

Chapitre (ALG) 5 Nombres Complexes

- 1 Définition de \mathbb{C} et forme algébrique
- 2 Forme exponentielle
- 3 Application des nombres complexes en trigonométrie
- 4 Exercices

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est de définir un nouvel ensemble \mathbb{C} permettant de faciliter les calculs de trigonométrie par exemple.

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XV^e siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre de CARDAN, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle « sophistiqué ». C'est Raphaël BOMBELLI qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors « impossibles » avant de leur donner le nom d'imaginaires.

— Le saviez-vous ?

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST1, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1 DÉFINITION DE \mathbb{C} ET FORME ALGÈBRE

Les nombres réels, comme leur nom l'indique, sont issus du « monde réel ». Par exemple les entiers servent à compter des unités, les nombres décimaux et fractionnaires généralisent ce principe. Pour les irrationnels : par exemple $\sqrt{2}$ correspond à la longueur de la diagonale d'un carré de longueur de côté 1, π à l'aire du disque de rayon 1... bref, toutes ces quantités ont une interprétation.

L'introduction de nombres dits « complexes » comme dans la prochaine définition a été motivée par plusieurs problèmes.

- **La résolution de certaines équations** n'admettant pas, *a priori*, de solutions réelles, comme par exemple

$$x^2 + 1 = 0. \quad (\text{Eq Def i})$$

En effet, x^2 ne peut jamais être égal à -1 . Même si elle n'admet pas de solution réelle, on peut en fait définir un ensemble contenant \mathbb{R} , et noté \mathbb{C} , dans lequel cette équation admet deux solutions notées i et $-i$. Cet ensemble sera construit exprès pour cela.

- **En géométrie du plan.** Si les réels représentent l'ensemble de la droite réelle, alors les nombres complexes définis plus bas correspondent au plan. On peut considérer les nombres complexes comme une façon synthétique d'écrire l'abscisse et l'ordonnée de chaque point du plan. Au lieu de travailler avec un couple de réels (x, y) , on utilise la notation $x + iy$. Le nombre imaginaire i sert à identifier l'ordonnée. L'avantage d'une telle notation est qu'elle va simplifier les manipulations géométriques car elle combine deux informations (abscisse et ordonnée) en un seul nombre.
- **En trigonométrie,** au travers de l'exponentielle complexe $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, que nous définirons en fin de chapitre. Les nombres complexes s'invitent alors dans d'autres sciences, notamment en Physique où les physiciens trouvèrent là encore les complexes comme commodes pour manipuler des signaux périodiques (en électricité notamment).

1.1 Généralités

Définition/Proposition 1 | Définition d'un nombre complexe

Il existe un ensemble \mathbb{C} contenant \mathbb{R} ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) dont les éléments sont appelés les *nombre complexes*, et muni de deux opérations d'addition $+$ et de multiplication \times , qui satisfont les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} contient un élément i pour lequel : $i^2 = -1$.
- **[Forme algébrique]** Si $z \in \mathbb{C}$, alors z peut être écrit de **manière unique** sous une forme dite *algébrique* : $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

On appellera :

- ◇ *partie réelle* de z le réel x noté $\operatorname{Re}(z)$,
- ◇ *partie imaginaire* de z le réel y noté $\operatorname{Im}(z)$.
- ◇ Si $x = 0$, on dit que z est *imaginaire pur* (ensemble noté $i\mathbb{R}$).
- ◇ Si $y = 0$, $z = x \in \mathbb{R}$.
- Les opérations $+$ et \times de \mathbb{C} sont soumises aux mêmes règles de calcul que leurs analogues dans \mathbb{R} : pour tous $z, z', z'' \in \mathbb{C}$,
 - ◇ **[Associativité de $+$]** $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
 - ◇ **[Associativité de \times]** $(zz')z'' = z(z'z'')$.
 - ◇ **[Commutativité]** $z + z' = z' + z$, $z \times z' = z' \times z$.
 - ◇ **[Distributivité]** $z(z' + z'') = (zz') + (zz'')$.
 - ◇ **[Neutres]** $z + 0 = 0 + z = z$, $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.

L'existence de \mathbb{C} est admise, des éléments de réponses sont néanmoins donnés ci-après. Même si nous n'insisterons pas trop là-dessus : il ne suffit pas de prétendre son existence pour qu'il existe, *i.e.* la phrase « soit \mathbb{C} un ensemble contenant \mathbb{R} et possédant un élément i tel que $i^2 = -1$ » n'a aucune légitimité mathématique. Pour définir proprement \mathbb{C} , on part d'un ensemble déjà connu, \mathbb{R} en l'occurrence (mais attention, cet ensemble aussi on ne vous l'a jamais construit!) et on en définit un autre possédant les propriétés souhaitées, c'est le propos de la prochaine preuve.

Preuve (Éléments sur la construction de \mathbb{C} [H.P]) Rappelons que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, c'est un ensemble bien défini que nous pouvons utiliser pour construire \mathbb{C} . Alors on note \mathbb{C} l'ensemble \mathbb{R}^2 muni des opérations $+$ et \times suivantes :

1. **[Somme de nombres complexes]** $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,
2. **[Produit de nombres complexes]** $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.^a

Les éléments de \mathbb{C} sont plutôt représentés de la manière suivante : l'élément (x, y) est noté $x + iy$, et les propriétés précédentes deviennent :

1. **[Somme de nombres complexes]** $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$,
2. **[Produit de nombres complexes]** $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$,

impliquant en particulier que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ en faisant $y = 1$, $y' = 1$, $x = 0$ et

$x' = 0$, c'est-à-dire en notation complexe $i^2 = -1$. On a donc construit un élément noté i et un ensemble \mathbb{C} , où cet élément i est une solution dans \mathbb{C} de $x^2 + 1 = 0$. C'est ce qu'on voulait.

Reformulons l'unicité de l'écriture algébrique (très importante en pratique) sous forme d'une proposition indépendante.

Proposition 1 | Unicité de la forme algébrique

Soient $z = x + iy, z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$. Alors :

$$x + iy = x' + iy' \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

On dit que l'on peut *identifier* partie réelle et partie imaginaire dans l'écriture algébrique. Les propriétés de la **Définition/Proposition 1** permettent de faire toute sorte de calculs, qui sont donc identiques à ceux menés dans \mathbb{R} mais en tenant compte de la relation $i^2 = -1$. Voici quelques exemples.

Exemple 1 Déterminer la forme algébrique des complexes ci-dessous.

1. $z_1 = 3 - 2i + 2 + 5i$,



2. $z_2 = (3 - 2i)(2 + 5i)$,



3. $z_3 = (\sqrt{3} - i)^2$,



4. $z_4 = (1 - i)^2$.



Nous définirons aussi un complexe particulier qui apparaît souvent, et dont il faut connaître l'expression.

^a Les coordonnées du couple correspondent aux parties réelles et imaginaires de $(x + iy)(x' + iy')$ avec la règle de calcul $i^2 = -1$

Notation Complexe j

On note généralement $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Comme nous l'avons déjà dit en introduction, les complexes permettent de résoudre certaines équations dans un ensemble que nous avons créé de toute pièce pour l'occasion. Ils permettent aussi de factoriser comme nous allons le constater avec une nouvelle identité remarquable.

Proposition 2 | Identités « $a^2 \pm b^2$ »

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Alors :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib).$$

Preuve La première a déjà été prouvée, passons à la seconde.



AFFIXE ET INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN COMPLEXE.

Rappelons que

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y), \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

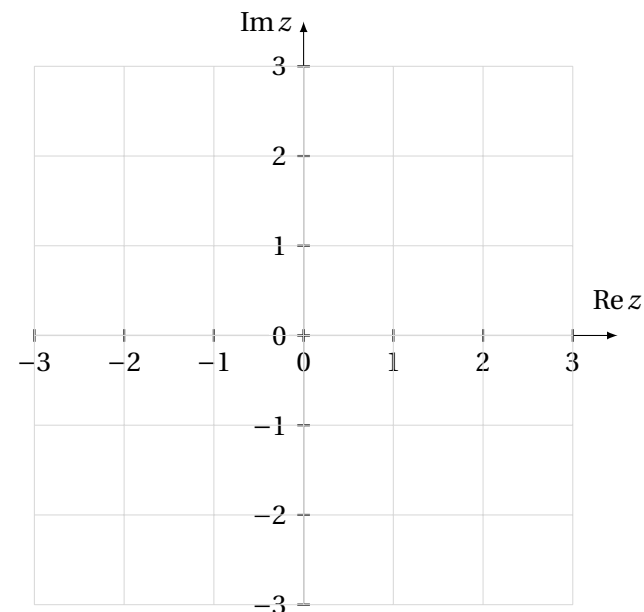
est l'ensemble des points géométriques du plan : ils possèdent une abscisse et une ordonnée. Un complexe a quant à lui également deux paramètres : sa partie réelle et sa partie imaginaire. Cela nous mène tout droit à la définition suivante.

Définition 1 | Affixe

Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, le complexe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est appelé *affixe* associé à M. De manière analogue, si $u = (x, y)$ est un vecteur de \mathbb{R}^2 , l'élément $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est appelé *affixe* de u .

La notion d'affixe permet donc de relier la géométrie du plan dans \mathbb{R}^2 aux complexes.

Exemple 2 Soient $z = 2 + i$ et $z' = 1 - 2i$. Représenter sur la figure ci-contre $M(z)$, $M'(z')$, $N(z + z')$, $M_1(\bar{z})$, $M_2(-z)$.



1.2 Conjugué & Module

Le complexe conjugué est un complexe qui interviendra souvent, nous le formalisons donc dans une notation.

Définition 2 | Conjugué

Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle *conjugué de* $z = x + iy$ le complexe $\bar{z} = x - iy$.

Exemple 3 Calculer les conjugués de z_1, z_2, z_3, z_4 .

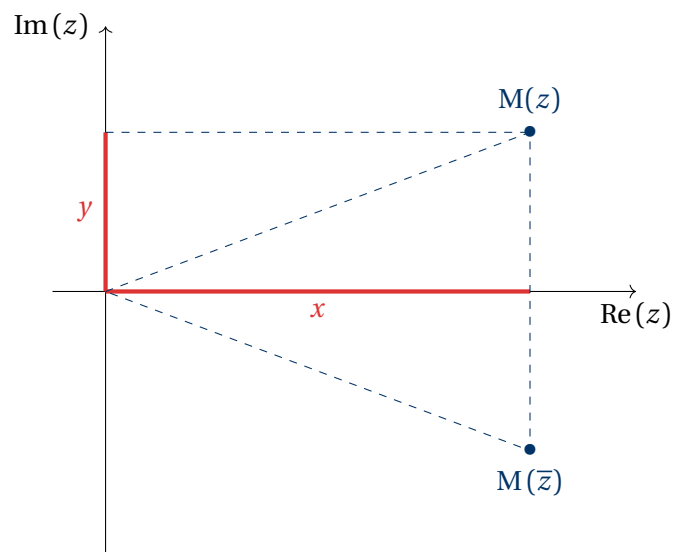


Exemple 4 Sur la figure précédente, ajouter le point $M_1(\bar{z})$.

Exemple 5 Calculer j^2 et l'exprimer en fonction de \bar{j} .



Remarque 1 (Interprétation géométrique du conjugué) Le conjugué de z est $x - iy$, il correspond au symétrique de M par rapport à l'axe (Ox) .



Pour terminer cette section de généralités, on introduit la notion de module, analogue de la valeur absolue pour les réels. Nous l'interpréterons géométriquement un peu plus tard.

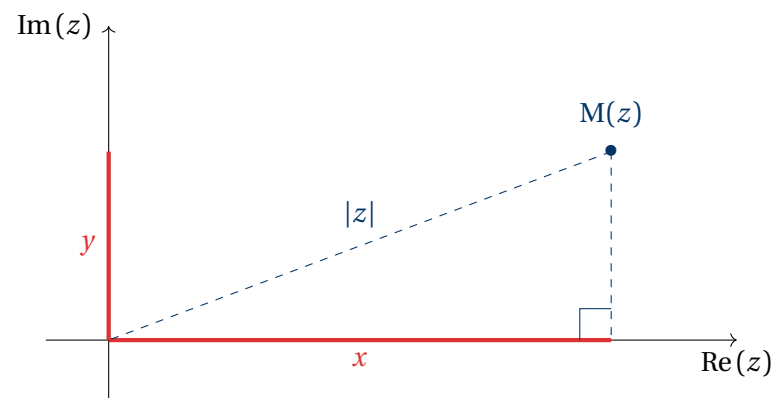
Définition 3 | Module

Si $z \in \mathbb{C}$, on appelle *module* de z le réel positif noté $|z|$, et défini par :

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}.$$

Pour $z \in \mathbb{R}$, on retrouve la valeur absolue : si $z = x \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Remarque 2 (Interprétation géométrique du module) Le module de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est, rappelons-le, défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Il correspond, d'après le théorème de PYTHAGORE, à la distance entre O et $M(z)$.



Exemple 6 Calculer les modules de z_1, z_2, z_3, z_4 .



Exemple 7 (Lieux géométriques) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $M_0(z_0)$ et $\rho \in \mathbb{R}^+$. Pour chaque ensemble ci-dessous, interpréter géométriquement et le représenter sur un dessin.

- $B_1 = \{M(z) \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \rho\}$.



- $B_2 = \{M(z) \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\}$.



- $B_3 = \{M(z) \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho\}$.



LIEN MODULE/CONJUGUÉ. Le problème de la définition précédente est qu'elle nécessite de connaître la forme algébrique du complexe afin de pouvoir calculer son module. Une autre expression est celle présentée ci-après, elle fait intervenir le conjugué qui possède tout un tas de propriétés permettant de gagner en rapidité dans les calculs. Nous profiterons également dans la suite de cette propriété pour déduire des propriétés sur le module à l'aide de celles déjà établies sur le conjugué.

Proposition 3 | Lien module/conjugué



Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z\bar{z}$ est un réel positif, et on a : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Preuve Notons $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. Alors : $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \geq 0$. En passant à la racine, on déduit la formule $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.



Attention Des complexes ne se comparent pas

Nous savons toujours comparer deux réels, en revanche, il n'existe pas de moyen simple de comparer deux complexes ! On n'écrira donc **jamais** 😞 des choses du type « $z \leq z'$ » avec z, z' deux complexes.

Plus précisément, on ne peut pas définir sur \mathbb{C} de relation d'ordre qui prolonge la relation d'ordre de \mathbb{R} . En effet, supposons qu'une telle relation d'ordre existe. Alors le complexe i est soit positif, soit négatif.

- Si on suppose $i \geq 0$ alors $i \times i \geq 0$, donc $-1 \geq 0$, ce qui est absurde.



- Si on suppose $i \leq 0$ alors $i \times i \geq 0$ également (en multipliant par un nombre négatif, on modifie le sens de l'inégalité), donc $-1 \geq 0$, ce qui est également absurde.

1.3 Propriétés

Exemple 8 (Technique de l'expression conjuguée (motivation))

- Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$. On souhaite définir le complexe $z' = \frac{1}{z}$, c'est-à-dire définir la forme algébrique de z' vérifiant $zz' = z'z = 1$.
- Pour deviner ladite forme algébrique, on utilise la technique de l'« expression conjuguée », c'est-à-dire on multiplie la fraction $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$ par $\bar{z} = x - iy$. On constate que cette technique fait alors apparaître un **nombre réel au dénominateur**.



Proposition 4 | Parties réelles, imaginaires, conjugué

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

- **[Existence d'un élément inverse]** Si $z \neq 0$, alors z est inversible dans \mathbb{C} c'est-à-dire : $\exists z' \in \mathbb{C}$, $zz' = z'z = 1$.
Plus précisément, z' est donné par : $z' = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. On le note en général $\frac{1}{z}$ ou encore z^{-1} . (vous ne devez pas apprendre par coeur la formule $z' = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, mais la retrouver au cas par cas à l'aide de la technique de l'expression conjuguée)
- **[\mathbb{R} -linéarité de la partie réelle/imaginaire]**
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Re} z + \mu \operatorname{Re} z',$
 $\operatorname{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Im} z + \mu \operatorname{Im} z'.$
- **[Conjugué et somme/produit/quotient]**
 $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}', \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.$
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}. \quad \text{Si de plus } z' \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- **[Involutivité]** $\overline{\bar{z}} = z.$

Attention

Il est **faux** de dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z).$$

Pour une raison très pragmatique déjà : une telle formule ne peut être vraie car une partie réelle ou imaginaire est un nombre réel.

Preuve On notera $z = x + iy, z' = x' + iy'$ dans toute cette preuve.

- On vérifie simplement que l'expression de $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ trouvée dans l'exemple précédent convient :



- Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda z + \mu z' = \lambda(x + iy) + \mu(x' + iy') = (\lambda x + \mu x') + i(\lambda y + \mu y').$$

On tire alors directement les formules :

$$\operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Re} z + \mu \operatorname{Re} z', \quad \operatorname{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Im} z + \mu \operatorname{Im} z'.$$

- On a :

$$z + z' = x + x' + i(y + y'), \quad z \times z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$$

Donc :

$$\overline{z + z'} = x + x' - i(y + y'), \quad \overline{z \times z'} = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$$

On vérifie alors sans difficulté que :

$$\overline{\overline{z + z'}} = x - iy + x' - iy' = \overline{z} + \overline{z'}, \quad \overline{\overline{z \times z'}} = (x - iy)(x' - iy') = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

La formule de conjugaison de z^n s'en déduit alors par récurrence évidente. Pour λz , on écrit simplement $\lambda z = \lambda x + i(\lambda y)$, donc $\overline{\lambda z} = \lambda x - i(\lambda y) = \lambda x + i(-\lambda y)$, d'où l'on tire la formule. Enfin, reste à calculer le conjugué d'un quotient, pour cela il suffit d'établir que $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, il suffira ensuite d'utiliser le conjugué d'un produit pour conclure.

Rappelons que $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$, donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2}$. D'autre part, on vérifie sans peine que $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x-iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{y}{x^2+y^2}$ en utilisant la technique de l'expression conjuguée.

- $\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$

Dans la preuve précédente on a utilisé une technique classique pour obtenir l'inverse d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On peut la résumer comme suit.

Méthode (ALG) 5.1 (Quotient sous forme algébrique : expression conjuguée) Pour deux réels $x, y \in \mathbb{R}$, et $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x}{|z|^2} + i \left(\frac{-y}{|z|^2} \right).$$

Il faut parfaitement savoir appliquer cette méthode sur des exemples.

Exemple 9 (Forme algébrique d'un quotient) Calculer la forme algébrique des complexes ci-après. On note $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un complexe quelconque.

1. $z_5 = \frac{1-i}{2+3i},$



2. $z_6 = \frac{1}{(4-i)(3+2i)},$



3. $z_7 = \frac{z^2}{z+i},$

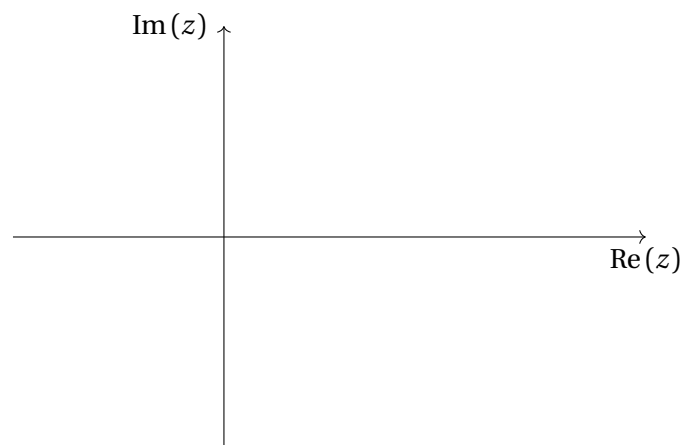


Proposition 5 | Caractérisation des réels/imaginaires purs

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes.

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$
- $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z, \quad z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z.$

Remarque 3 (Interprétation géométrique) Interprétons géométriquement les formules de la proposition précédente.



Preuve



- **[Produit/quotient]** $|z \times z'| = |z| \times |z'|$. De plus si $z' \neq 0$, alors :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

- **[Développement du module au carré]**

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \overline{z'}) + |z'|^2.$$

- **[Majoration partie réelle / imaginaire]**

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Preuve



Les propriétés du module sont similaires à celles déjà établies dans le **Chapitre (ALG) 2** concernant la valeur absolue, à l'exception des propriétés concernant les majorations. Car rappelons le, on ne peut comparer deux nombres complexes.

Proposition 6 | Module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- **[Séparation]** $|z| = 0 \iff z = 0$.
- **[Symétrie]** $|-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z|$.

La formule de développement du carré du module d'une somme est très importante en pratique.

Méthode (ALG) 5.2 (Développement d'une norme de somme au carré) Soit $|z + z'|^2$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Écrire la quantité en fonction du conjugué : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'})$.
2. Développer.



Attention

On oublie la formule *archi-fausse* suivante :

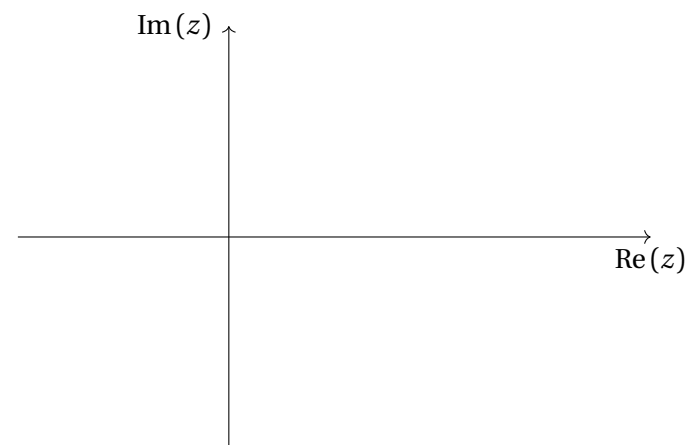
$$|z + z'|^2 \neq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|.$$

Exemple 10 (Identité du parallélogramme) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, alors :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$



Remarque 4 (Interprétation géométrique) L'interprétation géométrique est la suivante : la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est la somme des carrés des longueurs des côtés. Ce résultat peut se retrouver avec le théorème de PYTHAGORE dans le cas d'un rectangle.

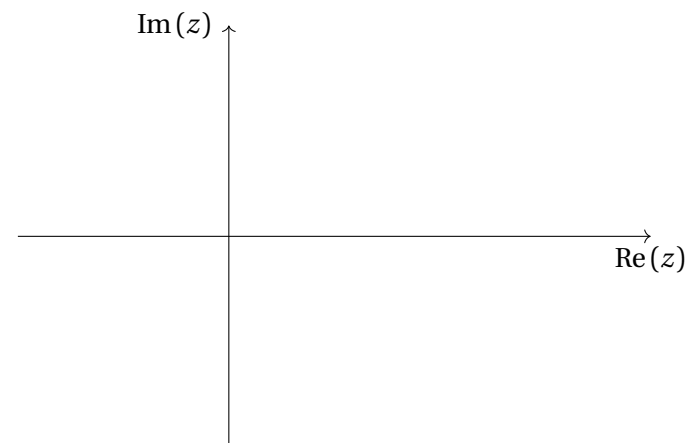


Théorème 1 | Inégalité triangulaire

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors : $||z| - |z'||| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$.



Remarque 5 (Interprétation géométrique) Interprétons géométriquement l'inégalité triangulaire.



Comme dans le cas de la valeur absolue, la majoration de droite sert beaucoup plus souvent que la minoration de gauche, mais les deux sont bien à connaître.

Preuve

1. Commençons par montrer que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Nous allons montrer que l'inégalité élevée au carré est vraie.



2. De manière analogue, on montre ensuite $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$.
On admet que le cas d'égalité.

COMPLEXES DE MODULE 1. Les complexes de module 1, c'est-à-dire situés à distance 1 de O, jouissent de propriétés intéressantes, les voici.

Définition 4 | Complexes de module 1

On appelle *ensemble des complexes de module 1* l'ensemble \mathbb{U} défini par :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Proposition 7 | Propriétés des complexes de module 1

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. Alors :

- **[Stabilité]** $zz' \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$,
- **[Inverse]** $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Preuve



Nous avons vu que \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 très proches et s'identifient. De la même manière qu'un point de \mathbb{R}^2 peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes et polaires, un complexe peut être écrit en forme algébrique ou comme nous allons le voir de suite sous *forme trigonométrique*.

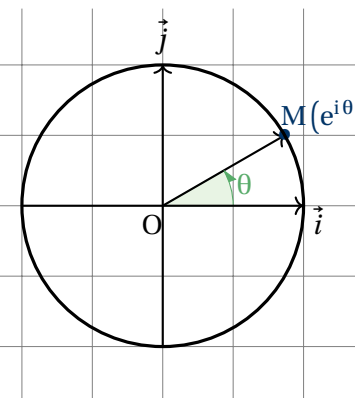
2.1 Exponentielle imaginaire

Avant de discuter de la forme trigonométrique des complexes, nous allons avoir besoin de présenter un complexe particulier : l'exponentielle imaginaire.

Définition 5 | Nombre complexe $e^{i\theta}$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on appelle *exponentielle imaginaire* de $\theta \in \mathbb{R}$, notée $e^{i\theta}$, le nombre complexe de forme algébrique :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$



Exemple 11

1. On a : $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

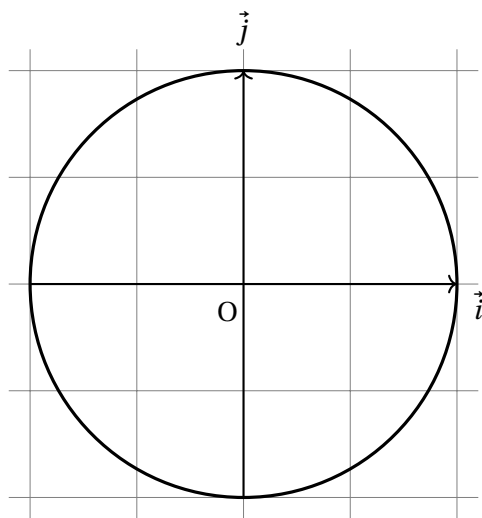


2. Calculer la forme algébrique de $z_9 = e^{i\frac{\pi}{3}}$.



Exemple 12 Placer sur le cercle trigonométrique les points d'affixes suivantes :

$$z_1 = e^{i0}, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$



Proposition 8 | Lien avec le cercle trigonométrique

Notons $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ le cercle trigonométrique. Alors :

$$\mathcal{C} = \{M(z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{U}\} = \{M(e^{i\theta}) \mid \theta \in [0, 2\pi[\}.$$

Preuve (Point clef — **Définition de sin, cos**)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Alors $|z| = 1$ donc $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$, c'est-à-dire $M(x, y)$ est un point du cercle trigonométrique. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta.$$

Du côté de z , nous avons alors : $z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$.

Pour l'instant, $e^{i\theta}$ n'est donc qu'une notation ! Les propriétés de cette notation, qui permettront d'effectuer des calculs, sont données dans la proposition suivante. Mais si l'on utilise une notation exponentielle c'est qu'elle va sûrement hériter des mêmes propriétés que l'exponentielle réelle connue depuis le lycée. Les voici.

Proposition 9 | Propriétés de l'exponentielle imaginaire

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ deux réels. Alors :

- $|e^{i\theta}| = 1, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}.$
- $e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1.$
- $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}, \quad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}.$
- $\diamond e^{i\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = 2k\pi.$

◊ Plus généralement : $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \theta' + 2k\pi.$

• **[Formule de MOIVRE]** $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad e^{ni\theta} = (e^{i\theta})^n.$

Remarque 6 La formule de MOIVRE signifie en d'autres termes que :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Elle aura de précieuses applications en trigonométrie.

Remarque 7 (Et pour l'exponentielle réelle?) Vous saviez déjà que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

Les propriétés du-dessus sont donc parfaitement analogues. De plus,

$$e^a = e^b \iff a = b$$

dans le monde réel. En revanche, pour des complexes, il ne faut pas oublier d'ajouter $+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ après b .

Preuve



• Conséquence directe des valeurs : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0.$





- Montrons le cas $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.



Soit $n < 0$ désormais. C'est dans ce cas un simple jeu d'écriture en cherchant à utiliser les propriétés précédentes :

$$e^{in\theta} = e^{i(-n)(-\theta)} \underset{\text{car } -n > 0}{=} [e^{i(-\theta)}]^{-n} = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n} \underset{\text{car } -n > 0}{=} \frac{1}{e^{-ni\theta}} = e^{ni\theta}.$$

Exemple 13 Calculer j^3 et $1 + j + j^2$.



Les formules ci-après paraissent anecdotiques au premier abord, mais elles seront d'intérêt capital pour toutes les applications des nombres complexes en trigonométrie.

Proposition 10 | Formules d'EULER

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \operatorname{Re}(e^{i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{i\theta}).$$

Preuve Nous avons déjà établi que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En prenant $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, on obtient les formules d'EULER.

Exemple 14 Retrouver les formules de linéarisation du **Chapitre (ALG) 3** sur $\cos^2 \theta$ et $\sin^2 \theta$.



2.2 Forme exponentielle

Nous avons déjà rencontré un complexe j , qui s'écrivait sous deux formes.

- En effet, nous avons établi que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On a vu également que l'écriture exponentielle avait été bien pratique dans certains calculs (celui de j^3 notamment, bien plus que la forme algébrique).
- On peut donc se demander à présent : « est-ce que tout complexe peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$? ». La réponse est :



- En revanche, si $z \neq 0$, le complexe $\frac{z}{|z|}$ est bien de module 1 :



Ces constats nous mènent tout droit à la définition suivante.

Définition/Proposition 2 | Argument d'un nombre complexe (non nul)

- Soit z un nombre complexe **non nul**. Alors :

$$\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}, \quad \text{donc : } \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \frac{z}{|z|} = e^{i\theta}.$$

- Un tel réel θ est appelé **un argument** de z . L'ensemble des autres arguments de z est alors : $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Il existe un unique argument dans $[0, 2\pi[$, on l'appelle en général *l'argument principal* de z .

Note

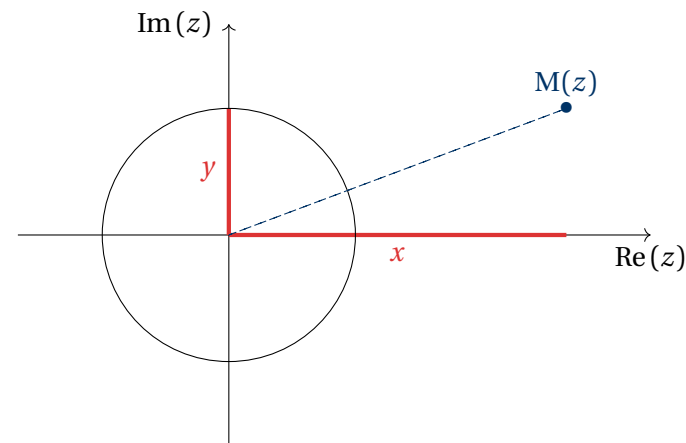
Parfois certaines références considèrent $]-\pi, \pi]$ comme intervalle pour l'argument principal



Notation

Pour dire que θ est un argument de z , on note : $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$. Lire « un argument de z est θ modulo 2π », c'est-à-dire à « 2π -près ».

Remarque 8 (Interprétation géométrique) Interprétons géométriquement les quantités points d'affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\frac{z}{|z|}$ et l'angle θ sur un même dessin. Rajoutez sur le dessin ci-dessous $\frac{z}{|z|}$ et l'angle θ .



Définition 6 | Forme exponentielle

Soit z un nombre complexe non nul, dont θ est un argument.

- L'écriture $z = |z| e^{i\theta}$ est appelée *forme exponentielle* de z .
- L'écriture $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée *forme trigonométrique* de z .

Méthode (ALG) 5.3 (Mettre sous forme exponentielle un nombre complexe)

- Soit $z \neq 0$.
 - Calculer $|z|$, puis mettre $|z|$ en facteur dans z .
 - Chercher $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que : $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, i.e. tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

La forme exponentielle est alors : $z = |z| e^{i\theta}$. Il arrive parfois que l'angle θ ne soit pas explicite.

- [Produit/Quotient]** Pour les produits et quotients de deux complexes, il est inutile de commencer par le mettre sous forme algébrique avant de trouver la forme exponentielle. En effet, notons $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1} \neq 0$ ($\theta_1 \in \mathbb{R}$), $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2} \neq 0$ ($\theta_2 \in \mathbb{R}$). Alors :

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Exemple 15 Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants.

- $1 + i, 1 - i$,



2. $1 - i\sqrt{3},$



3. $\frac{1+i}{1-i},$



4. $(\sqrt{3} - i)^n, n \in \mathbb{N}.$



$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$



Exemple 16 Donner un argument des complexes $i, -i, 2i$. Cette question revient à déterminer la forme exponentielle



Exemple 17 (Lien entre les deux formes et application trigonométrique)
Donner les formes algébriques et exponentielles de $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$. En déduire

Méthode (ALG) 5.4 (Complexe sous forme « quasi-exponentielle ») Soit $z \neq 0$ tel que $z = Ke^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $K \in \mathbb{R}$ (puisque K n'est pas supposé positif, ce n'est a priori pas la forme exponentielle de z) alors, pour mettre z sous forme exponentielle, on écrit :

$$z = \begin{cases} Ke^{i\theta} & \text{si } K \geq 0, \\ \underbrace{(-K)}_{>0} (-e^{i\theta}) = (-K)e^{i(\theta+\pi)} & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

- Si $K \in i\mathbb{R}$, on commence par écrire i sous la forme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, puis on retombe sur le cas précédent.

Exemple 18 Déterminer la forme exponentielle de :

- $z = x \in \mathbb{R}, x > 0,$



- $z = x \in \mathbb{R}, x < 0,$



- $-2e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}.$



- $ie^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R},$



- $\frac{-4e^{-2i\theta}}{5e^{5i\theta'}}, \theta, \theta' \in \mathbb{R},$



- de $z = \sin(\lambda)e^{i\theta}$, avec $(\lambda, \theta) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$



Méthode (ALG) 5.5 (Technique de l'angle moitié (forme exponentielle d'une somme d'exponentielles imaginaires)) Soient deux nombres complexes z, z' de module un donnés sous forme exponentielle : $z = e^{i\theta}, z' = e^{i\theta'}$ avec $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors la forme exponentielle de $z + z'$ s'obtient par le calcul suivant :

$$z + z' = e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).$$

La méthode s'adapte à $z - z'$ en faisant apparaître un sinus. Pour obtenir la forme exponentielle, on applique alors la méthode précédente.

Exemple 19 (Deux formes exponentielles très importantes)

- Déterminer la forme exponentielle de $1 + e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi[$. Que dire si $\theta \in [\pi, 2\pi[$?

- [Calcul de l'angle moitié]



- [Mise en facteur de l'angle moitié]



- [Conclusion]



2. Même question avec $1 - e^{i\theta}$.



♥ Résumé Forme exponentielle de $1 \pm e^{i\theta}$

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Les formes exponentielles de $1 \pm e^{i\theta}$ sont données par :

- $1 + e^{i\theta} = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} & \text{si } \theta \in [0, \pi[, \\ (-2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)} & \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$
- $1 - e^{i\theta} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)}.$

Ces expressions ne sont pas à apprendre par coeur, mais surtout savoir les établir.

Passons à quelques propriétés de l'argument d'un nombre complexe, qui découlent des propriétés déjà établies sur l'exponentielle imaginaire.

Proposition 11 | Propriétés de l'argument

Soient z et z' deux complexes non nuls. Alors :

- $\arg(z z') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi],$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi],$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg z \quad [2\pi].$

Preuve Notons $z = |z| e^{i\theta}$ et $z' = |z'| e^{i\theta'}$ les formes exponentielles de z et z' avec $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi[^2$.

- $z z' = |z| |z'| e^{i(\theta + \theta')}$ par propriétés de l'exponentielle. Donc $\arg(z z') = \theta + \theta' = \arg z + \arg z' \quad [2\pi].$
- $\frac{z}{z'} = \frac{|z| e^{i\theta}}{|z'| e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i(\theta - \theta')}$ par propriétés de l'exponentielle. Donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg z - \arg z' \quad [2\pi].$
- $\bar{z} = \overline{|z| e^{i\theta}} = |z| e^{-i\theta}$ puisque $|z|$ est un réel. Donc par propriété de l'exponentielle : $\bar{z} = |z| e^{-i\theta}$. Donc : $\arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg z \quad [2\pi].$

Proposition 12 | Caractérisation de l'égalité de nombres complexes

Soient z, z' deux nombres complexes. Alors :

$$\begin{aligned} z = z' &\iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z'), \\ &\iff |z| = |z'| \text{ et } \arg z = \arg z' \quad [2\pi]. \end{aligned}$$

Preuve La première équivalence a déjà été constatée lors de l'étude de la forme algébrique. On montre donc uniquement :

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' \quad [2\pi]. \end{cases}$$

\Rightarrow Évidente, par passage au module et à un argument.

\Rightarrow Supposons que $|z| = |z'|$, $\arg z = \arg z' \quad [2\pi]$.



BILAN SUR LES FORMES ALGÈBRIQUES ET EXPONENTIELLES.

- **[Comment choisir la forme à utiliser?]** Lorsque l'on cherche à démontrer un résultat sur des nombres complexes, il ne faut **pas** systématiquement l'écrire sous forme algébrique : $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$. Cette forme est adaptée aux problèmes « additifs », où ce qui intervient est plutôt des sommes (ou plus généralement des combinaisons linéaires) de complexes. Les problèmes « multiplicatifs » se résolvent mieux en utilisant la forme exponentielle lorsque $z \neq 0$: $z = |z| e^{i \arg z}$.
- Terminons avec un rappel des propriétés calculatoires sur les deux formes.

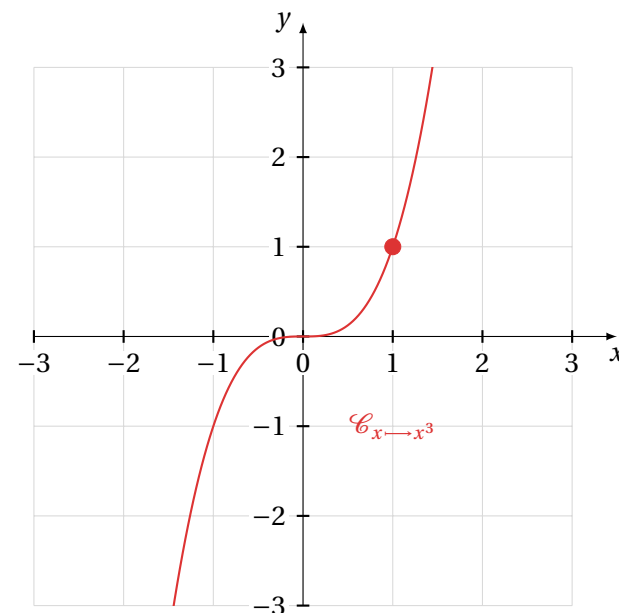
	Forme cartésienne	Forme exponentielle
Définition	$z = x + i y, z' = x' + i y'$	$z = \rho e^{i\theta}, z' = \rho' e^{i\theta'}$
Égalité	$z = z' \iff x = x', y = y'$	$z = z' \iff \rho = \rho', \theta = \theta' \pmod{2\pi}$
Somme	$z + z' = (x + x') + i (y + y')$...
Produit	$z \times z' = (xx' - yy') + i (xy' + x'y)$	$z \times z' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
Puissance	...	$z^n = r^n e^{in\theta}$
Inverse	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$	$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
Quotient	$\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{xx'+yy'+i(xy'-yx')}{x^2+y^2}$	$\frac{z'}{z} = \frac{\rho'}{\rho} e^{i(\theta'-\theta)}$

2.3 Racines n -ièmes d'un complexe

De manière générale, on appelle « racine n -ième » d'un objet mathématique une quantité qui élevée à la puissance n donne cet objet (l'objet en question peut être un réel, un complexe ou même une matrice).

Regardons pour commencer un exemple. Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et considérons l'équation $z^3 = 1$ avec $z \in \mathbb{K}$.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'équation n'admet qu'une solution : 1.



2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on voit que $j = e^{2i\pi/3}$ convient, mais aussi $j^2 = e^{4i\pi/3}$ – et en fait nous allons montrer que ce sont les seules.

On constate que : l'ensemble des racines cubiques complexes de 1 contient l'ensemble des racines cubiques réelles de 1, et il y en a systématiquement au moins autant dans \mathbb{C} que dans \mathbb{R} .

Définition 7 | Racines n -ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle *racine n -ième* de α tout complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = \alpha$.

- On note $\mathbb{U}_n(\alpha)$ l'ensemble des solutions de $z^n = \alpha$. Si $\alpha = 1$, on parle de *racine n -ième de l'unité*. On notera \mathbb{U}_n l'ensemble de ces complexes.
- Si $n = 2$, on parle de *racine carrée* de α , pour $n = 3$ de *racine cubique*.



Notation

- Les notations $\sqrt[n]{\alpha}$ et $\sqrt[n]{\alpha}$ sont réservées à $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (ou bien $\alpha \in \mathbb{R}$ si n est impair).
- Les notations $\sqrt[n]{\alpha}$ et $\sqrt[n]{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sont **interdites** (elles n'ont aucun sens car il n'y a pas unicité).

CAS PARTICULIER DES RACINES CARRÉES. Pour les racines carrées de complexes, on peut utiliser la forme algébrique, qui parfois est explicite à l'inverse de la forme exponentielle. Commençons par le cas particulier des racines carrées de réels.

Proposition 13 | Racines carrées (complexes) d'un réel

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- si $a > 0$, $z^2 = a \iff z = \pm \sqrt{a}$,
- si $a = 0$, $z^2 = 0 \iff z = 0$,
- si $a < 0$, $z^2 = a \iff z = (\mathrm{i} \sqrt{-a})^2 \iff z = \pm \mathrm{i} \sqrt{-a}$.

Preuve Reste uniquement le cas $a < 0$ qui est nouveau.

**Exemple 20**

- $z^2 = 2 \iff z = \sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2}$.
- $z^2 = -3 \iff z = (\mathrm{i} \sqrt{3})^2 \iff z = \mathrm{i} \sqrt{3}$ ou $z = -\mathrm{i} \sqrt{3}$.

Exemple 21 Retrouver \mathbb{U}_2 en utilisant le résultat précédent.



Exemple 22 Résoudre $(2z + 1)^2 + z^2 = 0$. On donnera les solutions sous forme algébrique.



Voici à présent une méthode spécifique pour le cas où a est complexe donné sous forme algébrique.

Méthode (ALG) 5.6 (Calculs de racines carrées de complexes avec forme algébrique)

Pour résoudre $z^2 = a + \mathrm{i}b$ avec $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$.

1. Chercher z sous la forme $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$.
2. En remplaçant, on obtient : $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$.
3. Pour résoudre ce système, on introduit une troisième équation provenant du module $|z|^2 = |a + \mathrm{i}b|$, ce qui donne :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

D'où au total :

$$x^2 - y^2 = a, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad 2xy = b.$$

En faisant la somme et la différence des deux premières, on obtient des solutions (4 au plus). On en exclut certaines à l'aide de la condition $2xy = b$.

L'idée principale à retenir étant la suivante :

pour résoudre $z^2 = \alpha$, travailler au choix sur la FORME EXPONENTIELLE de z , ou la forme algébrique de z .

Le choix dépend de si on veut *in fine* des solutions données sous forme exponentielle ou algébrique, et surtout si la forme exponentielle de α vous semble explicite.

Exemple 23 Déterminer les racines carrées de $3 + 4\mathrm{i}$ sous forme algébrique.



CAS GÉNÉRAL. Trouver les racines n -ièmes d'un complexe est un problème multiplicatif (avec des puissances), donc la bonne forme à adopter est la forme exponentielle, nous allons très largement nous en servir dans la suite. On retient donc que :

pour résoudre $z^n = \alpha$, travailler sur les FORMES EXPONENTIELLES !

Méthode (ALG) 5.7 (Calculs de racines n -ième de complexes avec forme exponentielle) Pour résoudre $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$ il n'y a que zéro comme solution).

1. Calculer la forme exponentielle de $\alpha = \rho e^{i\theta}$.
2. Chercher z sous la forme $z = \rho' e^{i\theta'}$, $\rho' > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$.
3. En remplaçant, on obtient comme conditions $(\rho')^n = \rho$ et $n\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Résoudre ces deux équations puis conclure, en regardant notamment les k qui donnent un argument dans $[0, 2\pi[$.

Exemple 24

1. Déterminer \mathbb{U}_2 , exceptionnellement sans utiliser la forme exponentielle.



2. Déterminer \mathbb{U}_3 .



3. On montrerait de-même que $\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -i, i\}$.
4. Dessiner les points géométriques d'affixes les éléments de $\mathbb{U}_2, \mathbb{U}_3$ et \mathbb{U}_4 . Que remarque-t-on?



5. Déterminer les racines quatrièmes de -16 .



Exemple 25 De manière générale, déterminer \mathbb{U}_n pour $n \geq 1$.



2.4 Équations du second degré

Exemple 26 (Introductif) Considérons l'équation $z^2 + z + 1 = 0$, qui n'avait pas de solution dans \mathbb{R} et cherchons désormais des solutions dans \mathbb{C} .



Considérons plus généralement une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}^1$. On a revu dans le **Chapitre (ALG) 2** comment on trouvait ses réelles, à l'aide de la forme canonique. On avait établi en notant $\Delta = b^2 - 4ac$ que :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Notons $\delta \in \mathbb{C}$ une racine complexe de Δ .

- Si $\Delta \geq 0$, $\delta = \sqrt{\Delta}$ convient car $(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$.
- Si $\Delta < 0$, $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ convient car $(i\sqrt{-\Delta})^2 = -(-\Delta) = \Delta$.

On reconnaît alors une identité remarquable du type « $a^2 - b^2$ » :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a \left(z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \delta}{2a} \right). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{identité } a^2 - b^2$$

1. Restriction du programme, mais les résultats ci-après s'étendent aussi aux coefficients complexes

On a ainsi factorisé dans \mathbb{C} (comme vous l'aviez fait en première, mais dans \mathbb{R}) l'expression $az^2 + bz + c$ peu importe le signe de Δ , ce qui nous mène tout droit aux solutions de l'équation.

Théorème 2 | Solutions d'une équation du second degré



Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$. On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On appelle *discriminant* du trinôme $az^2 + bz + c$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, les solutions de l'équation sont : $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'unique solution de l'équation est : $\frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, les solutions de l'équation sont : $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

De plus, l'équation admet deux racines distinctes si $\Delta \neq 0$ et une seule racine si $\Delta = 0$.

Remarque 9 Les relations coefficients-racines restent valables dans \mathbb{C} : à utiliser toujours en priorité lorsqu'une racine est évidente.

Exemple 27 Résoudre les équations :

1. $z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$.



2. $z^2 + 2z + 4 = 0$. On a $\Delta = 4 - 16 = -12$. Les solutions sont alors : $\frac{-2 \pm (4i)}{2} = \boxed{-1 \pm 2i}$. On a $\Delta = 4 - 16 = -12$. Les solutions sont alors : $\frac{-2 \pm (4i)}{2} = \boxed{-1 \pm 2i}$.

3. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$. $\Delta = -4\sin^2 \theta$. Nous avons plusieurs cas :

- si $\theta = \pi$: alors $\Delta = 0$ et on a une seule racine double $\boxed{\cos \theta}$.
- si $\theta \in [0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, alors $\Delta < 0$, donc les racines sont $\frac{2\cos \theta \pm 2i \sin \theta}{2} = \boxed{e^{\pm i\theta}}$.

Exemple 28 Retrouver les solutions de $(2z + 1)^2 + z^2 = 0$ en utilisant ce nouveau résultat.



3

APPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES EN TRIGONOMÉTRIE

Les nombres complexes, grâce à l'exponentielle complexe, fournissent des méthodes très efficaces pour transformer des expressions trigonométriques. Voyons comment.

Méthode (ALG) 5.8 (Linéarisation & Antilinéarisation avec des complexes)

1. [Pour linéariser $\cos^k \theta, \sin^k \theta$] écrire

$$\cos^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^k, \quad \sin^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^k,$$

puis développer avec le binôme, regrouper les termes avec leur conjugué, utiliser les formules d'EULER.

2. [Pour antilinéariser $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$] écrire

$$\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^k),$$

$$\sin(k\theta) = \operatorname{Im}(e^{ik\theta}) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \operatorname{Im}\left((e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^k),$$

puis développer avec le binôme et calculer les parties réelles et imaginaires.

3. [Pour linéariser des produits] En utilisant les formules d'EULER, on peut linéariser des expressions de la forme $\cos x \cos y, \sin x \sin y, \cos x \sin y, \sin x \cos y$.

4. [Pour anti-linéariser des sommes] En utilisant des techniques d'angle moitié, on peut antilinéariser des expressions de la forme $\cos x \pm \cos y, \sin x \pm \sin y, \cos x \pm \sin y, \sin x \pm \cos y$.

Exemple 29 (Linéarisation)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.



2. De-même, établir une formule pour $\cos x \sin y$.



3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^3 x$ en utilisant les nombres complexes.



4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3 x \sin x$ en utilisant les nombres complexes.



Exemple 30 (Anti-Linéarisation)

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.



2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, en utilisant les nombres complexes.



Les complexes peuvent rendre de multiples services en trigonométrie, y compris les calculs de sommes de fonctions trigonométriques, comme le montrent les exemples ci-après.

Méthode (ALG) 5.9 (Calculs de sommes trigonométriques)

1. Écrire \cos , \sin comme des parties réelles/imaginaires d'exponentielles complexes.
2. Utiliser la linéarité de $\operatorname{Re}(\dots)$, $\operatorname{Im}(\dots)$, *i.e.* : $\operatorname{Re}(\sum \dots) = \sum \operatorname{Re}(\dots)$, $\operatorname{Im}(\sum \dots) = \sum \operatorname{Im}(\dots)$.
3. Utiliser la formule donnant la somme de termes géométriques. Conclure.

Exemple 31 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les sommes $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$.



Exemple 32 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{\cos^k x}$ pour $x \in \mathbb{R}$ tel que

$\cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{\cos^n x} &= \sum_{k=0}^n \frac{\operatorname{Re}(e^{ikx})}{(\cos x)^k} \\
&= \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ikx}}{(\cos x)^k} \right) && (\cos x)^k \text{ est réel} \\
&= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^k \right) && \text{la partie réelle est linéaire} \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} \right) && \text{somme de termes d'une suite géométrique, car } \cos x \neq e^{ix} \text{ pour les } x \text{ qui nous intéressent} \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \frac{e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1} x}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} \right) \\
&= \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1} x}}{\frac{\cos x - e^{ix}}{\cos x}} \right) && \text{réduction au même dénominateur} \\
&= \frac{1}{\cos^n x} \operatorname{Re} \left(\frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}} \right) && \frac{1}{\cos^n(x)} \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{\cos^n x} \operatorname{Re} \left(\frac{\cos^{n+1} x - (\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x)}{\cos x - (\cos x + i \sin x)} \right) && \text{forme algébrique des nombres complexes} \\
&= \frac{1}{\cos^n x} \operatorname{Re} \left(\frac{(\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x) - i \sin(n+1)x}{-i \sin x} \right) \\
&= \boxed{\frac{1}{\cos^n x} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}}.
\end{aligned}$$

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (ALG) 5.1 (Quotient sous forme algébrique : expression conjuguée) Pour deux réels $x, y \in \mathbb{R}$, et $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{|z|^2} = \frac{x}{|z|^2} + i \left(\frac{-y}{|z|^2} \right).$$

Méthode (ALG) 5.2 (Développement d'une norme de somme au carré) Soit $|z + z'|^2$ avec $z, z' \in \mathbb{C}$.

1. Écrire la quantité en fonction du conjugué : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'})$.
2. Développer.

Méthode (ALG) 5.3 (Mettre sous forme exponentielle un nombre complexe)

- Soit $z \neq 0$.
 1. Calculer $|z|$, puis mettre $|z|$ en facteur dans z .
 2. Chercher $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que : $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, i.e. tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \quad \sin(\theta) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}.$$

La forme exponentielle est alors : $z = |z| e^{i\theta}$. Il arrive parfois que l'angle θ ne soit pas explicite.

- **[Produit/Quotient]** Pour les produits et quotients de deux complexes, il est inutile de commencer par le mettre sous forme algébrique avant de trouver la forme exponentielle. En effet, notons $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1} \neq 0$ ($\theta_1 \in \mathbb{R}$), $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2} \neq 0$ ($\theta_2 \in \mathbb{R}$). Alors :

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Méthode (ALG) 5.4 (Complexe sous forme « quasi-exponentielle ») Soit $z \neq 0$ tel que $z = Ke^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

- Si $K \in \mathbb{R}$ (puisque K n'est pas supposé positif, ce n'est a priori pas la forme exponentielle de z) alors, pour mettre z sous forme exponentielle, on écrit :

$$z = \begin{cases} Ke^{i\theta} & \text{si } K \geq 0, \\ \underbrace{(-K)}_{>0} (-e^{i\theta}) = (-K)e^{i(\theta+\pi)} & \text{si } K < 0. \end{cases}$$

- Si $K \in i\mathbb{R}$, on commence par écrire i sous la forme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, puis on retombe

sur le cas précédent.

Méthode (ALG) 5.5 (Technique de l'angle moitié (forme exponentielle d'une somme d'exponentielles imaginaires)) Soient deux nombres complexes z, z' de module un donnés sous forme exponentielle : $z = e^{i\theta}, z' = e^{i\theta'}$ avec $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Alors la forme exponentielle de $z + z'$ s'obtient par le calcul suivant :

$$z + z' = e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right).$$

La méthode s'adapte à $z - z'$ en faisant apparaître un sinus. Pour obtenir la forme exponentielle, on applique alors la méthode précédente.

Méthode (ALG) 5.6 (Calculs de racines carrées de complexes avec forme algébrique) Pour résoudre $z^2 = a + ib$ avec $a + ib \in \mathbb{C}$.

1. Chercher z sous la forme $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
2. En remplaçant, on obtient : $x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$.
3. Pour résoudre ce système, on introduit une troisième équation provenant du module $|z|^2 = |a + ib|$, ce qui donne :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

D'où au total :

$$x^2 - y^2 = a, \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad 2xy = b.$$

En faisant la somme et la différence des deux premières, on obtient des solutions (4 au plus). On en exclut certaines à l'aide de la condition $2xy = b$.

Méthode (ALG) 5.7 (Calculs de racines n -ième de complexes avec forme exponentielle) Pour résoudre $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$ (si $\alpha = 0$ il n'y a que zéro comme solution).

1. Calculer la forme exponentielle de $\alpha = \rho e^{i\theta}$.
2. Chercher z sous la forme $z = \rho' e^{i\theta'}, \rho' > 0, \theta \in [0, 2\pi[$.
3. En remplaçant, on obtient comme conditions $(\rho')^n = \rho$ et $n\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Résoudre ces deux équations puis conclure, en regardant notamment les k qui donnent un argument dans $[0, 2\pi[$.

Méthode (ALG) 5.8 (Linéarisation & Antilinéarisation avec des complexes)

1. [Pour linéariser $\cos^k \theta, \sin^k \theta$] écrire

$$\cos^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^k, \quad \sin^k \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^k,$$

puis développer avec le binôme, regrouper les termes avec leur conjugué, utiliser les formules d'EULER.

2. [Pour antilinéariser $\cos(k\theta), \sin(k\theta)$] écrire

$$\cos(k\theta) = \operatorname{Re}(e^{ik\theta}) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^k),$$

$$\sin(k\theta) = \operatorname{Im}(e^{ik\theta}) \underset{\text{MOIVRE}}{=} \operatorname{Im}\left((e^{i\theta})^k\right) = \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^k),$$

puis développer avec le binôme et calculer les parties réelles et imaginaires.

3. [Pour linéariser des produits] En utilisant les formules d'EULER, on peut linéariser des expressions de la forme $\cos x \cos y, \sin x \sin y, \cos x \sin y, \sin x \cos y$.
4. [Pour anti-linéariser des sommes] En utilisant des techniques d'angle moitié, on peut antilinéariser des expressions de la forme $\cos x \pm \cos y, \sin x \pm \sin y, \cos x \pm \sin y, \sin x \pm \cos y$.

Méthode (ALG) 5.9 (Calculs de sommes trigonométriques)

1. Écrire \cos, \sin comme des parties réelles/imaginaires d'exponentielles complexes.
2. Utiliser la linéarité de $\operatorname{Re}(\dots), \operatorname{Im}(\dots)$, i.e. : $\operatorname{Re}(\sum \dots) = \sum \operatorname{Re}(\dots), \operatorname{Im}(\sum \dots) = \sum \operatorname{Im}(\dots)$.
3. Utiliser la formule donnant la somme de termes géométriques. Conclure.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Définition du module d'un nombre complexe	$ z = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$	Connaitre également l'interprétation géométrique

4



EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

- Concernant la forme algébrique :
 - savoir effectuer des calculs sur les formes algébriques (somme, produit, quotient, etc.) ☐
 - savoir traduire l'égalité de deux complexes donnés sous forme algébrique ☐
 - savoir calculer un module, un conjugué ☐
 - savoir représenter un complexe dans le plan ☐
- Concernant la forme exponentielle :
 - savoir que $\frac{z}{|z|}$ est sur le cercle trigonométrique et la définition d'un l'argument ☐
 - savoir calculer une forme exponentielle ☐
 - savoir manipuler $e^{i\theta}$ ☐
 - savoir résoudre des équations avec des puissances à l'aide de la forme trigonométrique ☐
 - savoir résoudre des équations du second degré ☐
- Concernant les applications des complexes :
 - savoir linéariser ☐
 - savoir anti-linéariser ☐
 - savoir calculer des sommes trigonométriques ☐

Signalétique du TD

- Le logo  désigne les exercices que vous traiterez en devoir à la maison. Vous pouvez m'en rendre un ou plusieurs, au plus tard le lundi qui précède un devoir surveillé concernant ce chapitre. Ce travail est facultatif mais fortement conseillé.
- Le logo  désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maîtrisé.

Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler :

17, 18

Exercice 1 | Vrai ou Faux ?

- Soit $z \in \mathbb{C}$, la partie imaginaire de iz est égale à celle de z .
- Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$.

4.1 Forme algébrique

Exercice 2 | Mettre les complexes suivants sous forme algébrique simple :

1. $z = \frac{1-3i}{1+3i}$,
2. $z = (i - \sqrt{2})^3$,
3. $z = \frac{1+4i}{1-5i}$,
4. $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}} \right)^9$,
5. $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$,
6. $z = \frac{1}{i+1-1}$,
7. $z = (1+i)^{2019}$,
8. $z = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$,
9. $z = (5-2i)^3$,
10. $z = \frac{1}{(4-i)(3+2i)}$,
11. $z = \frac{(3+i)(2-3i)}{-2i+5}$,
12. $z = (\sqrt{3}-2i)^4$.

Solution (exercice 2) Dans cet exercice, je ne détaille pas forcément tous les calculs, je ne donne que la méthode générale ou des indications.

1. $z = -\frac{4}{5} - \frac{3i}{5}$. On a un quotient de nombres complexes dont on veut la forme algébrique : on multiplie par le conjugué du dénominateur.
2. $z = \sqrt{2} + 5i$. On utilise ici une identité remarquable.
3. $z = -\frac{19}{26} + i\frac{9}{26}$. On a un quotient de nombres complexes dont on veut la forme algébrique : on multiplie par le conjugué du dénominateur.
4. Ici plusieurs méthodes marchent bien : Soit on commence par mettre sous forme exponentielle le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$ en mettant sous forme exponentielle le numérateur d'un côté et le dénominateur de l'autre côté puis on passe à la puissance 9. Soit on commence par mettre sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$ en multipliant par le conjugué du dénominateur et on passe à la puissance 9.
5. $z = -1$. Là encore il y a plusieurs méthodes qui marchent bien. Une possibilité est de mettre sous forme exponentielle $1+i$ d'un côté et $1-i$ de l'autre côté puis de les passer au carré et enfin de faire le quotient.
6. $z = -1+i$. On peut par exemple commencer par tout mettre sous le même dénominateur en bas et on obtient $z = \frac{1}{-i} = \frac{1+i}{-i} = i(1+i)$.
7. $z = -2^{1009} + 2^{1009}i$. Ici il faut commencer par mettre sous forme exponentielle $1+i$ et on obtient que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ensuite on passe à la puissance et on obtient que : $z = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2019} = 2^{1009}\sqrt{2}e^{i\frac{2019\pi}{4}}$. Il faut alors compter le

nombre de tours complets que l'on a fait dans $\frac{2019\pi}{4}$. Une façon de voir les choses est d'écrire : $\frac{2019}{8} \times 2\pi$ et de faire la division euclidienne de 2019 par 8. On obtient : $2019 = 252 \times 8 + 3$ et ainsi on a : $\frac{2019}{8} \times 2\pi = 252 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$. Ainsi on a : $z = 2^{1009}\sqrt{2} \times e^{i(252 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4})} = 2^{1009}\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -2^{1009} + 2^{1009}i$.

8. On peut par exemple mettre sous forme algébrique chaque terme de la somme de façon séparée en multipliant par le conjugué puis on les somme.
9. $z = 65 - 142i$. On utilise une identité remarquable.
10. $z = \frac{14}{221} - i\frac{5}{221}$. On peut multiplier par le conjugué du dénominateur à savoir $(4+i)(3-2i)$.
11. $z = \frac{69}{29} - i\frac{17}{29}$. On multiplie par le conjugué du dénominateur.
12. $z = -47 + 8\sqrt{3}i$. On développe avec le binôme de NEWTON.

Exercice 3 | Soit x un réel fixé. Calculer la partie réelle et imaginaire de :

1. $(x+i)^2$,
2. $\frac{x-3i}{x^2+1-2ix}$.

Solution (exercice 3)

- En développant $(x+i)^2$, on obtient $(x+i)^2 = (x^2-1) + 2ix$. Ainsi

$$\operatorname{Re}(x+i)^2 = x^2 - 1 \text{ et } \operatorname{Im}(x+i)^2 = 2x.$$

- On a : $\frac{x-3i}{x^2+1-2ix} = \frac{(x-3i)(x^2+1+2ix)}{x^4+6x^2+1}$. Ainsi, on obtient :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{x-3i}{x^2+1-2ix}\right) = \frac{x(x^2+7)}{x^4+6x^2+1} \text{ et } \operatorname{Im}\left(\frac{x-3i}{x^2+1-2ix}\right) = \frac{-x^2-3}{x^4+6x^2+1}.$$

4.2 Forme exponentielle

Exercice 4 | Écrire les nombres suivants sous forme exponentielle et trigonométrique :

1. $z = -18$
2. $z = -7i$
3. $z = 1+i$
4. $z = (1+i)^5$
5. $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$
6. $z = -2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
7. $z = -10e^{i\pi} \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{8}}}{e^{i\frac{7\pi}{4}}} \right)^6$
8. $z = -5 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \right)$

$$9. \quad z = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

$$11. \quad z = \frac{1}{1+i \tan \theta}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$12. \quad z = \left(\frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \quad z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$$

Solution (exercice 4) Dans cet exercice, je ne détaille pas forcément tous les calculs, je ne donne que la méthode générale ou des indications.

1. $z = 18e^{i\pi}$. On a en effet commencé par calculer le module qui vaut 18, puis on a mis en facteur le module et on a mis -1 sous forme exponentielle.

2. $z = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$. On a en effet commencé par calculer le module qui vaut 7. Puis on a mis en facteur le module et on a mis $-i$ sous forme exponentielle.

3. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On a calculé le module qui vaut $\sqrt{2}$ et on l'a mis en facteur.

4. On commence par mettre $1+i$ sous forme exponentielle et on obtient que $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi on obtient que $(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi on a : $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

5. $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Ici on peut par exemple mettre sous forme exponentielle d'un côté le numérateur et de l'autre côté le dénominateur. Puis on utilise les propriétés sur les quotients d'exponentielles.

6. Ici le calcul du module donne $|z| = 2$ car pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $|e^{i\theta}| = 1$. On a donc : $z = 2 \left(-1 \times e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\pi\frac{1}{4}} \right) = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$. Ainsi on a : $z = 2e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

7. Même type de calcul qui utilise les propriétés de l'exponentielle. Ici le module vaut $10 \times 2^6 = 640$ et on obtient que $z = 640e^{i\frac{-27\pi}{4}}$. On simplifie alors $e^{i\frac{-27\pi}{4}}$ en remarquant par exemple que $\frac{-27\pi}{4} = \frac{-28\pi + \pi}{4} = -7\pi + \frac{\pi}{4}$. Ainsi on a : $e^{i\frac{-27\pi}{4}} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Ainsi on a : $z = 640e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

8. $z = 5e^{i(\frac{2\pi}{5} + \pi)} = 5e^{i\frac{7\pi}{5}}$. En effet on a : $z = -5e^{i\frac{2\pi}{5}} = 5e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

9. Mettons tout d'abord sous forme exponentielle $Z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$. On a $|Z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ainsi,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} j.$$

Ainsi comme $z = \frac{1}{Z}$, on obtient : $z = \sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}j^2$.

10. On commence par mettre ce qui est à l'intérieur de la parenthèse sous forme exponentielle. Comme c'est un quotient, on met sous forme exponentielle de façon séparée le numérateur et le dénominateur et on obtient que : $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$. Ainsi on obtient :

$$z = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}} \right)^{20}$$

$$= 2^{10}e^{i\frac{140\pi}{12}} = 2^{10}e^{i\frac{35\pi}{3}}$$

$$= 2^{10}e^{i\pi(10+\frac{5}{3})} = 2^{10} \times e^{10i\pi} \times e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$= 2^{10}e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Ainsi on a : $z = 2^{10}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

11. Commençons par calculer le module. Le formulaire de trigonométrie donne $|z| = |\cos \theta|$. Il faut donc discuter selon le signe du cosinus.

• Si $\cos \theta \geq 0$, c'est-à-dire si $\exists k \in \mathbb{Z}$, $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, alors

$$z = \cos \theta \times \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta e^{-i\theta}.$$

• Si $\cos \theta \leq 0$, c'est-à-dire si $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, alors

$$z = -\cos \theta \times \frac{-1}{\cos \theta + i \sin \theta} = -\cos \theta e^{i\pi} e^{-i\theta} = -\cos \theta e^{i(\pi-\theta)}.$$

12. Ici plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple commencer par simplifier le quotient $\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)}$. On obtient en utilisant la définition de la tangente :

$$\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} = \frac{\frac{\cos(\theta)+i \sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos(\theta)-i \sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+i \sin(\theta)}{\cos(\theta)-i \sin(\theta)}.$$

Il suffit alors de remarquer que : $\cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$ et que $\cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$ en utilisant la définition de $e^{i\theta}$, la parité du cosinus et l'imparité du sinus. Ainsi on obtient que : $\frac{1+i \tan(\theta)}{1-i \tan(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$.

En passant à la puissance n , on obtient que : $z = e^{2n\theta}$.

Exercice 5 | Complexe j On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Justifier rapidement que : $j^3 = 1$, $1+j+j^2 = 0$, $\bar{j} = j^2$.

2. Exprimer les complexes suivants sous la forme $\alpha + \beta j$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$:

$$z_1 = (1+j)^5, \quad z_2 = \frac{1}{(1+j)^4}, \quad z_3 = \frac{1}{1-j^2}.$$

Indication : On pourra pour z_3 utiliser la technique de l'expression conjuguée.

Solution (exercice 5)

1. Voir cours.

• $z_1 = (1+j)^5 = (-j^2)^5 = -j^{10} = -j^9 \times j = \boxed{-j} = -e^{i\frac{2\pi}{3}}.$

• $z_2 = \frac{1}{(1+j)^4} = \frac{1}{(-j^2)^4} = \frac{1}{j^8} = \frac{1}{j^2} = \frac{1}{-1} = -1.$ Or $j^3 = j^2j = 1$ donc $\frac{1}{j^2} = j$. Donc $z_2 = \boxed{j}.$

- En remarquant que $\bar{j}^2 = j$ à l'aide de la première question, on obtient :

$$\frac{1}{1-j^2} = \frac{1-\bar{j}^2}{(1-j^2)(1-\bar{j}^2)} = \frac{1-j}{1-j^2-\bar{j}^2-|j|^2} = \frac{1-j}{1+1+1} = \boxed{\frac{1-j}{3}}.$$

Exercice 6 | Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner l'expression du module de z_1 et z_2 . Mettre z_2 sous forme exponentielle.

$$z_1 = t^2 + 2i \quad t-1, \quad z_2 = 1 - \cos t + i \sin t.$$

Solution (exercice 6)

- On a

$$|z_1|^2 = (t^2 - 1)^2 + 4t^2 = t^4 + 2t^2 + 1 = (1 + t^2)^2.$$

Ainsi, $|z_1| = \sqrt{(1 + t^2)^2} = |1 + t^2| = 1 + t^2$ car la somme de deux nombres positifs est positive.

- On a :

$$|z_2|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 4 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right).$$

Ainsi, $|z_2| = 2 \left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|$. Il faut alors discuter selon le signe du sinus qui n'est pas toujours positif.

◇ Si $\sin \left(\frac{t}{2} \right) \geq 0$, on a $|z_2| = 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)$. étude de $\sin \left(\frac{t}{2} \right) \geq 0$:

$$\sin \left(\frac{t}{2} \right) \geq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 0 + 2k\pi \leq \frac{t}{2} \leq \pi + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 4k\pi \leq t \leq 2\pi + 4k\pi.$$

◇ Si $\sin \left(\frac{t}{2} \right) \leq 0$, on a $|z_2| = -2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)$. étude de $\sin \left(\frac{t}{2} \right) \leq 0$:

$$\sin \left(\frac{t}{2} \right) \leq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \pi + 2k\pi \leq \frac{t}{2} \leq 2\pi + 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2\pi + 4k\pi \leq t \leq 4\pi + 4k\pi$$

- On distingue donc deux cas selon le signe de $\sin \left(\frac{t}{2} \right)$.

◇ Cas 1 : Lorsque t vérifie : $\exists k \in \mathbb{Z}, 4k\pi < t < 2\pi + 4k\pi$ (0 ne se met pas sous forme exponentielle, il faut donc étudier uniquement les nombres complexes non nuls ce qui explique les inégalités strictes). On a alors $|z_2| = 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)$ et donc :

$$\begin{aligned} z_2 &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \left[\frac{1 - \cos(t)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} + i \frac{\sin(t)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right] \\ &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \left[\frac{2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} + i \frac{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{t}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right] \\ &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \left[\sin \left(\frac{t}{2} \right) + i \cos \left(\frac{t}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \left[i \left(\cos \left(\frac{t}{2} \right) - i \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right] \\ &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \left[i \left(\cos \left(-\frac{t}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{t}{2} \right) \right) \right] \\ &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \left[e^{i \frac{\pi}{2}} \times e^{-i \frac{t}{2}} \right] \\ &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) e^{i \frac{\pi-t}{2}}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a donc obtenu que $z_2 = 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) e^{i \frac{\pi-t}{2}}$.

◇ Cas 2 : Lorsque t vérifie : $\exists k \in \mathbb{Z}, 2\pi + 4k\pi < t < 4\pi + 4k\pi$:

On a alors $|z_2| = -2 \sin \left(\frac{t}{2} \right)$ et donc en refaisant le même type de raisonnement que ci-dessus :

$$\begin{aligned} z_2 &= -2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \left(-e^{i \frac{\pi-t}{2}} \right) \\ &= -2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \left(e^{i\pi} e^{i \frac{\pi-t}{2}} \right) \\ &= -2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) e^{i \frac{3\pi-t}{2}}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a donc obtenu que $z_2 = -2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) e^{i \frac{3\pi-t}{2}}$.

- On peut également utiliser la méthode de l'angle moitié, c'est plus simple et plus rapide! On a en effet :

$$\begin{aligned} z_2 &= 1 - \cos t + i \sin t = 1 - e^{-it} \\ &= e^{-i \frac{t}{2}} \left(e^{i \frac{t}{2}} - e^{-i \frac{t}{2}} \right) \\ &= 2i \sin \left(\frac{t}{2} \right) e^{-i \frac{t}{2}} \\ &= 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) e^{i \frac{\pi-t}{2}}. \end{aligned}$$

On reprend ensuite les mêmes cas, et on obtient les mêmes résultats que précédemment.

Exercice 7 | Soit $u \in \mathbb{C}$ un complexe de module 1 et d'argument φ . Préciser le module et un argument de $1 + u$.

Solution (exercice 7) Comme $u \in \mathbb{C}$ est un complexe de module 1, il s'écrit sous la forme $u = e^{i\varphi}$ avec φ un argument. Par la méthode des angles moitiés, on obtient :

$$1 + u = e^{i0} + e^{i\varphi} = e^{i \frac{\varphi}{2}} \left(e^{-i \frac{\varphi}{2}} + e^{i \frac{\varphi}{2}} \right) = 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) e^{i \frac{\varphi}{2}}.$$

Ainsi, $|1 + u| = 2 \left| \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right|$ et il faut étudier le signe de $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

- Si $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \geq 0$, alors :

$$\begin{cases} |1 + u| = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \arg(1 + u) = \frac{\varphi}{2} \quad [2\pi]. \end{cases}$$

Et la résolution de $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \geq 0$ donne

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \geq 0$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, -\pi + 4k\pi \leq \varphi \leq \pi + 4k\pi.$$

- Si $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \leq 0$, alors :

$$\begin{cases} |1 + u| = -2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \arg(1 + u) = \frac{\varphi}{2} + \pi \quad [2\pi]. \end{cases}$$

En effet, $-1 = e^{i\pi}$. Et la résolution de $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \leq 0$ donne

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \leq 0$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \pi + 4k\pi \leq \varphi \leq 3\pi + 4k\pi.$$

Exercice 8 | ●

1. Soient a et b des réels tels que b ne soit pas de la forme $(2k+1)\pi$ avec k entier. Calculer le module et un argument de $\frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b}$.
2. Soit $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi]^2$. Déterminer la forme exponentielle de $Z = \frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 - \sin \beta + i \cos \beta}$.

Solution (exercice 8)

1. On peut remarquer que :

$$\frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} = \frac{1 + e^{ia}}{1 + e^{ib}}.$$

On utilise donc la méthode de l'angle moitié pour le numérateur et le dénominateur. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} &= \frac{e^{\frac{ia}{2}} 2 \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{e^{\frac{ib}{2}} 2 \cos\left(\frac{b}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{\frac{ia}{2}} \cos\left(\frac{a}{2}\right)}{e^{\frac{ib}{2}} \cos\left(\frac{b}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On peut remarquer que ce nombre est bien défini car le dénominateur est bien non nul car on a supposé que b n'est pas de la forme $2k\pi + \pi$ donc $\frac{b}{2}$ n'est pas de la forme $k\pi + \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et ainsi $\cos\left(\frac{b}{2}\right)$ ne s'annule pas. On obtient donc

$$Z = \frac{1 + \cos a + i \sin a}{1 + \cos b + i \sin b} = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i \frac{a-b}{2}}.$$

- Calcul du module : $|Z| = \left| \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \right|$. Ainsi, il faut étudier des cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur du module.
- Cas 1 : Si $\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} > 0$, à savoir s'ils sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs, on obtient alors :

$$|Z| = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z = \frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i \frac{a-b}{2}}.$$

Z est alors bien sous forme exponentielle et un argument de Z est $\frac{a-b}{2}$.

- Cas 2 : Si $\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} < 0$, à savoir si l'un est négatif et l'autre positif, on obtient alors :

$$|Z| = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \quad \text{et} \quad Z = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} \left(-e^{i \frac{a-b}{2}} \right) = -\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i \left(\frac{a-b}{2} + \pi \right)}.$$

Z est alors bien sous forme exponentielle et un argument de Z est $\frac{a-b}{2} + \pi$.

2. On utilise le même type de raisonnement, en remarquant que :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1 - (\cos \alpha - i \sin \alpha)}{1 + i (\cos \beta - i \sin \beta)} \\ &= \frac{1 - e^{-i\alpha}}{1 + i e^{-i\beta}} \\ &= \frac{1 - e^{-i\alpha}}{1 + e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}}. \end{aligned}$$

On utilise ensuite la méthode de l'angle moitié, et on distingue 3 cas :

- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} > 0$, alors $Z = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$.
- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = 0$, alors $Z = 0$ et n'admet pas de forme exponentielle.
- Si $\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} < 0$, alors $Z = -\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)}$.

Exercice 9 | ● Autour des racines 7-ièmes

Soient $u = e^{i \frac{2\pi}{7}}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

1. Montrer que S et T sont conjugués, et que $\text{Im}(S) \geq 0$.
2. Calculer S + T et ST.
3. En déduire que :

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solution (exercice 9)

1. Constatons que $\bar{u} = e^{i\frac{2\pi}{7}} = e^{-i\frac{2\pi}{7}} = e^{-i\frac{2\pi}{7}+2i\pi} = e^{i\frac{12\pi}{7}} = u^6$. De même :

$$\overline{u^2} = \bar{u}^2 = (u^6)^2 = u^{12} = u^5 = 1 \cdot u^5 = u^5,$$

et

$$\overline{u^4} = \bar{u}^4 = (u^6)^4 = u^{24} = u^{3 \times 7} u^3 = (u^7)^3 u^3 = 1 \cdot u^3 = u^3.$$

Les termes de S, T sont donc conjugués dans le même ordre, et par propriété de la conjugaison, on obtient $\overline{S} = T$. La deuxième partie est plus technique, on utilise la formule de Moivre, puis on calcule les puissances :

$\text{Im}(S)$

$$\begin{aligned} &= \text{Im} \left(\left(\cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) \right)^2 + \left(\cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) \right)^4 \right) \\ &= \sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) + 2 \sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) + 4 \cos^3 \left(\frac{2\pi}{7} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) - 4 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \sin^3 \left(\frac{2\pi}{7} \right) \\ &= \sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) \left(1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) + 4 \cos^3 \left(\frac{2\pi}{7} \right) - 4 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi}{7} \right) \right) \end{aligned}$$

La partie imaginaire est donc du signe de la parenthèse car $\sin \left(\frac{2\pi}{7} \right) \geq 0$, et elle vaut

$$\begin{aligned} &1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) + 4 \cos^3 \left(\frac{2\pi}{7} \right) - 4 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \sin^2 \left(\frac{2\pi}{7} \right) \\ &= 1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \left(1 + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{7} \right) - \sin^2 \left(\frac{2\pi}{7} \right) \right) \\ &= 1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) 2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{7} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

puisque $\cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \geq 0$. Donc finalement $\boxed{\text{Im}(S) \geq 0}$.

- 2.

$$S + T + 1 = \sum_{k=0}^6 u^k = \frac{1-u^7}{1-u} = \frac{1-1}{1-u} = \Rightarrow \boxed{S+T=-1}$$

Puis

$$\begin{aligned} ST &= (u + u^2 + u^4)(u^3 + u^5 + u^6) \\ &= u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + 1 + u^2 + u^3, \quad \text{en utilisant } u^7 = 1, \\ &= 2 + (S + T) = 2 + (-1) = \boxed{1}. \end{aligned}$$

3. Constatons que

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} = \text{Re}(S) \quad \text{et} \quad \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \text{Im}(S).$$

Or, $T = \bar{S}$ et $S + T = -1$ donc $S + \bar{S} = -1 = 2 \text{Re}(S) = -1$, donc $\boxed{\text{Re}(S) = -\frac{1}{2}}$.

De plus, $ST = S\bar{S} = |S|^2 = 1$, donc S est de module un. Or, $\text{Re}(S)^2 + \text{Im}(S)^2 = 1$, donc $\text{Im}(S)^2 = 1 - \text{Re}(S)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, on déduit que :

$$\text{Im}(S) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.3 Géométrie

Exercice 10 | Condition d'appartenance à un cercle. Soient A et B deux points distincts du plan, d'affixes respectives a et b . Montrer qu'un point M d'affixe z appartient au cercle Γ de diamètre $[AB]$ si et seulement si :

$$2z\bar{z} - (\bar{a} + \bar{b})z - (a + b)\bar{z} + a\bar{b} + \bar{a}b = 0.$$

Solution (exercice 10) L'appartenance au cercle en question s'exprime à l'aide de l'affixe du centre et d'un module. L'affixe du centre du cercle est $\frac{a+b}{2}$, et la distance d'un point M(z) au centre est

$$\left| z - \frac{a+b}{2} \right|.$$

Ainsi, la condition d'appartenance au cercle est la suivante :

$$\begin{aligned} M(z) \in \Gamma &\iff \left| z - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2} \\ &\iff \left| z - \frac{a+b}{2} \right|^2 = \frac{|b-a|^2}{4} \quad \text{élévation au carré} \\ &\iff \left(z - \frac{a+b}{2} \right) \overline{\left(z - \frac{a+b}{2} \right)} = \frac{1}{4}(b-a)\overline{(b-a)} \\ &\iff (2z - a + b)(2\bar{z} - \bar{a} + \bar{b}) = (b-a)\overline{(b-a)} \\ &\iff (2z - a + b)(2\bar{z} - \bar{a} + \bar{b}) = (b-a)(\bar{b} - \bar{a}) \\ &\iff 4|z|^2 - 2z\bar{a}b - 2z\bar{b} - 2a\bar{z} + |a|^2 + a\bar{b} - 2b\bar{z} + b\bar{a} + |b|^2 \\ &= |b|^2 + |a|^2 - b\bar{a} - \bar{b}a. \end{aligned}$$

En simplifiant et en divisant par deux, on trouve la condition de l'énoncé :

$$2z\bar{z} - (\bar{a} + \bar{b})z - (a + b)\bar{z} + a\bar{b} + \bar{a}b = 0.$$

4.4 Résolution d'équations

Exercice 11 | Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- $(z+1)^2 + (2z+3)^2 = 0$,
- $2z^2(1 - \cos(2\theta)) - 2z \sin(2\theta) + 1 = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Solution (exercice 11)

- On reconnaît un trinôme :

$$(z+1)^2 + (2z+3)^2 = 0 \iff z^2 + 2z + 1 + 4z^2 + 12z + 9 = 0 \iff 5z^2 + 14z + 10 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 14^2 - 4 \times 5 \times 10 = 4(49 - 50) = -4$. Les solutions sont donc $z_1 = \frac{-14-2i}{10} = \frac{-7-i}{5}$ et $z_2 = \frac{-7+i}{5}$.

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{-7-i}{5}, \frac{-7+i}{5} \right\}$.

- on fait deux cas, car le coefficient du z^2 peut s'annuler.

- Si $1 - \cos(2\theta) = 0 \iff \cos(2\theta) = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta = 2k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = k\pi$.

On a alors $\sin(2\theta) = 0$, et on doit donc résoudre : $0 + 0 + 1 = 0$, ce qui est impossible. Donc $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

- Si $1 - \cos(2\theta) = 0 \iff \forall k \in \mathbb{Z}, \theta \neq k\pi$.

C'est une équation du second degré en z , on calcule donc le discriminant et on obtient

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 \sin^2(2\theta) - 8(1 - \cos(2\theta)) \\ &= 4(2 \sin(\theta) \cos(\theta))^2 - 8 \times 2 \sin^2(\theta) \\ &= 16 \sin^2(\theta)(\cos^2(\theta) - 1) \\ &= -16 \sin^4(\theta). \end{aligned}$$

Ainsi $\Delta < 0$ et $\sqrt{-\Delta} = 4 \sin^2(\theta)$. On obtient alors $z_1 = \frac{2 \sin(2\theta) + 4i \sin^2(\theta)}{4 \times 2 \sin^2(\theta)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right)$ en utilisant le fait que $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$. Et les racines étant alors complexes conjuguées, on obtient : $z_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta} - i \right)$. Ainsi

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta} - i \right), \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right) \right\}.$$

Exercice 12 | Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. Pour l'ordre 2, on essaiera les deux méthodes (avec la forme algébrique et la forme exponentielle). Dans les autres cas, on fera appel à la forme exponentielle.

- $z^2 = i$
- $z^3 = i$
- $z^4 + 4 = 0$
- $z^2 = 24 + 10i$
- $z^4 = j$.

Solution (exercice 12)

- **[Méthode forme exponentielle]** Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = i \iff r^2 e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff r^2 = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff r = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} \right\} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

- **[Méthode forme algébrique]** On cherche les solutions sous la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$z^2 = i \iff a^2 - b^2 + i(2ab) = i$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \\ |z|^2 = a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{1}{2} \\ ab = \frac{1}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

en effectuant la somme des lignes 1 et 3. D'après la deuxième équation, a, b sont de même signe. On retrouve bien le même ensemble de solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} \right\} = \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right\}.$$

- Comme 0 n'est pas solution, on cherche les solutions z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z^3 = i \iff r^3 e^{3i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff r^3 = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff r = 1, \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, -i \right\}.$$

3. Comme 0 n'est pas solution, on cherche donc les solutions sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$z^4 = -4 \iff r^4 e^{4i\theta} = 4e^{i\pi}$$

$$\iff r^4 = 4, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, 4\theta = \pi + 2k\pi$$

$$\iff r = \sqrt{2}, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Ainsi, les solutions sont :

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \right\}.$$

4. ● **[Méthode forme algébrique]** Méthode avec la forme algébrique pour les racines carrées d'un nombre complexe. On cherche donc z sous la forme $z = x + i y$. On obtient donc

$$z^2 = 24 + 10i \iff (x + iy)^2 = 24 + 10i$$

$$\iff x^2 - y^2 + 2xyi = 24 + 10i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ 2xy = 10. \end{cases}$$

Calculons désormais le module de $24 + 10i$.

$$|24 + 10i| = 2 \times |12 + 5i| = 2 \times \sqrt{144 + 25} = 2\sqrt{169} = 2 \times 13 = 26.$$

Ainsi :

$$z^2 = 24 + 10i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ 2xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$$

En additionnant les lignes (1) et (3), on déduit $2x^2 = 50$ soit $x = \pm 5$. En formant (3) – (1) on obtient $y^2 = 1$ soit $y = \pm 1$. En tenant compte de (2) on trouve $(x, y) = (5, 1)$ ou $(x, y) = (-5, -1)$. Inversement, ces deux couples sont bien solution du système initial.

Ainsi, les solutions sont $\mathcal{S} = \{-5 - i, 5 + i\}$.

- **[Méthode forme exponentielle]** On commence par essayer d'appliquer la méthode du cours et on cherche donc à mettre $24 + 10i$ sous forme exponentielle. On ne trouve pas de forme exponentielle simple, cette méthode n'est pas applicable.

5. 0 n'est pas solution, on cherche donc les solutions z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient

$$z^4 = j \iff r^4 e^{4i\theta} = j$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \begin{cases} r^4 = 1, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, 4\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} r = 1, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r = 1, \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{-5\pi}{6}}, e^{i\frac{-\pi}{3}} \right\}$.

Exercice 13 | Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes et mettre les solutions sous forme exponentielle.

1. $z^n = 1$,
2. $z^n = (z - 1)^n$,
3. $(z + 1)^n = (z - 1)^n$.

Solution (exercice 13)

1. D'après le cours, l'ensemble des solutions (cherchées sous forme trigonométrique) est : $\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$.

2. On peut tout de suite remarquer que $z = 1$ n'est pas solution. On obtient alors pour tout $z \neq 1$, en utilisant la question précédente,

$$z^n = (z-1)^n \iff \left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{z}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1).$$

Si $k = 0$, $z = z - 1$ n'a pas de solution. Ainsi, on peut prendre $k \in \{1, \dots, n - 1\}$.

On obtient alors

$$z^n = (z-1)^n \iff \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z = \frac{-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{ik\pi}{n}} \times (-2i \sin(\frac{k\pi}{n}))}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n-1\}, z = e^{\frac{ik\pi}{n}} \frac{-i}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i\frac{k\pi}{n} + \frac{3\pi}{2}}.$$

Donc on a : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{i \frac{k\pi}{n} + \frac{3\pi}{2}} \mid k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$

3. Comme dans la question précédente, on cherche à se ramener à la première question.

- Comme 1 n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq 1$. Ainsi, on peut bien diviser par $(z - 1)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a

$$(z+1)^n = (z-1)^n \iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1.$$

D'après la première question, on a :

$$(z+1)^n = (z-1)^n \iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

$$\iff \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1.$$

Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien non nul. Or on a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \iff e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1$$

$$\iff \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi$$

$$\iff k = nk'$$

avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.

♦ Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.

♦ Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient

$$z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = -i \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

en utilisant la méthode de l'angle moitié.

• Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = -i \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right\}.$

Exercice 14 | Soit $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ fixé. On veut résoudre l'équation :

$$(E) \quad (1+iz)^3(1-i \tan \varphi) = (1-iz)^3(1+i \tan \varphi).$$

- Montrer que si z est solution de (E) alors $|1-iz| = |1+iz|$. En déduire que z est réel.
- Posons $z = \tan \theta$. Justifier ce changement d'inconnue, puis résoudre (E).

Solution (exercice 14)

- Soit z une solution, alors passons au module : $|1+iz|^3 \frac{1}{|\cos \varphi|} = |1-iz|^3 \frac{1}{|\cos \varphi|}$ puisque $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. Donc en multipliant par $|\cos \varphi|$ et en utilisant la positivité des modules, on obtient : $|1+iz| = |1-iz|$. Élevons ceci au carré, on a alors :

$$|1+iz| = |1-iz|$$

$$\iff |1+iz|^2 = |1-iz|^2$$

$$\iff (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z})$$

$$\iff 1-i\bar{z}+iz+|z|^2 = 1-iz+i\bar{z}+|z|^2$$

$$\iff z = \bar{z}.$$

Donc $z \in \mathbb{R}$.

- La fonction \tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} et nous avons montré que z est réel. Posons dès lors, puisque $z \in \mathbb{R}$, $z = \tan \theta$ et résolvons l'équation ci-dessous en $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$(1+i \tan \theta)^3(1-i \tan \varphi) = (1-i \tan \theta)^3(1+i \tan \varphi).$$

Elle est équivalente à

$$\left(\frac{1+i \tan \theta}{1-i \tan \theta} \right)^3 = \frac{1+i \tan \varphi}{1-i \tan \varphi},$$

ou encore, en multipliant par $\cos \theta$, $\cos \varphi$, au numérateur et dénominateur,

$$\left(\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} \right)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} \right)^3 = e^{6i\theta}$$

$$= \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}$$

Donc on est amené à résoudre en $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$e^{6i\theta} = e^{2i\varphi}.$$

D'où $6\theta = 2\varphi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, i.e. $\theta = \frac{\varphi + k\pi}{3}$. On ne garde ensuite que les solutions dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \tan\left(\frac{\varphi + k\pi}{3}\right), \quad \frac{\varphi + k\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right\}.$$

4.5 Trigonométrie

Exercice 15 | **Linéarisation** Linéariser les expressions suivantes.

- $\sin^5 x$,
- $\sin^3 x \cos^2 x$,
- $\cos^6 x, \sin^6 x$,
- $\sin^4 x \cos^3 x$,
- $\sin^4 x \cos^4 x$.

Solution (exercice 15)

- On utilise la formule d'EULER, puis on développe grâce à la formule du binôme de NEWTON. Il suffit ensuite de rassembler les exponentielles conjuguées, et d'appliquer à nouveau la formule d'EULER dans l'autre sens.

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^5$$

$$= \frac{1}{32i} (e^{5ix} - 5e^{4ix}e^{-ix} + 10e^{3ix}e^{-2ix} - 10e^{2ix}e^{-3ix} + 5e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{32i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})) \\
&= \frac{1}{32i} (2i \sin(5x) - 5(2i \sin(3x)) + 10(2i \sin(x)))
\end{aligned}$$

On obtient finalement : $\sin^5 x = \frac{\sin(5x)}{16} - \frac{5}{16} \sin(3x) + \frac{5}{8} \sin x$.

2. Attention de ne pas linéariser séparément les deux termes ! Il faut ici développer toutes les exponentielles, avant de repasser aux cosinus et sinus.

$$\begin{aligned}
&\sin^3 x \cos^2 x \\
&= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\
&= \frac{-1}{8i} \times \frac{1}{4} \times (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\
&= \frac{-1}{32i} (e^{5ix} + 2e^{3ix} + e^{ix} - 3e^{3ix} - 6e^{ix} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} + 6e^{-ix} \\
&\quad + 3e^{-3ix} - e^{-ix} - 2e^{-3ix} - e^{-5ix}) \\
&= \frac{-1}{32i} (e^{5ix} - e^{-5ix} - (e^{3ix} - e^{-3ix}) - 2(e^{ix} - e^{-ix})) \\
&= \frac{-1}{32i} (2i \sin(5x) - 2i \sin(3x) - 4i \sin x).
\end{aligned}$$

On obtient : $\sin^3 x \cos^2 x = -\frac{\sin(5x)}{16} + \frac{\sin(3x)}{16} + \frac{\sin x}{8}$.

3. On obtient : $\cos^6 x = \frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3\cos(4x)}{16} + \frac{15\cos(2x)}{32} + \frac{5}{8}$.
4. On obtient : $\sin^6(x) = -\frac{\cos(6x)}{32} + \frac{3}{16} \cos(4x) - \frac{15}{32} \cos(2x) + \frac{5}{16}$.
5. On obtient : $\sin^4(x) \cos^3(x) = \frac{1}{2^6} (\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos(x))$.
6. On obtient : $\sin^4(x) \cos^4(x) = \frac{1}{2^7} (\cos(8x) - 4\cos(4x) + 3)$.

Exercice 16 | Antilinéarisation

- Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(3x)$ et $\sin(4x)$.
- Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et de $\sin x$: $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{10})$.

Solution (exercice 16)

- Il s'agit ici d'utiliser la formule de MOIVRE pour exprimer le cosinus comme la partie réelle d'une exponentielle complexe, et le sinus comme sa partie imaginaire. Puis on calcule l'exponentielle comme une puissance, en développant grâce à la formule du binôme de NEWTON, et on identifie la partie réelle et la partie imaginaire.

- On a $\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{3ix})$. On a de plus :

$$\begin{aligned}
e^{3ix} &= (e^{ix})^3 \iff (\cos x + i \sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x.
\end{aligned}$$

On a donc $\cos(3x) = \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$, soit, en utilisant $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$: $\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

- De même, on remarque que $\sin(4x) = \operatorname{Im}(e^{4ix})$. La même méthode donne : $\sin(4x) = 4 \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = 4 \cos x \sin x (1 - 2 \sin^2 x)$.

2. On applique la même méthode, et on obtient :

$$\cos(5x) = \cos^5(x) - 10 \cos^3(x) \sin^2(x) + 5 \cos(x) \sin^4(x)$$

$$\sin(5x) = \sin^5(x) - 10 \cos^2(x) \sin^3(x) + 5 \cos^4(x) \sin(x).$$

- On commence par exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ uniquement :

$$\begin{aligned}
\cos(5x) &= \cos^5(x) - 10 \cos^3(x)(1 - \cos^2(x)) + 5 \cos(x)(1 - \cos^2(x))^2 \\
&= 16 \cos^5(x) - 20 \cos^3(x) + 5.
\end{aligned}$$

En prenant $x = \frac{\pi}{10}$ dans la relation précédente, on a alors :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 16 \cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5.$$

En remarquant que $\cos(\frac{5\pi}{10}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, on obtient que $\cos(\frac{\pi}{10})$ est solution de l'équation :

$$16X^5 - 20X^3 + 5 = 0 \iff X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0.$$

Ainsi c'est équivalent à : $X = 0$ ou à $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. Comme $\cos(\frac{\pi}{10}) \neq 0$, on doit donc résoudre : $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$. On pose encore $Y = X^2$ afin de se ramener à une équation du second degré en Y et on obtient : $16Y^2 - 20Y + 5 = 0$. Les solutions sont alors $Y = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ ou $Y = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Ainsi, comme $Y = X^2$, on a

$$X = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \text{ ou } X = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Comme $\frac{\pi}{10} \in [0, \frac{\pi}{6}]$, on sait, le cosinus étant décroissant sur cet intervalle que : $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \cos(\frac{\pi}{10}) < 1$. En particulier, il ne peut pas être négatif, donc

$\cos(\frac{\pi}{10})$ vaut $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Or on a :

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \iff 2 < 5 - \sqrt{5} < 3$$

$$\iff \frac{1}{4} < \frac{5 - \sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8}$$

$$\iff \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

En particulier, on a : $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, et donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 17 | Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer : $\sum_{p=0}^n \cos^2(px)$.

Solution (exercice 17) En utilisant les formules d'Euler, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \cos^2(px) &= \frac{1}{4} \sum_{p=0}^n (e^{ipx} + e^{-ipx})^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{p=0}^n (e^{2ipx} + e^{-2ipx} + 2) \\ &= \frac{1}{4} \left(\sum_{p=0}^n e^{2ipx} + \sum_{p=0}^n e^{-2ipx} + (n+1) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}} + \frac{1-e^{-2i(n+1)x}}{1-e^{-2ix}} + 2(n+1) \right) & \text{si } x \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{3(n+1)}{4} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Or, par propriété de la conjugaison, on constate que :

$$\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}} = \overline{\left(\frac{1-e^{-2i(n+1)x}}{1-e^{-2ix}} \right)}.$$

Donc, si $x \notin \mathbb{N}$, on peut finir le calcul en utilisant la technique de l'angle moitié

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n \cos^2(px) &= \frac{1}{4} \left(2 \operatorname{Re} \left(\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}} \right) + 2(n+1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i(n+1)x}}{e^{ix}} \frac{-2i \sin((n+1)x)}{-2i \sin(x)} \right) + (n+1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} + (n+1) \right). \end{aligned}$$

Exercice 18 | Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer :

$$1. \quad C = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta), \quad 2. \quad S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta).$$

Solution (exercice 18) Commençons par calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)},$$

il suffira ensuite de calculer la partie réelle et imaginaire.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} &= e^{i\alpha} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\beta})^k \\ &= e^{i\alpha} (1 + e^{i\beta})^n \\ &= e^{i\alpha} \left(e^{i\frac{\beta}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \right)^n, \\ &= e^{i\alpha + ni\frac{\beta}{2}} 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

binôme
angle moitié

On déduit alors les parties réelles et imaginaires,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\beta) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} \right) \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\alpha + n\frac{\beta}{2}\right), \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha + k\beta) &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha+k\beta)} \right) \\ &= 2^n \cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\alpha + n\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

4.6

Devoir-maison

Exercice 19 | **Lien forme algébrique et exponentielle** On définit les complexes ci-après : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_0 = 1 + i$, $z_1 = (1 + i)j = z_0 \times j$, $z_2 = (1 + i)j^2 = z_0 \times j^2$.

- Donner l'écriture exponentielle de z_0, z_1 et z_2 .
- Donner l'écriture algébrique de j puis celle de z_1 .
- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
- On pose $w = -2 + 2i$.
 - Écrire w sous forme exponentielle.
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^3 = w$. On recherchera les solutions sous forme exponentielle puis on reconnaitra z_0, z_1 et z_2 .

Solution (exercice 19)

1. On a : $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Ainsi : $z_0 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$

En profitant des formes exponentielles à notre disposition :

$$z_1 = (1+i)j = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}}$$

$$z_2 = (1+i)j^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}}$$

2. On a : $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Aussi,

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)j \\ &= (1+i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boxed{-\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \end{aligned}$$

3. D'après la question 1, on a :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right).$$

Or, on a obtenu que $z_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ dans la question précédente.

Ainsi : $\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

4. 4.1) On a : $|w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Puis : $w = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$.

4.2) 0 n'est pas solution de (E). Posons alors $z = \rho e^{i\theta}$, où $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

On a :

$$(E) \iff z^3 = w$$

$$\iff \rho^3 e^{i3\theta} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^3 = 2\sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}. \end{cases}$$

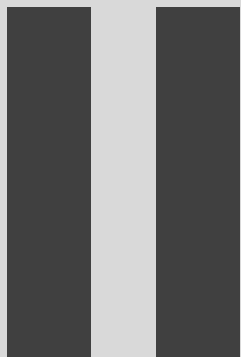
$$0 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} < 2\pi$$

$$\iff -\frac{\pi}{4} \leq \frac{2k\pi}{3} < \frac{7\pi}{4} \iff -\frac{3}{8} \leq k < \frac{21}{8}.$$

Comme $-\frac{1}{2} \leq -\frac{3}{8} \leq 0$ et $2 < \frac{21}{8} < 3$, on obtient alors les trois solutions

en prenant $k = 0$, $k = 1$ puis $k = 2$. On retrouve alors les formes exponentielles de z_0 , z_1 et z_2 . Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{z_0, z_1, z_2\}$$



Deuxième partie

Analyse