Chapitre (ALGO) 4 — Récursivité, Tri rapide et applications des tris

Résumé & Plan

La programmation récursive est un mode de programmation très différent de l'itératif, type de programmation rencontré jusque ici. Elle est adaptée par exemple à tous les objets mathématiques définis par récurrence. Les mathématiciens ont pu démontrer que : tout ce qui peut se programmer avec des boucles peut aussi se programmer avec des fonctions récursives, et inversement.

1. INTRODUCTION : LA FACTORIELLE

Considérons une suite classique que vous connaissez bien : la factorielle, que l'on note $(u_n) = (n!)$. La suite (u_n) peut être définie en Mathématiques de deux manières.

MODE EXPLICITE & PROGRAMMATION IMPÉRATIVE. La première :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{(convention } u_0 = 1\text{)}.$$

Par exemple $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Ce mode de définition nous mène directement au code ci-après.

```
def factorielle(n):
    P = 1
    for k in range(1, n+1):
        P *= k
    return P
```

MODE RÉCURRENT & PROGRAMMATION RÉCURSIVE. Une seconde manière de programmer est d'utiliser la relation de récurrence ci-après :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = n \times u_{n-1}, \quad u_0 = 1.$$

Notons que cette définition de la factorielle fait appel à la factorielle elle-même (mais sur une valeur plus petite), ce qui est caractéristique du principe **récursif**. Le calcul de 4! se fait alors ainsi :

- **[Phase d'empilement]**
$$\begin{aligned} 4! &= 4 \times 3! \\ &= 4 \times (3 \times 2!) \\ &= 4 \times (3 \times (2 \times 1!)) \\ &= 4 \times (3 \times (2 \times (1 \times 0!))) \\ &= 4 \times (3 \times (2 \times (1 \times 1))). \end{aligned}$$
- **[Phase de dépilement]** La seconde phase consiste alors à réaliser les différentes multiplications « mises en attentes », en commençant par la dernière (gestion en pile, comme une pile d'assiettes, selon le principe « dernier arrivé, premier servi »).
$$\begin{aligned} 4 \times (3 \times (2 \times (1 \times 1))) &= 4 \times (3 \times (2 \times 1)) \\ &= 4 \times (3 \times 2) = 4 \times 6 = 24. \end{aligned}$$

```
def factorielle_rec(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
```

```
    return n*factorielle_rec(n-1)
```

Il est probable que, si vous découvrez la notion de récursivité, vous soyez surpris qu'un tel programme fonctionne, sans que vous n'ayez écrit dans son code la moindre boucle. Pour éclairer ce phénomène, il faut comprendre que lorsqu'un appel à une fonction se fait à l'intérieur d'une autre fonction, cette dernière interrompt son exécution (en sauvegardant tout le contexte qui lui permettra de reprendre le calcul là où il en était) pour permettre l'exécution de la fonction appelée. Le mécanisme est identique si la fonction appelée est la même que la fonction appelante. On peut présenter les appels successifs provoqués par `factorielle_rec(3)` de la manière suivante :

- l'appel `factorielle_rec(3)` commence et s'interrompt en déclenchant l'appel de `factorielle_rec(2)` ;
  - ◇ l'appel `factorielle_rec(2)` commence et s'interrompt en déclenchant l'appel de `factorielle_rec(1)` ;
    - — l'appel `factorielle_rec(1)` commence et s'interrompt en déclenchant l'appel de `factorielle_rec(0)` ;
      - — l'appel `factorielle_rec(0)` va jusqu'à son terme et renvoie la valeur 1 à la fonction `factorielle_rec(1)` qui l'a appelée ;
    - — l'appel `factorielle_rec(1)` reprend, termine son calcul $1 \times 1 = 1$, et renvoie cette valeur à l'appel `factorielle_rec(2)` ;
  - ◇ l'appel `factorielle_rec(2)` reprend, termine son calcul $2 \times 1 = 2$, et renvoie cette valeur à l'appel `factorielle_rec(3)` ;
- l'appel `factorielle_rec(3)` reprend, termine son calcul $3 \times 2 = 6$, et renvoie cette valeur, qui est l'unique valeur de retour de l'appel initial.

Le mécanisme consistant à stopper le déroulement d'un appel pour en permettre un autre oblige l'ordinateur à consommer de la mémoire pour stocker son contexte. Afin de contrôler cette dépense en mémoire, le langage Python limite par défaut le nombre d'appels récursifs à environ 1000. Au delà, une erreur est générée :

```
RecursionError: maximum recursion depth exceeded
```

Cette limite est généralement largement assez haute pour permettre l'exécution des exemples que nous rencontrerons.

Notons que pour que le calcul ne boucle pas infiniment sur lui-même, il est indispensable qu'au bout d'un certain nombre d'étapes il aboutisse à une valeur de factorielle que l'on sait calculer directement. Une telle situation est appelée un *cas terminal*. Pour notre exemple de la factorielle, c'est la valeur $0! = 1$ qui joue le rôle de cas terminal. À noter aussi que si on lance le calcul sur une valeur strictement négative, celui-ci bouclera sans s'arrêter. Par exemple :

$$(-1)! = (-1) \times (-2)! = (-1) \times ((-2) \times (-3)!) = \dots.$$

La notion de récursivité est généralement assez déstabilisante au départ, mais vous constaterez à l'usage que le principe devient assez rapidement familier, de très nombreux concepts pouvant être exprimés récursivement. Comme vous allez le constater, elle dépasse d'ailleurs très largement le champs des exemples mathématiques par lesquels nous allons commencer.

2. GÉNÉRALITÉS SUR LA PROGRAMMATION RÉCURSIVE

2.1. Présentation

Définition 1 | Fonction récursive

Une fonction informatique dont le résultat dépend d'elle-même est appelée *fonction récursive*. Une fonction non récursive est appelée *fonction itérative*.
(C'est ce type de fonction que nous avons utilisé jusqu'à maintenant)

- Un appel à la fonction dans le corps de ladite fonction s'appelle un *appel récursif*,
- l'ensemble des appels récursifs s'appelle la *pile d'exécution*.
- Chaque appel récursif s'appelle aussi un *empilement*, chaque `return` sans appel récursif s'appelle un *dépilement*.

Remarque 1 On parle de *pile d'exécution* à cause de la manière qu'à Python de gérer les appels récursifs : il les exécute selon le principe « premier arrivé, dernier exécuté », comme une pile d'assiettes. La dernière assiette posée sera aussi la première à être réutilisée ensuite.

Attention Une pile d'exécution est finie

Un nombre non fini d'appels récursifs conduira systématiquement à l'erreur `RecursionError: maximum recursion depth exceeded while ...`
Il est possible de la modifier par la commande suivante (qui positionne le nombre maximal d'appels ici à 2000) :

```
>>> import sys
>>> sys.getrecursionlimit() # taille par défaut
1000
>>> sys.setrecursionlimit(2000)
>>> sys.getrecursionlimit() # taille nouvelle
```

```
2000
```

Exemple 1 **(Pile non finie)** Définir dans l'éditeur la fonction ci-après

```
def test():
    print("bonjour !")
    test() # réexecution de la fonction test
```

Dans cet exemple, les appels à la fonction `test()` s'enchaînent dans la pile d'exécution : il y a uniquement des empilements sans dépilement. L'accumulation de celles-ci provoque une erreur appelée *dépassement de pile* ou « *stack overflow* » en anglais.

Exercice 1 | **Fonction mystère** [Solution] Sans taper le programme suivant dans un éditeur, essayez de prévoir le résultat de l'exécution du programme ci-dessous. Vérifiez votre hypothèse en exécutant le programme.

```
def mystere(n):
    if n == 0:
        return 0
    else:
        return n + mystere(n-1)
```

Expliquer le résultat renvoyé par `mystere(3)`, puis conjecturer `mystere(n)`.

RÉCURSIF / ITÉRATIF : AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS. Les fonctions récursives sont généralement plus simples à écrire, mais pas forcément plus rapides. La grande difficulté est cependant de bien comprendre les différents appels récursifs, et en quoi elle renvoie bien le bon résultat. Les inconvénients de la programmation récursive sont :

- la multiplication des mémoires allouées au stockage des résultats en attente, qui peut devenir rédhibitoire ;
- le nombre de calculs effectués, souvent bien plus grand qu'en programmation itérative. Nous le constaterons dans un futur exercice.

2.2. Résumé : structure d'une fonction récursive

Structure type d'une fonction récursive

```
def f(par_1, par_2, ...):
    """
    fonction récursive
    """
    if condition arrêt:
        return valeur finale
        instructions # dépend éventuellement de f(par_1_prim,...)
    else:
        return f(par_1_prim,...)
```

De manière générale, un algorithme est dit récursif quand sa mise en oeuvre utilise ce même algorithme. Pour être valide, cet algorithme doit impérativement vérifier les deux contraintes de terminaison :

1. existence d'un ou plusieurs cas de base où l'algorithme est directement effectif,
2. assurance qu'il n'y aura qu'un nombre fini d'appels récursifs avant de déboucher sur un cas de base.

3. UTILISATIONS DE LA PROGRAMMATION RÉCURSIVE

3.1. Pour les suites récurrentes

La conception d'une fonction récursive n'est pas éloignée du principe de démonstration par récurrence, et elle est bien adaptée pour décrire les objets mathématiques satisfaisant des relations de récurrence.

Exemple 2 **(Suite récurrente d'ordre 1)** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
La suite est bien définie et la relation de récurrence peut se réecrire :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = u_{n-1}^2 + u_{n-1}.$$

La fonction suivante permet d'obtenir le n-ième terme de la suite.

```
def u(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return u(n-1)**2 + u(n-1)
```

Cependant, nous avons deux appels récursifs identiques qui seront exécutés de manière indépendante. On peut donc faire mieux :

```
def u(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        U = u(n-1)
        return U**2 + U
```

Exemple 3 **(Suite récurrente d'ordre 2)** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n$. La suite est bien définie et la relation de récurrence peut se réecrire :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = u_{n-1}^2 + u_{n-2}.$$

La fonction suivante permet d'obtenir le n-ième terme de la suite. Cette fois-ci il faut bien indiquer deux conditions d'arrêt, une pour chaque « condition initiale » permettant ainsi les dépilements.

```
def u(n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n == 1:
        return 2
    else:
        return u(n-1)**2 + u(n-2)
```

Une fois ces deux exemples bien compris, exercez-vous sur les suites ci-après.

Exercice 2 | **Suite récurrente ordre 1** [Solution]

1. Écrire une fonction récursive puis itérative d'en-tête `u(n)`, qui calcule le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite définie par :
$$u_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{3}{u_{n-1}}\right).$$
2. Même question, mais uniquement une version récursive, avec les suites $(v_n), (w_n)$ définies par :
   2.1) $v_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$,
   2.2) $w_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n + n$.

Exercice 3 | **Suite récurrente ordre 2** [Solution] Écrire une fonction récursive d'en-tête `u(n)`, qui calcule le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite définie par :

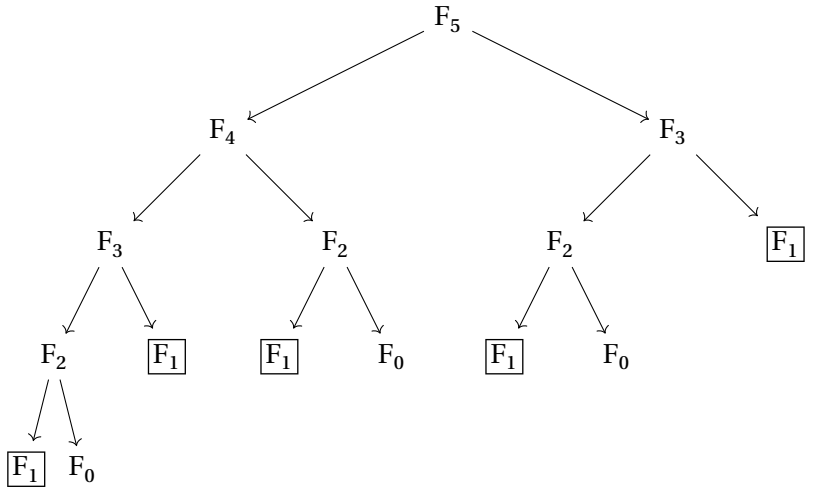
$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_{n+2} = u_{n+1}^2 + 2u_n.$$

Exercice 4 | **Suite récurrente d'ordre 2 : FIBONACCI** [Solution] On considère la suite (F_n) définie par : $F_0 = a$, $F_1 = b$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Écrire une fonction récursive d'en-tête `fibo(n, a, b)` qui calcule le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite (F_n). *Nous verrons une méthode itérative plus tard dans l'année, plus généralement pour n'importe quelle suite d'ordre 2.*

LA RÉCURSIVITÉ POUR LES SUITES, OUI MAIS... Une fonction récursive peut s'appeler à plusieurs rangs inférieurs, comme dans le cas par exemple d'une suite récurrente d'ordre 2. Analysons de plus près les appels récursifs opérés pour le calcul de la suite de FIBONACCI (F_n), vue dans un précédent exercice.

Si ce code renvoie bien la valeur de F_n, il le fait de manière extrêmement maladroite puisque les deux appels récursifs générés à chaque étape conduisent à recalculer plusieurs fois de nombreux termes de la suite, comme le montre l'exemple de l'appel `fibo(5)` (on dispose à chaque fois sur la ligne d'en-dessous les appels générés par ceux de l'étape précédente, et pour plus de concision F_n est écrit au lieu de `fibo(n)` :



Vous constatez que F_1 par exemple a été évalué 5 fois inutilement !

3.2. Pour l'algorithmique

Exercice 5 | Somme/Produit des éléments d'une liste, le retour [Solution] Soit L une liste de longueur n. Nous avions déjà vu dans le Chapitre (ALGO) 2 comment calculer la somme des éléments d'une liste, de manière itérative.

1. Que représente l'élément `L[0]` pour une liste? Que représente la liste `L[1:]` et quelle est sa taille?
2. Si `n = len(L)`, et $L = [\ell_0, \dots, \ell_{n-1}]$, alors : $\sum_{k=0}^{n-1} \ell_k = \ell_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \ell_k$.
   En utilisant ce principe, compléter la fonction ci-dessous d'en-tête `somme_rec(L)` pour qu'elle renvoie la somme des éléments d'une liste d'entiers L, en version récursive.
   ```
   def somme_rec(L):
       if len(L) == 0:
           return ____________
       else:
           return ____________ + ____________
   ```
   Par convention, la liste vide sera de somme nulle.
3. Écrire sur le même principe une fonction d'en-tête `produit_rec(L)` renvoyant le produit des éléments d'une liste d'entiers L, en version récursive. *Par convention, la liste vide sera de produit un.*

Exercice 6 | Appartenance à une liste, le retour [Solution] Écrire une fonction récursive `appartient_rec(e, L)` renvoyant `True` si l'élément e appartient à la liste L, `False` sinon, selon le principe suivant pour $n \geqslant 2$:

$$e \in [\ell_0, \dots, \ell_{n-1}] \iff (e = \ell_0) \text{ ou } e \in [\ell_1, \dots, \ell_{n-1}].$$

Pour rappel, nous avions également déjà vu cette fonction, de manière itérative, dans le Chapitre (ALGO) 2.

Exercice 7 | 💣 Mots palindromiques [Solution] On rappelle qu'un mot est un *palindrome* s'il est égal à lui-même quand on l'écrit de la droite vers la gauche. Par exemple, les mots `"kayak"` et `"ressasser"` sont des palindromes, le mot `"professeur"` ne l'est pas.

1. Écrire une fonction itérative d'en-tête `palindrome(mot)` renvoyant `True` si la chaine de caractères `mot` est un palindrome, `False` sinon. Par exemple, `palindrome("kayak")` doit ainsi renvoyer `True`, `palindrome("professeur")` doit renvoyer `False`.
2. Même question, mais avec une version récursive.

Exercice 8 | Exponentiation naïve et rapide [Solution] *On s'interdira bien sûr dans cet exercice l'utilisation du symbole ***

1. Écrivez une fonction récursive d'en-tête `expo_rec(x, n)` renvoyant x^n pour n entier naturel, en exprimant la définition sous la forme :
   $$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ x \times x^{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$
   Combien de multiplications sont-elles nécessaires pour effectuer le calcul de x^n avec cette version? *On notera c_n ce nombre, et on cherchera une relation de récurrence sur la suite (c_n)*
2. Dans l'exemple précédent, comme sur celui de la factorielle, l'appel récursif se fait en diminuant la variable n de 1. Il est parfois possible de la réduire davantage (pour minimiser le nombre d'appels nécessaires), et souvent de la diviser par 2, en utilisant un principe *dichotomique*.
   Par exemple,
   - $x^{13} = x \cdot x^{12} = x \cdot (x^6)^2$. On peut donc se contenter de calculer x^6, suivi de deux multiplications.
   - Reste à appliquer la même idée sur x^6 : $x^6 = (x^3)^2$.
   - Reste à appliquer la même idée sur x^3 : $x^3 = x \cdot x^2$.

   Le principe précédent, récursif, repose donc sur les égalités ci-après :
   $$x^n = x^{2\times n//2 + n\%2} = \left(x^2\right)^{n//2} \times x^{n\%2}$$
   $$= \begin{cases} (x \times x)^{n//2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ (x \times x)^{n//2} \times x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

   2.1) Écrire une fonction récursive d'en-tête `expo_rapide_rec(x, n)` renvoyant x^n pour n entier naturel selon le principe précédent.
   On rappelle que le quotient de la division euclidienne de n par 2 s'obtient par `n//2` et qui est égale à $\frac{n}{2}$ si n est pair et à $\frac{n-1}{2}$ si n est impair.

   2.2) Afin de bien vous approprier les fonctionnements, listez à la main les appels successifs engendrés par `expo_rapide_rec(2, 10)`.

   2.3) 💣 On souhaite évaluer dans cette question le nombre de multiplications de l'exponentiation rapide. Écrire une fonction d'en-tête `expo_rapide_rec_mult(n, m)` qui renvoie le nombre de multiplications requises par la méthode d'exponentiation rapide appliquée à x^n, le paramètre `m` jouant le rôle de compteur de multiplications *(il est nécessaire de le passer en argument de la fonction, `m = 0` en début de fonction récursive étant problématique)* La tester pour $n = 20, 50, 100$. Commentez.

4. TRI RÉCURSIF : LE TRI RAPIDE *(QUICKSORT)*

LE PRINCIPE : PARTAGER LA LISTE EN DEUX SOUS-LISTES D'ÉLÉMENTS INFÉRIEURS/SUPÉRIEURS OU ÉGAUX À UN ÉLÉMENT CHOISI AU HASARD, PUIS RECOMMENCER AVEC LES DEUX SOUS-LISTES. Le tri rapide est un algorithme récursif basé sur le principe « diviser pour régner ». Étant donnée une liste `L`, on commence par choisir le premier élément comme *pivot*, et on sépare la liste entre deux sous-listes : la première contient des éléments inférieurs ou égaux au pivot, et la seconde contient des éléments supérieurs (strictement) au pivot. Puis on applique le tri rapide aux deux sous-listes obtenues.

Exercice 9 | **Programmation du tri rapide** [Solution]

1. Écrire alors une fonction récursive `tri_rapide_rec(L)` qui trie une liste `L` avec le tri rapide, et de manière récursive. On complètera, par exemple, le code ci-dessous.

■■ Tri Rapide, version récursive

```
def tri_rapide_rec(L):
    if len(L) == 0:
        # Condition d'arrêt
        return []
    else:
        pivot = L[0]
        inf_pivot = []
        sup_pivot = []
        for x in L[1:]:
            if ____________________:
                ____________________
            else:
                ____________________
        return ____________________________ # on recommence
```

2. Ce tri a-t-il lieu en place? Est-il itératif? récursif? comparatif?
3. Comment faire pour obtenir une liste triée par ordre décroissant?

Il est possible aussi de programmer le tri rapide de manière itérative, mais le principe même de ce tri invite à utiliser de la récursivité.

5. COMPARAISON DES TRIS & APPLICATIONS

5.1. Comparaison

Aucun exercice n'est à traiter dans cette partie.

Nous allons dans cette partie mesurer empiriquement les temps d'exécution de chacun des tris.

■■ Générer une liste de 10 entiers, et les mélanger

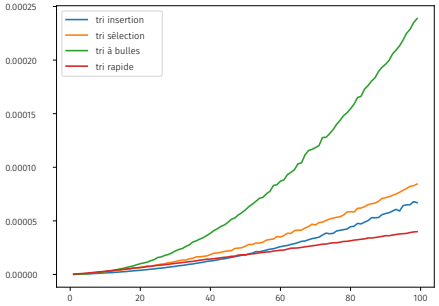
```
>>> import random as rd
>>> n = 10
>>> L = list(range(n))
>>> rd.shuffle(L) #Mélange des éléments de L en place
>>> L
[1, 4, 5, 3, 2, 0, 9, 7, 8, 6]
```

On décide à présent de comparer tous les tris présents dans la liste `fonctions` ci-dessous. On a :

- Une fonction qui génère des listes d'entiers (fonction `genere_liste`),
- pour chaque tri, on : génère une liste d'entiers de taille `n`, puis on chronomètre l'exécution du tri et on effectue une moyenne des temps sur `10**2` essais.
- Enfin, on trace le temps d'exécution moyen en fonction de l'entier `n` (taille de la liste).

```
fonctions = [tri_insertion, tri_selection, tri_bulles, \
↪ tri_rapide_rec]
noms = {tri_insertion : "tri insertion", tri_selection : "tri \
↪ sélection", tri_bulles : "tri à bulles", tri_rapide_rec : "tri \
↪ rapide"} # affichage d'une légende

import matplotlib.pyplot as plt
import random as rd

def genere_liste(n):
    """
    renvoie une liste d'entiers aléatoires entre 1 et n
    """
    L = list(range(n))
    rd.shuffle(L)
    return L
```

```python
import time as ti

def eval_temps_tri(n, nom_du_tri):
    """
    renvoie le temps d'exécution moyen pour le tri nom_du_tri
    """
    somme = 0
    for _ in range(10**2):
        L = genere_liste(n)
        t_1 = ti.time()
        nom_du_tri(L)
        somme += ti.time()-t_1
    return somme/10**2

def trace_temps():
    X = list(range(1, 100))
    Y = []
    for nom_du_tri in fonctions:
        for n in X:
            Y.append(eval_temps_tri(n, nom_du_tri))
        plt.plot(X, Y, label = noms[nom_du_tri])
        Y = []
    plt.legend()

trace_temps()
```



On constate que c'est le tri rapide, qui semble être le meilleur en terme de temps d'exécution.

5.2.1. Calcul d'une médiane

Exercice 10 | [Solution]

1. Testez les instructions suivantes dans la console.
   ```
   L = [1, 2, 3, 4, 5]
   L[len(L)//2]
   L = [1, 2, 3, 4]
   L[len(L)//2]
   ```
2. Écrire une fonction d'en-tête `mediane(L)` qui étant donnée une série statistique correspondante à `L` renvoie la médiane de cette série. *Indication : Si vous avez oublié ce qu'est une médiane, documentez-vous sur internet*

5.2.2. Recherche dichotomique dans une liste triée

Le mot *dichotomie* signifie « division, opposition » (entre deux éléments, deux idées). Nous rencontrerons ce mot plusieurs fois au cours de l'année, une technique similaire sera déployée en Mathématiques pour approcher des points d'annulation de fonctions.

LE PRINCIPE. On s'intéresse ici à la recherche d'un élément noté `x` dans un tableau ou une liste dans laquelle les éléments de même type ont été préalablement triés par ordre croissant. Cette situation, bien qu'*a priori* particulière, se rencontre fréquemment en Informatique.

Dans un précédent TP, pour un tableau ou une liste non trié `L`, on a vu que l'on pouvait employer une méthode « par balayage » en utilisant un parcours simple de `L`. Cet algorithme dit « naïf » a pour propriétés :

- il s'applique à tout tableau ou liste `L`, sans nécessiter un ordre particulier entre les éléments de `L`,
- il met en jeu n tests dans le pire des cas, ce qui ne le place pas parmi les algorithmes très rapides.

Nous allons nous intéresser ici uniquement à des tableaux ou listes triés par ordre croissant, et appliquer un principe de recherche dichotomique qui conduit à une résultat avec beaucoup moins de comparaisons. La recherche par dichotomie de l'élément `x` dans `L`, consiste de manière itérative à :

1. initialiser deux indices `i_g = 0` (comme *indice gauche*), et `i_d = len(L)-1` (comme *indice droite*).
2. Calculer alors `i_m = (i_g+id_d)//2` (ou encore : `i_m = int((i_g+i_d)/2)`) l'indice « central » de `L`. L'élément `L[i_m]` est alors un élément *au milieu* de la liste `L`.
   - Si `L[i_m] = x`, l'algorithme est terminé.
   - Si `L[i_m] < x`, on recommence le processus en changeant `i_g` en `i_d = i_m+1`. On a « tapé trop à gauche ».
   - Si `L[i_m] > x`, on recommence le processus en changeant `i_d` en `i_d = i_m-1`. On a « tapé trop à droite ».
3. On arrête le processus lorsque `x` a été trouvé ou alors lorsque `i_g > i_d` (si `x` n'est pas présent, au dernier changement d'indice l'ordre entre les deux variables est inversé à cause du ± 1).

Pourquoi cet algorithme est beaucoup plus rapide ? Car les tailles des sous-listes où l'on recommence la recherche diminue très vite (divisée par deux à chaque étape). En revanche, le tri utilisé coûte un peu en temps, on ne peut pas gagner sur tous les tableaux.

Exercice 11 | Appartenance d'un élément dans une liste. Méthode itérative par dichotomie. [Solution]

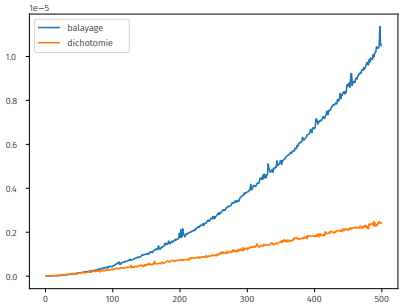
1. Étant donnée une liste `L`, écrire une fonction `recherchedicho(x, L)` implémentant ce principe. *Indication : On pourra compléter le script à trous ci-après*

```
def recherche_dicho(x, L):
    """
    recherche un élément par méthode dichotomique
    """
    i_g = 0
    i_d = ________
    while ___________________:
        i_m = ________
        if L[i_m] == x:
            return ________
        elif L[i_m] < x:
            i_g = i_m+1
        else:
            i_d = ________
    return False # x non trouvé dans L
```

2. Que se passe-t-il avec `i_g, i_d` lorsque `x` n'est pas présent dans `L` ?

Comparaison avec la méthode par balayage. On peut comparer, comme nous l'avons fait pour les tris, l'efficacité de la recherche par balayage et de la recherche dichotomique.

```
fonctions = [appartient, recherche_dicho]
noms = {appartient : "balayage", recherche_dicho : "dichotomie"} # \
↪ affichage d'une légende
import time as ti

def eval_temps_recherche(n, nom_methode):
    """
    renvoie le temps d'exécution moyen pour le tri nom_du_tri
    """
    somme = 0
    L = list(range(n))
    for x in range(n):
        t_1 = ti.time()
        nom_methode(x, L)
        somme += ti.time()-t_1
    return somme/10**2

def trace_temps():
    X = list(range(1, 500))
    Y = []
    for nom_methode in fonctions:
        for n in X:
            Y.append(eval_temps_recherche(n, nom_methode))
        plt.plot(X, Y, label = noms[nom_methode])
        Y = []
    plt.legend()

trace_temps()
```



On constate que la recherche dichotomique semble être plus rapide.

6. SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé] Lors de chaque appel récursif `mystere(n-1)`, l'entier `n` est abaissé de 1, jusqu'à au final valoir `0`. C'est alors à ce moment-là que la fonction s'arrête. On somme au fur et à mesure chaque résultat donc à la fin la fonction renverra `S = n + (n-1) + ... + 1` soit l'entier $\frac{n(n+1)}{2}$.

Par exemple, la valeur renvoyée par `mystere(3)` est 6. Essayons de comprendre en détail ce qui permet d'aboutir à ce résultat :

1. il y a un premier empilement qui correspond au 1er appel de la fonction `mystere()` avec le paramètre `n = 3`.
2. Comme `n > 0`, il y a donc un 2ème appel de la fonction `mystere()` avec le paramètre `n = 2` et donc un 2ème empilement.
3. Comme `n > 0`, il y a donc un 3ème appel de la fonction `mystere()` avec le paramètre `n = 1` et donc un 3ème empilement.
4. Comme `n > 0`, il y a donc un 4ème appel de la fonction `mystere()` avec le paramètre `n = 0` et donc un 4ème empilement.
5. Comme `n = 0`, l'appel n°4 de la fonction `mystere()` renvoie `S = 0` et il y a dépilement.
6. Le 3ème appel (avec `n = 1`) peut alors poursuivre son exécution et renvoie la valeur 1+0, c'est-à-dire 1. Comme l'exécution de ce 3ème appel est terminé, il y a à nouveau dépilement.
7. Le 2ème appel (avec `n = 2`) peut alors poursuivre son exécution et renvoie la valeur 2+1, c'est-à-dire 3. Comme l'exécution de ce 2ème appel est terminé, il y a dépilement.
8. Le 1er appel (avec `n = 3`) peut alors poursuivre son exécution et renvoie la valeur 3+3, c'est-à-dire 6.

Finalement, la valeur renvoyée par `mystere(3)` est bien 6. On conjecture que `mystere(n)` renvoie $\frac{n(n+1)}{2}$.

Solution (exercice 2) [Énoncé]

```
def u(n):
    if n == 0:
        return 2
    else:
        return 1/2*(u(n-1)+3/u(n-1))
```

Même chose que dans un précédent exemple, il est pertinent de stocker le résultat de `u(n-1)`.

```
def u(n):
    if n == 0:
        return 2
    else:
        U = u(n-1)
        return 1/2*(U+3/U)

def u_it(n):
    u = 2
    for _ in range(1, n+1):
        u = 1/2*(u+3/u)
    return u

def v(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return 2*v(n-1)+1

def w(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return 2*w(n-1)+n-1
```

```
>>> u(4)
1.7320508075688772
>>> u_it(4)
1.7320508075688772
>>> v(4)
31
>>> w(4)
27
```

Solution (exercice 3) [Énoncé]

```
def u(n):
    if n == 0:
        return 1
    elif n == 1:
        return 0
    else:
```

```
        return u(n-1)**2 + 2*u(n-2)
```

Solution (exercice 4) [Énoncé]

■■ Version récursive

```
def fibo(n, a, b):
    if n == 0:
        return a
    elif n == 1:
        return b
    else:
        return fibo(n-1,a,b) + fibo(n-2,a,b)
```

```
>>> fibo(5, 1, 1)
8
```

Solution (exercice 5) [Énoncé]

1.
```
>>> L = [1, 3, -1, 2]
>>> L[0] # dernier élément
1
>>> L[1:] # liste extraite jusqu'à l'avant-dernier élément
[3, -1, 2]
```
Pour la fonction `somme_rec`, on peut extraire le dernier élément de la liste et l'ajouter à `somme_rec` rexécutée sur la liste `L[:-1]`. La condition d'arrêt sera : lorsque la liste est nulle, on renvoie `0`.

2.
```
def somme_rec(L):
    if len(L) == 0:
        return 0
    else:
        return L[0] + somme_rec(L[1:])
```
```
>>> L = [1, 3, -1, 2]
>>> somme_rec(L)
5
```

3.
```
def produit_rec(L):
    if len(L) == 0:
        return 1
    else:
        return L[0] * produit_rec(L[1:])
```
```
>>> L = [1, 3, -1, 2]
>>> somme_rec(L)
5
```

Solution (exercice 6) [Énoncé] L'arrêt : le cas d'une liste vide (e non trouvé), ou alors celui d'une liste avec e présent en dernier élément (on a donc trouvé e).

```
def appartient_rec(e, L):
    if len(L) == 0:
        return False # élément non trouvé
    else:
        return L[0] == e or appartient_rec(e, L[1:])
```
```
>>> L = [1, 3, -1, 2]
>>> appartient_rec(-1, L)
True
>>> appartient_rec(-2, L)
False
```

Solution (exercice 7) [Énoncé] Aspect logique : un mot n'est pas un palindrome si et seulement si **il existe** *i* tel que `mot[i] != mot[-1-i]` où `n` est la longueur du mot.

1.
```
def palindrome(mot):
    for i in range(len(mot)):
        if mot[i] != mot[-1-i]:
            return False
    return True
```

2. Pour la version récursive, on peut analyser si la première lettre est égale à la dernière, si c'est le cas on recommence le processus avec `mot[1:-1]` (mot privé de la 1ère et la dernière lettre).
```
def palindrome_rec(mot):
    if len(mot) <= 0:
        return True
    elif mot[0] != mot[-1]:
        return False
    else:
        return palindrome_rec(mot[1:-1])
```
```
>>> palindrome("kayak")
True
>>> palindrome_rec("kayak")
True
>>> palindrome("professeur")
```

```
    False
    >>> palindrome_rec("professeur")
    False
```

Solution (exercice 8) [Énoncé]

```
def expo_rec(x, n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return x*expo_rec(x, n-1)
```

Si on note c_n le nombre de multiplications, alors $c_n = 1 + c_{n-1}$ et $c_0 = 0$, donc $c_n = n$.

```
def expo_rapide_rec(x,n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        if n%2 == 0:
            return expo_rapide_rec(x*x, n//2)
        else:
            return expo_rapide_rec(x*x, n//2)*x
```

```
>>> expo_rec(2, 4)
16
>>> expo_rapide_rec(2, 4)
16
```

```
def expo_rapide_rec_mult(n, m):
    if n == 0:
        return m
    else:
        if n%2 == 0:
            return expo_rapide_rec_mult(n//2, m+1)
        else:
            return expo_rapide_rec_mult(n//2, m+2)
```

```
>>> expo_rapide_rec_mult(20, 0)
7
>>> expo_rapide_rec_mult(50, 0)
9
>>> expo_rapide_rec_mult(100, 0)
10
```

On constate un nombre de multiplications bien inférieur à la première méthode ! Qui nécessiterait, pour `n = 100`, 99 multiplications (au lieu de 10 ici).

Solution (exercice 9) [Énoncé] Le second programme est à associer à la seconde question.

```
def tri_rapide_rec(L):
    """
    Trie la liste L selon le tri rapide (Non en place)
    """
    if len(L) == 0:
        return L
    else:
        pivot = L[0]
        inf_pivot = []
        sup_pivot = []
        for x in L[1:]:
            if x < pivot:
                inf_pivot.append(x)
            else:
                sup_pivot.append(x)
        return tri_rapide_rec(inf_pivot) + [pivot] + \
        ↪ tri_rapide_rec(sup_pivot)
```

Le tri présenté ici est récursif, non en place car une nouvelle liste est crée dans le `return`. Pour trier dans l'ordre décroissant, on peut par exemple modifier l'ordre des listes dans le `return` :

```
def tri_rapide_dec_rec(L):
    """
    renvoie une liste triée par ordre croissant des éléments de \
    ↪ L,
    selon le tri rapide. Version récursive.
    Tri non en place
    """
    if L == []:
        return []
    else:
        pivot = L[0]
        inf_pivot = []
        sup_pivot = []
        for x in L[1:]:
            if x < pivot:
```

```
            inf_pivot.append(x)
        else:
            sup_pivot.append(x)
    return tri_rapide_rec(sup_pivot) + [pivot] + \
    ↪ tri_rapide_rec(inf_pivot)
```

```
>>> L = [1, -4, 7, 4, 2]
>>> tri_rapide_rec(L)
[-4, 1, 2, 4, 7]
>>> tri_rapide_dec_rec(L)
[2, 4, 7, 1, -4]
```

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. On en retient qu'on accède à un élément « au centre » à l'aide de l'indice `n // 2` si `n = len(L)` (l'élément pile au centre en cas d'un nombre impair d'éléments, ou bien juste à droite du centre fictif en cas d'un nombre pair d'éléments).

```
>>> L = [1, 2, 3, 4, 5]
>>> L[len(L)//2]
3
>>> L = [1, 2, 3, 4]
>>> L[len(L)//2]
3
```

2.
```
from tri_rapide_rec import *
def mediane(L):
    """
    Cherche la médiane d'une liste, après tri rapide des \
    ↪ observations
    """
    L_tri = tri_rapide_rec(L)
    n = len(L)
    if n % 2 == 1:
        # Nombre impair d'observations
        return L_tri[n//2]
    else:
        # Nombre pair d'observations
        return (L_tri[n//2-1] + L_tri[n//2])/2
```

Solution (exercice 11) [Énoncé]

```
def recherche_dicho(x, L):
    """
    recherche un élément par méthode dichotomique
    L est supposée triée
    """
    g, d = 0, len(L)-1
    while g <= d:
        i_m = (g + d)//2
        if L[i_m] == x:
            return True
        elif L[i_m] < x:
            g = i_m+1
        else:
            d = i_m-1
    return False # x non trouvé dans L
```

```
>>> L = [1, 2, 4, 5]
>>> recherche_dicho(2, L)
True
>>> recherche_dicho(4, L)
True
```

Lorsque x n'est pas présent, on a à la fin `i_g > i_d`.