

Programme de colles

du 27 au 1/12/2023

- Cette semaine : les complexes, & les applications.
- Une seule question de cours.

1. [MATHS] NOMBRES COMPLEXES

Insister sur les thèmes suivants : résolution d'équations (second degré, racines de complexes), calculs (formes algébriques/exponentielles), applications en trigonométrie.

Attention

- L'exponentielle générale e^z (sauf si $z \in i\mathbb{R}$) n'est pas au programme, mais peut faire l'objet d'exercices si la définition est donnée.
- Au sujet des racines n-ièmes : aucun résultat n'est au programme, même pour l'unité. Les étudiant(e)s doivent uniquement être capables de les calculer sur des exemples en cherchant les solutions sous forme exponentielle, éventuellement algébrique si $n = 2$.
- Les équations du second degré à coefficients non réels sont hors-programmes.
- Les applications en géométrie ne sont pas au programme non plus ; en particulier, l'interprétation d'angles orientés à l'aide d'un argument.

- **Définition de $\mathbb{C}$ et forme algébrique.** Définition de $\mathbb{C}$ comme un sur-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant un élément i vérifiant $i^2 = -1$. Unicité de la forme algébrique. Notation pour le complexe j. Identité remarquable $a^2 + b^2$. Lien avec la géométrie à l'aide de la notion d'affixe. Conjugué, module et interprétation géométrique. Propriétés. Complexes de module 1.
- **Forme exponentielle.** Notation exponentielle imaginaire. Propriétés similaires à l'exponentielle réelle, formule de Moivre. Expression exponentielle de j, et propriétés de j. Formule d'Euler, théorème de relèvement : tout complexe de module 1 est une exponentielle imaginaire. Forme exponentielle d'un complexe. Angle moitié pour la forme exponentielle d'une somme/différence d'exponentielles imaginaires. Propriétés de l'argument. Égalité de complexes et forme exponentielle. Racines n-ièmes de complexes, cas de la racine carrée à l'aide de la forme algébrique. Équations du second degré à coefficients réels : extension des formules du lycée au cas $\Delta < 0$.
- **Applications en trigonométrie.** Linéarisation, anti-linéarisation (Moivre et angle moitié), sommes trigonométriques en « complexifiant » les sommes.

2. [MATHS] INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS. BIJECTIONS NUMÉRIQUES.

Attention

- L'image réciproque d'une partie n'est pas au programme.
- Conformément au programme de BCPST, on limitera les exercices aux fonctions numériques. À la rigueur, dans un second temps, des applications complexes, de $\mathbb{R}^2$, *etc.*. On évitera tout exercice théorique.

- **Fonctions & Applications.** Définitions. Égalité de deux applications. Graphe. Applications usuelles : identité, indicatrice, ligne de niveau de l'indicatrice. Restriction & prolongement. Applications composables et composition d'applications. Propriété de la composition.
- **Injection, surjection, bijection.** Image directe, image directe d'une réunion et intersection. Injection, surjection. Injections usuelles : identité, injection canonique. Bijection. Reformulation à l'aide du nombre de solutions d'une équation. Réciproque d'une application. Si f est bijective : définition de f^{-1}, f^{-1} est une réciproque de f et même la réciproque de f. Bijectivité et existence d'une réciproque. Propriété de $.^{-1}$: réciproque d'une composée et d'une réciproque.
- **Applications aux fonctions numériques.** Bijection numérique, obtenir le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f. Théorème de la bijection continu : utilisation pour l'existence et l'unicité d'une solution à une équation (plusieurs exemples, cas d'une suite implicite), utilisation pour déterminer des images directes de parties en combinant éventuellement avec la propriété « $f(A \cup B) = \dots$ ». Extension finale des définitions de puissance : cas des puissances de la forme $a^{\frac{1}{2k+1}}$. Dérivabilité d'une bijection réciproque. Fonctions circulaires réciproques : arcsin, arccos (définition, relations $\arcsin(\sin(\dots)) = \dots$, $\sin(\arcsin(\dots)) = \dots$), arctan (étude complète : définition, relations $\arctan(\tan(\dots)) = \dots$, $\tan(\arctan(\dots)) = \dots$, parité, dérivée, limites, graphe).

Attention

Aucune autre notion que celles indiquées entre parenthèses ne sont au programme pour arcsin, arccos, mais cela peut faire l'objet d'exercices guidés.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir le module d'un complexe, et rappeler l'expression à l'aide du conjugué. Démontrer que : $\quad |z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$ si $z, z' \in \mathbb{C}$.
2. Déterminer la forme exponentielle $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0,\pi[$, puis avec $\theta \in [\pi, 2\pi[$.
3. Calculer les racines carrées de $24+10\mathrm{i}$ à l'aide de la forme algébrique.
4. Donner les formules d'Euler. Linéariser, en utilisant des nombres complexes, $\cos^2 x$ et $\sin^3 x$.
5. Rappeler le développement de $(a+b)^4$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Anti-linéariser $\cos(4x)$ (*i.e.* l'exprimer en fonction $\cos x$ et $\sin x$) pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant des nombres complexes.
6. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application. Écrire la **définition** de « f injective » et « f surjective ». Écrire ensuite la négation de ces deux propriétés.
7. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application bijective. Expliquer ce qu'est $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ (définition). Rappeler les formules pour $(g \circ f)^{-1}, \left(f^{-1}\right)^{-1}$.
8. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application bijective. Expliquer ce qu'est $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ (définition). Montrer, en résolvant une équation, que $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+\star} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{2x+1} \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa réciproque.
9. Fonction usuelle arctan : définition, parité, allure du graphe, limites remarquables, dérivabilité.
10. Rappeler le domaine de dérivabilité d'arctan, la dérivée et montrer la formule ci-après : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

À venir : ensembles et dénombrement.