

Programme de colles

du 13 au 17/11/2023

- Cette semaine : sommes et produits.
- Une seule question de cours. Je maintiens quelques questions sur les fonctions usuelles, mais **pas de fonction en exercice**.

1. [MATHS] CALCULS DE SOMMES ET PRODUITS



Attention
L'identité $a^n - b^n$ a été vue, mais l'énoncé n'est pas exigible des étudiant(e)s.

- **Symboles somme et produit.** Définition de la somme et du produit, écriture en extension. Convention sur les bornes. Propriétés des symboles. Technique du changement d'indice : translation, et retournement. Sommes et produits télescopiques. Sommes usuelles : arithmétique, géométrique, somme des carrés et des cubes. Identité de BERNOULLI « $a^n - b^n$ » [H.P]. Programmation informatique des sommes et produits. Notation factorielle. Mode de définition par récurrence.
- **Coefficients binomiaux et formule du binôme.** Définition, et convention. Formules sur les binomiaux : symétrie, absorption, PASCAL. Triangle de PASCAL, corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers relatifs. Formule du binôme.
- **Sommes doubles.** Sommes doubles libres, cas des indices séparables : définition et calcul. Sommes doubles sous contrainte $i \leq j$ et contrainte $i < j$: définition, théorème de permutation et calculs.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner la formule pour $\sum_{k=0}^n k^2, n \geq 0$. La démontrer par récurrence.
2. Soient n, p deux entiers tels que $n \geq p$. Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=p}^n (a_{k+2} - a_k)$ à l'aide d'un changement d'indice.
3. Donner la définition de $n!$, $n \geq 0$. Calculer $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k(k+3)}, n \geq 1$ et exprimer le résultat à l'aide de factorielles.

4. Énoncer la formule générale du binôme et expliquer les valeurs de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.
5. Écrire une fonction d'en-tête somme(p, n, x) et retournant $\sum_{k=p}^n \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}, n, p$ deux entiers positifs.
6. Écrire une fonction d'en-tête produit(p, n, x) et retournant $\prod_{k=p}^n e^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}, n, p$ deux entiers positifs.
7. Écrire une fonction d'en-tête sommedouble2(n, p) et retournant $\sum_{p \leq i, j \leq n} (j-i)^2, n, p$ deux entiers positifs.
8. Fonction usuelle $x \mapsto \sqrt{x}$: domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, limites, dérivabilité (énoncer la formule donnant la dérivée et démontrer qu'elle n'est pas dérivable en zéro).
9. Fonction usuelle tan : domaine de définition, parité/périodicité éventuelles, allure du graphe, limites remarquables, dérivabilité.

À venir : les complexes.