k(k-1)+k$ et par linéarité de la somme, on obtient que : $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = T + S_1 = \boxed{n(n+1)2^{n-2}.}$

7. Là encore, il faut commencer par utiliser la propriété sur les coefficients binomiaux. Comme $(i+1)\binom{n+1}{i+1} = (n+1)\binom{n}{i}$, on obtient que : $\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$. Ainsi, la somme devient : $S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}$ car $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de l'indice de sommation i. On fait le changement d'indice $j = i+1$ et on utilise aussi la relation de CHASLES pour faire apparaître le binôme de NEWTON. On obtient $S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0}\right]$. Ainsi, on obtient $\boxed{S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\left[2^{n+1}-1\right].}$

Exercice 6 | Téléscopage simple

Soit $n \geqslant 2$.

1. Justifier que : $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, pour tout entier $k \geqslant 2$.

2. Calculer : $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k}$.

Solution (exercice 6)

Soit $k \geqslant 2$, on a : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{\cancel{k}-(\cancel{k}-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2-k}$. Ainsi, on a :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$= \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= \boxed{1 - \frac{1}{n}}.$$

Exercice 7 | Téléscopage multiple

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
2. Retrouver ce dernier résultat par récurrence : montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Solution (exercice 7)

1. • On commence par montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b+c)k^2+(3a+2b+c)k+2a}{k(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b+c &= 0, \\ 3a+2b+c &= 0, \\ 2a &= 1 \end{cases}$ donc $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$. Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$.

   • Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j = k+1$ dans la deuxième somme et le changement d'indice : $i = k+2$ dans la troisième somme et on obtient :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$
en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet, la relation de Chasles et en mettant tout au même dénominateur.
2. On établie maintenant le résultat précédent par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété :
$$\mathscr{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$
Initialisation. D'un côté, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$. De l'autre côté, on a : $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4\times 6} = \frac{1}{6}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ d'après la relation de Chasles. Puis par hypothèse de récurrence, on obtient que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$
en mettant au même dénominateur. Pour le numérateur on remarque que -1 est racine évidente et ainsi en factorisant par $n+1$ on obtient par identification des coefficients que : $n^3+6n^2+9n+4 = (n+1)(n^2+5n+4)$. Puis le calcul du discriminant donne que $n^3+6n^2+9n+4 = (n+1)(n^2+5n+4) = (n+1)(n+1)(n+4)$. Ainsi on obtient que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}.$$

Exercice 8 | Une récurrence

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$
2. Retrouver le résultat précédent en faisant apparaître une somme téléscopique.

Solution (exercice 8)

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1$.

Initialisation. pour $n = 0$: on a $\sum_{k=0}^{0} k\,k! = 0$ et $1! - 1 = 0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a, en mettant à part le dernier terme de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\,k! = \sum_{k=0}^{n} k\,k! + (n+1)(n+1)!.$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\,k! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \quad = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est démontrée. Il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1}$.

2. On peut aussi calculer directement :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k \times k! &= \sum_{k=0}^{n} (k+1-1) \times k! \\ &= \sum_{k=0}^{n} ((k+1)k! - k!) = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)! - k!) \\ &= \boxed{(n+1)! - 1}.\end{aligned}$$

téléscopage

Exercice 9 | Sommes et dérivation

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Calculer $f(x)$.
2. En dérivant, calculer $\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$, et en déduire $\sum_{k=1}^{n} k x^k$.
3. Calculer de la même façon : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

Solution (exercice 9)

Il s'agit ici du même type de méthode que pour l'exercice précédent sauf que cette fois ci, on l'applique à la somme des termes d'une suite géométrique et plus au binôme de Newton.

1. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et ainsi, on obtient, comme $x \neq 1$: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme produit, somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables.
   - D'un côté, la fonction f vaut : $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Ainsi, en dérivant, on obtient que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f'(x) = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}}.$$
   - De l'autre côté, la fonction f vaut $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$. La dérivée d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on obtient que :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}}.$$
   La somme commence bien à $k = 1$ car le terme pour $k = 0$ dans $f(x)$ est le terme constant 1 qui est nul lorsqu'on dérive.

   On obtient donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}}$.

   On a : $\sum_{k=1}^{n} k x^k = \sum_{k=1}^{n} kx \times x^{k-1} = x \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$. D'après la question précédente, on obtient donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=1}^{n} k x^k = x \times \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}}$.
3. Il faut ici remarquer que la somme correspond à dériver deux fois la somme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} x^k$. La fonction f est bien deux fois dérivables comme fonction polynomiale.

   Et en dérivant deux fois, on obtient bien : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$. Cette somme commence bien à $k = 2$ car quand on dérive deux fois les termes 1 et x, ils deviennent nuls. En dérivant deux fois l'autre expression de f, on obtient la valeur de la somme :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}}.$$

Exercice 10 | Sommes d'indices pairs et impairs

Soit n un entier naturel non nul. On définit les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

1. Montrer que $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.
2. En déduire une expression de S_n et de T_n en fonction de n.

Solution (exercice 10)

1. • Si on ne voit pas comment débuter, on commence par écrire la somme $S_n + T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n + T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux : S_n correspond en effet à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k pair et T_n correspond à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k impair donc en sommant les deux on a bien la somme de tous les coefficients binomiaux pour k allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de NEWTON, on obtient que : $\boxed{S_n + T_n = 2^{2n} = 4^n.}$

• De même, on peut commencer par écrire la somme $S_n - T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n - T_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux coefficientés par 1 ou par -1 : les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k pair sont coefficienté par 1 et les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec k impair sont coefficienté par -1. Ainsi cela revient bien à sommer tous les nombres $\binom{2n}{k}(-1)^k$ pour k allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de NEWTON, on obtient que : $\boxed{S_n + T_n = (1-1)^n = 0.}$

2. Il s'agit alors juste de résoudre le système $\begin{cases} S_n + T_n &= 2^{2n}, \\ S_n - T_n &= 0. \end{cases}$

On obtient alors : $2S_n = 2^{2n}$, donc : $\boxed{S_n = 2^{2n-1} \text{ et } T_n = S_n = 2^{2n-1}}$.

Exercice 11 | Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soient $n \geqslant 1$ un entier, et $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit : $P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (y_i + \lambda x_i)^2$.

1.1) Justifier que P est une fonction trinôme ou affine, dont on précisera les coefficients.

1.2) Quel est le signe de P ?

1.3) En déduire l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Indication : On commencera par étudier le cas où : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0$

2. [Application] En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Solution (exercice 11)

1. 1.1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors en développant le carré :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} (y_i + \lambda x_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + 2\lambda x_i y_i + \lambda^2 x_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{aligned}$$

linéarité de la somme

Il s'agit donc :

• d'une fonction affine si $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. Alors dans ce cas le coefficient directeur est $a = 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, et l'ordonnée à l'origine $b = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

• D'un trinôme sinon : avec $a = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, $b = 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $c = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

1.2) Puisque P est une somme de carrés, on a : $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad P(\lambda) \geqslant 0}$.

1.3) • Cas $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. L'inégalité est simplement $0 \leqslant 0$, qui est bien sûr vérifiée.

• Cas $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$. Dans ce cas, la fonction P est un trinôme de signe (positif) constant, donc son discriminant est négatif. Or,

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant 0.$$

Ainsi, $\left(2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant 4\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. D'où l'on tire en passant à la racine (qui est une fonction croissante) et en simplifiant par 4 :

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}.$$

2. [Application] Il suffit de choisir : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i = \frac{1}{2^i}$.

L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (élevée au carré) donne alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i},$$

apparait alors dans le majorant une somme géométrique de raison $\frac{1}{4}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \leqslant \frac{1}{4} \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On a donc établi que : $\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.}$

Exercice 12 | Transformation d'Abel

Soient $n \geqslant 1$ un entier, et $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On définit de plus :

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

1. Justifier que $y_k = Y_k - Y_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 2$.
2. Montrer l'égalité : $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k + x_n Y_n$. *Ce type de transformation sert pour l'étude de la convergence de certaines suites numériques.*

Solution (exercice 12)

1. La formule $\boxed{y_k = Y_k - Y_{k-1}}$ pour tout $k \geqslant 2$ découle d'un simple téléscopage.
2. Montrons l'égalité : $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k + x_n Y_n$.
   Commençons par traiter le cas $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k (Y_k - Y_{k-1}) && \textit{linéarité de la somme} \\
&= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k Y_k - \sum_{k=2}^{n} x_k Y_{k-1} && \textit{changement d'indice } \ell = k-1 \textit{ dans la deuxième} \\
&= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k Y_k - \sum_{\ell=1}^{n-1} x_{\ell+1} Y_\ell && \textit{indice muet} \\
&= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^{n} x_k Y_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} Y_k && \textit{regroupement des sommes sur les bornes communes} \\
&= x_1 y_1 + x_n Y_n - x_2 Y_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k && \textit{les termes surlignés correspondent au terme } k = 1 \textit{ de la somme} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k + x_n Y_n.
\end{aligned}$$

4.3 Produits

Exercice 13 |

Soit $(n, p, i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls avec $p \leqslant n$. Calculer les produits suivants, en exprimant les résultats éventuellement en fonction de factorielles :

1. $\prod_{k=1}^{n} k$ et $\prod_{k=i}^{i+n} k$,
2. $\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
3. $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$
4. $\prod_{k=1}^{n} (4k-2)$
5. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
6. $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$.

Solution (exercice 13)

1. $\prod_{k=1}^{n} k = n!$ par définition. Pour le second, il manque des entiers pour avoir une factorielle, qu'il convient de rajouter.

$$\prod_{k=i}^{i+n} k = \frac{\cancel{\prod_{k=1}^{i-1} k} \times \prod_{k=i}^{i+n} k}{\cancel{\prod_{k=1}^{i-1} k}} = \boxed{\frac{(i+n)!}{(i-1)!}}.$$

2. Par propriété de l'exponentielle :

$$\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right) = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k} = \boxed{e^{\frac{n+1}{2}}}.$$

3. On utilise la même technique que dans le cours. Le produit des pairs se calcule directement, mais pour les impairs on rajoute les pairs.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} &= \frac{2n \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 3 \times 1} \\
&= \frac{(2n \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2)^2}{(2n+1) \times 2n \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{(2^n n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1))^2}{(2n+1)!} \\
&= \boxed{\frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}}.
\end{aligned}$$

4. En sortant un 2, on retombe sur le produit des impairs. On utilise alors la même technique que précédemment.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} (4k-2) &= \prod_{k=1}^{n} 2(2k-1) \\
&= 2^n \times (2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1 \\
&= \frac{2^n \times 2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{2n \times (2n-2) \times \dots \times 4 \times 2} \\
&= \frac{2^n \times (2n)!}{2^n \times n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1} \\
&= \boxed{\frac{(2n)!}{n!}}.
\end{aligned}$$

5. Une fois le terme général simplifié, on tombe sur des produits téléscopiques.

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2-1)}{\prod_{k=2}^{n}k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}k}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=3}^{n+1}k}{\prod_{k=2}^{n}k} = \boxed{\frac{n+1}{2n}}.\end{aligned}$$

changements d'indice

6.

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} &= \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{\prod_{k=0}^{p-1}(p-k)}\\ &= \frac{\prod_{\ell=n-p+1}^{n}\ell}{\prod_{\ell=1}^{p}\ell}\\ &= \frac{\prod_{\ell=1}^{n-p}\ell\times\prod_{\ell=n-p+1}^{n}\ell}{\prod_{\ell=1}^{n-p}\ell\times\prod_{\ell=1}^{p}\ell}\\ &= \frac{n!}{(n-p)!\times p!}.\end{aligned}$$

en posant $\ell = n-k$ en haut, $\ell = p-k$ en bas

Ainsi on obtient au final que :

$$\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} = \boxed{\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}}.$$

Exercice 14 | Soient $n \geqslant 1$ et $x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^{+\star}$. Démontrer que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1+x_k) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Solution (exercice 14) Faisons une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a bien $1 + x_0 \geqslant x_0$.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n, alors :

$$\begin{aligned}&\prod_{k=0}^{n}(1+x_k)\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(1+x_k)(1+x_n)\\ &= \prod_{k=0}^{n-1}(1+x_k) + x_n\cdot\prod_{k=0}^{n-1}(1+x_k)\\ &\geqslant \sum_{k=0}^{n-1}x_k + x_n\\ &= \sum_{k=0}^{n}x_k.\end{aligned}$$

hypothèse de récurrence

HR + produit de réels $\geqslant 1$

La propriété est donc établie par récurrence. On a donc :

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}(1+x_k) \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}x_k}$$

4.4 Sommes doubles

Exercice 15 | Dans cet exercice, n, m sont deux entiers naturels non nuls. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$ **2.** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$ et $\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} 1$, **3.** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$,

4. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j}$, **5.** $\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}\frac{k}{\ell+1}$, **6.** $\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} x^j$, avec x un réel,

7. $\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} k i^2$, **8.** $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{2^i}{3^j}$, **9.** $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}$.

Solution (exercice 15)

1.

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} p(q^2+1) &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\sum_{q=0}^{m}q^2 + p\sum_{q=0}^{m}1\right]\\ &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + p(m+1)\right]\\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\sum_{p=0}^{n}p + (m+1)\sum_{p=0}^{n}p\end{aligned}$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\frac{n(n+1)}{2} + (m+1)\frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \boxed{\frac{1}{12}(m+1)\left(2m^2+m+6\right)n(n+1).}$$

2.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} 1\right] = \sum_{i=1}^{n}[n] = n\sum_{i=1}^{n} 1 = \boxed{n^2.}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i} 1\right] = \sum_{i=1}^{n}[i] = \sum_{i=1}^{n} i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}.}$$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} i2^j\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[i\sum_{j=1}^{n} 2^j\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[i\times 2\frac{1-2^n}{1-2}\right]\\ &= 2(2^n-1)\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \boxed{(2^n-1)n(n+1).}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\cancel{j}}\frac{\cancel{j}(j+1)(2j+1)}{6}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}\left(j^2+3j+1\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}+n\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{18}n(n+4)(n+2)}.\end{aligned}$$

5. On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas car on ne connaît pas la somme des inverses. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}\frac{k}{\ell+1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}\frac{k}{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\frac{k}{\ell+1}.$$

Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell}\frac{k}{\ell+1} &= \sum_{\ell=0}^{n}\left[\frac{1}{\ell+1}\sum_{k=0}^{\ell} k\right]\\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\left[\frac{1}{\ell+1}\times\frac{\ell(\ell+1)}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n}\ell = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}.}\end{aligned}$$

6.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i} 1\right] = \sum_{i=1}^{n}[i] = \sum_{i=1}^{n} i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}.}$$

7.
- Si $x=1$, on a : $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$.
- Si $x\neq 1$: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i} x^j\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[x\frac{1-x^i}{1-x}\right] = \frac{x}{1-x}\sum_{i=1}^{n}(1-x^i) = \frac{x}{1-x}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} x^i\right]$.
  Ainsi on obtient que : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} x^j = \frac{x}{1-x}\left[n - x\frac{1-x^n}{1-x}\right].}$

8.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n^2}\sum_{i=k}^{k+2} ki^2 &= \sum_{k=0}^{n^2}\left[k\sum_{i=k}^{k+2} i^2\right]\\ &= \sum_{k=0}^{n^2}\left[k\left(k^2+(k+1)^2+(k+2)^2\right)\right]\\ &= \sum_{k=0}^{n^2} k(3k^2+6k+5)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n^2} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n^2} k^2 + 5\sum_{k=0}^{n^2} k\\ &= \boxed{3\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)^2 + n^2(n^2+1)(2n^2+1) + 5\frac{n^2(n^2+1)}{2}.}\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}\frac{2^i}{3^j} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3^j}\sum_{i=0}^{j} 2^i\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3^j}\frac{1-2^{j+1}}{1-2}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3^j}\left(2^{j+1}-1\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(2\times\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{1}{3}\right)^j\right)\end{aligned}$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^j - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^j = 2\frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= \boxed{4\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}.$$

10. On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}.$$
Ainsi on obtient que :
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[2^j-1\right]$$
$$= \boxed{2(2^n-1)-n.}$$

4.5 Devoir-maison

Exercice 16 | Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(3\times 2^{4k+1} - 2k^2 - 3\right)$.

2. Notons : $R_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$.

2.1) Soit $k \in [\![1\,,\,n]\!]$. Montrer (à l'aide de factorielles) que :
$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$

2.2) En déduire que : $R_n = \frac{2(2^n-1)}{n+1}$

Solution (exercice 16)

1. On commence par remarquer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,
$$2^{4k+1} = 2\times(2^4)^k = 2\times 16^k.$$
Ainsi, par linéarité de la somme,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(3\times 2^{4k+1} - 2k^2 - 3)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(6\times 16^k - 2k^2 - 3)$$
$$= 6\times \underbrace{\sum_{k=1}^{n}16^k}_{\text{somme géométrique, car } 16\neq 1} - 2\times \underbrace{\sum_{k=1}^{n}k^2}_{\text{somme usuelle}} - 3\times \underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{\text{somme de termes constants}}$$
$$= 6\times 16\times\frac{1-16^n}{1-16} - 2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\times n$$
$$= \frac{6\times 16}{15}(16^n-1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3\times n$$
$$= \boxed{\frac{32}{5}(16^n-1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3n}.$$

2. 2.1) Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Alors : $k-1 \in [\![0;n-1]\!]$.
Donc, par définition des coefficients binomiaux, on a :
$$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{k}\times\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$
$$= \frac{n!}{k!(n+1-k)!}$$
$$= \frac{1}{n+1}\times\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$
$$= \boxed{\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}}$$

2.2) Ainsi :
$$R_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{n+1}\right]$$
Par le binôme de Newton : $R_n = \frac{1}{n+1}\left[(1+1)^{n+1}-1-1\right]$.
Finalement : $\boxed{R_n = \frac{2(2^n-1)}{n+1}}$

Exercice 17 |

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}2^k$.

1.1) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$. Montrer que $\sum_{k=p}^{q}2^k = 2^{q+1}-2^p$.

1.2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n2^{n+1}+1$

2. 2.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k$. On pourra permuter les symboles sommes.

2.2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n}k2^{k-1} = (n-1)2^n+1$.

3. 3.1) À l'aide de la question précédente, calculer : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k$.

3.2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k$.

3.3) Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n}k^2 2^k$?

Solution (exercice 17)

1. 1.1) On reconnaît une somme d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$ et ainsi on a :

$$\sum_{k=p}^{q} 2^k = 2^p \times \frac{1-2^{q-p+1}}{1-2} = 2^p(2^{q-p+1}-1) = \boxed{2^{q+1}-2^p.}$$

1.2) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a en appliquant la question précédente :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n}(2^{n+1}-2^j) = 2^{n+1}\sum_{j=0}^{n}1 - \sum_{j=0}^{n}2^j$$

par linéarité de la somme. Puis, en réappliquant la question précédente à la deuxième somme, on obtient que :

$$u_n = (n+1)2^{n+1} - (2^{n+1}-1) = \boxed{n2^{n+1}+1}.$$

2. 2.1) Par définition, on sait que $u_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}2^k$. Les indices de sommation sont liés, on doit donc faire un peu attention en échangeant les sommes.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}2^k = \sum_{k=0}^{n}2^k\sum_{j=0}^{k}1 = \boxed{\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k}.$$

2.2) D'après les deux questions précédentes, on sait donc que : $\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k = u_n = n2^{n+1}+1$. On cherche alors à calculer $\sum_{k=0}^{n}k2^{k-1}$. On fait un changement de variable dans cette somme en posant $j = k-1$. On commence alors par remarquer que : $\sum_{k=0}^{n}k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}+0 = \sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}$. Puis en faisant le changement de variable, on obtient : $\sum_{k=0}^{n}k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}k2^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^j = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^k$ car l'indice de sommation est muet. Ainsi, on a : $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)2^k = u_{n-1}$ d'après la question précédente et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k2^{k-1} = (n-1)2^n+1}$$

en utilisant la question 1.2).

3. 3.1) En utilisant la question 2.1), on remarque que : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k = \sum_{i=0}^{n}u_i$. Puis en utilisant la question 1.2), on sait ainsi que : $u_i = i2^{i+1}+1$ pour tout $i \in [\![0\,,\,n]\!]$. On obtient donc que :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k = \sum_{i=0}^{n}(i2^{i+1}+1).$$

Afin de faire apparaître la somme du 2.1), on utilise le fait que $2^{i+1} = 4\times 2^{i-1}$. Ainsi en utilisant la linéarité de la somme, on obtient que :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k = 4\sum_{i=0}^{n}i2^{i-1} + \sum_{i=0}^{n}1.$$

Ainsi, en utilisant alors le résultat de la question 2.2), on a :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k = 4((n-1)2^n+1)+n+1 = \boxed{(n-1)2^{n+2}+n+5}.$$

3.2) On peut commencer par intervertir les deux sommes dans la somme de la question précédente. On a,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}(k+1)2^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k\sum_{i=k}^{n}1\\ &= \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(k+1)2^k\\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k - \sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k.\end{aligned}$$

Ainsi, on a fait apparaître la somme que l'on veut calculer. En utilisant alors le résultat de la question précédente, on obtient : $\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k = (n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k - \left[(n-1)2^{n+2}+n+5\right]$. Et en utilisant aussi le résultat de la question 2.1), on reconnaît u_n. On obtient donc :

$$\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k = (n+1)u_n - \left[(n-1)2^{n+2}+n+5\right].$$

Puis le résultat de la question 1.2) donne :

$$\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k = (n+1)n2^{n+1}+(n+1)-(n-1)2^{n+2}-n-5 = \boxed{(n^2-n+2)2^{n+1}-4}.$$

3.3) En utilisant la linéarité de la somme, on obtient : $\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k = \sum_{k=0}^{n}k^22^k + \sum_{k=0}^{n}k2^k$. Ainsi, on a

$$\sum_{k=0}^{n}k^22^k = \sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k - \sum_{k=0}^{n}k2^k = \sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k - 2\sum_{k=0}^{n}k2^{k-1}.$$

On utilise alors la question 3.2) pour le calcul de $\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k$ et la question 2.2) pour le calcul de $\sum_{k=0}^{n}k2^{k-1}$. On obtient donc :

$$\sum_{k=0}^{n}k^22^k = (n^2-n+2)2^{n+1}-4-2((n-1)2^n+1) = \boxed{(n^2-2n+3)2^{n+1}-6}.$$

II

Deuxième partie

Analyse