

Chapitre # (ALG) 5

Injections, surjections, bijections. Bijections numériques.

1 Fonctions & Applications

2 Injection, Surjection, Bijection ..

3 Applications aux fonctions numériques

4 Tableau récapitulatif des dérivés : le retour

5 Exercices

*Du paradis créé pour nous
par CANTOR personne ne
nous chassera.*

— David HILBERT

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est l'introduction du vocabulaire élémentaire des applications & fonctions. On s'intéresse aux différentes notions afférentes au nombre d'antécédents d'un élément de l'espace d'arrivée. En BCPST, les exemples de ce chapitre seront le plus souvent puisés dans l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} afin d'avoir une notion très visuelle des définitions. On termine par la construction de nouvelles fonctions usuelles définies comme bijection réciproque d'autres.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.



Cadre

Dans tout ce chapitre, on se fixe des ensembles non vides E, F, G, \dots

1. FONCTIONS & APPLICATIONS

Rappelons le vocabulaire déjà rencontré dans le [Chapitre \(AN\) 1](#).

1.1. Généralités

Définition 1 | Fonction entre deux ensembles

- Une *fonction de E dans F* est un processus qui associe à chaque élément x de E au plus un élément y de F (donc soit 0, soit 1). On dit que E est l'*ensemble de départ* de f et que F est l'ensemble d'arrivée de f .
- Lorsque $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : E \rightarrow F$ est une *fonction numérique*.
- On appelle *ensemble de définition* de la fonction $f : E \rightarrow F$ l'ensemble noté $\mathcal{D}_f \subset E$ pour lequel f associe une image, c'est-à-dire :

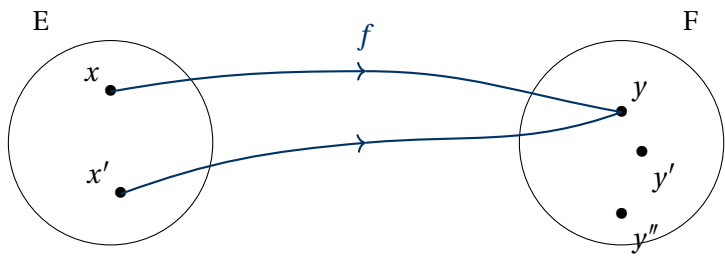
$$\mathcal{D}_f = \{x \in E \mid \exists y \in F, y = f(x)\}.$$
- Si $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x) \in F$, alors on dit que y est l'**I** *image de x par f*, et que x est **un** antécédent de y par f .

Lorsque le domaine de définition d'une fonction est tout l'espace de départ, on parle plutôt d'application.

Définition 2 | Application entre deux ensembles

- Une *application de E dans F* est un processus qui associe à chaque élément x de E exactement un élément y de F (donc 1). On dit que E est l'*ensemble de départ* de f et que F est l'ensemble d'arrivée de f .
- Lorsque $E \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R}$, on dit que $f : E \rightarrow F$ est une *application numérique*.
- Si $x \in E$ et $y = f(x) \in F$, alors on dit que y est l'**I** *image de x par f*, et que x est **un** antécédent de y par f .

Ainsi, pour une application, on ne parle pas d'« ensemble de définition », puisqu'une application est définie sur E tout entier.



Définition 4 | Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- On appelle *graphe de f* le sous-ensemble noté \mathcal{C}_f de $E \times F$ défini par :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$
- De manière équivalente, on a, pour $(x, y) \in E \times F$:

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x).$$

Notation Application

- On note une application comme ceci : $f \left| \begin{array}{l} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$
- L'ensemble des applications de E dans F sera noté F^E (cette notation peut paraître un peu curieuse pour l'instant, mais elle sera expliquée dans le *Chapitre (ALG) 6 de dénombrement*) ou encore parfois $\mathcal{A}(E, F)$.

Attention

$f \neq f(x)$, $\mapsto \neq \mapsto$ Écrire sur une copie « la fonction $f(x)$ » est donc considéré comme une horreur.

Une application est donc définie par la donnée de trois informations :

- l'ensemble de départ;
- l'ensemble d'arrivée;
- la relation qui à un élément x de E associe son image $f(x)$ de F.

On déduit alors immédiatement la définition suivante.

Définition 3 | Égalité d'applications

Soient f, g deux applications. Alors f, g sont dites *égales* si :

- elles ont le même ensemble de départ E **et** même ensemble d'arrivée F,
- et : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Cadre

- Dans toute la suite, tous les énoncés seront précisés pour des applications, c'est-à-dire que quand on écrit $f : E \rightarrow F$, cela signifie que f est définie sur E tout entier.
- Les notions s'étendent automatiquement aux fonctions en considérant l'application associée $f : \mathcal{D}_f \rightarrow F$.

On peut également généraliser la notion de courbe représentative rencontrée dans le cadre des fonctions numériques (voir *Chapitre (AN) 1*) aux applications.

APPLICATIONS USUELLES. Voyons deux applications classiques.

Définition 5 | Identité

On appelle *identité de E* la fonction notée Id_E définie par $\text{Id}_E \left| \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{array} \right.$

C'est donc une application « qui ne fait rien ».

Exemple 1 Les applications $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ et $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2} \end{array} \right.$ ne sont pas égales.



Définition 6 | Indicatrice

On appelle *indicatrice de A* avec $A \subset E$ l'application notée $\mathbb{1}_A$ par :

$$\mathbb{1}_A \left| \begin{array}{l} E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases} \end{array} \right.$$

C'est donc une application qui dépend de si un élément est dans un ensemble A ou non. Ainsi, on reconstitue l'ensemble en observant la où sa fonction indicatrice vaut 1, et le complémentaire là où elle vaut zéro.

Proposition 1 | Ligne de niveau 1 de l'indicatrice

Soit $A \subset E$. Alors :

$$A = \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 1\}, \quad \bar{A} = \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 0\}.$$

Exemple 2

- Préciser $\mathbb{1}_E$ et $\mathbb{1}_\emptyset$.



- Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes, en les exprimant sous la forme $\mathbb{1}_A(x)$ où A est un ensemble à préciser.

1. $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{++}}(e^x)$,



2. $\mathbb{1}_{|2, \infty[}(e^x)$.



Proposition 2 | Indicateur d'une réunion et d'une intersection

Soient $A, B \subset E$. Alors :

- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$,
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$,
- Par conséquent : $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Preuve

- On peut établir l'égalité en effectuant des sous-cas, mais il y'a mieux. Soit $x \in E$, alors :

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B)(x) = 1 &\iff \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 \\ &\iff \mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(x) = 1 \quad \text{produit d'entiers valant 0 et 1} \\ &\iff x \in A \text{ et } x \in B \iff x \in A \cap B \iff \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1. \end{aligned}$$

Et c'est terminé : du calcul précédent, les applications $\mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ valent 1 sur le même sous-ensemble $A \cap B$ de E , elles valent donc 0 sur le même sous-ensemble $\bar{A} \cap \bar{B}$ de E . Ainsi, elles sont égales.

- Soit $x \in E$, alors on montre que $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$ en distinguant les cas $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$ puis $x \in A \cap B$.

Nous utiliserons assez largement cette application plus tard dans l'année, en probabilités.

1.2. Restriction & Prolongement

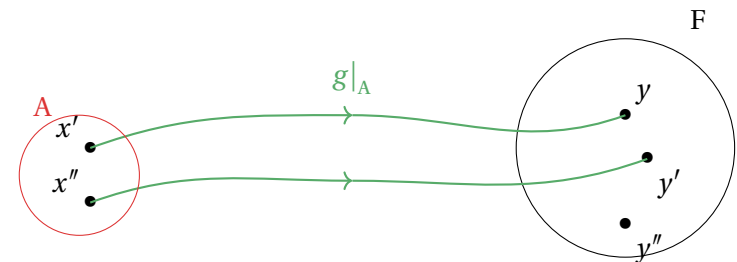
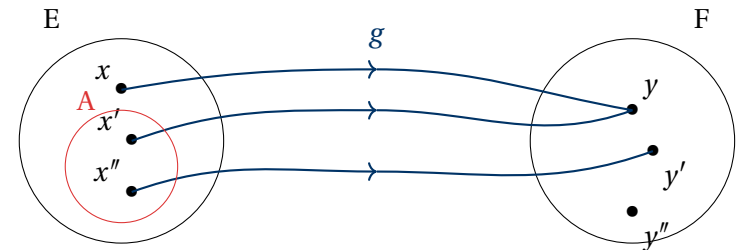
Définition 7 | Restriction & Prolongement

Soient A et E deux ensembles tels que $A \subset E$, et F un ensemble. On considère $g : E \rightarrow F$.

- On appelle *restriction de g à A* l'application : $g|_A \begin{cases} A \rightarrow F \\ x \mapsto g(x) \end{cases}$.
- Soit $f : A \rightarrow F$. On dit que g est un *prolongement de f à E* si $g|_A = f$, c'est-à-dire si : $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

Remarque 1

- Autrement dit, $g|_A$ réalise la même association « \mapsto » que g mais on a juste modifié son ensemble de départ. En tant qu'applications, on a donc $g|_A \neq g$ (dès que $A \neq E$) puisqu'elles ont des ensembles de départ différents.
- Si $f : E \rightarrow F$ est une **fonction**, alors par définition $f|_{\mathcal{D}_f}$ devient une **application** de \mathcal{D}_f dans F .



Exemple 3 Soient

$$f \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto n, \end{cases} \quad g_1 \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x, \end{cases} \quad g_2 \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|. \end{cases}$$

Préciser les éventuels liens de prolongement et restriction entre ces trois appli-

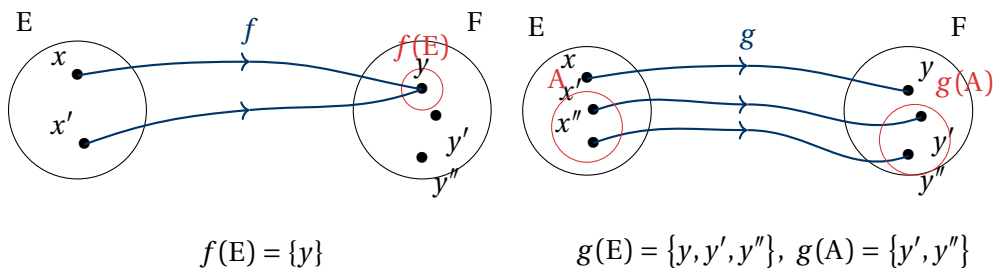
ications.
✍

1.3. Image directe

Définition 8 | Image directe
 Soient E et F deux ensembles, et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- Pour $A \subset E$, on appelle *image directe de A par f* ou simplement *image de A par f* l'ensemble $f(A)$ défini par : $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$.
 C'est l'ensemble des images des éléments de A. Autrement dit :

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x).$$
- En particulier, si $A = E$ est l'ensemble de départ, on parle d'*image de f* pour l'ensemble $f(E)$.



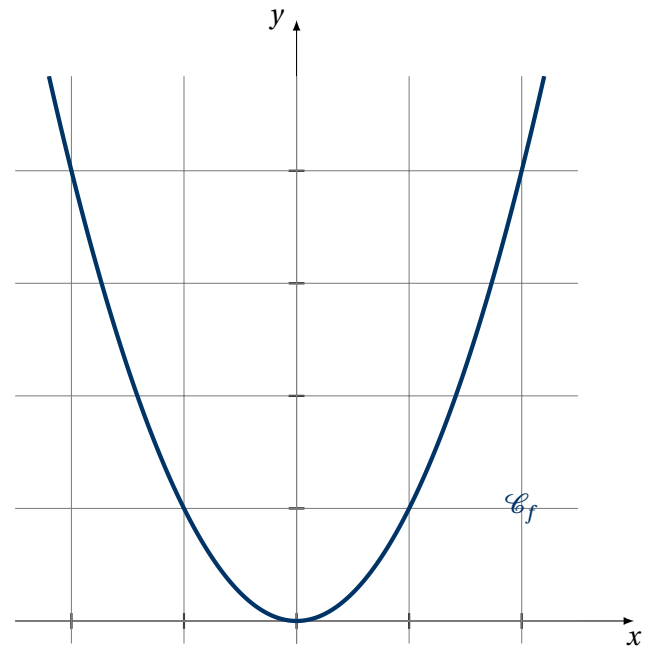
Remarque 2

- Ne pas confondre l'ensemble $f(E)$ et l'ensemble d'arrivée F. En règle générale, ce sont des ensembles différents (sauf quand l'application est surjective, voir plus bas).
- En revanche, on a toujours $f(E) \subset F$.

Exemple 4

• Soit $f \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$. Alors : $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^{+*}$, $f([-2, 2]) = [0, 4[$.

Expliquer graphiquement ces images directes. (On se contentera ici de cette « preuve » graphique, le théorème de la bijection nous permettra de le prouver (bon, pas vraiment, puisque je ne démontrerai pas ledit théorème))



• Dans l'exemple précédent, démontrer que : $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^{+*}$. (Comme dit précédemment, nous aurons une autre méthode plus efficace ultérieurement : le théorème de la bijection.)
 C'est une égalité d'ensembles, on procède donc par double-inclusion.

☐
✍

☐
✍

• Soit $s \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow x + y. \end{cases}$ Alors :

◊ $s(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

◊ $s([0, 1]^2) = [0, 2]$.

Proposition 3 | Réunion, intersection et image directe

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $A, B \subset E$. Alors :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Remarque 3 La propriété précédente s'étend sans difficulté à une union ou intersection quelconque d'ensembles.

Preuve

- **[Réunion]** C'est une égalité d'ensembles, on procède donc par double-inclusion.

⊆ Soit $y \in f(A \cup B)$. Alors il existe $x \in A \cup B$, tel que $y = f(x)$. Mais $x \in A$ ou $x \in B$.

◊ Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$.

◊ Si $x \in B$, alors $y = f(x) \in f(B)$.

Donc : $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$.

⊇ Soit $y \in f(A) \cup f(B)$.

◊ Si $y \in f(A)$, alors il existe $x_1 \in A$ tel que $y = f(x_1)$.

◊ Si $y \in f(B)$, alors il existe $x_2 \in B$ tel que $y = f(x_2)$.

Au total : $y = f(x)$ avec $x \in A$ ou $x \in B$, c'est-à-dire $x \in A \cup B$. Donc $y \in f(A \cup B)$.

- **[Intersection]** Il y a ici uniquement une inclusion à justifier.

Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $x \in B$. Donc $y = f(x) \in f(A)$ puisque $x \in A$,

et de-même $y = f(x) \in f(B)$ puisque $x \in B$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$.

Attention

Pour l'intersection, nous n'avons bien qu'une inclusion (voir l'exemple ci-après). De toute manière, dans la pratique, seule la formule pour la réunion nous sera utile.

Exemple 5 (Seulement une inclusion pour l'intersection) Soit

$f \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow x^2, \end{cases}$ et $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$. Calculer :

$$f(A \cap B), \quad f(A), \quad f(B), \quad f(A) \cap f(B).$$

✎ On a $f(A) = B = f(B)$ donc $f(A) \cap f(B) = B$, alors que $f(A \cap B) = f(\{0\}) = 0$. Dans cet exemple, nous n'avons pas $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

1.4. Composition

Nous avons déjà rencontré la notion de composée de fonctions numériques dans le **Chapitre (AN) 1**. Pour les fonctions composées, le domaine de définition pouvait être vide (par exemple, si l'on considère $f : x \longrightarrow -x^2 - 1$, $g : x \longrightarrow \ln(x)$, alors le domaine de définition de $g \circ f$ est vide).

Pour les applications, puisqu'on doit associer une image à tout élément de l'ensemble de départ, il faut ajouter une condition pour que l'application composée $g \circ f$ soit bien définie.

Définition 9 | Composition

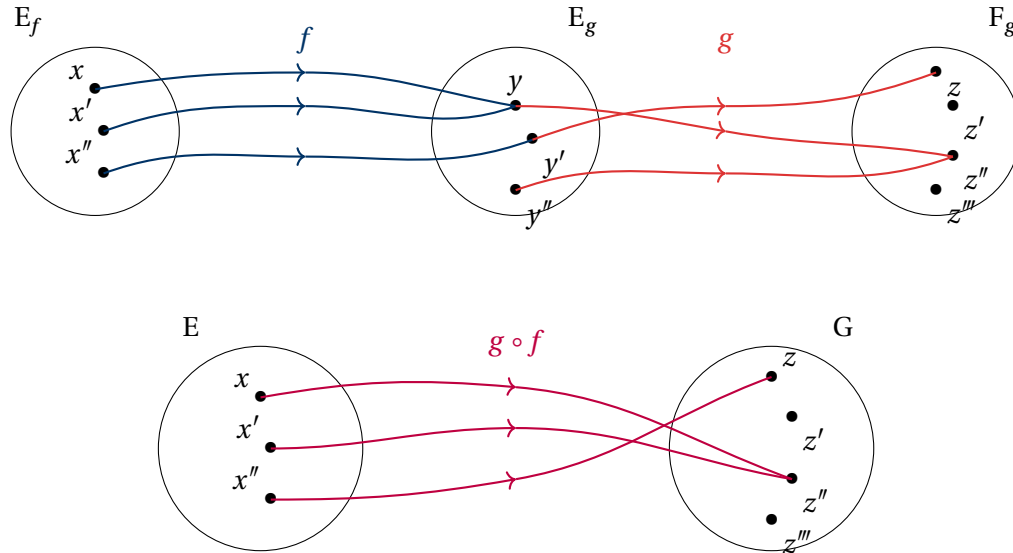
Soient E_f, E_g, F_f, F_g quatre ensembles et $f : E_f \longrightarrow F_f$, $g : E_g \longrightarrow F_g$.

- Alors, si $f(E_f) \subset E_g$, c'est-à-dire si $f(x) \in E_g$ pour tout $x \in E_f$, on définit

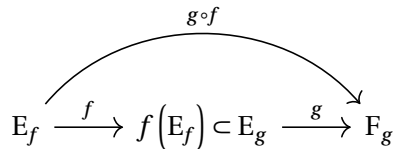
l'application composée $g \circ f$ comme étant : $g \circ f \begin{cases} E_f & \longrightarrow F_g \\ x & \longrightarrow g(f(x)). \end{cases}$

- Lorsque $f(E_f) \subset E_g$, on dira que $g \circ f$ est définie.

On peut donc composer deux applications lorsque toutes les valeurs images de la première sont dans l'ensemble de départ de la seconde.



On représente souvent aussi les composées avec des diagrammes comme ci-après.



Exemple 6

1. Soient $f \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$ $g \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x - 3, \end{cases}$ alors :

$$g \circ f \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x^2 - 3. \end{cases}$$

2. Soient :

$$f \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{cases} \quad g \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto (x, x, x). \end{cases}$$

Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles définies?



• L'application $f \circ g$ n'existe pas, puisque $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$ donc $g(\mathbb{R}) \not\subset \mathbb{R}^2$.

• Comme $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$, l'application $g \circ f$ existe, et de plus :

$$g \circ f \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, x + y, x + y). \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont évidentes, et découlent directement de la définition.

Proposition 4 | Propriétés de la composition

• **[Neutre]** Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. Alors

$$f \circ \text{Id}_E = f, \quad \text{Id}_F \circ f = f.$$

Note | Autrement dit, composer avec l'identité revient à ne « rien faire »!

• **[Associativité]** Soient $E_f, E_g, F_f, F_g, E_h, F_h$ six ensembles et $f : E_f \rightarrow F_f, g : E_g \rightarrow F_g, h : E_h \rightarrow F_h$ tels que toutes les composées ci-dessous existent, alors : $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

On note alors plus simplement : $f \circ g \circ h = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

• En règle générale, la composition n'est **pas** commutative.

2. INJECTION, SURJECTION, BIJECTION

Maintenant que les définitions principales sont posées, nous allons revenir au problème initial : celui du comptage du nombre d'antécédents d'un élément de l'espace d'arrivée.

2.1. Injection, Surjection, Bijection

Définition 10 | Injection & Surjection

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$. On dit que :

• f est une **surjection** ou est **surjective** si : $f(E) = F$, c'est-à-dire si :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

Note | Cette proposition correspond, dans l'égalité $f(E) = F$, à l'inclusion $F \subset f(E)$, l'autre étant toujours vérifiée.

Ainsi, une surjection est une application où tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

• f est une **injection** ou est **injective** si : $\forall (x, x') \in E^2,$

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x') \quad \text{en contraposant}$$

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Ainsi, une injection est une application qui à deux antécédents distincts as-

socié deux images distinctes.

La version contraposée est souvent plus simple à montrer en pratique (voir méthode ci-dessous), la définition est quant à elle plus simple pour comprendre la notion.



Méthode Montrer qu'une application est surjective

1. Poser un élément *quelconque* y de F .
2. Trouver ensuite un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$, cela revient souvent à résoudre l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x .
3. Si vous avez trouvé un élément x qui convient, et ce pour tout $y \in F$, alors f est bien surjective.



Méthode Montrer qu'une application est injective

1. Se donner $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
2. Par divers arguments, en déduire qu'alors la seule possibilité est que $x = x'$.
Auquel cas f est bien injective.

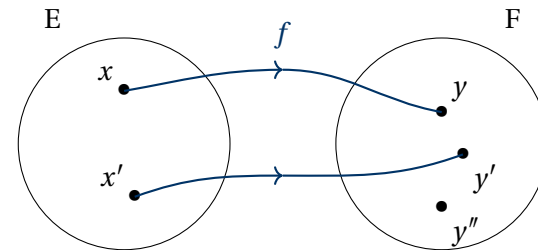
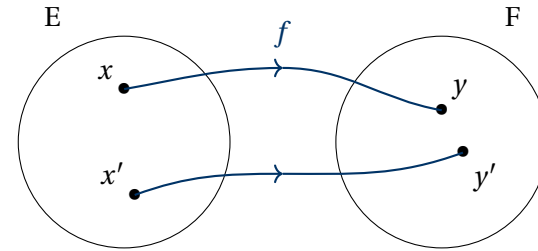
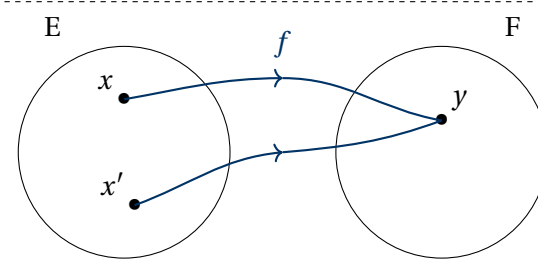
Remarque 4 (Nier une surjectivité) Écrire l'assertion logique « f n'est pas surjective ».



Remarque 5 (Nier une injectivité) Écrire l'assertion logique « f n'est pas injective ».



Exemple 7 (Applications définies en diagramme) Expliquer dans chaque cas si f est injective, surjective.



Exemple 8 (Fonctions numériques) Expliquer les assertions ci-après, en commençant par tracer la fonction.

1. $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \rightarrow x^2 \end{array} \right.$ est surjective mais pas injective.



2. $h \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \frac{1}{x} \end{cases}$ est injective mais pas surjective.

3. $s \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longrightarrow x + y \end{cases}$ n'est pas injective, mais surjective.

Proposition 5 | Applications injectives / surjectives usuelles

Soit $A \subset E$.

- L'application Id_E est injective, et surjective.
- L'application $i_A \begin{cases} A \longrightarrow E \\ x \longrightarrow x \end{cases} = \text{Id}_E|_A$, appelée *injection canonique*, est injective.
- Si E contient strictement plus que deux éléments, alors $\mathbb{1}_A$ n'est pas injective.

Preuve



Définition 11 | Bijection

- Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une *bijection* ou est *bijjective* de E dans F si :

f est injective **et** surjective.

- Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Si $A \subset \mathcal{D}_f, B \subset F$, on dit que f réalise une *bijection de A dans B* si l'application

$$\begin{cases} A \longrightarrow B \\ x \longrightarrow f(x) \end{cases} \text{ est bijective.}$$

Remarque 6 (Nier une bijectivité) Écrire l'assertion logique « f n'est pas bijective ».



Nous relierons pour terminer l'ensemble de ces notions au nombre de solutions d'une équation faisant intervenir f . C'est cela qui va nous permettre rapidement d'étudier la bijectivité d'une application en pratique.

Proposition 1 | Équations et bijectivité, surjectivité, injectivité

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Alors :

- f est injective $\iff (\forall y \in F, y = f(x)$ admet **au plus** une solution x),
- f est surjective $\iff (\forall y \in F, y = f(x)$ admet **au moins** une solution x),
c'est-à-dire : f est surjective $\iff (\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x))$.
- f est bijective $\iff (\forall y \in F, y = f(x)$ admet **exactement une** solution x),
c'est-à-dire : f est bijective $\iff (\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x))$.

Preuve

- On procède par équivalence directement.

- Combiner simplement les deux cas précédents.

Exemple 9 (Fonctions numériques)

1. $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ n'est pas bijective.

2. $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x \end{array} \right.$ est bijective.

3. $h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$ n'est pas bijective, en revanche $h \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{array} \right.$ l'est.

2.2. Réciproque

Une application associe à un élément de l'ensemble de départ un élément de l'ensemble d'arrivée. Une application réciproque opère l'opération inverse. Voyons déjà la définition.

Définition 12 | Application réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On appelle *réciproque de f sur F* toute application $g : F \rightarrow E$ telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_E, \quad f \circ g = \text{Id}_F.$$

Note | Il faut bien vérifier les deux égalités.

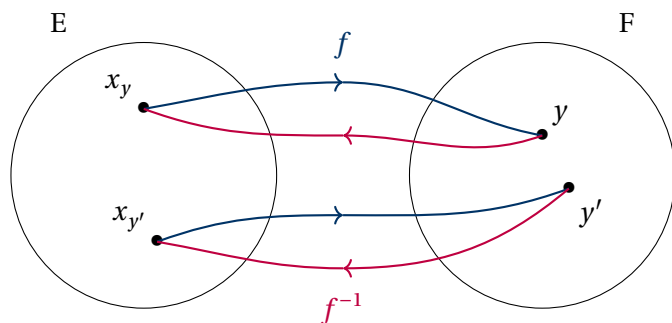
En termes simples, g défait le travail effectué par f — et vice versa. Si $x \in E$, alors $f(x) \in F$ puis en composant par g (une application réciproque de f) on revient sur l'élément de départ : $g(f(x)) = \text{Id}_E(x) = x$.

Exemple 10

- Les applications $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$ sont réciproques l'une de l'autre.

- $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{++} \\ x \mapsto \exp x \end{array} \right.$ et $g \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array} \right.$ sont réciproques l'une de l'autre.

Cette notion est étroitement liée à celle d'application bijective, puisque précisément la définition de application bijective permet de défaire le travail effectué par f . Plus précisément, soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors pour tout $y \in F$, il existe $x_y \in E$ tel que $f(x_y) = y$: on définit ainsi une application notée $f^{-1} : y \in F \rightarrow x_y \in E$ qui associe à tout $y \in F$ l'unique antécédent de y par f .

**Définition/Proposition 1 | Bijection réciproque**

Soient $E, F \subset \mathbb{R}$, $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors on appelle *bijection réciproque de f* l'application notée f^{-1} qui à $y \in F$ associe l'unique antécédent dans E de y par f . L'application ainsi définie est une application réciproque de f .

Preuve Il s'agit de montrer ici que $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$, $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

- Soit $x \in E$.



- Soit $y \in F$.



Exemple 11 Avec $f = \exp$, $f^{-1} = \ln$, cette propriété donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln y} = y.$$

Proposition 6 | Unicité d'une application réciproque associée à une bijection

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Alors :

f est bijective $\iff f$ possède une réciproque.

Dans ce cas, elle est unique et est f^{-1} .

La proposition précédente nous autorise donc à parler de **la** bijection réciproque.

Preuve

- \implies Supposons que f est bijective.



- \impliedby Supposons que f possède une réciproque g .



- Montrons l'unicité. Supposons par l'absurde qu'il existe g et h telles que

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad h \circ f = \text{Id}_E \quad f \circ h = \text{Id}_F.$$

Alors :

$$g = g \circ \text{Id}_F = g \circ f \circ h = \text{Id}_E \circ h = h.$$

D'où $g = h$. Comme f^{-1} est une réciproque (déjà vu!), l'unique réciproque est égale à f^{-1} lorsque f est bijective.

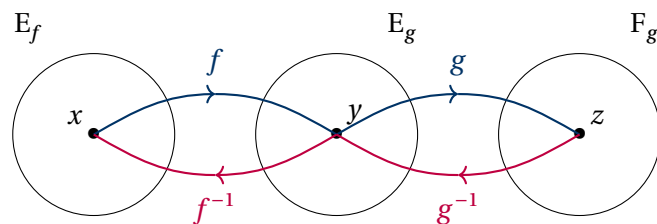
Proposition 7 | Réciproque d'une composée

Soient E_f, E_g, F_f, F_g quatre ensembles et $f : E_f \rightarrow F_f, g : E_g \rightarrow F_g$ tels que $f(E_f) \subset E_g$. Alors $g \circ f$ est une bijection de réciproque :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Attention

L'ordre est inversé dans la formule de réciproque d'une composée. Pour ne pas se tromper, on pourra garder en mémoire le diagramme ci-après.



Preuve Il suffit de le vérifier la définition d'application réciproque.

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ &= f^{-1} \circ \text{Id}_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= \text{Id}_{E_f}, \end{aligned}$$

et de-même :

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$= g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1}$$

$$= g \circ g^{-1}$$

$$= \text{Id}_{F_g}.$$

Ainsi $g \circ f$ est bien une bijection de E dans G de réciproque

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Proposition 8 | Réciproque d'une réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors f^{-1} est bijective, et : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Preuve



Méthode Montrer la bijectivité et calculer la réciproque

Pour déterminer la fonction réciproque d'une bijection $f : E \rightarrow F$, on écrit $y = f(x)$ pour $y \in F$ et on cherche à isoler x en fonction de y pour parvenir à l'expression $x = f^{-1}(y)$. S'il existe un unique x solution, cela prouve la bijectivité de f et en plus nous obtenons l'expression de f^{-1} .

Exemple 12 Montrer que $f \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+\ast} \\ x \mapsto e^{2x+1} \end{cases}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Preuve Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$.

$$y = f(x) \iff y = e^{2x+1} \iff \ln y = \ln(e^{2x+1})$$

$$\iff \ln y = 2x + 1 \iff -1 + \ln y = 2x$$

$$\iff \frac{-1 + \ln y}{2} = x.$$

On a prouvé que tout élément y de \mathbb{R}_+^* admet un et un seul antécédent par f :

$$x = \frac{-1 + \ln y}{2}. \text{ On en conclut que } f \text{ est bijective et que } f^{-1} \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{-1 + \ln y}{2}. \end{cases}$$

Exemple 13 Montrer que $f \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \mapsto \frac{x+1}{x+2} \end{cases}$ est bijective et déterminer sa réciproque.



3. APPLICATIONS AUX FONCTIONS NUMÉRIQUES

L'objectif de cette section est de donner un résultat permettant de montrer que des fonctions numériques sont des bijections de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dans les cas où nous ne sommes pas capables de trouver un antécédent. Le résultat nous permettra de construire de nouvelles fonctions usuelles.

3.1. Fonction bijective

Rappelons une définition déjà rencontrée précédemment.

Définition 13 | Bijection

Soit f une fonction numérique. Si $I \subset \mathcal{D}_f$, on dit que f réalise une bijection de I dans (ou sur) $J = f(I)$ si l'application :

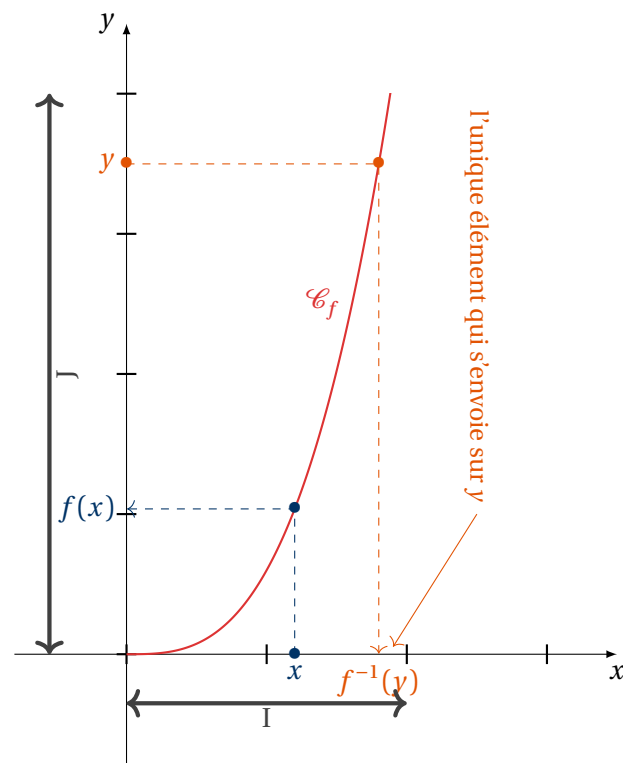
$$\varphi \begin{cases} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases} \text{ est bijective.}$$

Dans ce cas, on appelle alors *reciproque de f* de I dans (ou sur) J , l'application φ^{-1} .

Attention

Ainsi, pour une fonction, on ne dira pas simplement « f est bijective » mais « f réalise une bijection de I dans (ou sur) J » car il y a toujours ambiguïté sur l'ensemble de départ choisi.

Pour une application, on précisait toujours l'ensemble de départ et d'arrivée, donc les notions d'injectivité/surjectivité *etc.* étaient toujours comprises relativement à ces deux ensembles.



Exemple 14 Déterminer si les fonctions $f : I \longrightarrow J$ ci-après réalisent une bijection de I vers J et calculer f^{-1} le cas échéant. On pourra commencer par esquisser le graphe pour se convaincre du résultat.

- $f : x \longmapsto x^2$,
 - $I = \mathbb{R}, J = \mathbb{R}$



- $I = \mathbb{R}, J = \mathbb{R}^+$



- $I = \mathbb{R}^+, J = \mathbb{R}^+$



2. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}, I = [1, +\infty[, J = \mathbb{R}^+.$



3. \ln réalise une bijection de \mathbb{R}^{++} dans \mathbb{R} , \exp de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{++} . Elles sont réciproques l'une de l'autre.

GRAPHE D'UNE BIJECTION RÉCIPROQUE. Dans toute cette section, nous travaillons pour rappel avec des fonctions numériques, le graphe peut donc être visualisé sur un dessin. Les graphes de f et f^{-1} possèdent en plus une propriété de symétrie intéressante, qui permet de tracer facilement le graphe de f^{-1} à partir de celui de f . Cela peut se constater facilement : soit $f : I \rightarrow J$ une bijection de I dans J , alors

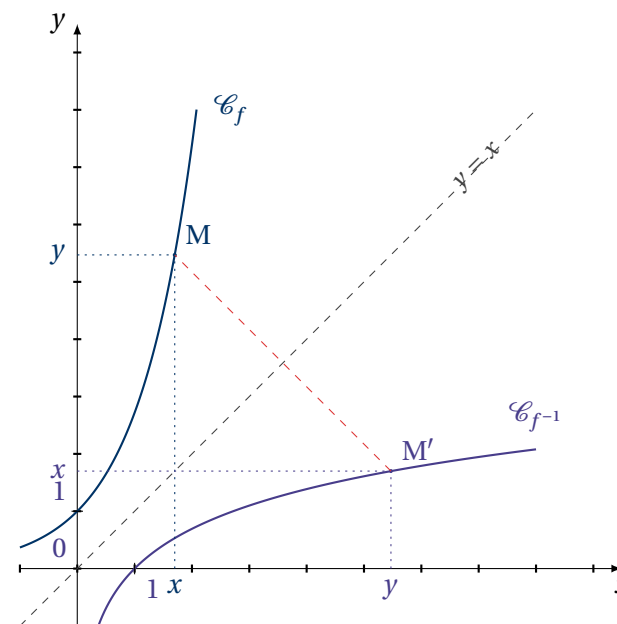
$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{C}_{f^{-1}} &\iff y = f^{-1}(x) \\ &\iff f(y) = x \\ &\iff (y, x) \in \mathcal{C}_f. \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{composant par } f \\ \text{définition de } \mathcal{C}_f \end{array} \right\}$

Autrement dit, chaque point de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est le symétrique par rapport à $y = x$ (échange des deux coordonnées) d'un point de \mathcal{C}_f . On obtient dès lors la proposition suivante.

Proposition 9 | Symétrie du graphe

Soient I, J deux sous-ensembles de \mathbb{R} , et f réalisant une bijection de I sur J . Alors le graphe de f^{-1} est obtenu à partir de celui de f à l'aide d'une symétrie d'axe $y = x$.



3.2. Théorème de la bijection

Rappelons que nous avons vu qu'une bijection entre deux ensembles I, J établit une correspondance parfaite entre les éléments de I et ceux de J . Il faut donc pour tout $y \in J$:

- l'existence d'un antécédent. Il faudrait donc une fonction « sans trou », c'est-à-dire une fonction continue.
- L'unicité d'un antécédent. Il ne faudrait donc pas que la fonction change de monotonie au risque de donner un deuxième antécédent.

Ces deux hypothèses naturelles sont celles du théorème de la bijection, que nous énonçons et admettons pour l'instant.

Théorème 1 | Théorème de la bijection

Soit f une fonction numérique continue sur $I \subset \mathcal{D}_f$, et strictement monotone sur I . Alors :

- $f(I)$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Plus précisément, l'intervalle $f(I)$ est donné par le tableau suivant :

$f(I)$ \ I	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
str. \nearrow	$[f(a), f(b)]$	$] \lim_a f, f(b)]$	$[f(a), \lim_b f [$	$] \lim_a f, \lim_b f [$
str. \searrow	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_a f [$	$] \lim_b f, f(a)]$	$] \lim_b f, \lim_a f [$

- La bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f .

Remarque 7 Il est faut bien comprendre la différence entre le théorème de la bijection et la méthode exposée précédemment pour montrer qu'une application est bijective (résolution de $y = f(x)$).

- Le théorème de la bijection permet de démontrer très simplement qu'une fonction réalise une bijection. Mais il ne donne aucune information, si ce n'est la continuité et la monotonie, sur la réciproque.
- La résolution de $y = f(x)$ en la variable x permet simultanément de montrer qu'une fonction réalise une bijection et de déterminer sa réciproque. Elle est en revanche souvent impossible à mettre en place, puisqu'on ne sait résoudre que peu d'équations de manière exacte.

Méthode Utilisation du théorème de la bijection

On souhaite justifier l'existence et l'unicité éventuelle d'une solution $x \in \mathbb{R}$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires, ce théorème sera revu dans un prochain chapitre.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur un intervalle I tel que $\alpha \in f(I)$, et tel que f vérifie les hypothèses du théorème de la bijection sur I .

Notez également que :

- l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $f(x) - x = 0$. Il s'agirait donc d'appliquer le théorème de la bijection à $f - \text{Id}$ et $\alpha = 0$.
- L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à $(f - g)(x) = 0$. Il s'agirait donc d'appliquer le théorème de la bijection à $f - g$ et $\alpha = 0$.

Exemple 15 (Utilisation du théorème de la bijection)

1. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ possède un unique point fixe sur \mathbb{R} , c'est-à-dire il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-x} = x$.



2. La fonction $x \mapsto x^3 - x + 1$ s'annule une unique fois sur \mathbb{R} , et que ce point d'annulation est dans $] -2, -1 [$.



3. Soit $t \geq 0$. La fonction polynôme $P_t : x \mapsto x^3 + tx - 1$ admet une unique racine réelle $u(t)$, c'est-à-dire : $\exists ! u(t) \in \mathbb{R}, P_t(u(t)) = 0$.



4. **[Existence d'une suite implicite]** Soit $n \geq 1$, et $f_n : x \in [1, \infty[\mapsto x^{n+1} - x^n$. L'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur l'intervalle $[1, \infty[$. On ne s'intéresse pas ici aux éventuelles solutions en dehors de $[1, \infty[$.



Exemple 16 (Fonction cube)

- En utilisant le théorème de la bijection, montrer que $x \mapsto x^3$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .



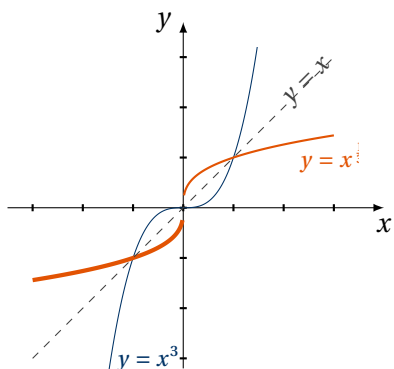
- Par définition de la racine cubique (voir [Chapitre \(ALG\) 2](#)), la réciproque de f est la racine cubique $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.
- Déterminer une expression de la bijection réciproque f^{-1} à l'aide de l'exponentielle et du logarithme. Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^3 = y$.

[Cas 1 : $y \geq 0$]



[Cas 2 : $y < 0$]





COURBE REPRÉSENTATIVE DE $x \mapsto x^3$ ET SA RÉCIPROQUE $x \mapsto x^{1/3}$ SUR \mathbb{R}

Résumé Définition de a^b

$a \backslash b$	$n \in \mathbb{N}$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	$\in \mathbb{R}$
> 0	$\frac{a \times \cdots \times a}{b(=n) \text{ facteurs}}$	$\frac{1}{\frac{a \times \cdots \times a}{b(=n) \text{ facteurs}}}$	$e^{b \ln a}$
$\in \mathbb{R}$			\star

Remarque 8 (Case \star) De façon générale, cette puissance n'est pas définie si a n'est pas forcément positif. On peut en revanche obtenir une définition si :

- $b = \frac{1}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, est l'inverse d'une puissance impaire. En effet, puisque $x \mapsto x^{2k+1}$ est bijective, on pose $a^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{a}$, c'est-à-dire l'unique x vérifiant $x^{2k+1} = a$.
- On peut donc ensuite étendre à $b = \frac{p}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, en posant : $a^b = \left(a^{\frac{1}{2k+1}}\right)^p$.

Méthode Utiliser le théorème de la bijection pour calculer des images d'intervalles

Pour déterminer des images d'intervalles, on peut utiliser le théorème de la bijection. En effet, sous les hypothèses du théorème, les images d'intervalles sont données par le tableau ci-dessous :

$f(I) \backslash I$	$[a, b]$	$]a, b]$	$[a, b[$	$]a, b[$
str. \nearrow	$[f(a), f(b)]$	$]\lim_a f, f(b)]$	$[f(a), \lim_b f[$	$]\lim_a f, \lim_b f[$
str. \searrow	$[f(b), f(a)]$	$[f(b), \lim_a f[$	$]\lim_b f, f(a)]$	$]\lim_b f, \lim_a f[$

Si la fonction change de monotonie, on utilisera le théorème de la bijection sur

plusieurs sous-intervalles, avec la propriété « $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ » vue précédemment (voir l'exemple ci-dessous concernant la fonction carré).

Exemple 17 On note $f : x \mapsto e^{-x}$. Déterminer $f(\mathbb{R})$ par deux méthodes.

- [Méthode 1 : théorème de la bijection]



- [Méthode 2 : définition]



Exemple 18 (Fonction carré sur \mathbb{R} – Cas d'un changement de monotonie)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction carrée. Déterminer $f([-1, 2])$.

On applique le théorème de la bijection sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 2]$. On a que :

- la fonction carrée est continue sur $[-1, 0]$ comme fonction usuelle.
- La fonction carrée est strictement décroissante sur $[-1, 0]$.
- $f(-1) = 1$ et $f(0) = 0$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f([-1, 0]) = [0, 1]$.

- La fonction carrée est continue sur $[0, 2]$ comme fonction usuelle.
- La fonction carrée est strictement décroissante sur $[0, 2]$.
- $f(2) = 4$ et $f(0) = 0$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que $f([0, 2]) = [0, 4]$.

Ainsi on a : $f([-1, 2]) = f([-1, 0]) \cup f([0, 2]) = [0, 4]$. Donc $f([-1, 2]) = [0, 4]$.

Le théorème suivant, très puissant, permet de montrer la dérivabilité d'une réciproque et même d'exprimer la dérivée de cette dernière, même sans connaître l'expression de cette dernière.

**Théorème 2 | Dérivée d'une réciproque**Soit une application $f : I \rightarrow J$ bijective.

- **[Local]** Soit $y \in J$.

$$\begin{cases} \text{(i)} & f' \text{ dérivable en } f^{-1}(y), \\ \text{(ii)} & f'(f^{-1}(y)) \neq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} \text{(i)} & f^{-1} \text{ est dérivable en } y, \\ \text{(ii)} & (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \end{cases}$$

- **[Global]**

$$\begin{cases} \text{(i)} & f' \text{ dérivable sur } I, \\ \text{(ii)} & \forall y \in J, f'(f^{-1}(y)) \neq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} \text{(i)} & f^{-1} \text{ est dérivable sur } J, \\ \text{(ii)} & \forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \end{cases}$$

En particulier, si f' ne s'annule pas sur I (c'est souvent cette condition suffisante qui est vérifiée dans la pratique!) alors f^{-1} est dérivable sur J tout entier.

Rappelons que par définition : $\forall x \in I, f^{-1} \circ f(x) = x$. Si f^{-1} est dérivable sur J , alors en dérivant on obtient :

$$(f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1.$$

Soit $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $y = f(x)$, on a alors :

$$(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1. \quad (\star)$$

Si en plus $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, on obtient la formule :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

En revanche, cette démonstration ne prouve en aucun cas la dérivabilité de f^{-1} , c'est ce que nous montrons à présent.

Preuve (Point clef — Dérivée d'une composée)

Fixons $y \in J$. La fonction f est dérivable en $f^{-1}(y) \in I$, donc

$$\lim_{x \rightarrow f^{-1}(y)} \frac{f(x) - f(f^{-1}(y))}{x - f^{-1}(y)} = f'(f^{-1}(y))$$

donc comme f' ne s'annule pas en $f^{-1}(y)$, on peut passer à l'inverse dans cette égalité :

$$\lim_{x \rightarrow f^{-1}(y)} \frac{x - f^{-1}(y)}{f(x) - f(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Il reste à faire le changement de variable « $x' = f(x)$ » dans la première limite, qui donne :

$$\lim_{x \rightarrow f^{-1}(y)} \frac{x - f^{-1}(y)}{f(x) - f(f^{-1}(y))} = \lim_{x' \rightarrow y} \frac{f^{-1}(x') - f^{-1}(y)}{x' - y}$$

par composition des limites puisque si $x \rightarrow f^{-1}(y)$, $x' = f(x) \rightarrow f(f^{-1}(y)) = y$ car f est continue (conséquence du théorème de la bijection). On a donc établi que :

$$\lim_{x' \rightarrow y} \frac{f^{-1}(x') - f^{-1}(y)}{x' - y} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

cela prouve la dérivabilité de f^{-1} en y , et la formule.

**Méthode Utiliser la formule de dérivation d'une réciproque**Soit $f : I \rightarrow J$ bijective.

- Justifier que f est bien dérivable sur I .
- Résoudre l'équation $f' \circ f^{-1}(y) = 0$ en $y \in J$, on note \mathcal{S} l'ensemble des solutions. Si f' ne s'annule clairement pas, on peut sauter cette étape et $\mathcal{S} = \emptyset$.
- D'après le théorème, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \mathcal{S}$ et la dérivée est donnée par la formule.

Exemple 19 Soit $f : x \mapsto e^x + 2x - 3$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J à préciser; on notera alors f^{-1} sa réciproque.



2. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J puis déterminer $(f^{-1})'(-2)$.

**Remarque 9**

- Comme le témoigne l'exemple précédent, il est souvent possible, grâce au **Théorème 2** de calculer $(f^{-1})'$ en certains points même si nous n'étions pas capable de calculer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.
- Parfois-même il est possible de calculer $f'(f^{-1}(y))$ pour tout $y \in J$ même si $f^{-1}(y)$ ne nous était pas accessible. Voir l'exemple qui suit.

Exemple 20 Soit $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J à préciser; on notera alors f sa réciproque.



2. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J puis déterminer $(f^{-1})'(y)$ pour tout $y \in J$.



3.3. Fonctions circulaires réciproques

L'objectif de cette dernière partie est d'essayer de restreindre certaines fonctions trigonométriques, afin d'obtenir des bijections. Commençons déjà par constater que

$$\cos \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longrightarrow \cos x, \end{array} \right. \quad \sin \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longrightarrow \sin x, \end{array} \right. \quad \tan \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}_{\tan} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \tan x, \end{array} \right.$$

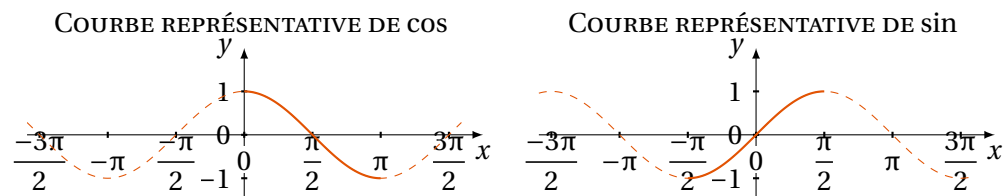
telles que définies dans le **Chapitre (AN) 1**, ne sont pas bijectives. En effet :

$$\cos(0) = 1 = \cos(2\pi), \quad \sin(0) = 0 = \sin(\pi), \quad \tan(0) = 0 = \tan \pi,$$

alors que : $0 \neq 1, 0 \neq \pi$. Elles ne sont donc pas injectives, donc *a fortiori* pas bijectives. En revanche, il est possible de restreindre l'ensemble de départ, afin de former

des applications bijectives. Il n'y a bien sûr pas un seul choix possible à chaque fois, mais nous prendrons le plus naturel.

FONCTIONS arccos ET arcsin. Commençons par observer les graphes.



Sur les parties qui ne sont pas en pointillées, la fonction réalisera une bijection. Passons maintenant à une rédaction plus formelle.

Définition/Proposition 1 | Existence de arccos, arcsin

- **[Arccosinus]** L'application $\cos \Big|_{[0, \pi]} \left| \begin{array}{l} [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longrightarrow \cos(x) \end{array} \right.$ est une bijection, sa bijection réciproque est notée arccos, et on a :
 - ◇ arccos = $\cos \Big|_{[0, \pi]}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, elle est appelée *fonction arccosinus*.
 - ◇ De plus, arccos est une fonction continue, et strictement décroissante.
- **[Arcsinus]** L'application $\sin \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \left| \begin{array}{l} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longrightarrow \sin(x) \end{array} \right.$ est une bijection, sa bijection réciproque est notée arcsin, et on a :
 - ◇ arcsin = $\sin \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, elle est appelée *fonction arcsinus*.
 - ◇ De plus, arcsin est une fonction continue, et strictement croissante.

Preuve Rappelons les tableaux de variations de de cos, sin sur les intervalles qui nous intéressent.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos t	1	0	-1

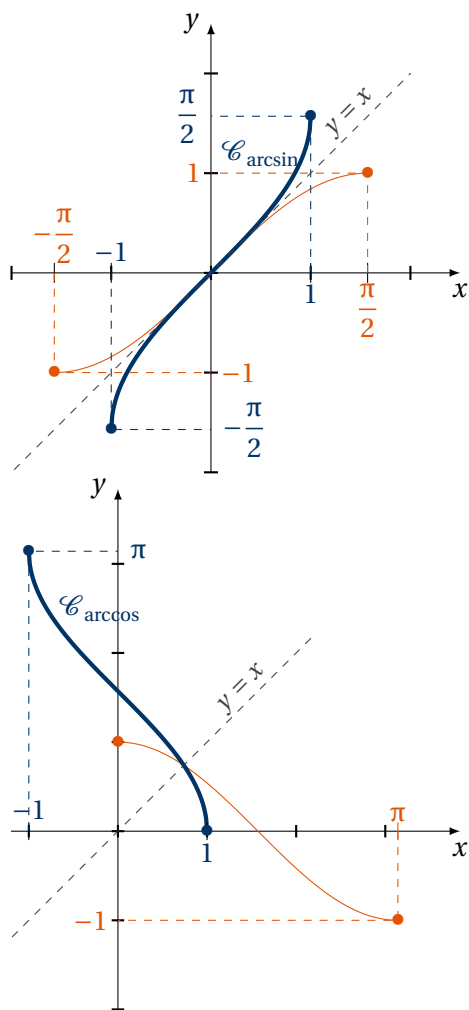
t	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
sin t	-1	0	1

- La fonction cos est continue et strictement décroissante sur le segment $[0, \pi]$, elle réalise donc une bijection du segment $[0, \pi]$ dans le segment $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$ d'après le théorème de la bijection. De plus, la fonction arccos est alors continue et a même monotonie que $\cos \Big|_{[0, \pi]}$, donc est décroissante.

- La fonction sin est continue et strictement croissante sur le segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, elle réalise donc une bijection du segment $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans le segment $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$ d'après le théorème de la bijection. De plus, la fonction arcsin est alors continue et a même monotonie que $\sin|_{[0,\pi]}$, donc est croissante.

Les courbes représentatives de arccos, arcsin ne sont pas exigibles, elles ont donc le statut de remarque.

Remarque 10 (Courbes représentatives)



Dans la pratique, nous serons plus intéressés par la résolution d'équations. Pour cela, la propriété suivante sera cruciale et découle simplement de ce que arccos, arcsin

sont respectivement les réciproques de $\cos|_{[0,\pi]}$, $\sin|_{[0,\pi]}$.

Proposition 2 | Relations vérifiées par arccos, arcsin

- [Arccosinus]**

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x.$$

- [Arcsinus]**

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x.$$

En d'autres termes,

- pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x)$ est l'angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut x .
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x)$ est l'angle de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x .

Remarque 11 Les expressions $\arccos(\cos(x))$, $\arcsin(\sin(x))$ sont définies sur \mathbb{R} tout entier, même ne valent pas x en dehors des intervalles de la proposition précédente.

Exemple 21 Préciser les valeurs ci-après :

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

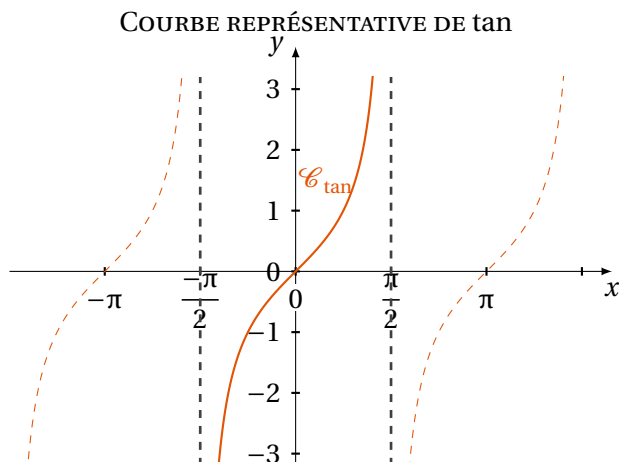


Exemple 22 Soit $x \in [-1, 1]$, calculer $\sin(\arccos(x))$.



L'étude de ces deux fonctions pourrait être bien plus poussée, mais conformément au programme nous l'arrêtons ici.

FONCTION arctan. Commençons à nouveau par le graphe.



Sur la partie qui n'est pas en pointillées, la fonction réalisera une bijection. Passons maintenant à une rédaction plus formelle.

Définition/Proposition 2 | Existence de arctan

L'application $\tan \left|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right| \begin{matrix}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \tan(x) \end{matrix}$ est une bijection, sa bijection

réciproque est notée arctan, et on a :

- arctan = $\tan \left|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right|^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle est appelée *fonction arctangente*.
- De plus, arctan est une fonction continue, et strictement croissante.

Preuve

La fonction tan est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle réalise donc une bijection de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans l'intervalle $\tan \left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = \mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection. De plus, la fonction arctan est alors continue et a même monotonie que $\tan \left|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \right|$, donc est croissante.

En conclusion, on a :

t	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
tan t	$-\infty$	0	∞

t	$-\infty$	0	$+\infty$
arctan t	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

Proposition 3 | Propriétés d'arctan

• [Composition]

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, arctan(x) est l'angle de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ (point important, car sinon il y a une infinité de choix) dont la tangente vaut x .

• [Principales propriétés] arctan est impaire, continue, dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

• [Limites]

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$\diamond \text{[Taux]} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1.$$

Preuve

- Évident par définition de l'une bijection réciproque.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, fixons $y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ unique tel que $\tan(y) = x$. Par imparité de tan, on a $-\tan(y) = \tan(-y)$. Ainsi :

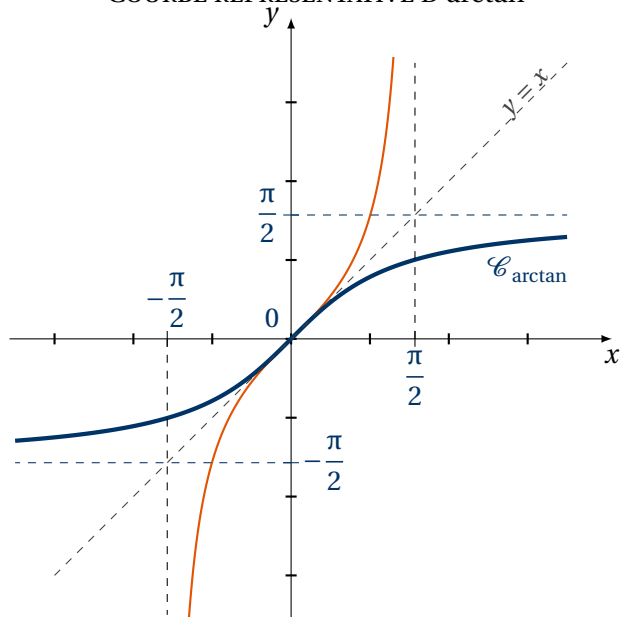
$$\arctan(-x) = \arctan(-\tan(y)) = \arctan(\tan(-y)) = -y = -\arctan(x).$$

La fonction arctan est donc bien impaire. Nous avons par ailleurs déjà constaté la continuité (conséquence du théorème de la bijection).

Vérifions la dérivabilité ainsi que la formule. La fonction tan est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.



COURBE REPRÉSENTATIVE D'arctan



Exemple 23 Soit $f : x \mapsto \arctan(\ln(x))$.

- Déterminer le domaine de définition \mathcal{D}_f de f et calculer ses limites aux bords de \mathcal{D}_f .



- Vérifier que f est dérivable sur \mathcal{D}_f et déterminer f' .



- Justifier que f réalise une bijection de \mathcal{D}_f sur un intervalle I et dresser le tableau de variation complet de f^{-1} sur I .



- Montrer que f^{-1} est dérivable sur I et calculer $(f^{-1})'(0)$.



Exemple 24 Établir la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



4. TABLEAU RÉCAPITULATIF DES DÉRIVÉS : LE RETOUR

Pour u une fonction réelle à valeurs dans l'ensemble de dérivabilité de la fonction par laquelle on compose, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (une constante) :

$(u^n)' = nu' u^{n-1}$	$(e^u)' = u' e^u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\cos u)' = -u' \sin(u)$	$(\sin u)' = u' \cos u$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$	
$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$			

Dans les tableaux ci-dessous, x est une **variable** réelle, c une **constante** réelle, α une **constante** réelle et $n \in \mathbb{N}^*$.

Fonction f	\mathcal{D}_f	Fonction f'	$\mathcal{D}_{f'} \subset \mathcal{D}_f$
$f(x) = c$	\mathbb{R}	0	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	nx^{n-1}	\mathbb{R}
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*	$-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
\sqrt{x}	\mathbb{R}_+	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\boxed{\mathbb{R}_+^*}$
$ x $	\mathbb{R}	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0, \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$\boxed{\mathbb{R}^*}$
$\ln(x)$	\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*
e^x	\mathbb{R}	e^x	\mathbb{R}
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$-\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$\cos(x)$	\mathbb{R}
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$	\mathbb{R}_+^*
$\arctan(x)$	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}


La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.


Savoir-faire


- Concernant les applications :
 - savoir qu'une application est déterminée par trois choses
 - connaître les différentes opérations sur les applications
 - savoir démontrer qu'une application est injective, n'est pas injective
 - savoir démontrer qu'une application est surjective, n'est pas surjective
 - savoir démontrer qu'une application est bijective, n'est pas bijective
 - savoir déterminer l'application réciproque d'une application bijective
- Concernant les bijections numériques :
 - connaître le théorème de la bijection
 - savoir étudier la dérivabilité d'une bijection réciproque
 - connaître la notation arccos, arcsin : définition
 - connaître la fonction arctan : définition, propriété, dérivée, graphe

Parcours du TD

Plusieurs « parcours » sont proposés pour ce TD.

 **Exercices d'entraînement** : ils sont faits pour travailler les notions du cours et sont généralement des applications directes (mais peuvent être techniques). Inutile de travailler forcément tous les exercices de ce parcours.


 **Exercices classiques** : les méthodes à maîtriser absolument. Il est conseillé de tous les aborder.


 **Pour aller plus loin** : exercices plus difficiles, ou plus techniques. À ne regarder que si les autres parcours ont été correctement réalisés.

5.1. Images directes

Exercice 1 |  [Solution] On considère l'application $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 - 3x. \end{array} \right.$

- Étudier les variations de f .
- L'application f est-elle injective?
- Déterminer $f([1, 2])$, $f(\mathbb{R})$, $f([-1, \infty[)$.

Exercice 2 |  [Solution] Déterminer $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\tan\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right)$.

Exercice 3 |  [Solution] Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes. Lorsqu'elles sont bijectives, déterminer les applications réciproques. Lorsque cela vous semble pertinent, on pourra commencer par esquisser le graphe au brouillon.

$$1. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$$

$$3. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x + 1 \end{array} \right.$$

$$5. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$$

$$7. f \left| \begin{array}{l} [-1, 1] \longrightarrow [0, 1] \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$$

$$9. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^4 \end{array} \right.$$

$$11. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^5 \end{array} \right.$$

$$13. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]1, +\infty[\\ x \longmapsto e^{-x} + 1 \end{array} \right.$$

$$15. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]-4, +\infty[\\ x \longmapsto 2^x - 4 \end{array} \right.$$

$$17. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto 2n + 1. \end{array} \right.$$

$$2. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{array} \right.$$

$$4. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + 1 \end{array} \right.$$

$$6. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array} \right.$$


$$8. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array} \right.$$


$$10. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^4 \end{array} \right.$$


$$12. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n, n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

$$14. f \left| \begin{array}{l}]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{array} \right.$$

$$16. f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ x \longmapsto \cos(x) + \sin(x) \end{array} \right.$$

Exercice 4 |  [Solution] Soit $f : [1, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$ pour tout $x \in [1, \infty[$. L'application f est-elle une bijection?

Exercice 5 |  [Solution] Soit f une application définie par $f(x) = \frac{x-1}{1-2x}$. Montrer que f est bijective de \mathcal{D}_f sur un sous-ensemble de \mathbb{R} à déterminer et déterminer f^{-1} .

Exercice 6 |  [Solution] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- L'application f est-elle injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ? Surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?
- Montrer que la restriction $g = f|_{[-1, 1]}$ réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle que l'on précisera.

Exercice 7 | ♥ **Solution** Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On pose,

$$\forall x \in]a, b[, \quad f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}.$$

- Démontrer que f réalise une bijection de $]a, b[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de l'application f^{-1} ?
- Déterminer f^{-1} dans le cas $a = -1$ et $b = 1$. Représenter graphiquement f et f^{-1} .

Exercice 8 | ♥ **Solution** Étudier la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 1$, puis montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha \in]-2, -1[$.

Exercice 9 | ♥ **Solution** Soit l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$. Montrer qu'elle a trois solutions dans \mathbb{R} .

Exercice 10 | ♥ **Fonctions hyperboliques** **Solution**

- Faire l'étude complète, incluant leur graphe des fonctions ch et sh définies ci-dessous :

$$\text{ch} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- Montrer que sh est bijective, et déterminer une expression de $\text{sh}^{-1} = \text{argsh}$ faisant intervenir des fonctions usuelles.
- Montrer que ch réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur un intervalle à préciser, et déterminer une expression de la bijection réciproque associée notée argch faisant intervenir des fonctions usuelles.

Exercice 11 | ♥ **Solution** On considère : $f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x^2 + 1) \end{array} \right.$

- Montrer que f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- Montrer que f n'est pas injective.
- Montrer que f n'est pas surjective.
- Montrer que $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \ln(x^2 + 1) \end{array} \right.$ est bijective et donner sa réciproque.

Exercice 12 | ♦ **Solution** Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{x^2}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f est une bijection de \mathcal{D}_f sur $f(\mathcal{D}_f)$, ensembles à préciser. Quelles sont les propriétés de f^{-1} ? Expliciter f^{-1} .

Exercice 13 | ♦ **Solution** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \max\left(\frac{x+5}{10}, x-3\right).$$

- Montrer en utilisant la définition que f est injective.
- Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , détermine sa réciproque.

5.3. Autour d'arctan, dérivation de f^{-1}

Exercice 14 | ♦ **Solution** Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes, et déterminer leur dérivée sur ce domaine.

- $f : x \mapsto \arctan(x^2)$
- $g : x \mapsto \ln(\arctan(-x))$
- $h : x \mapsto \arctan(x^3 - 2x^2 + 1)$

Exercice 15 | ♦ **Solution** Déterminer les limites éventuelles des fonctions suivantes aux bords de leur domaine de définition :

- $f : x \mapsto e^{-x} \arctan(e^x)$,
- $g : x \mapsto \frac{xe^{\arctan x} - x}{\arctan x}$.

Exercice 16 | ♥ **Solution** Soit $f : x \mapsto x + e^x$.

- Montrer que f définit une bijection de \mathbb{R} sur un ensemble J à déterminer.
- Justifier que f^{-1} est dérivable sur J .
- Déterminer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 17 | ♥ **Solution** Soit $f : x \mapsto \cos(\arctan(2x))$.

- Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition \mathcal{D} et expliciter sa dérivée.
- Étudier la parité de f .
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = c$ en fonction de $c \in \mathbb{R}$, résoudre $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 18 | ♥ **Solution** Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\pi}{4} + \arctan(x)\right)$.

- Montrer que f réalise une bijection de son domaine de définition sur un ensemble I à préciser.
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur I et déterminer $f^{-1}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. En déduire $(f^{-1})'\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Conformément au programme de BCPST, très peu d'exercices de ce genre seront faits en classe.

Exercice 19 | **Solution** Montrer que l'application $f : z \mapsto \frac{z+i}{z-i}$ est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur un sous-ensemble à déterminer. Donner la bijection réciproque.

Exercice 20 | **Solution** Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Solution (exercice 1) Énoncé

1. La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynômiale.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3(x^2 - 1).$$

D'où le tableau de variations ci-après.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	↗ 2 ↘		-2	↗ $+\infty$ ↘	

Les limites en l'infini s'obtiennent en utilisant le théorème du monôme de plus haut degré.

2. La fonction f n'est pas injective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Par exemple, $f(-1) = 2 = f(2)$ et $-1 \neq 2$.

3. La recherche d'images directes se fait le plus souvent en utilisant le théorème de la bijection, comme dit dans le cours.

3.1) Déterminons $f([1, 2])$.

- f est continue sur $[1, 2]$.
- f est strictement croissante sur $[1, 2]$.
- $f(1) = -2$ et $f(2) = 2$.

Ainsi, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1, 2]$ sur $[-2, 2]$ et donc

$$f([1, 2]) = [-2, 2].$$

3.2) On calcule $f(\mathbb{R})$. Il faut ici appliquer le théorème de la bijection sur chaque intervalle où f est strictement monotone, à savoir sur les intervalles $]-\infty, -1]$, $]-1, 1]$ et $[1, +\infty[$. On montre ainsi que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et en particulier cela nous donne que la fonction f est surjective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

3.3) On calcule $f(]-1, +\infty[)$. Là encore, en appliquant le théorème de la bijection sur les deux intervalles suivants $]-1, 1]$ et $[1, +\infty[$ où la fonction f est strictement monotone, on obtient $f(]-1, +\infty[) = [-2, +\infty[$.

Solution (exercice 2) Énoncé

• On applique le théorème de la bijection sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$:

◊ La fonction sinus est continue sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ comme fonction usuelle.

◊ La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

◊ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right].$$

• On applique le théorème de la bijection sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$:

◊ La fonction tangente est continue sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ comme fonction usuelle.

◊ La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

◊ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que

$$\tan\left(\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1, +\infty[.$$

• On applique le théorème de la bijection sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$:

◊ La fonction cosinus est continue sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$ comme fonction usuelle.

◊ La fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

◊ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, on a en particulier que

$$\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Solution (exercice 3) Énoncé

1. On a $f(x) = -1 \iff \sqrt{x} = -1$ qui n'a pas de solution, donc f n'est pas surjective, et donc f n'est pas bijective. En revanche, elle est injective puisque si $x, x' \in \mathbb{R}^+$ et que $\sqrt{x} = \sqrt{x'}$, alors en élevant au carré on récupère bien $x = x'$.

2. On peut ici conjecturer que f est bijective. Comme on doit calculer la bijection réciproque, on résout une équation. Soit $y \in \mathbb{R}^+$, alors

$$y = f(x) \iff y = \sqrt{x} \iff x = y^2$$

car $y \geq 0$. On a donc existence et unicité de x solution dans \mathbb{R}^+ . Donc f est

bijective et $f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$.

3. Soient $x, x' \in \mathbb{R}^+$ tels que $x + 1 = x' + 1$, alors $x = x'$ donc f est injective. On a $f(x) = 0 \iff x = -1$. Or $-1 < 0$, donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution de \mathbb{R}^+ , donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

4. Soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \iff x + 1 = y \iff x = y - 1,$$

car on a $y \geq 0$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = y - 1$ dans \mathbb{R} . Ainsi f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et on a

$$f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto y - 1 \end{array} \right.$$

5. On a $f(x) = 1 \iff |x| = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$, donc 1 admet deux antécédents par f et f n'est pas injective. On a $f(x) = -1 \iff |x| = -1$ qui n'a pas de solution, donc -1 n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

6. La fonction f est injective : soient $x, x' \in \mathbb{R}^+$ tels que $|x| = |x'|$, alors $x = x'$ puisque $x, x' \in \mathbb{R}^+$. Mais comme précédemment, -1 n'a pas d'antécédent, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

7. Comme précédemment, 1 a deux antécédents par f donc f n'est pas injective ($|1| = |-1|$). Donc f n'est pas bijective. Soit $y \in [0, 1]$: on a $f(x) = y \iff |x| = y \iff x = y$ ou $x = -y$ avec $y \in [-1, 1]$ et $-y \in [-1, 1]$, donc y admet deux antécédents dans $[-1, 1]$, et f est surjective.

8. Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \iff x^3 = y \iff x = \sqrt[3]{y}.$$

$$\text{On a donc } f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt[3]{y} \end{array} \right.$$

9. On a $f(x) = 1 \iff x^4 = 1 \iff x = -1$ ou $x = 1$, donc f n'est pas injective. On a $f(x) = -1 \iff x^4 = -1$ qui n'a pas de solution, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

10. Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}^+$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$f(x) = y \iff x^4 = y \iff x = \sqrt[4]{y} \text{ car } x \geq 0.$$

$$\text{On a donc } f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ y \mapsto \sqrt[4]{y} \end{array} \right.$$

11. Le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective. On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour

$x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \iff x^5 = y \iff x = \sqrt[5]{y}.$$

$$\text{On a donc } f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt[5]{y} \end{array} \right.$$

12. On distingue les cas n pair et n impair et on applique les mêmes méthodes que dans les questions précédentes.

- Si n pair : on a $x^n = 1 \iff x = -1$ ou $x = 1$, donc f n'est pas injective. De plus $x^n = -1$ est impossible donc f n'est pas surjective.

En revanche, on peut montrer que f est bijective de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ et $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

- Si n impair : le théorème de la bijection permet de montrer que f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On cherche alors la bijection réciproque : soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \iff x^5 = y \iff x = \sqrt[5]{y}.$$

$$\text{On a donc } f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt[5]{y} \end{array} \right.$$

13. On peut commencer par faire un graphe ou l'étude des variations pour se faire une idée du résultat à démontrer : on constate que f semble être bijective. Soit $y \in]1, +\infty[$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \iff e^{-x} + 1 = y \iff x = -\ln(y - 1) \text{ car } y > 1.$$

L'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = -\ln(y - 1)$ dans \mathbb{R} . Ainsi

$$f \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]1, +\infty[\text{ et on a } f^{-1} \left| \begin{array}{l}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto -\ln(y - 1) \end{array} \right.$$

14. Soit $y \in \mathbb{R}$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in]-1, +\infty[$. On a :

$$f(x) = y \iff \ln(1 + x) = y \iff x = e^y - 1.$$

L'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = e^y - 1$, qui est bien dans $] -1, +\infty[$ car $e^y > 0$. Ainsi f est bijective de $] -1, +\infty[$ dans \mathbb{R} , et on a

$$f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow]-1, +\infty[\\ y \mapsto e^y - 1 \end{array} \right.$$

15. Soit $y \in]-4, +\infty[$, on résout $f(x) = y$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = y \iff 2^x - 4 = y \iff x = \frac{\ln(y + 4)}{\ln 2} \text{ car } y > -4.$$

L'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x = \frac{\ln(y + 4)}{\ln 2}$ dans \mathbb{R} . Ainsi f

$$\text{est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]-4, +\infty[\text{ et on a } f^{-1} \left| \begin{array}{l}]-4, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{\ln(y + 4)}{\ln 2} \end{array} \right.$$

16. La fonction f n'est pas injective ($f(x) = f(x + 2\pi)$ pour tout x donc $f(0) = f(2\pi)$) alors que $0 \neq 2\pi$), mais f est surjective (transformer $\cos x + \sin x =$

$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ou faire une étude de fonction). Donc f n'est pas bijective.

17. Soient $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $f(n_1) = f(n_2)$. On a alors $2n_1 + 1 = 2n_2 + 1 \iff n_1 = n_2$, donc f est injective. On a $f(n) = 2 \iff 2n + 1 = 2 \iff n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, donc f n'est pas surjective. Donc f n'est pas bijective.

Solution (exercice 4) Énoncé On utilise le théorème de la bijection. La fonction f est dérivable sur $[1, \infty[$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \geq 1$, on a : $f'(x) = 2x$. Comme $x \geq 1$, on obtient que sur cet intervalle : $f'(x) \geq 0$. On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	1	$+\infty$
f	0	$+\infty$

La limite en $+\infty$ s'obtient par propriété sur les sommes de limite. Ainsi, on a :

- La fonction f est continue sur $[1, \infty[$ comme fonction polynomiale.
- La fonction f est strictement croissante sur $[1, \infty[$.
- $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection,

la fonction f réalise une bijection de $[1, \infty[$ sur $[0, \infty[$.

Solution (exercice 5) Énoncé La méthode du théorème de la bijection nous donne la bijectivité de f sur les bons ensembles mais pour obtenir l'expression de f^{-1} , il faudra de toute façon résoudre $f(x) = y$.

1. Traçons d'abord le tableau de variation afin de trouver l'image de la fonction.

La fonction f est bien définie si $1 - 2x \neq 0 \iff x \neq \frac{1}{2}$. Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, f'(x) = -\frac{1}{(1-2x)^2}.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$

De plus :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ d'après le théorème sur les monômes de plus haut degré.
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$ par propriétés sur les sommes et quotient de limites.

On applique donc le théorème de la bijection à f sur l'intervalle $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$ puis sur l'intervalle $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

- f est continue et strictement décroissante sur $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$ sur $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[$.
- f est continue et strictement décroissante sur $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$.

Finalement, f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2. Déterminer à présent f^{-1} . Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. On résout $y = f(x)$ dans $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$y = \frac{x-1}{1-2x} \iff x(2y+1) = y+1 \iff x = \frac{y+1}{2y+1} \quad \text{car } y \neq -\frac{1}{2}.$$

En conclusion, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et la

bijection réciproque de f est :

f^{-1}	$\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$	\rightarrow	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$
	y	\rightarrow	$\frac{y+1}{2y+1}$

Solution (exercice 6) Énoncé

1. La fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. On en déduit ainsi les variations de f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
f	0			1		0

Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent par le théorème du monôme de plus haut degré. Cela nous indique que la fonction f ne va pas être injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} car par exemple, tout nombre entre 0 et 1 strictement va avoir 2 antécédents par f : un antécédent situé entre 0 et 1 et un autre entre 1 et l'infini. Pour montrer rigoureusement que f n'est pas injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , il faut trouver un contre-exemple. On résout par exemple $f(x) = \frac{1}{2}$ et on montre que $\frac{1}{2}$ a deux antécédents par f . En effet, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \iff x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 12$ et on trouve bien deux solutions distinctes $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Ainsi il existe donc $x_1 \neq x_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$. Donc f n'est pas injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Vérifions par exemple que 2 n'a pas d'antécédent par f dans \mathbb{R} (les variations de f nous indiquent quels sont les nombres qui ne vont pas avoir d'antécédent par f). On résout pour cela $f(x) = 2$ et on vérifie que cette équation n'a pas de solution réelle.

$$f(x) = 2 \iff x^2 - x + 1 = 0.$$

Or le discriminant d'une telle équation est strictement négatif ($\Delta = -3$), donc il n'existe pas de solution dans \mathbb{R} . Ainsi, on vient de vérifier que 2 n'a pas d'antécédent par f dans \mathbb{R} et donc que f non surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

2. Pour une telle question, il y a deux méthodes possibles : soit on résout une certaine équation en vérifiant qu'il y a une unique solution pour $x \in [-1, 1]$, soit on utilise le théorème de la bijection après avoir étudié les variations de g . Ici on ne nous demande pas l'expression de la réciproque, la méthode la plus simple est donc le théorème de la bijection. La fonction g est dérivable

comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et

$$\forall x \in [-1, 1], \quad g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, la dérivée est toujours positive, on obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	-1	1
g	-1	1

On applique alors le théorème de la bijection à g .

- g est continue sur $[-1, 1]$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
- g est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- $g(-1) = -1$ et $g(1) = 1$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection,

g réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$.

Solution (exercice 7) Énoncé

1. La fonction f est bien définie sur $]a, b[$ et elle est dérivable sur $]a, b[$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in]a, b[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} + \frac{-1}{(x-b)^2} = - \left[\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} \right].$$

Ainsi $f' < 0$ comme somme de deux termes strictement négatifs. On obtient les variations suivantes sur $]a, b[$

x	a	b
f	$+\infty$	$-\infty$

Les limites en a et b sont obtenues par propriétés sur les quotients et somme de limites.

La fonction f est continue sur $]a, b[$ comme composée et somme de fonctions continues. La fonction f est strictement décroissante sur $]a, b[$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty.$$

Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $]a, b[$ sur \mathbb{R} . On a donc l'existence de $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]a, b[$.

Que peut-on dire de l'application f^{-1} ?

- La fonction f^{-1} est continue sur \mathbb{R} comme réciproque d'une fonction continue.
 - La fonction f^{-1} est strictement décroissante sur \mathbb{R} comme réciproque d'une fonction strictement décroissante.
2. On a donc $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$. On sait que f est bijective de $] -1, 1[$ dans \mathbb{R} .

Pour trouver f^{-1} , on considère $y \in \mathbb{R}$, et on résout dans $] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \\ &\iff \frac{2x}{x^2-1} - y = 0 \\ &\iff \frac{-yx^2 + 2x + y}{x^2-1} = 0 \iff -yx^2 + 2x + y = 0. \end{aligned}$$

Vérifions donc que pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé, cette équation a une unique solution $x \in] -1, 1[$.

- Si $y = 0$: l'équation à résoudre devient : $2x = 0 \iff x = 0$. Ainsi il existe bien une unique solution dans $] -1, 1[$.
- Si $y \neq 0$: on doit alors résoudre une vraie équation du second ordre et on obtient que le discriminant vaut : $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(1 + y^2)$. Ainsi $\Delta > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif.

Il existe donc deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+y^2}}{y}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y}$. Il reste alors à vérifier que seule l'une des deux est entre -1 et 1 strictement.

$$\diamond \text{ On résout : } x_1 < 1 \iff \frac{1 - \sqrt{1+y^2}}{y} < 1 \iff \frac{1 - \sqrt{1+y^2} - y}{y} < 0.$$

étude du signe de $1 - y - \sqrt{1+y^2}$: $1 - y - \sqrt{1+y^2} > 0 \iff 1 - y > \sqrt{1+y^2}$.

On fait alors deux cas :

- Si $1 - y < 0 \iff y > 1$: pas de solution car une racine carrée est toujours positive ou nulle, elle ne peut donc pas être strictement inférieure à un nombre strictement négatif. Ainsi si $y > 1$, on a : $1 - y - \sqrt{1+y^2} \leq 0$.
- Si $1 - y \geq 0 \iff y \leq 1$: on peut alors passer au carré des deux côtés car la fonction carré est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et que les

termes sont alors positifs. On obtient que :

$$1 - y > \sqrt{1+y^2} \iff 1 + y^2 - 2y > 1 + y^2 \iff -2y > 0 \iff y < 0.$$

Ainsi sur $] -\infty, 0[$, on a : $1 - y - \sqrt{1+y^2} > 0$ et sur $[0, 1]$, on a : $1 - y - \sqrt{1+y^2} \leq 0$.

On peut donc faire un tableau de signe et on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - \sqrt{1+y^2} - y$	$+$	0	$-$
y	$-$	0	$+$
$x_1 - 1$	$-$		$-$

Ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a : $x_1 < 1$.

- \diamond On peut montrer de la même façon que pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a : $x_1 > -1$.
- \diamond On peut montrer de la même façon que pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, on a : $x_2 \notin] -1, 1[$

Ainsi dans le cas où $y \in \mathbb{R}^*$, il existe bien une unique solution dans $] -1, 1[$

qui est donnée par $x = x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+y^2}}{y}$.

On obtient donc l'expression de f^{-1} suivant :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1+y^2}}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Solution (exercice 8) Énoncé Commençons par étudier la fonction f . La fonction f est définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 1$. On déduit alors :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$		$1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$		$1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$		$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ ont été obtenues par le théorème du monôme de plus haut

degré. On s'intéresse désormais à la résolution de l'équation.

- La fonction f est continue sur $] -2, -1[$ comme fonction polynomiale.
- La fonction f est strictement croissante sur $] -2, -1[$.
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -5 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 > 0$. Donc $0 \in f(]-2, -1[)$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection,

l'équation $f(x) = 0$ admet sur $] -2, -1[$ une unique solution réelle notée α .

Vérifions que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas d'autre solution sur \mathbb{R} . En appliquant de la même façon le théorème de la bijection sur chacun des intervalles où la fonction est strictement monotone, on montre que : $f(x) < 0$ sur $] -\infty, -2]$ et $f(x) > 0$ sur $[-1, +\infty[$ et ainsi α est bien l'unique solution réelle à l'équation $f(x) = 0$.

Solution (exercice 9) Énoncé On ne demande pas ici d'expliciter les trois racines réelles, mais juste de montrer qu'il en existe trois. Ainsi il faut résoudre $f(x) = 0$ pour $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ et cela fait donc penser au théorème de la bijection (et non le théorème des valeurs intermédiaires car on va vouloir aussi l'unicité sur chaque sous-intervalle).

- La fonction f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynomiale.
- Comme elle est dérivable sur \mathbb{R} , on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.
- Limites aux bornes : par le théorème des monômes de plus haut degré, on obtient que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

- Il s'agit alors d'appliquer le théorème de la bijection sur les intervalles $] -\infty, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, +\infty[$. On rédige uniquement le premier cas, la fonction f est continue sur $] -\infty, -1]$, strictement croissante donc réalise une bijection de $] -\infty, -1]$ vers $f(]-\infty, -1]) =]-\infty, 3]$. Or, $0 \in]-\infty, 3]$, d'où l'existence et l'unicité d'une solution sur $] -\infty, -1]$. On fait de même sur les deux autres intervalles.

Solution (exercice 10) Énoncé

- Elles sont définies sur \mathbb{R} en tant que somme de telles fonctions. De plus, elles sont dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh}' x = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

d'où : $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, on obtient de même $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$. Mais $\operatorname{ch} \geq 0$ puisque l'exponentielle est positive. Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh}(x) \geq 0 \iff e^x \geq e^{-x} \iff e^{2x} \geq 1 \iff x \geq 0.$$

Donc sh est positive sur \mathbb{R}^+ , négative sur \mathbb{R}^- . On peut aussi préciser leur parité, le domaine de définition \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0 et :

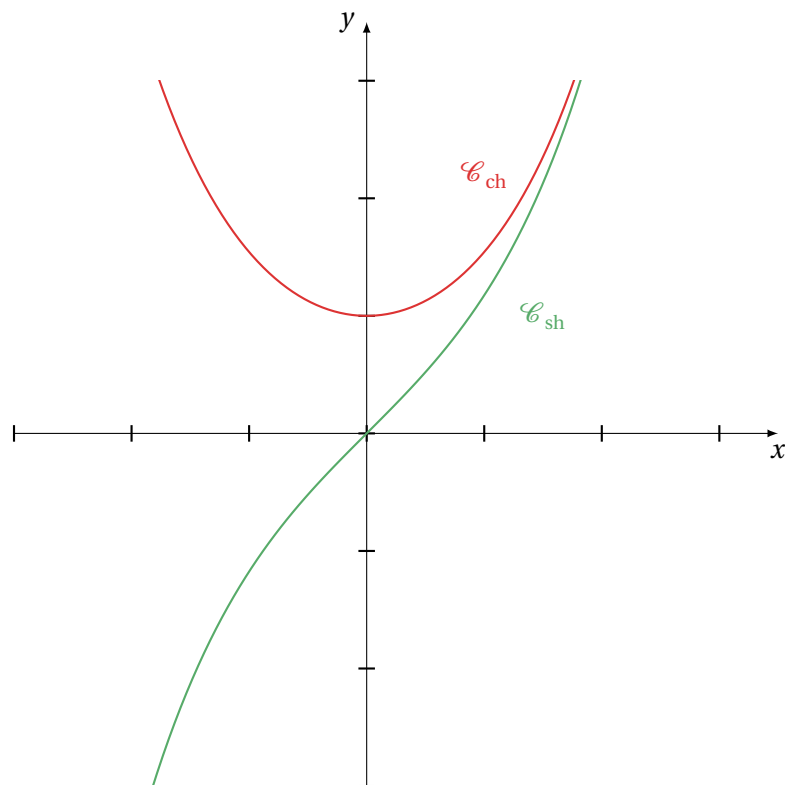
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

de même $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$ donc ch est paire et sh est impaire. On déduit de tout ce qui précède les variations suivantes en utilisant les dérivées calculées avant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$	$-$	0	$+$
$\operatorname{ch}(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$	$+$	
$\operatorname{sh}(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Les limites proviennent de règles usuelles d'opérations sur les limites.



2. Puisque sh est continue, strictement croissante de \mathbb{R} dans $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Déterminons son inverse.

Soit $y \in \mathbb{R}$, pour déterminer sh^{-1} , on résout $y = \text{sh}(x)$ en $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = \text{sh}(x) &\iff 2y = e^x - e^{-x} \\ &\iff 2ye^x = (e^x)^2 - 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{multiplication par } e^x \\ &\iff (e^x)^2 - 2y(e^x) - 1 = 0. \end{aligned}$$

C'est un trinôme en e^x de discriminant $4y^2 + 4 = 4(y^2 + 1) > 0$. D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} y = \text{sh}(x) &\iff e^x \in \left\{ \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2}, \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} \right\} \\ &\iff e^x \in \left\{ y - \sqrt{y^2 + 1}, y + \sqrt{y^2 + 1} \right\} \\ &\iff e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{car } y - \sqrt{y^2 + 1} \leq 0 \text{ (*) et une expo est } > 0 \\ &\iff x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Justifions (*) c'est-à-dire que $y - \sqrt{y^2 + 1} \leq 0$. En effet, $\sqrt{y^2 + 1} \geq \sqrt{y^2} = |y|$

donc $y - \sqrt{y^2 + 1} \leq y - |y| \leq 0$ car $|y| \geq y$. On a donc montré que :

$$\boxed{\text{argsh} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \end{array} \right. .}$$

3. On procède de même : ch est continue strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et $\text{ch}(\mathbb{R}^+) = [1, \infty[$. Donc ch réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur $[1, \infty[$.

Déterminons sa bijection réciproque. Soit $y \geq 1$, pour déterminer ch^{-1} , on résout $y = \text{ch}(x)$ en $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = \text{ch}(x) &\iff 2y = e^x + e^{-x} \\ &\iff 2ye^x = (e^x)^2 + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{multiplication par } e^x \\ &\iff (e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0. \end{aligned}$$

C'est un trinôme en e^x de discriminant $4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1) \geq 0$ car $y \geq 1$. D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} y = \text{ch}(x) &\iff e^x \in \left\{ \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2}, \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} \right\} \\ &\iff x = \ln \left(y - \sqrt{y^2 - 1} \right) \quad \text{ou} \quad x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Ici, contrairement à sh, il ne faut pas chercher à montrer que l'une des deux expressions est négative : d'après le graphe de ch il y aura deux antécédents possibles. En revanche, on peut justifier que $\ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \leq 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) \leq 0 &\iff y - \sqrt{y^2 - 1} \leq 1 \\ &\iff y - 1 \leq \sqrt{y^2 - 1} \\ &\iff y^2 + 1 - 2y \leq y^2 - 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} y \geq 1 \\ &\iff 2(1 - y) \leq 0. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie car $y \geq 1$. On a donc montré que l'équation $y = \text{sh}(x)$ possède une unique solution dans \mathbb{R}^+ qui est $\ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right)$. Donc :

$$\boxed{\text{argsh} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \end{array} \right. .}$$

Solution (exercice 11) Énoncé

1. La fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* et à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 + 1 \geq 1 > 0$, f est donc bien définie en tout $x \in \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction f est bien une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
2. On a : $f(1) = \ln(2) = f(-1)$, f n'est donc pas injective sur \mathbb{R} .
3. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geq 1$ et donc que $f(x) \geq \ln(1)$ par crois-

sance de la fonction \ln sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ car $\ln(1) = 0$.

La fonction f n'est donc pas surjective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (par exemple -1 n'a pas d'antécédent par f).

4. Soit $y \in \mathbb{R}_+$, on cherche à résoudre dans \mathbb{R}_+ l'équation $\varphi(x) = y$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = y &\iff \ln(x^2 + 1) = y \\ &\iff x^2 + 1 = e^y \\ &\iff x^2 = e^y - 1.\end{aligned}$$

On a $y \in \mathbb{R}_+$ donc $e^y \geq e^0 = 1$ et donc $e^y - 1 \geq 0$. Ainsi, l'équation $\varphi(x) = y$ admet donc une unique solution dans \mathbb{R}_+ : $x = \sqrt{e^y - 1}$. La fonction φ est donc bijective de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ et sa réciproque φ^{-1} est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$\boxed{\varphi^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1}}.$$

Solution (exercice 12) Énoncé

- **Domaine de définition** : La fonction f est bien définie si et seulement si pour $x < 0$, on a : $x^2 - 1 \neq 0$. Ainsi on a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- **Limites aux bornes du domaine** : en utilisant le théorème du monôme de plus haut degré, on obtient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$. Ainsi \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$. En utilisant encore le théorème du monôme de plus haut degré, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$. Ainsi \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$. Par propriétés sur les somme et quotient de limites, on obtient que : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\infty$. Ainsi la courbe \mathcal{C}_f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.
- **Continuité de la fonction f** :
 - ◇ La fonction f est continue sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, 0[$ comme somme et quotient de fonctions continues.
 - ◇ La fonction f est continue sur \mathbb{R}^+ comme somme et quotient de fonctions continues. En particulier, on a que : $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
 - ◇ **Étude de la continuité en 0** : comme la fonction f est définie par un raccord en 0, on doit étudier la continuité de f en 0 par les limites. On a déjà que la fonction f est continue à droite en 0 avec $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Étude de la limite à gauche en 0 : on a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 0$ par propriétés sur les somme et quotient de limites. Ainsi, on a : $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et donc f est continue en 0.

Ainsi la fonction f est continue sur son ensemble de définition.

- **Dérivabilité de la fonction f** :
 - ◇ La fonction f est dérivable sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, 0[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x < 0$ avec $x \neq -1$, on a : $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$.
 - ◇ La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme somme et quotient de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \geq 0$, on a : $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$.
 - ◇ **Étude de la dérivabilité en 0** : on étudie pour cela le taux d'accroissement quand x tend vers 0 par valeur inférieure et supérieure. D'une part, pour $x < 0$ assez proche de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x}{x^2 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0.$$

D'autre part, pour $x \geq 0$ assez proche de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x}{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

Puisque le taux d'accroissement admet la même limite à droite en zéro et à gauche, on a montré que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Donc la fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. La courbe \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

On a donc montré que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, on a :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x > 0, \\ \frac{-2x}{(x^2-1)^2} & \text{si } x < 0, x \neq -1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- **Variations de f** : on remarque ainsi que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, on a : $f'(x) \geq 0$ et $f'(x) > 0$ si $x \notin \{-1, 0\}$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$. On obtient

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	1	$+\infty$	1

● Théorème de la bijection :

◇ Sur $] -\infty, -1[$:

- La fonction f est continue sur $] -\infty, -1[$ comme somme et quotient de fonctions continues.
- La fonction f est strictement croissante sur $] -\infty, -1[$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $] -\infty, -1[$ dans $] 1, +\infty[$.

◇ Sur $] -1, +\infty[$:

- La fonction f est continue sur $] -1, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions continues sur $] -1, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$ et par raccord continu en 0.
- La fonction f est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

Ainsi d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $] -1, +\infty[$ dans $] -\infty, 1[$.

◇ Ainsi la fonction f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- Propriétés de la réciproque : On a la continuité de f^{-1} sur $] -\infty, 1[$ et sur $] 1, +\infty[$ comme réciproque d'une fonction continue. On a les variations suivantes pour f^{-1} :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f^{-1}	-1	$+\infty$	-1

- Expression de la réciproque : on sait donc que pour tout $x \neq -1$ et tout $y \neq 1$, on a : $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$. Comme f a deux expressions différentes, on doit donc faire deux cas :

- ◇ Si $x \geq 0$ et ainsi en utilisant le théorème de la bijection, on montre que $0 \leq y < 1$: on a alors

$$y = f(x) \iff x^2 = y(1+x^2) \iff (1-y)x^2 = y.$$

Comme $y < 1$, on a : $1-y \neq 0$ et on peut bien diviser par $1-y$. On obtient alors : $y = f(x) \iff x^2 = \frac{y}{1-y}$. De plus, comme $y \geq 0$ et $y < 1 \iff 1-y > 0$, les deux membres sont bien positifs et on peut composer par la fonction racine carrée. On obtient : $x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}$. Mais comme $x \geq 0$, on obtient finalement que :

$$\forall x \geq 0, \forall y \in [0, 1[: y = f(x) \iff x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}.$$

- ◇ Si $x < 0$ avec $x \neq -1$ et ainsi en utilisant le théorème de la bijection, on montre que soit $y > 1$, soit $y < 0$. On a alors :

$$y = f(x) \iff x^2 = y(x^2 - 1) \iff (1-y)x^2 = -y.$$

Comme $y > 1$ ou $y < 0$, on a dans tous les cas : $1-y \neq 0$ et on peut bien diviser par $1-y$. On obtient alors : $y = f(x) \iff x^2 = \frac{-y}{1-y} = \frac{y}{y-1}$. Or si

$y > 1$ alors $\frac{y}{y-1} > 0$ comme quotient de deux termes strictement positifs.

Et si $y < 0$ alors $\frac{y}{y-1} > 0$ comme quotient de deux termes strictement négatifs. Ainsi dans tous les cas $\frac{y}{y-1} > 0$. Les deux membres sont bien positifs et on peut composer par la fonction racine carrée. On obtient : $x =$

$\sqrt{\frac{y}{y-1}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{y}{y-1}}$. Mais comme $x < 0$, on obtient finalement que :

$$\forall x < 0, x \neq -1, \forall y > 1 \text{ ou } y < 0, \quad y = f(x) \iff x = -\sqrt{\frac{y}{y-1}}.$$

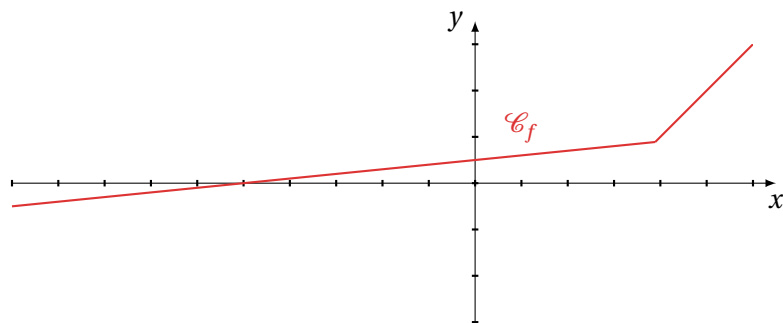
Finalement on obtient pour f^{-1} l'expression suivante :

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{1-y}} & \text{si } 0 \leq y < 1, \\ -\sqrt{\frac{y}{y-1}} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1. \end{cases}$$

Solution (exercice 13) Énoncé On commence par chercher à enlever le maximum. On résout $\frac{x+5}{10} \leq x-3$ et on obtient :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+5}{10} & \text{si } x \leq \frac{35}{9}, \\ x-3 & \text{si } x \geq \frac{35}{9}. \end{cases}$$

On peut aussi tracer sa courbe.



1. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

- Si $(x_1, x_2) \in \left] -\infty, \frac{35}{9} \right]^2$.

Comme $f(x_1) = f(x_2)$ on obtient ainsi $\frac{x_1 + 5}{10} = \frac{x_2 + 5}{10}$ et ainsi $x_1 = x_2$.

- Si $(x_1, x_2) \in \left[\frac{35}{9}, +\infty \right]^2$.

Comme $f(x_1) = f(x_2)$ on obtient ainsi $x_1 - 3 = x_2 - 3$ et ainsi $x_1 = x_2$.

- Si $x_1 \in \left] -\infty, \frac{35}{9} \right[$ et $x_2 \in \left] \frac{35}{9}, +\infty \right[$ (par symétrie du problème le cas $x_2 \in \left] -\infty, \frac{35}{9} \right[$ et $x_1 \in \left] \frac{35}{9}, +\infty \right[$ se traite de la même façon).

Par hypothèse, on a donc $\frac{x_1 + 5}{10} = x_2 - 3$. Mais, le choix des intervalles assure aussi que $\frac{x_2 + 5}{10} < x_2 - 3$. On obtient ainsi, $\frac{x_1 + 5}{10} > \frac{x_2 + 5}{10}$ ce qui implique que $x_1 > x_2$. Or ceci n'est pas possible car $x_1 < \frac{35}{9} < x_2$. Ainsi, un tel cas ne peut pas se produire.

Dans tous les cas possibles, on obtient bien que $x_1 = x_2$. Ainsi, la fonction f est injective.

2. Si l'on représente la courbe de f , on conjecture graphiquement que la fonction est bijective. Comme on veut l'expression de la bijection réciproque, on résout une équation.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout dans \mathbb{R} l'équation $y = f(x)$.

- Si $x \leq \frac{35}{9}$: on a alors $y = \frac{x + 5}{10}$, à savoir $x = 10y - 5$. Et cette équation est valable pour y tel que $x \leq \frac{35}{9}$, c'est-à-dire pour $y \leq \frac{8}{9}$.
- Si $x \geq \frac{35}{9}$: on a alors $y = x - 3$, à savoir $x = y + 3$. Et cette équation est

valable pour y tel que $x \geq \frac{35}{9}$, c'est-à-dire pour $y \geq \frac{8}{9}$.

Conclusion : f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} de bijection réciproque l'application

$$f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longrightarrow \begin{cases} 10y - 5 & \text{si } y \leq \frac{8}{9}, \\ y + 3 & \text{si } y \geq \frac{8}{9}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Remarquons que f^{-1} peut également s'exprimer de la façon suivante : $f^{-1}(y) = \min(10y - 5, y + 3)$.

Solution (exercice 14) Énoncé

1. La fonction arctan est définie sur \mathbb{R} donc f aussi par composition, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. De plus, elle est aussi dérivable sur \mathbb{R} par composition, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{d(x^2)}{dx} \arctan'(x^2) = \frac{2x}{1+x^4}.$$

2. $x \in \mathcal{D}_g \iff \arctan(-x) > 0 \iff x < 0$. Donc : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{-*}$. De plus, elle est aussi dérivable sur \mathbb{R}^{-*} par composition, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \quad g'(x) = \frac{\frac{d \arctan(-x)}{dx}}{\arctan(-x)} = \frac{-\frac{1}{1+(-x)^2}}{\arctan(-x)} = \frac{1}{\arctan(x)(1+x^2)},$$

par imparité de la fonction arctan.

3. La fonction arctan est définie sur \mathbb{R} , une fonction polynôme aussi, donc h aussi par composition, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$. De plus, elle est aussi dérivable sur \mathbb{R} par composition, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{3x^2 - 4x}{1 + (x^3 - 2x^2 + 1)^2}.$$

Solution (exercice 15) Énoncé

1. La fonction f est définie sur \mathbb{R} par composition. De plus, les limites sous la forme donnée sont indéterminées, mais on peut utiliser le théorème d'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq |e^{-x} \arctan(e^x)| \leq \frac{\pi}{2} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

donc : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. En $-\infty$ on reconnaît une composition des limites puis un taux d'accroissement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \arctan(e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan(e^x)}{e^x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y) - \arctan(0)}{y - 0} = \arctan'(0) = 1.$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

2. $x \in \mathcal{D}_g \iff \arctan x \neq 0$. Donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^*$.

Pour la limite en zéro, on reconnaît là encore un taux d'accroissement une composition de limites.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{\arctan x} - x}{\arctan x} &= \frac{x e^{\arctan x} - x e^{\arctan 0}}{\arctan x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{e^{\arctan x} - e^{\arctan 0}}{\arctan x - 0} \\ &= 0 \times \left. \frac{d(e^{\arctan x})}{dx} \right|_{x=0} \\ &= \boxed{0}. \end{aligned}$$

La limite en $+\infty$ s'obtient par règles usuelles puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et que $e^{\pi/2} > 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

De-même en $-\infty$: $e^{-\pi/2} < 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x} > 0$ et par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Solution (exercice 16) Énoncé

- La fonction f est définie sur \mathbb{R} . De plus, elle est dérivable par somme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^x > 0$. La fonction f est donc continue sur \mathbb{R} et strictement croissante donc réalise une bijection de \mathbb{R} dans $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \mathbb{R}$, les limites étant obtenues par opérations sur les limites. Conclusion : f réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- Résolvons l'équation $f'(f(x)) = 0$. On a :

$$f'(f^{-1}(x)) = 0 \iff 1 + e^{f^{-1}(x)} = 0.$$

Puisqu'une exponentielle est strictement positive, cette équation n'admet pas de solution. Donc f^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} .

- D'après la formule du cours, on a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(1) &= \frac{1}{1 + e^{f^{-1}(1)}} \\ &= \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{1 + e^0}} \right\} f(0) = 1$$

Donc : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$.

Solution (exercice 17) Énoncé

- La fonction f est définie dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ par composition de telles fonc-

tions. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{d(\arctan(2x))}{dx} \times (-\sin(\arctan(2x))) = -\frac{2 \sin(\arctan(2x))}{1 + 4x^2}.$$

- Le domaine \mathcal{D} est symétrique par rapport à zéro, de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-\arctan(2x)) = f(x)$ puisque \cos est paire. Donc f est paire.
- De ce qui précède, la fonction f est continue (car dérivable). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(2x) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, donc :

$$f'(x) \leq 0 \iff \sin(\arctan(2x)) \geq 0 \iff \arctan(2x) \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \iff 2x \geq 0$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ et strictement croissante sur \mathbb{R}^- .

De plus, $f(0) = \cos(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. On a donc au total le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	1	0

Donc $f(x) = c$:

- n'a pas de solution si $c \notin [0, 1]$: en effet, $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$ d'après le tableau de variations et le théorème de la bijection.
- Si $c \in [0, 1[$: alors comme f réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} vers $[0, 1[$ d'une part et de \mathbb{R}^{-*} vers $[0, 1[$ d'autre part, l'équation possède deux solutions distinctes.
- Si $c = 1$, alors $x = 0$ est l'unique solution.

Investiguons pour finir le cas $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \cos(\arctan(2x)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \arctan(2x) = \frac{\pi}{6} \\ &\iff 2x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\iff x = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

*l'unique $y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
est $y = \frac{\pi}{6}$
car $\frac{\pi}{6} \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$*

Solution (exercice 18) Énoncé

1. On a :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff \frac{\pi}{4} + \arctan(x) > 0 \iff \arctan(x) > -\frac{\pi}{4}.$$

Or, puisque la fonction arctan est strictement croissante sur \mathbb{R} , on déduit que :

$$x \in \mathcal{D}_f \iff x > \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Donc $\mathcal{D}_f = I =]-1, \infty[$. La fonction f est définie dérivable sur ce domaine, par composition de telles fonctions. De plus, pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{\frac{d(\frac{\pi}{4} + \arctan(x))}{dx}}{(1+x^2)e^{f(x)}} = \frac{1}{(1+x^2)e^{f(x)}} > 0.$$

Donc f est continue strictement croissante, donc réalise une bijection de I vers $f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right[= \left] -\infty, \ln\left(\frac{3}{4}\right) \right[$.2. Puisque pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)e^{f(x)}}$, la fonction f' ne s'annule jamais. Donc, f^{-1} est dérivable sur I .Pour calculer $f^{-1}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, on cherche donc $x \in I$, tel que $f(x) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire $x \in I$ tel que :

$$\ln\left(\frac{\pi}{4} + \arctan(x)\right) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) \iff \frac{\pi}{4} + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

En isolant x , on trouve $x = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Donc $f^{-1}\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$.On obtient alors : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(1)} = \frac{1}{f'(1)} = (1+1)e^{f(1)} = \boxed{\pi}$.**Solution (exercice 19)** Énoncé La fonction f n'est pas une fonction numérique donc on résout une équation pour montrer que f est bijective car le théorème de la bijection ne s'applique que pour les fonctions numériques.Soit $y \in \mathbb{C}$ fixé. On résout dans $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ l'équation $y = f(z)$. Par définition de la fonction f , on obtient donc :

$$y = f(z) \iff y = \frac{z+i}{z-i} \iff y(z-i) = z+i \iff z(y-1) = i(1+y).$$

Afin de pouvoir isoler z il nous faudrait diviser par $y-1$, on doit donc faire deux cas.

- Si $y = 1$: on obtient $0 = 2i$, impossible. Donc 1 n'a pas d'antécédent par f .
- Si $y \neq 1$: on obtient : $y = f(z) \iff z = \frac{i(1+y)}{y-1}$.

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{C} \setminus \{i\} \text{ dans } \mathbb{C} \setminus \{1\}}$ et sa fonction ré-ciproque f^{-1} vérifie :

$$f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ y \longrightarrow \frac{i(y+1)}{y-1} \end{array} \right.$$

Solution (exercice 20) Énoncé Comme on cherche l'expression de f^{-1} , on résout une équation. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé. On résout dans \mathbb{R}^2 l'équation $(a, b) = f(x, y)$. Par définition de la fonction f , on obtient donc :

$$(a, b) = f(x, y) \iff (a, b) = (x+y, x-y) \iff \begin{cases} x+y = a \\ x-y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}.$$

On a ainsi exprimé (x, y) de façon unique en fonction de (a, b) . En conclusion, $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bijective de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^2}$ et sa fonction réciproque f^{-1} vérifie :

$$f^{-1} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) \longrightarrow \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) \end{array} \right.$$