# Chapitre # (ALG) 3 Calculs de sommes et produits



*$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5$*

— **Le saviez-vous ?**


**Résumé & Plan**

Vous avez peut-être déjà rencontré la notation $\sum$ dans les classes antérieures. Nous allons la revoir dans ce chapitre, et en complément voir son analogue pour les produits. Enfin on termine avec les sommes doubles ainsi qu'une généralisation des identités remarquables : la formule du binôme de NEWTON.


- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

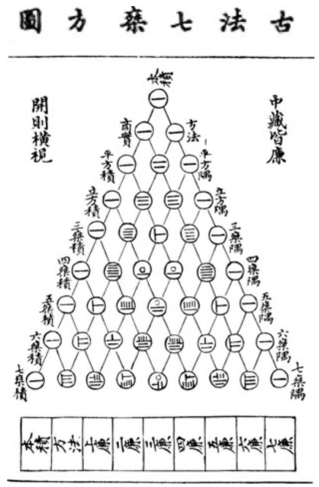
Pour commencer, nous allons introduire diverses notations et règles de calculs.

**Cadre**

**Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.** [1]

On rappelle que pour tout couple d'entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \leqslant b$, l'ensemble $[\![a\,,\,b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ contient $b - a + 1$ éléments.

1. L'ensemble sera découvert plus tard, les exemples resteront pour l'instant dans $\mathbb{R}$




*Le triangle de PASCAL était déjà connu en Orient et au Moyen-Orient plusieurs siècles avant la publication de Blaise PASCAL.*

— **Le saviez-vous ?**

## 1. NOTATIONS $\sum$ ET $\prod$

### 1.1. Sommes

Au lycée, vous avez peut-être déjà rencontré des formules de ce type. « Pour $q \neq 1$, on a :

$$q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} ».$$

L'utilisation des points de suspension pour écrire cette somme rend l'écriture assez lourde et potentiellement compliquée à manipuler. Ce chapitre introduit une notation plus concise. En lieu et place de la formule précédente, nous noterons plutôt :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n.$$

Il faut la comprendre ainsi : on additionne tous les $q^k$ avec $k$ parcourant tout l'intervalle entier $[\![0\,,\,n]\!]$.

**Notation Symbole $\sum$**

- Soit $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ avec $n\leqslant m$ et $(a_n,\dots,a_m)\in\mathbb{K}^{m-n+1}$. On appelle *somme des* $a_k, n\leqslant k\leqslant m$, la quantité notée $\sum_{k=n}^{m} a_k$ ou encore $\sum_{m\leqslant k\leqslant n} a_k$, $\sum_{k\in[\![m,n]\!]} a_k$ et définie par :
$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_n+\cdots+a_m.$$
L'écriture avec « … » est généralement appelée l'écriture *en extension* de la somme.
- On appelle *bornes de la somme* les entiers relatifs $n, m$, *indice de la somme* la variable $k$ et $a_k, n\leqslant k\leqslant m$ le terme général d'ordre $k$.
- **[Convention]** [2] Soit $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $n>m$ et $(a_n,\dots,a_m)\in\mathbb{K}^{m-n+1}$, alors on pose :
$$\sum_{k=n}^{m} a_k = 0.$$

Ainsi, lorsque les bornes ne sont pas dans le bon ordre, la somme est décrétée être égale à zéro.

**Attention L'indice d'une somme est « muet »**

En effet, il n'apparaît que dans la notation $\sum$ et non dans ce qu'elle représente. On peut donc écrire :
$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{j=n}^{m} a_j.$$
L'indice n'a de sens qu'à l'intérieur de la somme ; en dehors, il n'est plus défini. S'il vous reste un indice dans l'expression après le calcul de la somme, c'est que vous vous êtes trompé ! [3]

**Remarque 1 (Définition plus rigoureuse : par récurrence)** L'usage des points de suspension pour définir la notation somme n'est pas parfaitement satisfaisante. D'un point de vue purement formel, on préfèrerait donc une définition qui s'appuie sur le caractère récursif de la somme. En effet, si on sait définir une somme jusqu'au rang $n$, alors il suffit de rajouter un seul élément pour avoir une somme jusqu'au rang $n+1$. Ainsi, on peut formuler une définition équivalente de la somme à l'aide du principe de récurrence : avec les mêmes notations qu'avant, on définit $\sum_{k=n}^{m} a_k = u_m$ où $(u_k)_{k\geqslant m}$ est la suite vérifiant la relation de récurrence :
$$\forall k<m,\ u_k=0,\quad \forall k\geqslant m,\quad u_{k+1}=u_k+a_{k+1}.$$

**Exemple 1** Écrire en extension les sommes ci-après. Préciser à chaque fois le nombre de termes, et devinez une relation en fonction des bornes lorsqu'il est non nul.

| Somme | Nombre de termes |
|---|---|
| $\sum_{k=3}^{5} a_k =$ | |
| $\sum_{k=103}^{103} a_k =$ | |
| $\sum_{k=0}^{10} k =$ | |
| $\sum_{k=1}^{n} 1 =$ | |
| $\sum_{k=n+1}^{n-1} \ln\left(1+(\cos k-\sin k)^2\right) =$ | |

**Propriétés et techniques de calcul.** Les propriétés ci-après découlent directement de la définition de la somme, on peut les établir sans difficulté par récurrence.

**Proposition 1 | Propriétés des sommes**

Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $n\geq p$, $c,\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ et $(a_p,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n-p+1}$, $(b_p,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^{n-p+1}$.

- **[Nombre de termes dans une somme]** Une somme dont les bornes sont $p$ et $n$ contient $n-p+1$ termes. En particulier une somme allant de 1 à $n$ contient $n$ termes, et une somme allant de 0 à $n$ en contient $n+1$.
- **[Somme d'une constante]**
$$\sum_{k=p}^{n} c = c\times(n-p+1).$$

2. Pour des bornes mal ordonnées
3. Ce n'est pas le cas en Python où on peut récupérer la valeur du dernier indice d'une boucle `for` après la fin de la boucle, nous le verrons en Informatique.

- **[Linéarité]** Soit $(b_p, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$. Alors :
$$\sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k + \mu \sum_{k=p}^{n} b_k.$$
- **[Relation de Chasles]** Soit de plus $r \in \mathbb{N}$, $p \leqslant r \leqslant n$. Alors :
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{n} a_k.$$

**Attention**

Dans la relation de Chasles, attention à bien recommencer à l'indice $p+1$, et non à l'indice $p$ pour ne compter qu'une seule fois le terme d'indice $p$.

**Exemple 2** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (3^k - 2^k)$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \min(k, n)$.

Passons maintenant à une technique très importante pour calculer une somme : celle du changement d'indice. Commençons par un exemple :
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^2.$$
On a constaté que lorsque $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, $(k+1)^2$ décrit $\mathscr{E} = \{1^2, \dots, (n+1)^2\}$. Mais lorsque $\ell \in [\![1\,,\,n+1]\!]$, $\ell^2$ décrit ce même ensemble $\mathscr{E}$. En résumé :
$$k \in [\![0, n]\!] \quad \overset{\ell=k+1}{\Longleftrightarrow} \quad \ell \in [\![1, n+1]\!].$$

**Méthode** **Changement d'indice de translation « $\ell = k+1, \ell = k+?$ »**

- **[Décalage d'un rang]**
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+1}^{n+1} a_{\ell-1}.$$
« On pose $k = \ell - 1$ »
« On pose $\ell = k + 1$ »
- **[Décalage de plusieurs rangs]** Soit N un entier. Alors :
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{\ell=p+N}^{n+N} a_{\ell-N}.$$
« On pose $k = \ell - N$ »
« On pose $\ell = k + N$ »

Pour justifier la formule de changement d'indice, simplement écrire la définition d'une somme. Nous verrons parfois des changements d'indice plus compliqués. Ce qu'il faut toujours garantir, c'est qu'on n'a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale, mais qu'on a juste changé le nom de l'indice.

**Attention** **On ne peut pas « poser n'importe quoi » !**

Dans $\sum_{k=p}^{n} a_k$, on ne **peut pas** poser :
- « $k = \ell^2$ » (dans ce cas on oublierait les indices qui ne sont pas des carrés),
- ou encore « $k = 2\ell + 1$ » (dans ce cas on oublierait les indices qui ne sont pas des pairs) *etc.*.

Seuls les changements d'indices mentionnés dans ce cours sont autorisés.

**Lors d'un changement d'indice, ce qu'il faut toujours garantir, c'est qu'on n'a ni supprimé ni ajouté aucun terme à la somme initiale.**

**Exemple 3** Déterminer une expression de $G_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ avec $q \neq 1$ pour $n \geqslant 0$ sans symbole somme, en commençant par effectuer le changement $\ell = k+1$.

**Méthode** **Changement d'indice de renversement « $\ell = n-k$ »**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell}.$$

« On pose $k = n-\ell$ »

« On pose $\ell = n-k$ »

À droite, on doit conserver une borne de début de somme qui est inférieure à la borne de fin de somme pour ne pas avoir une somme vide (gardez à l'esprit la convention d'ordre des bornes).

**Exemple 4** Déterminer une expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$ pour $n \geqslant 0$ sans symbole somme, en commençant par effectuer le changement $\ell = n-k$.

Passons maintenant à un type de somme particulier qui se calculent par simplifications successives des termes : les sommes téléscopiques.

**Proposition 1 | Somme téléscopique décalée de 1**

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq p$ et $(a_p,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^{n-p+1}$. Alors :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_p.$$

La somme $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1}-a_k)$ est appelée *somme téléscopique.*

**Preuve**

- Une première preuve peut utiliser directement la définition d'une somme.

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1}-a_k) = a_{n+1} - \cancel{a_n} + \cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}} + \cdots + \cancel{a_{p+1}} - a_p = a_{n+1}-a_p.$$

- Une seconde preuve consiste à utiliser un changement d'indice.

**Exemple 5**

1. Soit $k \geqslant 1$. Réduire au même dénominateur $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

2. Établir une expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ pour $n \geqslant 1$.

**Exemple 6** Déterminer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, pour $n \geqslant 1$.

**Exemple 7** **(Téléscopage généralisé)**

**1.** Avec les mêmes notations que dans la proposition précédente, proposer une expression simplifiée de $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+2} - a_k)$.

- **[1ère Méthode : en se ramenant à un téléscopage classique]**

- **[2ème Méthode : en utilisant un changement d'indice]**

**2.** De la même manière, on établirait que :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+3} - a_k) = a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} - a_{p+2} - a_{p+1} - a_p.$$

**Méthode** **Séparation de somme en indices pairs/impairs**

Lorsque le signe change en fonction de la parité de l'indice, il est parfois intéressant de séparer la somme des indices pairs de celle des indices impairs.

**Exemple 8** **(Somme alternée)** Établir une expression de $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

**Sommes usuelles.** Vous devez connaître certaines sommes usuelles qui figurent dans le programme, les voici.

**Proposition 2 | Sommes usuelles**

Soient $n, n_0 \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La première et la troisième formule seront généralisées dans le Chapitre (AN) 4, car elles sont des cas particuliers des formules de sommation de termes de suites arithmétiques et géométriques.

**Preuve**

- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $U_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. Montrons le résultat en deux étapes. *(Une récurrence serait là encore possible!)*
  - Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$
  - Conclure.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $G_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On calcule $(1-q)G_n$. *(Une récurrence serait là encore possible!)*

Plus généralement, les sommes 1 et 4 précédentes peuvent être généralisées à une borne du bas non nulle. Formules que l'on peut établir de nouveau par récurrence, ou bien exploitant la relation de CHASLES.

**Proposition 2 | Sommes usuelles**

Soient $n, n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$ et $q \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\sum_{k=n_0}^{n} k = \frac{(n_0+n)(n-n_0+1)}{2}, \qquad \sum_{k=n_0}^{n} q^k = \begin{cases} q^{n_0}\frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ n-n_0+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve**

- Si $n_0 = 0$, la formule a déjà été établie. Supposons $n_0 \in \mathbb{N}^\star$, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n_0-1} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n_0-1)(n_0-1+1)}{2} = \frac{n(n+1)-n_0(n_0-1)}{2}. \end{aligned}$$

*formules précédentes*

Or, $n(n+1)-n_0(n_0-1) = n^2-n_0^2+n+n_0 = (n-n_0)(n+n_0)+n+n_0 = (n_0+n)(n-n_0+1)$, on déduit alors la formule.

- Si $n_0 = 0$, la formule a déjà été établie. Supposons $n_0 \in \mathbb{N}^\star$. La formule est évidente si $q = 1$, on suppose donc que $q \neq 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} q^k \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \frac{1-q^{n_0}}{1-q} = \frac{q^{n_0}-q^{n+1}}{1-q} \\ &= q^{n_0}\frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

*formules précédentes*

L'énoncé précédent peut être retenu plutôt sous la forme ci-après, puisque $n-n_0+1$ correspond au nombre de termes des sommes, et pour la seconde $q^{n_0}$ au premier terme.

**Résumé Sommes de termes arithmétiques et géométriques**

Nous pouvons retenir ces formules de la manière suivante :

$$\sum \text{suite arithmétique} = \text{nb termes} \times \underbrace{\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}},$$

$$\sum \text{suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nb termes}}}{1-\text{raison}},$$

la suite $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant arithmétique de raison 1, tandis que $(q^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q$.

**Exemple 9**

1. Calculer $1+2+4+8+\cdots+1024$, en commençant par l'écrire sous forme d'une somme.

2. Calculer $\sum_{k=5}^{10} k^2$ et $\sum_{k=7}^{10} k^3$.

**IDENTITÉ DE BERNOULLI.** Nous pouvons généraliser sans difficulté la formule de sommation de termes géométriques. En effet, nous avons pour $q \in \mathbb{R}$ (y compris pour $q = 1$) : $\quad 1-q^{n+1} = 1^{n+1}-q^{n+1} = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Comme indiqué, l'énoncé qui suit n'est pas au programme : il faut seulement en travailler la preuve.

**Proposition 3 | Formule de Bernoulli [H.P]**
Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :
$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

**Preuve**

- **[Méthode 1 : par téléscopage]**

- **[Méthode 2 : en utilisant la formule de somme géométrique]**
  - **[Cas 1]** supposons $a = 0$.
  - **[Cas 2]** supposons $a \neq 0$.

**Codage informatique d'une somme.** Passons maintenant à l'aspect informatique du symbole somme.

**(Calcul de $\sum_{k=p}^{n} a_k$)**

```
def somme_a(p, n):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += a_k # le terme a_k est à taper à la main en \
        ↪ fonction de la somme
    return S
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def somme_cos(p, n, x):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += ma.cos(k*x)
    return S
>>> somme_cos(0, 10, 1)
-0.4174477464559059
>>> somme_cos(0, 10, 0) # résultat attendu car on somme 1, \
↪ onze fois
11.0
```

**Remarque 2** Vous noterez qu'ils n'est pas utile de préciser la convention $n < p$ (somme nulle) : en effet, si `n < p`, le `range` sera vide et on retournera bien la variable `S` restée à 0.

**Exemple 10** Écrire une fonction d'argument `somme_ent(n)` prenant en argument un entier `n`, et retournant la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.

### 1.2. Produits

**Notation Notation $\prod$**

- Soit $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ avec $n\leqslant m$ et $(a_n,\dots,a_m)\in\mathbb{K}^{m-n+1}$. On appelle *produit des* $a_k, n\leqslant k\leqslant m$, la quantité notée $\prod_{k=n}^{m} a_k$ ou encore $\prod_{m\leqslant k\leqslant n} a_k$, $\prod_{k\in[\![m,n]\!]} a_k$ et définie par :
$$\prod_{k=n}^{m} a_k = a_n\times\cdots\times a_m.$$
L'écriture avec « … » est généralement appelée l'écriture *en extension* du produit.
- On appelle *bornes du produit* les entiers relatifs $n, m$, *indice de la somme* la variable $k$ et $a_k, n\leqslant k\leqslant m$ le terme général d'ordre $k$.
- **[Convention]** [4] Soit $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $n>m$ et $(a_n,\dots,a_m)\in\mathbb{K}^{m-n+1}$, alors on pose :
$$\prod_{k=n}^{m} a_k = 1.$$

**Remarque 3 (Définition plus rigoureuse : par récurrence)** Comme pour les sommes, une définition équivalente plus rigoureuse du produit serait : avec les mêmes notations qu'avant, on définit $\prod_{k=n}^{m} a_k = u_m$ où $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est la suite vérifiant la relation de récurrence :
$$\forall k<m,\ u_k=1,\qquad \forall k\geqslant m,\ u_{k+1}=u_k\times a_{k+1}.$$

**Remarque 4 (À propos des conventions)** Lorsqu'une somme est vide, elle vaut 0, cela correspond à l'élément neutre pour le +. En effet, additionner 0 ne change pas la valeur d'un nombre. De même, lorsqu'un produit est vide, il vaut l'élément neutre de ×, c'est-à-dire 1 car si on multiplie un nombre par 1, il est inchangé. Parfois, l'utilisation d'une somme ou d'un produit vide peut simplifier l'expression de certaines propriétés en évitant de traiter des cas particuliers à part.

**Exemple 11** Calculer

- $\prod_{k=5}^{8} k$,
- $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k$.

4. Pour des bornes mal ordonnées

**Attention L'indice d'un produit est « muet »**

Comme pour les sommes, il n'apparaît que dans la notation $\prod$ et non dans ce qu'elle représente. On peut donc écrire :
$$\prod_{k=n}^{m} a_k = \prod_{i=n}^{m} a_i = \prod_{j=n}^{m} a_j.$$

**Proposition 4 | Propriété des produits**

Soient $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $n\geq p$, $c\in\mathbb{K}$ et $(a_p,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n-p+1}$, $(b_p,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^{n-p+1}$.

- $$\prod_{k=p}^{n}(a_k\times b_k)=\prod_{k=p}^{n} a_k\times\prod_{k=p}^{n} b_k,\qquad \prod_{k=p}^{n}\frac{a_k}{b_k}=\frac{\prod_{k=p}^{n} a_k}{\prod_{k=p}^{n} b_k}.$$
- $$\prod_{k=p}^{n} c = c^{n-p+1}$$
- $$\prod_{k=p}^{n}(c\times a_k)=c^{n-p+1}\prod_{k=p}^{n} a_k.$$
- $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, *(tel que tous les termes soient bien définis)* $$\prod_{k=p}^{n}(a_k^{\alpha})=\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right)^{\alpha}.$$
- **[Relation de Chasles]** Soit de plus $r\in\mathbb{N}$, $p\leqslant r\leqslant n$. Alors :
$$\prod_{k=p}^{n} a_k=\prod_{k=p}^{r} a_k\times\prod_{k=r+1}^{n} a_k.$$

**Remarque 5** Les changements d'indice se réalisent de la même façon qu'avec les sommes, nous ne revenons pas dessus.

**Proposition 5 | Produits téléscopiques**

Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $n\geq p$ et $(a_p,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n-p+1}$ non nuls. Alors :
$$\prod_{k=p}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_{n+1}}{a_p}.$$

Le produit $\prod_{k=p}^{n}$ est appelée *produit téléscopique.*

**Preuve**

- Une première preuve peut utiliser directement la définition d'un produit.
$$\prod_{k=p}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_{n+1}}{\cancel{a_n}}\times\frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_{n-1}}}\times\cdots\times\frac{\cancel{a_{p+1}}}{a_p}=\frac{a_{n+1}}{a_p}.$$
- Une seconde preuve consiste à utiliser un changement d'indice.

**Exemple 12** Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k}$.

**Remarque 6** Les téléscopages plus généraux se traitent comme ceux des sommes, nous n'y revenons pas ici.

**Attention Il n'existe pas de formule pour ....**

$$\prod_k(a_k+b_k)=?,\quad \sum(a_k\times b_k)=?,\quad \sum(a_k^2)=?.$$

Autrement dit :

- on sépare facilement une somme en deux s'il y a une somme ou une soustraction entre les termes.
- On sépare facilement un produit en deux s'il y a un produit ou une division entre les termes.

On termine par une grandeur qui va nous intéresser dans la suite.

**Définition 1 | Factorielle d'un entier positif**

Soit $n\geqslant 0$. Alors on appelle *factorielle de* $n$, notée $n!$, la quantité suivante :
$$n!=\begin{cases}\prod_{k=1}^{n}k & \text{si } n\geqslant 1,\\ 1 & \text{si } n=0.\end{cases}$$

**Exemple 13** Calculer $n!$ pour $n\in[\![0\,,7]\!]$.

**Proposition 6 | Par récurrence**

La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :
$$a_0=1,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}=(n+1)\cdot a_n.$$

**Remarque 7** C'est cette proposition qui légitime la convention $0!=1$.

**Exemple 14** Simplifier les expressions suivantes.

1. $\frac{8!}{6!}$
2. $\frac{11!}{9!2!}$,

3. $\dfrac{13!-12!}{12!}$,

4. $\dfrac{4}{12!}-\dfrac{4}{11!}+\dfrac{4}{10!}$.

**Exemple 15** Calculer $\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k}(k+3)$ pour $n \geqslant 1$, exprimer le résultat à l'aide de factorielles.

**Exemple 16** **(Produit des pairs et impairs avec la factorielle)** Exprimer en fonction de factorielles les produits ci-dessous, soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$.

1. $\prod_{k=1}^{n}(2k)$.

2. $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$.

**Remarque 8** La factorielle est une suite qui grandit très vite, plus que les suites exponentielles ! Pour l'exemple, le nombre d'arbres phylogénétiques théoriquement possibles grandit en fonction du nombre d'espèces considérées comme une factorielle.

**Codage informatique d'un produit.** Passons maintenant à l'aspect informatique du symbole produit.

**(Calcul de $\prod_{k=p}^{n} a_k$)**

```
def produit(p, n):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= a_k # à adapter en fonction de la somme
    return P
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def produit(p, n, x):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= ma.exp(k*x)
    return P
>>> produit(0, 10, 1)
7.694785265142015e+23
>>> produit(0, 10, 0) # résultat attendu
1.0
```

**Remarque 9**

- Vous noterez qu'ils n'est pas utile de préciser la convention $n < p$ (produit valant 1) : en effet, si `n < p`, le `range` sera vide et on retournera bien la variable `P` restée à 1.
- Lorsque $n \geqslant p$, calculer le produit : $\prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{kx}$.

**Exemple 17** Écrire une fonction d'argument `produit_cos(n)` prenant en argument un entier `n`, et retournant la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \cos(k)$.

## 2. COEFFICIENTS BINOMIAUX ET FORMULE DU BINÔME

### 2.1. Coefficients binomiaux

Les coefficients binomiaux seront revus dans le Chapitre (ALG) 6 dans un contexte de dénombrement. Pour le moment, nous nous intéressons qu'à l'aspect calculatoire et analytique.

**Définition 2 | Coefficients binomiaux**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit alors :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Exemple 18 (Quelques coefficients binomiaux)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{-1} = 0$.
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. En effet,
  $$\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2!(n-2)!}$$
- $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. En effet,
  $$\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{6(n-3)!}.$$

**Proposition 3 | Propriété des coefficients binomiaux**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

- **[Forme simplifiée]** Si $0 \leqslant k \leqslant n$,
  $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{i}.$$

- **[Valeurs remarquables]**
$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$
- **[Symétrie]**
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$
- **[Formule d'absorption]**
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
- **[Formule de Pascal]**
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Preuve** Pour simplifier, faisons la preuve dans le cas où $k, n$ sont positifs. La convention $k \leqslant 0$ ne posant pas de difficultés supplémentaires.

- ✎

- Immédiat par définition.
- Supposons que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors on a $0 \leqslant n-k \leqslant n$ à l'aide d'opérations élémentaires sur l'encadrement. On a alors :
$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$
- Nous faisons uniquement la preuve dans le cas $0 < k \leqslant n$, les autres se vérifient à part.
✎

- Nous faisons uniquement la preuve dans le cas $0 \leqslant k < n$, les autres se vérifient à part.
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{k+1+(n-k)}{(n-k)(k+1)}\right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\,\frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

**Visualisation à l'aide du triangle de Pascal.** La formule de Pascal permet aussi de calculer la valeurs des premiers coefficients binomiaux, de manière « récursive » (*i.e.* en utilisant les valeurs calculées précédemment). Dans le tableau suivant, les cases contiennent les valeurs de $\binom{n}{k}$. D'après la formule ci-dessus, chaque case est la somme de celle directement au dessus, et de celle au dessus à gauche.

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | | | | $\ddots$ |

Formule de Pascal
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

La formule de Pascal permet aussi de démontrer un fait qui pour l'instant n'était pas évident : les coefficients binomiaux sont des entiers.

**Corollaire 1**
Les coefficients binomiaux sont des entiers.

**Preuve** Montrons la propriété $\mathscr{P}(n)$ « $\forall k \leqslant n, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ » pour $n \in \mathbb{N}$, par récurrence simple sur $n$ *(Une récurrence forte est aussi possible)* Notez que la propriété ne dépend que de $n$, l'indice $k$ étant muet.

**Initialisation.** Montrons que : $\forall k \leqslant 0, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

- Si $k < 0$, alors $\binom{n}{k} = 0 \in \mathbb{N}$.
- Si $k = 0$, alors $\binom{n}{0} = 1 \in \mathbb{N}$.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\forall k \leqslant n, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Montrons que :

$$\forall k \leqslant n+1, \binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}.$$

Soit donc $k \leqslant n+1$.

- Si $k = n+1$, alors $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \in \mathbb{N}$.
- Si $k \leqslant n$. Alors d'après la formule de Pascal :
$$\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbb{N}\text{ (H.R.)}} + \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\in \mathbb{N}\text{ (H.R.)}} \in \mathbb{N}.$$

Le corollaire est donc établi par principe de récurrence.

**Théorème 1 | Formule du binôme de Newton**

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Preuve** Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Initialisation.** On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} && \textit{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} && \textit{en posant } i = k+1 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} && \textit{formule de Pascal} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

Dans la formule du binôme de Newton, que nous utiliserons pour l'instant seulement dans des cas où $n$ a une valeur précise (et petite) :

1. Tous les termes sont des produits d'une puissance de $a$ et d'une puissance de $b$, de telle sorte que la somme de ces puissances redonne $n$. Et toutes les possibilités apparaissent.
2. Le coefficient binomial devant le terme $a^k b^{n-k}$ est $\binom{n}{k}$ ou (c'est pareil) $\binom{n}{n-k}$, autrement dit c'est la puissance de $a$ ou de $b$ parmi la puissance totale $n$.
3. En particulier les coefficients devant $a^k b^{n-k}$ et devant $a^{n-k} b^k$ sont les mêmes. La formule est donc symétrique par rapport au « milieu » de la somme.
4. Quand $n$ est petit, il suffit donc souvent de calculer jusqu'à $\binom{n}{2}$, au pire des cas jusqu'à $\binom{n}{3}$ et ceci peut se faire facilement avec la formule avec la factorielle ou le triangle de Pascal.

**Exemple 19** Développer, pour $a$ et $b$ deux éléments de $\mathbb{K}$, $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4, (a+b)^5$. Complétez en même temps le triangle de Pascal dans la colonne de droite.

| | |
|---|---|
| $(a+b)^2 =$ | |
| $(a+b)^3 =$ | |
| $(a+b)^4 =$ | |
| $(a+b)^5 =$ | |

Le résultat qui suit n'est à apprendre par coeur, mais est très classique.

**Corollaire 2 | Deux cas particuliers**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Preuve**

## 3. SOMMES DOUBLES

Dans cette dernière section, on s'intéresse à la notion de somme double, *i.e.* de termes possédant deux indices et notés $a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$ avec $n, p \geqslant 0$. Afin d'alléger la présentation, on suppose donc que les indices $i, j$ sont définis à partir de 1, mais naturellement ces notions peuvent être étendues à des sommes doubles plus générales, comme pour les sommes simples.

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | … | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{1,1}$ | $a_{1,2}$ | $a_{1,3}$ | … | $a_{1,p}$ |
| 2 | $a_{2,1}$ | $a_{2,2}$ | $a_{2,3}$ | … | $a_{2,p}$ |
| 3 | $a_{3,1}$ | $a_{3,2}$ | $a_{3,3}$ | … | $a_{3,p}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | … | |
| $n$ | $a_{n,1}$ | $a_{n,2}$ | $a_{n,3}$ | … | $a_{n,p}$ |

On peut alors imaginer que les termes sont regroupés dans un tableau à deux entrées. La zone sur fond rouge correspond alors ce que nous appellerons dans la suite la *surdiagonale du tableau.*

### 3.1. Sommes doubles libres

Commençons par une propriété qui nous servira dans la suite : on peut toujours permuter deux sommes simples.

**Proposition 7 | Permuation de sommes simples**

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

La formule se justifie sans trop de difficultés en revenant à la définition de somme simple. Mais de manière plus visuelle, constatons qu'elle signifie qu'il revient au-même de sommer tous les termes du tableau en le parcourant ligne après ligne ou colonne après colonne. Logique ! Plus précisément,

- pour $i$ fixé, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ correspond à la somme des coefficients sur la ligne $i$,
- pour $j$ fixé, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ correspond à la somme des coefficients sur la colonne $j$.

L'ordre de sommation n'a pas d'importance et on peut adopter la notation compacte :

**Notation Somme double libre**

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$. On appelle *somme double des* $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p$, la quantité notée $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j}$ ou encore $\sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} a_{i,j}$, définie par :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

Et lorsqu'on somme sur la même plage d'indices, c'est-à-dire $n = p$, on note :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.$$

**Remarque 10** Même si ci-dessus il n'y a qu'un symbole somme, on a bien deux sommes simples cachées derrière.

**Exemple 20** Calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (j-i)^2$.

**Cas particulier : sommes doubles à indices séparables.** On précise ici le cas de sommes doubles libres s'écrivant sous une forme particulière. Commençons par un premier exemple.

**Exemple 21** Calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{1}{2^{i+j}}$ pour $n \geqslant 1$.

De manière générale, on a la formule suivante.

**Proposition 8 | Permutation de sommes simples**

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right).$$

**Preuve** On a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = a_i\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)$ par linéarité de la somme ($a_i$ est une constante par rapport à la somme en $j$).

Or, $B = \sum_{j=1}^{p} b_j$ est une constante par rapport à $i$, donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) B = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right).$$

## 3.2. Sommes doubles sous contrainte

L'idée est ici de définir la somme sur le triangle supérieur du tableau (en rouge clair). Cela consiste à instaurer une contrainte entre les deux indices. Regardons la seconde ligne du tableau, pour $i = 2$, alors $j$ parcourt $2, 3, \ldots, p$, on a donc ligne par ligne la relation $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$.

**Proposition 9 | Permutation de sommes simples**

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$ **avec $n = p$**, alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=\mathbf{i}}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\mathbf{j}} a_{i,j}.$$

**Attention**

Contrairement à la somme sur un rectangle, les bornes de la somme intérieure dépendent de l'indice de la somme extérieure.

**Méthode Permuter des sommes simples à indices liés**

Pour retenir

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j},$$

toujours garder à l'esprit l'encadrement entre les indices : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p$. Ainsi, pour $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$ :

- si $i$ n'existe pas, $j$ se balade entre 1 et $p$, ce qui explique la somme extérieure en $j$.
- Si $j$ est fixé entre 1 et $n$, alors $i$ se balade entre 1 et $j$, ce qui explique la somme intérieure en $i$.

**Notation Somme double sous contrainte**

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^{np}$ **avec $n = p$**. On appelle alors :

- *somme double sur le triangle inférieur* la somme

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j},$$

- *somme double sur le triangle inférieur strict* la somme

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{p}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}.$$

**Exemple 22**

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum\limits_{0\leq i\leqslant j\leq n} (j-i)^2$.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

**Codage informatique d'une somme double.** Passons maintenant à l'aspect informatique du symbole somme double.

**(Calcul de $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p} a_{i,j}$)**

```
def somme(p, n):
    S = 0
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, p+1):
            S += a_{i,j} # à adapter en fonction de la somme
    return S
```

On adapte aussi facilement aux sommes doubles à indices liés.

**(Calcul de $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant p} a_{i,j}$)**

```
def somme(p, n):
    S = 0
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(i, p+1):
            S += a_{i,j} # à adapter en fonction de la somme
    return S
```

**Exemple 23** Écrire deux fonctions d'en-têtes `sommedouble1(n, p)` et `sommedouble2(n, p)` prenant en argument deux entiers `n` et `p`, et retournant les valeurs des sommes ci-dessous.

- $\sum\limits_{p\leq i,j\leq n} (j-i)^2$

- $\sum_{p\leq i\leq j\leq n} 2^{\frac{i}{j}}$.

## 4. EXERCICES

*La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.*

**Savoir-faire**

1. Connaître les manipulations sur les sommes et produits :
   - connaître la définition de la somme et sa convention ☐
   - savoir passer d'une notation en extension à une notation avec le symbole $\sum$, $\prod$ ☐
   - connaître la définition de produit et sa convention ☐
   - connaître les sommes usuelles ☐
   - savoir utiliser la linéarité, la relation de CHASLES ☐
   - connaître les différentes propriétés des sommes et produits ☐
2. Savoir utiliser les méthodes de calcul de sommes et produits :
   - le changement de variable ☐
   - les sommes et produits télescopiques ☐
3. Concernant les notions de factorielle et coefficients binomiaux :
   - connaître les définitions et propriétés de la factorielle ☐
   - connaître les définitions et propriétés des coefficients binomiaux ☐
   - savoir utiliser la formule du binôme de NEWTON ☐
4. Concernant les sommes doubles :
   - connaître la définition d'une somme double ☐
   - savoir effectuer une permutation de sommes ☐

**Parcours du TD**

Plusieurs « parcours » sont proposés pour ce TD.

**Exercices d'entrainement** : ils sont faits pour travailler les notions du cours et sont généralement des applications directes (mais peuvent être techniques). Inutile de travailler forcément tous les exercices de ce parcours.

**Exercices classiques** : les méthodes à maitriser absolument. Il est conseillé de tous les aborder.

**Pour aller plus loin** : exercices plus difficiles, ou plus techniques. À ne regarder que si les autres parcours ont été correctement réalisés.

### 4.1. Factorielles

**Exercice 1** | Solution Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{7!}{6!},\quad B = \frac{3\times 4!}{(3!)^2},\quad C = \frac{n!}{(n-1)!},\quad D = \frac{(n+1)!}{(n-3)!},\quad E = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}.$$

**Exercice 2** | **Des points de suspension au symbole $\sum$** Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$ :

1. $\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln 10$,
2. $3^4+3^5+3^6+\ldots+3^{15}$,
3. $2+4+6+8+\cdots+1024$,
4. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$,
5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{10}{1024}$,
6. $2-4+6-8+\ldots+50$.

**Exercice 3** | Solution Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Remplacer le symbole $*$ dans les égalités suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k=\sum_{j=*}^{*} j a_*$,
2. $\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1}=\sum_{j=*}^{*} a_j$,
3. $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k}=\sum_{j=*}^{*} a_j$,
4. $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}+\sum_{k=1}^{n} a_{2k+1}=\sum_{j=*}^{*} a_j$.

**Exercice 4** | **Calculs de sommes (simples)** Solution Calculer les sommes suivantes (où $n$ désigne un entier naturel non nul) :

1. $\sum_{k=1}^{10} k$,
2. $\sum_{\ell=2000}^{2022} \pi$,
3. $\sum_{i=0}^{6} i^2$,
4. $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$,
5. $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$,
6. $\sum_{k=0}^{n} 5^{2k}$,
7. $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$,
8. $\sum_{k=0}^{n}(2^k+k^2+2)$,
9. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{k+1}$.

**Exercice 5** | **Calculs de sommes (plus évoluées)** Solution Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. Calculer les expressions suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}$, $\sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1}$,
2. $\sum_{k=0}^{n} 2^{3k}x^{-k}$ avec $x\neq 0$,
3. $\sum_{i=0}^{n}(i^2+n+3)$,
4. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3$,
5. $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1}$, avec $a\in\mathbb{R}$,
6. $\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1)$,
7. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right)$,
8. $\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k)$,
9. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j$, $\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j$ avec $a\in\mathbb{R}$,
10. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i$, $\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i$,
11. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}}$,
12. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$.

**Exercice 6** | **Coefficients binomiaux** Solution Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1=\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}$
2. $T=\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$, puis $S_2=\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ *Indication : on pourra écrire que* $k^2=k(k-1)+k$
3. $S_3=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}$.

**Exercice 7** | **Sommes télescopiques** Solution

1. Soit $n\geqslant 2$. Calculer : $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k}$. *Indication : On pourra démontrer que pour tout entier naturel $k\geq 2$, on a :* $\frac{1}{k^2-k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$
2. Soit $n\geqslant 3$. Calculer : $\sum_{k=3}^{n}\ln\left[\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right]$.

**Exercice 8** | **Sommes télescopiques et fractions rationnelles** Solution

1. Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall k\in\mathbb{N}^\star,\quad \frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+2}.$$
En déduire : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$.
2. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que :
$$\forall k\in\mathbb{N}^\star,\quad \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+3}.$$
En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$.
3. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que :
$$\forall k\in\mathbb{N}^\star,\quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}.$$
En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

4. Retrouver ce dernier résultat par récurrence : montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

**Exercice 9** | ♥ **Par récurrence** Solution Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1.$$

**Exercice 10** | ♥ **Par récurrence, somme des impairs** Solution Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2.$$

**Exercice 11** | ♥ **Par récurrence** Solution Démontrer que pour tout$n \geqslant 2$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1).$$

**Exercice 12** | **Sommes et dérivation géométrique** Solution Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{1\}$, on pose $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$

1. Calculer $f(x)$.
2. En dérivant, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, et en déduire $\sum_{k=1}^{n} kx^k$.
3. Calculer de la même façon : $\quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

**Exercice 13** | **Sommes d'indices pairs et impairs** Solution Soit $n$ un entier naturel non nul. On définit les sommes suivantes :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}.$$

1. Montrer que $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.
2. En déduire une expression de $S_n$ et de $T_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 14** | ♥ **Inégalité de Cauchy-Schwarz** Solution Soient $n \geqslant 1$ un entier, et $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit : $\quad P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (y_i + \lambda x_i)^2.$
   1.1) Justifier que P est une fonction trinôme ou affine, dont on précisera les coefficients.
   1.2) Quel est le signe de P ?
   1.3) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$
   *Indication : On commencera par étudier le cas où :* $\quad \forall i \in [\![1\,,\,n]\!],\ x_i = 0$
2. **[Application]** En déduire que : $\quad \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} \right)^2 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$

**Exercice 15** | **Transformation d'Abel** Solution Soient $n \geqslant 1$ un entier, et $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On définit de plus :
$$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k.$$

1. Justifier que $y_k = Y_k - Y_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 2$.
2. Montrer l'égalité : $\quad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k + x_n Y_n.$ *Ce type de transformation sert pour l'étude de la convergence de certaines suites numériques.*

## 4.3. Produits

**Exercice 16** | Solution Soit $(n, p, i) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Calculer les produits suivants, en exprimant les résultats éventuellement en fonction de factorielles :

1. $\prod_{k=1}^{n} k$ et $\prod_{k=i}^{i+n} k$,
2. $\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{k}{n}\right)$
3. $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$
4. $\prod_{k=1}^{n} (4k-2)$
5. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
6. $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$.

## 4.4. Sommes doubles

**Exercice 17** | Solution Dans cet exercice, $n, m$ sont deux entiers naturels non nuls. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} p(q^2+1)$
2. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} 1$ et $\sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} 1$,
3. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j$,
4. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i^2}{j}$,

**5.** $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} \frac{k}{\ell+1}$,

**6.** $\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} x^j$, avec $x$ un réel,

**7.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2} \sum_{i=k}^{k+2} k\,i^2$,

**8.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j} \frac{2^i}{3^j}$,

**9.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

## SOLUTIONS DES EXERCICES

**Solution (exercice 1)** Énoncé

- $A = \dfrac{7!}{6!} = \dfrac{7\times 6!}{6!} = \boxed{7}$
- $B = \dfrac{3\times 4!}{(3!)^2} = \dfrac{3\times 4\times 3!}{3!\times 3\times 2} = \boxed{2.}$
- $C = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n\times(n-1)!}{(n-1)!} = \boxed{n.}$
- $D = \dfrac{(n+1)!}{(n-3)!} = \dfrac{(n+1)\times n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)!}{(n-3)!} = \boxed{(n+1)n(n-1)(n-2).}$
- $E = \dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1)+n = n(n^2-1+1) = \boxed{n^3.}$

**Solution (exercice 3)** Énoncé

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_k = \sum_{j=2}^{n+1} j a_{j-1},$
2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+3} a_{k-1} = \sum_{j=1}^{n+2} a_j,$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{j=-1}^{n-1} a_j,$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} = a_2+a_4+\cdots+a_{2n}+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1} = \sum_{j=2}^{2n+1} a_j.$

**Solution (exercice 4)** Énoncé

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10(10+1)}{2} = \boxed{55}.$
2. $\displaystyle\sum_{\ell=2000}^{2022} \pi = (2022-2000+1)\times\pi = \boxed{23\pi}.$
3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{6} i^2 = \frac{\cancel{6}\times(6+1)\times(2\times 6+1)}{\cancel{6}} = 7\times 13 = \boxed{91}.$
4. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Puisque $\dfrac{1}{2}\neq 1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \cancel{2}\times\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + n = n(n+1)+n = \boxed{n(n+2)}.$
6. On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(5^2)^k = \sum_{k=0}^{n} 25^k$. Puisque $25\neq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 25^k = \frac{1-25^{n+1}}{1-25} = \boxed{\frac{1}{24}(25^{n+1}-1)}.$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k$. Puisque $\dfrac{3}{4}\neq 1$, on a :
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1-1}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}}.$$
D'où :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}}\times\frac{3}{4}\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{4}}} = \boxed{\frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}.$$
8. Puisque $2\neq 1$ (pour la calcul de la somme géométrique), on a :
$$\sum_{k=0}^{n}(2^k+k^2+2) = \sum_{k=0}^{n}2^k + \sum_{k=0}^{n}k^2 + \sum_{k=0}^{n}2 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(n+1),$$
donc : $\displaystyle\boxed{\sum_{k=0}^{n}(2^k+k^2+2) = 2^{n+1}-1+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2(n+1)}.$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)\cancel{(k+1)}}{\cancel{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}(k-1) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\ell = \boxed{\frac{(n-1)n}{2}}.$

**Solution (exercice 5)** Énoncé

1. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k} = (x^2)^k$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(x^2)^k = \boxed{\left\{ \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} \quad \text{si } x\neq 1 \text{ \textbf{et} } x\neq -1 n+1 \quad \text{si } x=1 \text{ ou } x=-1. \right.}.$
On reconnaît pour la deuxième la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $x^{2k+1} = (x^2)^k\times x$ :
$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} = x\sum_{k=0}^{n}(x^2)^k$$
$$= \boxed{\begin{cases} x\times\dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} & \text{si } x\neq 1, x\neq -1,\\ n+1 & \text{si } x=1,\\ -(n+1) & \text{si } x=-1.\end{cases}}$$
2. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et on obtient donc en utilisant le fait que $a^k 2^{3k} x^{-k} = a^k(2^3)^k\times\dfrac{1}{x^k} = a^k\times 8^k\times\left(\dfrac{1}{x}\right)^k =$

$\left(\frac{8a}{x}\right)^k$ : $\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} x^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{8a}{x}\right)^k = \boxed{\begin{cases} \dfrac{1-\left(\frac{8a}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{8a}{x}\right)} & \text{si } x \neq 8a, \\ n+1 & \text{si } x = 8a. \end{cases}}$.

**3.** Par linéarité de la somme, on obtient : $\sum_{i=0}^{n}(i^2+n+3) = \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+3)\sum_{i=0}^{n} 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+3)(n+1) = \boxed{\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+18)}$.

**4.** On commence par développer la puissance cube à l'intérieur de la somme puis on utilise la linéarité de la somme. On obtient donc : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n}(8i^3-12i^2+6i-1) = 8\sum_{i=1}^{n} i^3 - 12\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1$. On utilise ensuite le formulaire sur les sommes et on obtient alors : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\frac{n(n+1)}{2} - n = \boxed{n^2(4n^2+4n+1).}$

**5.** On commence par utiliser les propriétés sur les puissances et on obtient que : $(1-a^2)^{2k+1} = [(1-a^2)^2]^k \times (1-a^2)^1$. Par linéarité de la somme et en reconnaissant de plus la somme d'une suite géométrique, on a : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\sum_{k=2}^{n^2}[(1-a^2)^2]^k$. On doit donc étudier deux cas selon que $(1-a^2)^2 \neq 1$ ou que $(1-a^2)^2 = 1$.

- Cas 1 : si $(1-a^2)^2 \neq 1$. On obtient alors : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2) \times ((1-a^2)^2)^2 \times \frac{1-[(1-a^2)^2]^{n^2-1}}{1-(1-a^2)^2} = (1-a^2)^5 \times \frac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{2a^2-a^4} = \boxed{(1-a^2)^5 \times \frac{1-(1-a^2)^{2n^2-2}}{a^2(2-a^2)}}$.
- Cas 2 : si $(1-a^2)^2 = 1$ : Regardons à quels $a$ cela correspond : $(1-a^2)^2 = 1 \iff 1-a^2 = 1$ ou $1-a^2 = -1 \iff a^2 = 0$ ou $a^2 = 2 \iff a = -\sqrt{2}$ ou $a = 0$ ou $a = \sqrt{2}$. Calculons alors la somme pour ces $a$ : $\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = (1-a^2)\sum_{k=2}^{n^2} 1 = (1-a^2)\times(n^2-1)$. Il faut alors distinguer encore deux cas :
  - ◇ Si $a = 0$ alors $1-a^2 = 1$ et $\boxed{\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = n^2-1.}$
  - ◇ Si $a = -\sqrt{2}$ ou $a = \sqrt{2}$ alors $1-a^2 = -1$ et $\boxed{\sum_{k=2}^{n^2}(1-a^2)^{2k+1} = -n^2+1.}$

**6.** $\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1) = 3\sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3\times 2\times\frac{1-2^n}{1-2} + n$ par linéarité et car $2 \neq 1$. Donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(3\times 2^k+1) = 6(2^n-1)+n.}$

**7.** $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ car $e^{\frac{1}{n}} \neq 1$. Ainsi $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}}$.

**8.** $\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k) = 2\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) + \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ par linéarité et car $2 \neq 1$. Ainsi $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(2k-1+2^k) = n^2+2^{n+1}-2.}$

**9.** $\boxed{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j = (1+a)^n}$ en reconnaissant un binôme de NEWTON car $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j 1^{n-j}$. Pour la seconde, on se ramène à la formule du binôme de NEWTON en utilisant la relation de CHASLES : $\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^j - \binom{n}{0}a^0 + \binom{n}{n+1}a^{n+1}$. Par convention, on a : $\binom{n}{n+1} = 0$ et ainsi on obtient en utilisant le binôme de NEWTON : $\boxed{\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j}a^j = (1+a)^n - 1.}$

**10.** $\boxed{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = 0}$ grâce au binôme de NEWTON car $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j 1^{n-j} = (1-1)^n$. Pour la seconde, on se ramène à la formule du binôme de NEWTON en utilisant la relation de CHASLES : $\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = \sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}(-1)^i - \binom{n+1}{0}(-1)^0 - \binom{n+1}{n+1}(-1)^{n+1} = (1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} = -1 + (-1)^{n+2} = -1 + (-1)^n = (-1)^n - 1$.

Ainsi on obtient que : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}(-1)^i = (-1)^n - 1.}$

**11.** On se ramène à la formule du binôme de NEWTON en utilisant les propriétés sur les puissances. On obtient : $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{2^{j+1}} = \frac{-1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{-1}{2}\right)^j = \frac{-1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = \boxed{\frac{-1}{2^{n+1}}}$.

**12.** $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k}$. Afin de pouvoir utiliser la formule du binôme de NEWTON, on utilise la relation de CHASLES pour obtenir : $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n} = \boxed{\frac{4^n-1}{3^n}}$.

## Solution (exercice 6) Énoncé

**1.** On peut déjà remarquer que : $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = 0\times\binom{n}{0} + \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}$. Ici on ne sait pas calculer la somme sans transformation car il y a le $j$. On utilise d'abord une propriété des coefficients binomiaux, et on obtient :

$$S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = \sum_{j=1}^{n} n\binom{n-1}{j-1} = n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}$$

car $n$ est alors indépendant de l'indice de sommation donc on peut le sortir de la somme. Pour se ramener à du binôme de NEWTON, on commence par poser le changement d'indice : $i = j-1$ et on obtient $S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}$ (c'est ici qu'il est mieux d'être passé au début d'une somme allant de 0 à $n$ à une somme allant de 1 à $n$ car sinon on aurait un indice commencant à -1. Si on n'a pas changé la somme au début, une autre méthode est alors de faire ici une relation de CHASLES afin d'isoler l'indice -1). On reconnaît alors un binôme de NEWTON et on obtient $\boxed{S_1 = \sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}}$.

**2.** Il s'agit ici d'appliquer deux fois de suite la propriété sur les coefficients binomiaux : $T = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}$ en reprenant les calculs faits au-dessus. On pourra aussi remarquer que la somme T peut être commencée à 2. Puis en réappliquant la propriété sur les coefficients binomiaux : $(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2}$, on obtient que : $T = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}$. On effectue alors le changement d'indice $j = k-2$ et on obtient $T = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}$.

Donc en utilisant le binôme de NEWTON, on a : $\boxed{T = n(n-1)2^{n-2}}$. **Calcul de $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ :** Comme $k^2 = k(k-1)+k$ et par linéarité de la somme, on obtient que : $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = T + S_1 = \boxed{n(n+1)2^{n-2}}$.

**3.** Là encore, il faut commencer par utiliser la propriété sur les coefficients binomiaux. Comme $(i+1)\binom{n+1}{i+1} = (n+1)\binom{n}{i}$, on obtient que : $\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1}$. Ainsi, la somme devient : $S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{i+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}$ car $\frac{1}{n+1}$ ne dépend pas de l'indice de sommation $i$. On fait le changement d'indice $j = i+1$ et on utilise aussi la relation de CHASLES pour faire apparaître le binôme de NEWTON. On obtient $S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} - \binom{n+1}{0}\right]$. Ainsi, on obtient $\boxed{S_3 = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i} = \frac{1}{n+1}[2^{n+1}-1]}$.

## Solution (exercice 7) Énoncé

**1.** On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(\ln(k)-\ln(k+1))\\
&= (\ln(1)-\cancel{\ln(2)}) + (\cancel{\ln(2)}-\cancel{\ln(3)}) + \ldots + (\cancel{\ln(n-1)}-\cancel{\ln(n)})\\
&\quad + (\cancel{\ln(n)}-\ln(n+1))\\
&= \ln(1)-\ln(n+1)\\
&= \boxed{-\ln(n+1)}
\end{aligned}$$

**2.** Soit $k\geq 2$, on a : $\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} = \frac{\cancel{k}-(\cancel{k}-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2-k}$. Ainsi, on a :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \boxed{1 - \frac{1}{n}}.$$

**3.** Dès que l'on a une soustraction entre deux sommes de même type avec juste un décalage d'indice, il faut reconnaître une somme télescopique et savoir la calculer. Le calcul utilise un ou plusieurs changements d'indice puis la relation de CHASLES.

- $S = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n} x_{i+1} - \sum_{i=0}^{n} x_i$ par linéarité. On pose alors le changement d'indice : $j = i+1$ dans la première somme et on obtient : $S = \sum_{j=1}^{n+1} x_j - \sum_{i=0}^{n} x_i$. Comme l'indice de sommation est muet, on a : $S = \sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=0}^{n} x_i$. La relation de CHASLES donne : $S = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i - x_0 = \boxed{x_{n+1} - x_0.}$
- $S' = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}$ par linéarité. On pose alors le changement d'indice : $j = i+1$ dans la première somme et le changement $k = i-1$ dans la deuxième somme et on obtient : $S' = \sum_{j=2}^{n+1} x_j - \sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Comme l'indice de sommation est muet, on a : $S' = \sum_{i=2}^{n+1} x_i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i$. La relation de CHASLES donne : $S' = \sum_{i=2}^{n-1} x_i + x_n + x_{n+1} - \sum_{i=2}^{n-1} x_i - x_0 - x_1 = \boxed{x_{n+1} + x_n - x_0 - x_1.}$

**4.** Il s'agit ici de faire apparaître une somme télescopique puis d'appliquer la méthode précédente.

**5.**
- Classiquement pour ce type de somme, on commence par montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b &= 0, \\ a &= 1 \end{cases}$ donc $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$.
- Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j = k+1$ dans la deuxième somme et on obtient : $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$ en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet et la relation de CHASLES.

**6.**
- On transforme cette somme en utilisant les propriétés du logarithme népérien et on obtient : $\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln(k) - \ln(k+1)$.
- Ainsi transformée, la somme S est bien de type télescopique car on a bien une soustraction de 2 sommes de même type avec juste un décalage d'indice. En effet, par linéarité, on obtient : $S = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$. On pose le changement d'indice $j = k+1$ dans la deuxième somme et on obtient $S = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j) = \ln(1) - \ln(n+1) = \boxed{-\ln(n+1).}$

**7.** On transforme cette somme en utilisant les propriétés du logarithme népérien et on obtient : $\ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-2)}\right) = 2\ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-2)$. Ainsi transformée, la somme S est bien de type télescopique car on a bien une soustraction de trois sommes de même type avec juste des décalages d'indice. En effet, par linéarité, on obtient : $S = 2\sum_{k=3}^{n} \ln(k) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k-2)$. On pose le changement d'indice $j = k+1$ dans la deuxième somme et le changement $i = k-2$ dans la troisième somme et on obtient

$$S = 2\sum_{k=3}^{n} \ln(k) - \sum_{j=4}^{n+1} \ln(j) - \sum_{j=1}^{n-2} \ln(j)$$
$$= 2\ln(3) + 2\ln(n-1) + 2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n) - \ln(n+1) - \ln(1) - \ln(2) -$$
$$= \boxed{\ln\left(\frac{3n(n-1)}{2(n+1)}\right)}.$$

**Solution (exercice 8)** Énoncé

**1.**
- On commence par montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ : $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b)k+2a+b}{(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b &= 0, \\ 2a+b &= 1 \end{cases}$ donc $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi, on obtient, par

linéarité, que : $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$.

- Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j = k+1$ dans la première somme et le changement d'indice : $i = k+2$ dans la deuxième somme et on obtient : $S = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}}$ en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet et la relation de Chasles.

**2.**

- On cherche à déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+3}$. On met sur le même dénominateur puis on identifie car la relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$. On obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{k-1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{k^2(a+b+c)+k(4a+3b+c)+3a}{k(k+1)(k+3)}$. Ainsi, par identification, on doit résoudre le système suivant : $\begin{cases} a+b+c &= 0, \\ 4a+3b+c &= 1, \\ 3a &= -1 \end{cases}$.. La résolution du système donne : $\boxed{a = -\frac{1}{3},\ b = 1 \text{ et } c = -\frac{2}{3}.}$
- En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k(k+1)(k+3)}$. On obtient donc par linéarité : $S = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3}$. On pose les changements de variable suivant : $j = k+1$ et $i = k+3$ et on obtient : $S = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} - \frac{2}{3}\sum_{i=4}^{n+3} \frac{1}{i} = -\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k}$ car l'indice de sommation est muet. D'après la relation de Chasles, on obtient : $S = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \boxed{\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+3}\right).}$

**3.**

- On commence par montrer qu'il existe trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}$. Cette relation doit être vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ donc, par identification, on obtient que : $\begin{cases} a+b+c &= 0, \\ 3a+2b+c &= 0, \\ 2a &= 1 \end{cases}$ donc $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$. Ainsi, on obtient, par linéarité, que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$.
- Il s'agit alors bien d'une somme télescopique. On pose le changement d'indice : $j = k+1$ dans la deuxième somme et le changement d'indice : $i = k+2$ dans la troisième somme et on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \boxed{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}
\end{aligned}$$

en utilisation le fait que l'indice de sommation est muet, la relation de Chasles et en mettant tout au même dénominateur.

**4.** On établie maintenant le résultat précédent par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété :

$$\mathscr{P}(n) : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

**Initialisation.** D'un côté, on a : $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}$. De l'autre côté, on a : $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{4\times 6} = \frac{1}{6}$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang $n$, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ d'après la relation de Chasles. Puis par hypothèse de récurrence, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

en mettant au même dénominateur. Pour le numérateur on remarque que -1 est racine évidente et ainsi en factorisant par $n+1$ on obtient par identification des coefficients que : $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)(n^2+5n+4)$. Puis le calcul du discriminant donne que $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)(n^2+5n+4)=(n+1)(n+1)(n+4)$. Ainsi on obtient que : $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}.$$

**Solution (exercice 9)** Énoncé Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$ : $\sum_{k=0}^{n}kk!=(n+1)!-1$.

- **Initialisation.** pour $n=0$ : on a $\sum_{k=0}^{0}kk!=0$ et $1!-1=0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre $n$, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  On a, en mettant à part le dernier terme de la somme :
  $$\sum_{k=0}^{n+1}kk!=\sum_{k=0}^{n}kk!+(n+1)(n+1)!.$$
  Par hypothèse de récurrence, on a
  $$\sum_{k=0}^{n+1}kk!=(n+1)!-1+(n+1)(n+1)!\quad=(n+1)!(n+2)-1=(n+2)!-1.$$
  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est démontrée.

Il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}kk!=(n+1)!-1}$.

**Solution (exercice 10)** Énoncé Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$ : $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$.

- **Initialisation.** pour $n=0$ : D'un côté, on a : $\sum_{k=0}^{0}(2k+1)=2\times0+1=1$. De l'autre côté, on a : $(0+1)^2=1$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre $n$, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On, en mettant à part le dernier terme de la somme : $\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)+2(n+1)+1.$
  : Puis d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :
  $$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1)=(n+1)^2+2n+3=n^2+2n+1+2n+3=n^2+4n+4=(n+2)^2.$$
  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Il résulte du principe de récurrence que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2}$.

**Solution (exercice 11)** Énoncé Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$ la propriété : $\mathscr{P}(n)$ : $\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

- **Initialisation.** pour $n=2$. On a : $\sum_{k=1}^{1}k(k+1)=2$ et : $\frac{1}{3}\times2\times1\times3=2$. Ainsi $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq2$. On suppose la propriété vraie à l'ordre $n$, vérifions que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a, en mettant à part le dernier terme de la somme :
  $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)+n(n+1).$
  Puis d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :
  $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)+n(n+1)=n(n+1)\left(\frac{n-1}{3}+1\right)=n(n+1)\frac{n+2}{3}.$
  Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Il résulte du principe de récurrence que :
$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)}.$$

**Solution (exercice 12)** Énoncé Il s'agit ici du même type de méthode que pour l'exercice précédent sauf que cette fois ci, on l'applique à la somme des termes d'une suite géométrique et plus au binôme de NEWTON.

1. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique et ainsi, on obtient, comme $x\neq1$ : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ f(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$.
2. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme produit, somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables.
   - D'un côté, la fonction $f$ vaut : $f(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Ainsi, en dérivant, on obtient que :
     $$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ f'(x)=\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}}.$$
   - De l'autre côté, la fonction $f$ vaut $f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=1+\sum_{k=1}^{n}x^k$. La dérivée

d'une somme étant égale à la somme des dérivées, on obtient que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{1\},\quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.}$$

La somme commence bien à $k=1$ car le terme pour $k=0$ dans $f(x)$ est le terme constant 1 qui est nul lorsqu'on dérive.

On obtient donc que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{1\},\quad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$

On a : $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx\times x^{k-1} = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$. D'après la question précédente, on obtient donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{1\},\quad \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\times\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$

**3.** Il faut ici remarquer que la somme correspond à dériver deux fois la somme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+\sum_{k=2}^{n} x^k$. La fonction $f$ est bien deux fois dérivables comme fonction polynomiale.

Et en dérivant deux fois, on obtient bien : $\forall x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{1\}, f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$. Cette somme commence bien à $k=2$ car quand on dérive deux fois les termes 1 et $x$, ils deviennent nuls. En dérivant deux fois l'autre expression de $f$, on obtient la valeur de la somme :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{1\},\quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}.}$$

**Solution (exercice 13)** Énoncé

**1.** • Si on ne voit pas comment débuter, on commence par écrire la somme $S_n+T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n+T_n = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux : $S_n$ correspond en effet à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec $k$ pair et $T_n$ correspond à la somme des coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec $k$ impair donc en sommant les deux on a bien la somme de tous les coefficients binomiaux pour $k$ allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de NEWTON, on obtient que : $\boxed{S_n+T_n = 2^{2n} = 4^n.}$

• De même, on peut commencer par écrire la somme $S_n-T_n$ sous forme développée. On obtient alors que : $S_n-T_n = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k$ car on se rend compte en écrivant les sommes sous forme développées que l'on obtient au final la somme de tous les coefficients binomiaux coefficientés par 1 ou par -1 : les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec $k$ pair sont coefficienté par 1 et les coefficients binomiaux $\binom{2n}{k}$ avec $k$ impair sont coefficienté par -1. Ainsi cela revient bien à sommer tous les nombres $\binom{2n}{k}(-1)^k$ pour $k$ allant de 0 à $2n$. Ainsi, d'après le binôme de NEWTON, on obtient que : $\boxed{S_n+T_n = (1-1)^n = 0.}$

**2.** Il s'agit alors juste de résoudre le système $\begin{cases} S_n+T_n &= 2^{2n},\\ S_n-T_n &= 0.\end{cases}$

On obtient alors : $2S_n = 2^{2n}$, donc : $\boxed{S_n = 2^{2n-1} \text{ et } T_n = S_n = 2^{2n-1}}$.

**Solution (exercice 14)** Énoncé

**1. 1.1)** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors en développant le carré :

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n}(y_i+\lambda x_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(y_i^2+2\lambda x_iy_i+\lambda^2x_i^2)\\ &= \sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\lambda\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\lambda^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2.\end{aligned}$$

*linéarité de la somme*

Il s'agit donc :

- d'une fonction affine si $\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 0$. Alors dans ce cas le coefficient directeur est $a = 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, et l'ordonnée à l'origine $b = \sum_{i=1}^{n}y_i^2$.
- D'un trinôme sinon : avec $a = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 > 0$, $b = 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ et $c = \sum_{i=1}^{n}y_i^2$.

**1.2)** Puisque P est une somme de carrés, on a : $\boxed{\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad P(\lambda)\geqslant 0}$.

**1.3)**
- Cas $\forall i\in[\![1\,,\,n]\!],\ x_i = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 0$. L'inégalité est simplement $0\leqslant 0$, qui est bien sûr vérifiée.
- Cas $\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \neq 0$. Dans ce cas, la fonction P est un trinôme de signe

(positif) constant, donc son discriminant est négatif. Or,

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^n x_i^2 \times \sum_{i=1}^n y_i^2 \leqslant 0.$$

Ainsi, $\left(2\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant 4\sum_{i=1}^n x_i^2 \times \sum_{i=1}^n y_i^2$. D'où l'on tire en passant à la racine (qui est une fonction croissante) et en simplifiant par 4 :

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}.$$

**2. [Application]** Il suffit de choisir : $\forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad y_i = \dfrac{1}{2^i}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (élevée au carré) donne alors :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i} \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i},$$

apparait alors dans le majorant une somme géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On a donc établi que : $\boxed{\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{2^i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\sum_{i=1}^n x_i^2}.$

**Solution (exercice 15)** Énoncé

1. La formule $\boxed{y_k = Y_k - Y_{k-1}}$ pour tout $k \geqslant 2$ découle d'un simple téléscopage.
2. Montrons l'égalité : $\sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k + x_n Y_n$.

Commençons par traiter le cas $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n x_k y_k &= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^n x_k (Y_k - Y_{k-1}) \\
&= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^n x_k Y_k - \sum_{k=2}^n x_k Y_{k-1} \\
&= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^n x_k Y_k - \sum_{\ell=1}^{n-1} x_{\ell+1} Y_\ell \\
&= x_1 y_1 + \sum_{k=2}^n x_k Y_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} Y_k \\
&= x_1 y_1 + x_n Y_n - x_2 Y_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}) Y_k + x_n Y_n.
\end{aligned}$$

*linéarité de la somme*

*changement d'indice $\ell = k-1$ dans la deuxième*

*indice muet*

*regroupement des sommes sur les bornes communes*

*les termes surlignés correspondent au terme $k = 1$ de la somme*

**Solution (exercice 16)** Énoncé $= 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n = \boxed{n!}$. De-même :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=i}^{i+n} k &= i \times (i+1) \times (i+2) \times \cdots \times (i+n) \\
&= \frac{[1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (i-1)] \times [i \times (i+1) \times (i+2) \times \cdots \times (i+n)]}{[1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (i-1)]} \\
&= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (i-1) \times i \times (i+1) \times (i+2) \times \cdots \times (i+n)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (i-1)} \\
&= \boxed{\frac{(i+n)!}{(i-1)!}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^n \exp\left(\frac{k}{n}\right) &= e^{\frac{1}{n}} \times e^{\frac{2}{n}} \times e^{\frac{3}{n}} \times \ldots e^{\frac{n-1}{n}} \times e^{\frac{n}{n}} \\
&= e^{\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)+n}{n}} = e^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}} \\
&= e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k} = \boxed{e^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} &= \frac{2n \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \ldots \times 3 \times 1} \\
&= \frac{(2n \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2)^2}{(2n+1) \times 2n \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{(2^n n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1))^2}{(2n+1)!} \\
&= \boxed{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(4k-2) &= \prod_{k=1}^{n}2(2k-1)\\ &= 2^n\times(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times3\times1\\ &= \frac{2^n\times 2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\ldots\times3\times2\times1}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2}\\ &= \frac{2^n\times(2n)!}{2^n\times n\times(n-1)\times\ldots\times2\times1}\\ &= \boxed{\frac{(2n)!}{n!}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k^2-1)}{\prod_{k=2}^{n}k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}k}{\prod_{k=2}^{n}k}\times\frac{\prod_{k=3}^{n+1}k}{\prod_{k=2}^{n}k} = \boxed{\frac{n+1}{2n}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} &= \frac{\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)}{\prod_{k=0}^{p-1}(p-k)}\\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\times\cdots\times2\times1}\\ &= \boxed{\frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)}{p!}}.\end{aligned}$$

On essaye alors d'écrire le numérateur avec des factorielles. On obtient

$$\begin{aligned}&n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)\\ &= \frac{[n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-p+1)]\times[(n-p)\times\cdots\times2\times1]}{(n-p)\times\cdots\times2\times1}\\ &= \frac{n!}{(n-p)!}.\end{aligned}$$

Ainsi on obtient au final que :

$$\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-k}{p-k} = \boxed{\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}}.$$

**Solution (exercice 17)** Énoncé

**1.**

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m}p(q^2+1) &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\sum_{q=0}^{m}q^2+p\sum_{q=0}^{m}1\right]\\ &= \sum_{p=0}^{n}\left[p\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+p(m+1)\right]\\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\sum_{p=0}^{n}p+(m+1)\sum_{p=0}^{n}p\\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\frac{n(n+1)}{2}+(m+1)\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \boxed{\frac{1}{12}(m+1)\left(2m^2+m+6\right)n(n+1).}\end{aligned}$$

**2.**

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}1\right] = \sum_{i=1}^{n}[n] = n\sum_{i=1}^{n}1 = \boxed{n^2.}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1 = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{i}1\right] = \sum_{i=1}^{n}[i] = \sum_{i=1}^{n}i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

**3.**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i2^j &= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}i2^j\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[i\sum_{j=1}^{n}2^j\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[i\times2\frac{1-2^n}{1-2}\right]\\ &= 2(2^n-1)\sum_{i=1}^{n}i\\ &= \boxed{(2^n-1)n(n+1).}\end{aligned}$$

**4.**

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i^2}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i^2}{j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}i^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6}\\ &= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n}\left(j^2+3j+1\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{3n(n+1)}{2}+n\right)\end{aligned}$$

$$= \boxed{\frac{1}{18} n(n+4)(n+2)}.$$

**5.** On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas car on ne connaît pas la somme des inverses. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} \frac{k}{\ell+1} = \sum_{0\leq k\leq \ell\leq n} \frac{k}{\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{k}{\ell+1}.$$

Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{k}{\ell+1} &= \sum_{\ell=0}^{n} \left[\frac{1}{\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell} k\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \left[\frac{1}{\ell+1} \times \frac{\ell(\ell+1)}{2}\right] = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{n} \ell = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}}. \end{aligned}$$

**6.**

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{i} 1\right] = \sum_{i=1}^{n} [i] = \sum_{i=1}^{n} i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

**7.**
- Si $x=1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} x^j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$.
- Si $x \neq 1$ : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} x^j = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{i} x^j\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[x \frac{1-x^i}{1-x}\right] = \frac{x}{1-x} \sum_{i=1}^{n} (1-x^i) = \frac{x}{1-x} \left[\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} x^i\right]$.

  Ainsi on obtient que : $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} x^j = \frac{x}{1-x} \left[n - x\frac{1-x^n}{1-x}\right]}$.

**8.**

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n^2} \sum_{i=k}^{k+2} k i^2 &= \sum_{k=0}^{n^2} \left[k \sum_{i=k}^{k+2} i^2\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n^2} \left[k\left(k^2+(k+1)^2+(k+2)^2\right)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n^2} k(3k^2+6k+5) \\ &= 3\sum_{k=0}^{n^2} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n^2} k^2 + 5\sum_{k=0}^{n^2} k \\ &= \boxed{3\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)^2 + n^2(n^2+1)(2n^2+1) + 5\frac{n^2(n^2+1)}{2}}. \end{aligned}$$

**9.**

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j} \frac{2^i}{3^j} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3^j} \sum_{i=0}^{j} 2^i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3^j} \frac{1-2^{j+1}}{1-2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{3^j} (2^{j+1}-1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{1}{3}\right)^j\right) \\ &= 2\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^j - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^j = 2\frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \boxed{4\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}. \end{aligned}$$

**10.** On commence par essayer de calculer la somme la plus intérieure. On n'y arrive pas. Ainsi on va donc commencer par inverser le sens des symboles sommes. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i}.$$

Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i}\right] = \sum_{j=1}^{n} [2^j - 1] \\ &= \boxed{2(2^n-1)-n.} \end{aligned}$$