Séance 5 : Sommes et Produits

Exercice 1

1. Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes :

a. $A = (a_1 + 2) + (a_2 + 2) + \cdots + (a_n + 2)$

b. $B = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots$ sachant que la somme G contient $n + 1$ termes.

2. Ecrire à l'aide de pointillés les sommes suivantes :

a. $\sum_{i=4}^{n} \frac{1}{1+i}$

b. $\sum_{j=2}^{n} \frac{j}{1+j}$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$

2. $A = \sum_{k=5}^{10} k$

3. $B = \sum_{k=11}^{20} k^2$

4. $U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

5. $T_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k+1}$

6. $V_n = \sum_{k=0}^{n} q^{2k+3}$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants.

1. $\prod_{k=1}^{n} k$

2. $\prod_{k=1}^{n} (2k)$

3. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

4. $\prod_{k=0}^{n} (2k + 1)$

5. $\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^k$

Exercice 4

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k2^k$ à l'aide d'une somme double en utilisant $\sum_{\ell=1}^{k} 1 = k$.

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

2. On suppose dans cette question que $n \geq 1$.

a. Calculer, à l'aide d'un changement d'indice, la somme $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$.

b. Montrer que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

c. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ puis de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

d. La formule obtenue à la question précédente est-elle toujours valable pour $n = 0$?