Séance 6 : Complexes

Exercice 1

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :
$A = (2\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3})(3\mathrm{i}\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
$B = \frac{1-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}$.
$C = \overline{\left(\frac{\mathrm{i}+3}{1-4\mathrm{i}}\right)}$.

2. Calculer les modules des nombres complexes suivants :
$z_1 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.
$z_2 = \left(\frac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}\,(1-\sqrt{2})}{1-\mathrm{i}}\right)^{2023}$.
$z_3 = \frac{(1-\mathrm{i})^4}{(2\sqrt{3}+2\mathrm{i})^2}$.
$z_4 = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^7(2 + \mathrm{i})^{15}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
a. $z^2 - (1 + \mathrm{i})^2 = 0$.
b. $z + 2\mathrm{i} = \mathrm{i}z - 1$.
c. $z(1 - \bar{z}) = \mathrm{i}\,\bar{z}(2 - z)$.
d. $z^2 + 3\sqrt{3}\,z + 9 = 0$.
e. $z^2 + (1 - \sqrt{2})z - \sqrt{2} = 0$.

Exercice 2

On pose $z_1 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 3\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_3 = -2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
Ecrire sous forme exponentielle les nombres : $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_1 z_2,\ \frac{z_1 z_2}{z_3}$.

Exercice 3

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :
$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ z_2 = 9\mathrm{i},\ z_3 = -3,\ z_4 = -2\mathrm{i},\ z_5 = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}},\ z_6 = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3}{(1-\mathrm{i})^5},\ z_7 = \sin(x) + \mathrm{i}\cos(x)$.

Exercice 4

Soit $z = r\,e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel.
Donner le module et un argument de : $z^2,\ \bar{z},\ \frac{1}{z},\ -z,\ z^n$ et $\frac{\mathrm{i}}{\bar{z}}$.

Exercice 5

Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

$z_1 = (2+2\mathrm{i})^6$, $z_2 = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}$ et $z_3 = \frac{(1+\mathrm{i})^{2000}}{(\mathrm{i}-\sqrt{3})^{1000}}$.

Exercice 6

1. Pour $\theta \in [0\,;2\pi[$, donner une forme exponentielle de $1 + e^{2\mathrm{i}\theta}$.

2. Linéariser $\sin^6 \theta$.

3. Linéariser $\sin^2(4x)\sin(3x)$.

4. Donner une forme exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

5. Donner une forme exponentielle de $1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$.

6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une forme exponentielle de $(1 + \cos t + \mathrm{i}\sin t)^6$.

7. Soit $u, v \in \mathbb{U}$ avec $uv \neq -1$. Montrer que $\frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.

8. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$, a-t-on $\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\,z} \in \mathbb{R}$?

9. Soit n un entier naturel non nul, calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\left|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right|$.

10. Soit n un entier naturel, calculer $\sum_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right)$.