Programme de colles
du 20 au 24/11/2023

- Cette semaine : sommes et produits, et les complexes.
- Une seule question de cours.

1. [MATHS] CALCULS DE SOMMES ET PRODUITS

Attention

L'identité $a^n - b^n$ a été vue, mais l'énoncé n'est pas exigible des étudiant(e)s.

- **Symboles somme et produit.** Définition de la somme et du produit, écriture en extension. Convention sur les bornes. Propriétés des symboles. Technique du changement d'indice : translation, et retournement. Sommes et produits télescopiques. Sommes usuelles : arithmétique, géométrique, somme des carrés et des cubes. Identité de Bernoulli « $a^n - b^n$ » [H.P] . Programmation informatique des sommes et produits. Notation factorielle. Mode de définition par récurrence.
- **Coefficients binomiaux et formule du binôme.** Définition, et convention. Formules sur les binomiaux : symétrie, absorption, Pascal. Triangle de Pascal, corollaire : les coefficients binomiaux sont des entiers relatifs. Formule du binôme.
- **Sommes doubles.** Sommes doubles libres, cas des indices séparables : définition et calcul. Sommes doubles sous contrainte $i \leqslant j$ et contrainte $i < j$: définition, théorème de permutation et calculs.

2. [MATHS] NOMBRES COMPLEXES

Insister sur les thèmes suivants : résolution d'équations (second degré, racines de complexes), calculs (formes algébriques/exponentielles), applications en trigonométrie.

Attention

- L'exponentielle générale e^z (sauf si $z \in i\mathbb{R}$) n'est pas au programme, mais peut faire l'objet d'exercices si la définition est donnée.
- Au sujet des racines n-ièmes : aucun résultat n'est au programme, même pour l'unité. Les étudiant(e)s doivent uniquement être capables de les calculer sur des exemples en cherchant les solutions sous forme exponentielle, éventuellement algébrique si $n = 2$.
- Les équations du second degré à coefficients non réels sont hors-programmes.
- Les applications en géométrie ne sont pas au programme non plus ; en particulier, l'interprétation d'angles orientés à l'aide d'un argument.

- **Définition de $\mathbb{C}$ et forme algébrique.** Définition de $\mathbb{C}$ comme un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un élément i vérifiant $i^2 = -1$. Unicité de la forme algébrique. Notation pour le complexe j. Identité remarquable $a^2 + b^2$. Lien avec la géométrie à l'aide de la notion d'affixe. Conjugué, module et interprétation géométrique. Propriétés. Complexes de module 1.
- **Forme exponentielle.** Notation exponentielle imaginaire. Propriétés similaires à l'exponentielle réelle, formule de Moivre. Expression exponentielle de j, et propriétés de j. Formule d'Euler, théorème de relèvement : tout complexe de module 1 est une exponentielle imaginaire. Forme exponentielle d'un complexe. Angle moitié pour la forme exponentielle d'une somme/différence d'exponentielles imaginaires. Propriétés de l'argument. Égalité de complexes et forme exponentielle. Racines n-ièmes de complexes, cas de la racine carrée à l'aide de la forme algébrique. Équations du second degré à coefficients réels : extension des formules du lycée au cas $\Delta < 0$.
- **Applications en trigonométrie.** Linéarisation, anti-linéarisation (Moivre et angle moitié), sommes trigonométriques en « complexifiant » les sommes.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner la formule pour $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $n \geqslant 0$. La démontrer par récurrence.
2. Soient n, p deux entiers tels que $n \geqslant p$. Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+2} - a_k)$ à l'aide d'un changement d'indice.
3. Énoncer la formule générale du binôme et expliquer les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$,

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

4. Écrire une fonction d'en-tête `somme(p, n, x)` et retournant $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}$, n, p deux entiers positifs.

5. Écrire une fonction d'en-tête `produit(p, n, x)` et retournant $\prod_{k=p}^{n} e^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$, n, p deux entiers positifs.

6. Écrire une fonction d'en-tête `sommedouble2(n, p)` et retournant $\sum_{p \leq i, j \leq n} (j-i)^2$, n, p deux entiers positifs.

7. Définir le module d'un complexe, et rappeler l'expression à l'aide du conjugué. Démontrer que : $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$ si $z, z' \in \mathbb{C}$.

8. Déterminer la forme exponentielle $1 + e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, \pi[$, puis avec $\theta \in [\pi, 2\pi[$.

9. Calculer les racines carrées de $24 + 10i$ à l'aide de la forme algébrique.

10. Donner les formules d'Euler. Linéariser, en utilisant des nombres complexes, $\cos^2 x$ et $\sin^3 x$.

11. Rappeler le développement de $(a+b)^4$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Anti-linéariser $\cos(4x)$ (*i.e.* l'exprimer en fonction $\cos x$ et $\sin x$) pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant des nombres complexes.

À venir : les applications, théorème de la bijection, fonction arctan*, ...*