Chapitre # (AN) 2 — Calculs de primitives & Équations différentielles

D'après un théorème de Liouville*, la fonction* $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ *ne possède pas de primitive qui puisse s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles* (ln, exp, cos, sin *etc.*).

— **Le saviez-vous ?**

Résumé & Plan

Nous allons voir dans une chapitre un outil clef qui va nous permettre de modéliser divers phénomènes : la notion d'équations différentielles. Ce type d'objet apparait naturellement dans de nombres domaines : en électricité, en mécanique, en biologie (dynamiques de population) *etc.*

Parmi toutes les disciplines mathématiques, la théorie des équations différentielles est la plus importante. Elle fournit l'explication de toutes les manifestations élémentaires de la nature où le temps est impliqué.

— **Sophus Lie**

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Un objet central nous servira pour la résolution d'équations différentielles : les primitives. On commence donc par des révisions & compléments sur le sujet.

1. CALCULS DE PRIMITIVES

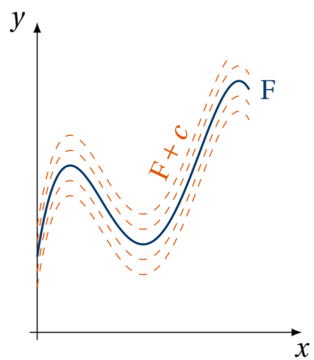
1.1. Généralités

Définition 1 | Primitives
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\mathrm{F}' = f$.

Une primitive réalise l'opération inverse de la dérivation : on part d'une fonction, et on cherche à savoir si elle s'écrit sous forme d'une dérivée.

Exemple 1
- $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} - 6$ sont des primitives de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$,
- $x \longmapsto \mathrm{e}^x - \ln(x)$ est une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1 | Ensemble des primitives
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Si $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **<u>une</u>** primitive de f sur l'intervalle I, alors **<u>les</u>** primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $\mathrm{F} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.



On retiendra notamment que si f admet une primitive, alors elle en admet même une infinité : puisque si F est une primitive, toutes les fonctions $\mathrm{F} + c$ avec c une constante en sont aussi. Il n'est donc pas question de parler de *la* primitive de f. Nous admettons le théorème ci-après, difficile à démontrer.

Preuve

Théorème 1 | Existence de primitives pour les fonctions continues

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors :

- f possède une primitive sur I.
- **[Unicité si une valeur est fixée]** Pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Graphiquement, parmi toutes les primitives de f, il n'en existe qu'une seule F dont la courbe représentative $\mathscr{C}_\mathrm{F}$ passe par le point (x_0, y_0).

Preuve Nous admettons l'existence. Démontrons l'unicité avec condition initiale.

Enfin, la propriété de linéarité de la dérivation se transmet alors automatiquement aux primitives.

Proposition 2 | Linéarité de la primitivation

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, F une primitive de f et G une primitive de g. Alors : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda\mathrm{F} + \mu\mathrm{G}$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

Preuve Immédiat par linéarité de la dérivation : $(\lambda\mathrm{F} + \mu\mathrm{G})' = \lambda\mathrm{F}' + \mu\mathrm{G}' = \lambda f + \mu g$.

Méthode Justifier l'existence d'une primitive

Il suffit de montrer la continuité de la fonction, le plus souvent en utilisant des théorèmes d'opérations élémentaires sur les fonctions continues.

Exemple 2 Déterminer, sur un domaine à préciser, une primitive des fonctions ci-après.

1. $x \longmapsto 2x$
2. $x \longmapsto x^2 - 3x + 1$
3. $x \longmapsto \mathrm{e}^x$
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$
5. $x \longmapsto \cos x$
6. $x \longmapsto \sin x$

Exemple 3

- Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{F}(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et calculer la dérivée, ainsi que $\mathrm{F}(\mathrm{e})$. Que remarque-t-on ?
- En déduire l'unique primitive de ln qui s'annule en 1.

1.2. Primitive & Intégrale sur un segment

Nous allons introduire une notation qui sera étudiée plus en détail plus tard dans l'année (Chapitre (AN) 6). Nous ne motivons pas encore outre mesure son introduction, pour l'instant il faudra juste comprendre son utilité pour le calcul de primitives.

Cadre
Dans toute cette sous-section, la notation $[a,b]$ désignera toujours un segment, avec $a,b\in\mathbb{R}$.

Définition/Proposition 1 | Intégrale d'une fonction continue sur un segment
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle *intégrale de f sur le segment* $[a,b]$ le réel noté $\int_a^b f$ $\left(\text{ou encore } \int_a^b f(x)\,dx,\ \int_{[a,b]} f(x)\,dx\right)$ défini par :

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\textbf{(défi.)}}{=} [F(x)]_a^b \underset{\textbf{(défi.)}}{=} F(b)-F(a),$$

(où F désigne **une** primitive de f).

On appelle *intégrande de* $\int_a^b f$ la fonction f.

Remarque 1
- Si $a=b$, alors avec les notations de la définition précédente, on a :
$$\int_a^a f = [F]_a^a = F(a)-F(a)=0.$$
- La variable utilisée dans l'intégrale est, comme dans les sommes et produits, **muette**.

Preuve La quantité $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de la primitive choisie.

La définition de l'intégrale est donc bien posée.

Exemple 4 Calculer les intégrales ci-après.

1. $\int_0^1 (-4x^3+x^2-1)\,dx$,

2. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$,

3. $\int_0^T I_0 e^{-t/\tau}\,dt$ avec $I_0, T, \tau\in\mathbb{R}^+$.

PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES DE L'INTÉGRALE. L'idée est ici seulement d'établir les propriétés qui vont nous servir pour le calcul de primitives. Nous viendrons compléter cette liste plus tard, dans le Chapitre (AN) 6 dédié à l'intégration.

Proposition 3 | Propriétés de l'intégrale.

Soient I un intervalle et $(a, b) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

1. **[Linéarité]** Pour tout $(f, g) \in (\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R}))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$
2. **[Positivité]** Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors :
$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0.$$
3. **[Croissance]** Si $(f, g) \in (\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R}))^2$ et $\boxed{a \leqslant b}$, alors :
$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$
4. **[Relation de CHASLES]** Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $c \in \mathrm{I}$. Alors :
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$
5. **[Ordre des bornes]** Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, alors :
$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Preuve

1.

2. Si F est une primitive de f, alors l'hypothèse nous donne $\mathrm{F}' \geqslant 0$, donc que F est croissante. On obtient immédiatement $\int_a^b f = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \geqslant 0$ puisque $a \leq b$.

3.

4.

5.

La relation de CHASLES permet de calculer notamment des intégrales dont l'intégrande est définie par morceaux, voyons un exemple avec la valeur absolue.

Exemple 5 Calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)|\, \mathrm{d}x$.

Citons également deux propriétés parfois utiles dans les calculs, qui concernent le crochet.

Proposition 4 | Propriétés du crochet

Soient I un intervalle et $(a, b) \in \mathrm{I}^2$.

1. **[Linéarité]** Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$[\lambda \mathrm{F} + \mu \mathrm{G}]_a^b = \lambda [\mathrm{F}]_a^b + \mu [\mathrm{G}]_a^b.$$
2. **[Ordre des bornes]** Si $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors :
$$[\mathrm{F}]_a^b = -[\mathrm{F}]_b^a.$$

Preuve

1.

2.

Lien entre primitive et intégrale. Par définition de l'intégrale, il est nécessaire de connaître une primitive pour la calculer, il existe donc un fort lien entre les deux notions. Voyons lequel.

Théorème 2 | Relation fondamentale de l'analyse

Soient I un intervalle, $a \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction :

$$\mathrm{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a**, elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

Cette égalité est appelée assez pompeusement « relation fondamentale de l'analyse ». Pour notre définition de l'intégrale, elle est évidente. Mais pour d'autres définitions, il faut travailler un peu pour l'établir.

Preuve

Méthode Primitiver une fonction en utilisant une intégrale

Lorsque vous avez besoin d'une technique d'intégration (intégration par parties ou changement de variable par exemple) pour primitiver une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, choisir $a \in \mathrm{I}$, puis calculer $\displaystyle\int_a^x f$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Si la fonction f n'est pas définie en un point, on prendre garde à bien effectuer ces calculs pour les x où c'est possible.

Exemple 6 Donner la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $x \longmapsto 2^x$.

Remarque 2 Écrire une fonction comme intégrale de sa dérivée peut donner de précieux renseignements sur f si on en connaît certains sur f'. Nous verrons cela plus en détails dans le Chapitre (AN) 6.

1.3. Techniques de calculs d'intégrales

Nous avons vu précédemment que calculer une primitive revient à un calcul d'intégrale. Pour ces dernières nous disposons de deux techniques principales de calcul : l'intégration par parties et le changement de variable. Ces techniques doivent être envisagées naturellement lorsque l'intégrande ne se primitive pas de manière évidente.

Intégration par parties. Cette formule sert dès que l'on souhaite intégrer un produit dont l'un des termes devient plus simple en le dérivant.

Théorème 3 | Intégration par parties

Soient $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t + \left[uv\right]_a^b.$$

On utilise une intégration par parties dès que $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ est plus simple à calculer que $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$: on ne s'occupe pas trop du crochet, puisque c'est un terme qui se calculera de toute façon.

Attention

Toute intégration par parties doit être justifiée, en rappelant convenablement les hypothèses.

Preuve *(Point clef — **Intégrer la formule de dérivation d'un produit**)*
Puisque u, v sont supposées $\mathscr{C}^1$, les fonctions u, v sont continues car dérivables, et u', v' sont continues. Ainsi, uv' et $u'v$) sont continues, donc leur intégrale sur $[a, b]$ existe.

Méthode **Quand utiliser l'intégration par parties ? et mise en place**

Pour intégrer un *produit* de deux fonctions, dont l'une est facile à *primitiver* et l'autre est facile à *dériver*. Exemple : une exponentielle multipliée par un polynôme.

Lorsque l'on effectue une intégration par parties, on :

1. indique pour plus de clarté les termes que l'on dérive (écrire « $u =$ » sous le terme) et que l'on primitive (écrire « $v' =$ » sous le terme) : $\int_a^b \underbrace{u}_{\partial} \cdot \underbrace{v'}_{\int} = \dots$.
2. Lors de l'écriture de la formule d'intégration par parties, on rappelle les hypothèses de classe $\mathscr{C}^1$ sur les fonctions u, v.

Toute intégration par parties doit être justifiée.

Exemple 7 Calculer les intégrales suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

1. $\int_0^x t\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$,

2. $\int_0^1 (t^2 - t + 3)\mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$.

3. $\int_0^x t \ln(t^2+1) \, \mathrm{d}t$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2(t) \, \mathrm{d}t$.

Exemple 8 Calculer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$ sur un domaine à préciser.

Nous avions déjà montré la proposition qui suit (en dérivant l'expression donnée). Il s'agit ici de la retrouver *via* une autre méthode.

Proposition 5 | Primitive du logarithme

La fonction $x \in \mathbb{R}^{+\star} \longmapsto x\ln x - x$ est l'unique primitive de ln qui s'annule en e.

Preuve *(Point clef — **intégration par parties**)*

On peut également simplement dériver l'expression, et constater qu'elle s'annule en e.

Exemple 9 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.

Changement de variable. Voici à présent une technique ressemblant assez fortement à celle de changement d'indice vue pour les sommes et produits dans le Chapitre (ALG) 3. Autant nous étions assez contraints pour les changements d'indices (seuls quelques changements étaient autorisés), autant pour les intégrales la plupart des fonctions $\mathscr{C}^1$ conviendront. Voici la formule.

Théorème 1 | Formule du changement de variable

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle I, et $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathrm{I}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ appelée *fonction de changement de variable*. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

« On pose $x = \varphi(t)$ »

Contrairement aux changements d'indices dans les sommes, on vous donnera toujours le changement de variable à réaliser. En revanche, vous devez savoir le mettre en place, et le justifier.

Attention

Tout changement de variable doit être justifié, en rappelant convenablement les hypothèses.

Preuve *(Point clef — **Intégrer la formule de dérivation d'une composée.**)*
Notons que f et $f\circ\varphi.\varphi'$ sont continues sur I et sur $[a,b]$ respectivement, ce qui assure l'existence des intégrales. Introduisons une primitive F de f sur I (il en existe puisque f est continue). Alors $\mathrm{F}\circ\varphi$ est dérivable de dérivée $\mathrm{F}'\circ\varphi\times\varphi' = f\circ\varphi\times\varphi'$. Autrement dit :

$$\forall t \in [a,b], \quad (\mathrm{F}\circ\varphi)'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Dans la pratique, on réalise assez peu souvent un changement de variable en essayant de « coller » à cette formule. On utilise plutôt les calculs formels ci-après, qui correspondant à la formule de changement de variable non-intégrée [1] : ainsi, si on pose $x = \varphi(t)$, on écriera

« $f(x)\,\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\,\mathrm{d}(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. »

Ainsi, pour réaliser le changement $x = \varphi(t)$, on commence par écrire formellement :

« $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\varphi(t)) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ » — on calcule donc ni plus ni moins la dérivée de φ !

Remarque 3 **(Panorama des utilisations du changement de variable)** Il y a plusieurs façons d'utiliser la formule de changement de variable :

- depuis $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \varphi(t)$. La nouvelle variable t est définie implicitement en fonction de l'ancienne x. On utilise la formule de la **gauche** vers la **droite**.
- Depuis $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \varphi(x)$. La nouvelle variable t est définie explicitement en fonction de l'ancienne x, on a parfois besoin d'isoler x afin de réaliser le changement. On utilise la formule là encore de la **gauche** vers la **droite**.
- De la **droite** vers la **gauche** : la formule est assez inutile directement car nous serions alors capable de primitiver directement (primitive d'une composée), on l'utilise plutôt pour des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b g(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$. Dans ce cas, si la fonction φ' ne s'annule pas, il est utile de pouvoir écrire $g(\varphi(t))$ sous la forme :
$$g(\varphi(t)) = \frac{g(\varphi(t))}{\varphi'(t)}\varphi'(t) = \frac{g(\varphi(t))}{\varphi'\circ\varphi^{-1}(\varphi(t))}\varphi'(t).$$
Ainsi, on se ramène à appliquer la formule du changement de variable à la fonction $f = \dfrac{g}{\varphi'\circ\varphi^{-1}} = g\circ(\varphi^{-1})'$ et le changement explicite $x = \varphi(t)$. *C'est le cas par exemple du calcul de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $x = \sqrt{\mathrm{e}^t+1}$.

Dans la pratique, on retiendra seulement les deux méthodes qui suivent, ainsi que l'hypothèse importante de la formule : le caractère $\mathscr{C}^1$.

1. Et avec des gros guillemets, car cette version sans intégrale n'a aucun sens mathématique.

Méthode Changement explicite – Nouvelle variable en fonction de l'ancienne

Pour répondre à une question de type « Calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = \varphi(t)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a,b]$ et que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
3. Poser $u = \varphi(t)$ et calculer : $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\varphi'(t)}\mathrm{d}u$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
4. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

Exemple 10 **(Changement de variable explicite)**

- Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
  - en posant $u = \sqrt{t}$.
  - Retrouver le résultat précédent par primitivation directe.

- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{e^t+1}}\,dt$ en posant $x=\sqrt{e^t+1}$.

- Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\cos^2 t\,dt$ en posant $u=\cos^3(t)$.

Méthode Changement implicite – Ancienne variable en fonction de la nouvelle

Pour répondre à une question de type « Calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ à l'aide du changement de variable $t=\varphi(u)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a,b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale c'est-à-dire trouver deux réels a' et b' tels que $a=\varphi(a')$ et $b=\varphi(b')$.
3. Vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment d'extrémités a' et b'.
4. Poser $t=\varphi(u)$ et calculer : $\quad dt=\varphi'(u)du \iff du=\dfrac{1}{\varphi'(u)}dt$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
5. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

Exemple 11 (Changement de variable implicite)

1. Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}\,dt$ en posant $t=\cos u$.

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ en posant $x=\sin t$.

3. Soit $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$. Montrer que $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ en posant $u=\dfrac{\pi}{2}-x$, *puis* déterminer la valeur de I.

Corollaire 1 | Intégrale & Parité/Périodicité

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors :
$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors :
$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
- Soit $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$,
$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 4 Ces formules trouveront une interprétation simple dans le Chapitre (AN) 6, lorsque nous aurons revu l'intégrale comme aire sous la courbe représentative de l'intégrande.

Preuve

-
-
-

1.4. Primitives usuelles

Dans les tableaux suivants, pour chaque fonction f définie sur un *intervalle* I précisé, on donne *une* primitive F. Les primitives suivantes doivent être connues par cœur, ou *a minima* être retrouvées rapidement.

$f(x) = \dots$	$\mathrm{F}(x) = \dots$	$x \in \mathrm{I} \subset \dots$	**Condition**
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, \infty[$	$\alpha \neq -1$
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	$a \in \mathbb{R}$
e^{ax}	$\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\ln\lvert x\rvert$	$x\ln\lvert x\rvert - x$	$\mathbb{R}^*$	
$\sin(ax)$	$\dfrac{-\cos(ax)}{a}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^\star$
$\cos(ax)$	$\dfrac{\sin(ax)}{a}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\cos(x) \neq 0$	

À l'aide des formules du tableau et de la dérivation d'une composée, on peut calculer une primitive de $u'u^n$, $\dfrac{u'}{u^n}$, $\dfrac{u'}{u}$, $u'\cos u$, $u'\sin u$, $u'\mathrm{e}^u$ *etc.* lorsque u est dérivable.

$f = \dots$	$\mathrm{F} = \dots$
$u' \times u^a, a \neq -1$	$\dfrac{1}{a+1}u^{a+1}$
$u' \times \exp(u)$	$\exp(u)$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$u' \times \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \times \sin(u)$	$-\cos(u)$

$\dfrac{u'}{\cos^2(u)} = u'\left(1+\tan^2(u)\right)$	$\tan(u)$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

Exemple 12 **(Puissances)** Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-3x}}$.

2. $g : x \longmapsto x\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$.

3. $h = \tan$ *(Cela justifie la formule énoncée dans le tableau)*

Méthode **Primitives de fractions rationnelles**

On sait déterminer une primitive des fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de discuter selon la valeur du discriminant Δ :

1. si $\Delta > 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, puis on écrit la fraction comme somme de deux autres *(vous serez toujours guidés à cette étape dans les exercices)* qui se primitivent avec un logarithme.
2. Si $\Delta = 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$,
3. si $\Delta < 0$, alors on met le dénominateur **sous forme canonique** et on effectue un changement de variable pour se ramener à $u \longmapsto \dfrac{1}{u^2+1}$.

Remarque 5 Pour le cas $\Delta > 0$, la décomposition de la fraction sera toujours rappelée.

Exemple 13 Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$

2. $g : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$

Exemple 14 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un domaine à préciser.

- $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2+x-1}$

  Nous avons $2x^2+x-1=0 \iff x = \dfrac{-1\pm 3}{4} \iff -1$ *ou* $\dfrac{1}{2}$. *La fonction* f *est donc continue sur* $\boxed{\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}}$ *et y admet des primitives.*

  Cherchons $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathbb{R}$ *deux constantes de sorte que :*

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+1} \\
\iff &\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{(A+B)x + (A-B/2)}{x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}} \\
\iff &\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{1}{\cancel{2x^2+x-1}} = \frac{(A+B)x + (A-B/2)}{\frac{1}{2}\cancel{\left(2x^2+x-1\right)}} \\
\iff &\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{1}{2} = (A+B)x + (A-B/2) \\
\iff &A+B=0, \quad A-B/2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On déduit alors $B=-A$ *donc* $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}$. *On a donc établi que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Ces deux termes se primitivent alors à l'aide d'un logarithme, une primitive est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}, \quad F(x) = \frac{1}{3}\left(\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| - \ln|x+1|\right) = \boxed{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+1}\right|}.$$

- $g : x \longmapsto \dfrac{1}{4x^2-4x+1}$

- $h : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

Et enfin, nous rappelons une méthode usuelle concernant les fonctions trigonométriques.

Méthode Calcul d'une primitive avec des fonctions trigonométriques

1. Commencer par linéariser l'expression, à l'aide de nombres complexes si besoin.
2. Primitiver avec les formules usuelles.

Exemple 15

1. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \longmapsto \cos^3 x$.

2. Déterminer, *via* deux méthodes, une primitive de $x \longmapsto \cos^3 x \sin x$ sur un ensemble à préciser.
   - **[Primitivation directe]**
   - **[Linéarisation]**

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Cadre

Dans toute cette section,
- I **désignera un intervalle réel, qui sera appelé le *domaine de définition de l'équation différentielle.***
- **L'entier** n **désignera l'ordre de l'équation différentielle., le plus souvent** $n = 1, 2$**.**

Conformément au programme, nous étudierons mathématiquement uniquement les équations différentielles **linéaires**. En Informatique, nous nous intéresserons à la résolution numérique d'équations différentielles plus générales.

2.1. Généralités

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
- Une *équation différentielle d'ordre n sur* $\mathbb{R}$ toute équation en une fonction inconnue $y \in \mathscr{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, et portant sur $y, y', \ldots, y^{(n)}$.
- *Résoudre* une équation différentielle consiste à déterminer une solution du problème.

Définition 3 | Linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n sur* $\mathbb{R}$ toute équation de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \qquad (\mathrm{E}_n)$$

où $a_i \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n-1]\!]$. La fonction $y \in \mathscr{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est appelée *inconnue* de (E_n). On appelle *solution* de (E_n) toute fonction $y : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t).$$

- Elle est dite à coefficients constants si les fonctions $a_{n-1}, \ldots, a_1$ sont constantes.
- *Résoudre* une équation différentielle consiste à trouver une solution.
- On appelle *courbe intégrale* toute courbe représentative d'une solution.

Il est très important de comprendre que l'on résout ici le problème en une **fonction** y : c'est l'inconnue de notre équation. Vous étiez habitués jusque là à résoudre des équations portant sur des réels ou complexes.

Définition 4 | Homogène

- L'équation (E_n) est dite *homogène*, ou *sans second membre*, si b est la fonction nulle.
- On appelle *équation homogène associée* à (E_n) ou encore *équation sans second membre associée à* (E_n) l'équation suivante :

$$\forall t \in I, \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y \boxed{= 0}. \qquad (H_n)$$

Notation

Dans la suite, nous noterons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E_n), et $\mathscr{S}^0$ l'ensemble des solutions de (H_n).

Remarque 6 (Forme normalisée $\iff$ Forme générale) Une équation de la forme

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = c(t)$$

est encore appelée une équation différentielle linéaire d'ordre n. La forme faisant intervenir un coefficient *1* devant la dérivée s'appelle la *forme normalisée* de l'équation différentielle, elle s'obtient en divisant les deux membres par la fonction a_n sur tout intervalle J où a_n ne s'annule pas,

$$\forall t \in I \cap J, \quad y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}y^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_1(t)}{a_n(t)}y' + \frac{a_0(t)}{a_n(t)}y = \frac{b(t)}{a_n(t)}.$$

Dans la suite tous les résultats seront énoncés pour la forme normalisée, *i.e.* celle des équations (E_n) et (H_n).

Remarque 7 (Caractère $\mathscr{C}^n$ des solutions) Si y est une solution de (E_n), alors $y^{(n)}$ est même continue sur I (*i.e.* $y \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$), puisque $y^{(n)} = b - a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_0 y$ est alors une somme de fonctions continues.

Exemple 16 Préciser les caractéristiques des équations différentielles ci-après.

1. $y' + ty = 0$.

2. $\dfrac{dq}{dt} = 3q$.

3. $2 - xz' = x^2 z''$.

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i y^{(i)} = \pi$.

STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DE (E_n). Mais pourquoi introduire une version « homogène » d'une équation différentielle ? Nous allons constater que les ensembles des solutions de (E_n) et (H_n) possèdent un lien fort.

Théorème 4 | Structure des solutions de l'équation complète

Si $y_{\mathrm{p}} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **une** solution particulière de l'équation complète (E_n), alors *les* solutions de (E_n) sont toutes les fonctions d'expression :

$$y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{p}},$$

où y_{H} est une solution de (H_n). Autrement dit l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_n) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{p}} \,\middle|\, y_{\mathrm{H}} \in \mathscr{S}_0 \right\},$$

où $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des solutions de (H_n).

Solution générale de l'équation COMPLÈTE	=	Solution générale de l'équation HOMOGÈNE	+	Solution PARTICULIÈRE (= une solution quelconque de l'équation complète)

Attention

La preuve ci-dessous exploite très largement la linéarité de l'équation, ce résultat est faux dans le cas contraire.

Preuve (*Point clef — **Faire la différence entre l'ED avec la solution particulière et une solution générale***)

Faisons par exemple la preuve dans le cas $n = 1$.

Résoudre l'équation différentielle (E_n) revient donc à résoudre (H_n). Que sait-on de l'ensemble des solutions de l'homogène $\mathscr{S}_0$? Dans les cas $n = 1, 2$ nous serons capables de déterminer cet ensemble explicitement. De manière générale, on peut justifier qu'il est « stable par combinaison linéaire ».

Proposition 6 | de l'ensemble des solutions de l'homogène

L'ensemble des *solutions* $\mathscr{S}_0$ de (H_n)

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \qquad (\mathrm{H}_n)$$

- est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire pour tout $(f, g) \in \mathscr{S}_0^2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_0$ est encore une solution.
- La fonction nulle est solution de (H_n).

Preuve

- La fonction nulle est solution car dérivable n-fois, et :
$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad 0 + a_{n-1}(t) \times 0 + \cdots + a_1(t) \times 0 + a_0(t) \times 0 = 0.$$
- Soient f, g deux solutions de (H_n), c'est-à-dire pour tout $t \in \mathrm{I}$:
$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = 0,$$
$$g^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)g^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)g'(t) + a_0(t)g(t) = 0.$$
Par linéarité de la dérivation, on obtient pour tout $t \in \mathrm{I}$:
$$\begin{aligned}
&(\lambda f + \mu g)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(\lambda f + \mu g)^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)(\lambda f + \mu g)'(t) + a_0(t)(\lambda f + \mu g)(t) \\
&= \left(\lambda f^{(n)}(t) + \mu g^{(n)}(t)\right) + a_{n-1}(t)\left(\lambda f^{(n-1)}(t) + \mu g^{(n-1)}(t)\right) + \ldots \\
&\qquad + a_1(t)\left(\lambda f'(t) + \mu g'(t)\right) + a_0(t)\left(\lambda f(t) + \mu g(t)\right) \\
&= \lambda\left(f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t)\right) \\
&\qquad + \mu\left(g^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)g^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)g'(t) + a_0(t)g(t)\right) \\
&= \lambda 0 + \mu 0 = 0.
\end{aligned}$$
Ainsi, on a exactement montré que : $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_0$.

PRINCIPE DE SUPERPOSITION. Passons à une autre conséquence de la linénarité : le principe de superposition.

Méthode Principe de superposition

Lorsque le second membre b de (E_n) s'écrit comme une comme une combinaison linéaire fonctions, par exemple $b = \lambda b_1 + \mu b_2$ avec b_i continue pour tout $i \in [\![1, 2]\!]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on peut appliquer le *principe de superposition*. Il s'agit de considérer les deux équations différentielles linéaires :

$$y^{(n)} + a_{n-1}^1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1^1(t)y' + a_0^1(t)y = b_1(t) \qquad (\mathrm{E}_n^1)$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}^2(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1^2(t)y' + a_0^2(t)y = b_2(t) \qquad (\mathrm{E}_n^2)$$

Si l'on a :

- déterminé une solution particulière y_{p}^1 de (E_n^1),
- et une solution particulière y_{p}^2 de (E_n^2),

alors la somme $\lambda y_{\mathrm{p}}^1 + \mu y_{\mathrm{p}}^2$ est une solution particulière de (E_n). Le principe reste naturellement vrai si l'on considère une somme de n fonctions dans le second membre.

Preuve Soient $y_p^1, (y_p^2)$ deux fonctions vérifiant pour tout $t \in I$:

$$(y_p^1)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(y_p^1)^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)(y_p^1)'(t) + a_0(t)(y_p^1)(t) = 0,$$
$$(y_p^2)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(y_p^2)^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)(y_p^2)'(t) + a_0(t)(y_p^2)(t) = 0.$$

Par linéarité de la dérivation, on obtient pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned}
&(\lambda y_p^1 + \mu y_p^2)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(\lambda y_p^1 + \mu y_p^2)^{(n-1)}(t) + \dots \\
&\qquad + a_1(t)(\lambda(y_p^1) + \mu(y_p^2))'(t) + a_0(t)(\lambda y_p^1 + \mu y_p^2)(t) \\
&= \left(\lambda(y_p^1)^{(n)}(t) + \mu(y_p^2)^{(n)}(t)\right) + a_{n-1}(t)\left(\lambda(y_p^1)^{(n-1)}(t) + \mu(y_p^2)^{(n-1)}(t)\right) + \dots \\
&\qquad + a_1(t)(\lambda(y_p^1)'(t) + \mu(y_p^2)'(t)) + a_0(t)(\lambda y_p^1(t) + \mu y_p^2(t)) \\
&= \lambda\left[(y_p^1)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(y_p^1)^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)(y_p^1)'(t) + a_0(t)y_p^1(t)\right] \\
&\qquad + \mu\left[(y_p^2)^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)(y_p^2)^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)(y_p^2)'(t) + a_0(t)y_p^2(t)\right] \\
&= \lambda b_1(t) + \mu b_2(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a exactement montré que : $\lambda y_p^1 + \mu y_p^2$ est une solution particulière de (E_n).

Remarque 8 Le principe de superposition est très utile en physique et en particulier en mécanique. Considérons une solide de masse M soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}(t)$ et $\overrightarrow{F_2}(t)$ que l'on suppose colinéaires à l'axe Ox. Le solide est alors en mouvement rectiligne et sa position au cours du temps $x(t)$ vérifie le principe fondamental de la dynamique :

$$Mx''(t) = F_1(t) + F_2(t).$$

Il est parfois compliqué de résoudre cette équation différentielle. Toutefois le principe de superposition nous dit qu'il suffit de résoudre les équations différentielles

$$Mx''(t) = F_1(t), \quad Mx''(t) = F_2(t)$$

et d'additionner les solutions.

Des exemples d'application seront vues dans les prochaines sections. Maintenant que le résultat général de structure des ensembles de solution est établi, nous allons l'appliquer à l'ordre $n = 1$ et $n = 2$. Tout l'enjeu est alors de savoir :

1. calculer explicitement l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'homogène,
2. déterminer une solution particulière y_p. Pour l'ordre 1, nous aurons une méthode systématique appelée *variation de la constante.*

Définition 5 | Définition pour $n = 1$
On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre sur* $\mathbb{R}$ toute équation de la forme (E_1).

C'est donc une équation du type

$$y' + a(t)y = b(t), \qquad (E_1)$$

où $a, b \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. Rappelons que nous avons également défini la notion d' *équation homogène associée* ou encore *équation sans second membre associée à* (E_1) l'équation suivante :

$$y' + a(t)y = 0. \qquad (H_1)$$

Exemple 17
- $2y' = 3ty$ est homogène d'inconnue $y : t \longmapsto y(t)$,
- $y' + e^x y = x^2\cos(x)$ d'inconnue $y : x \longmapsto y(x)$ L'équation homogène associée est $y' + e^x y = 0$.
- Pour E, τ deux réels, $\tau\dfrac{dv}{dt} + v = E$ d'inconnue $v : t \longmapsto v(t)$ à coefficients constants et second membre constant. La fonction $v_s : t \longmapsto E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ est une solution de cette équation car :

Remarque 9 (Caractère $\mathscr{C}^1$ des solutions) Si y est une solution de (E_1), alors y' est continue sur I, puisque $y' = b - ay$. La fonction y est donc un élément de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Résolution de l'équation homogène. On connaît par un calcul direct l'ensemble des solutions de l'équation (2.2), donné dans le théorème suivant.

Théorème 2 | Résolution de l'équation homogène
L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de (2.2) est :

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \longmapsto Ce^{-A(t)} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{où } A : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est \underline{une} primitive de } a$$

$$= \left\{ t \longmapsto C\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) \middle| C \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{où } t_0 \in I.$$

Preuve *(Point clef — **Multiplier par** e^A**, méthode du « facteur intégrant »**)*
La fonction a étant continue sur I, elle admet une primitive A sur cet intervalle.

Exemple 18 **(Homogènes d'ordre 1)**

1. Résoudre $y' + ty = 0$.

2. Résoudre $\dfrac{dq}{dt} = 3q$.

3. Résoudre $y' - \dfrac{t}{t^2-1}y = 0$.

4. Résoudre $(1+t^2)y' + 4ty = 0$.

Résolution de l'équation complète On applique simplement le théorème déjà démontré sur le sujet : toute solution est obtenue en sommant les solutions de l'homogène et **une** solution particulière.

Théorème 3 | Résolution de l'équation complète
L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ t \in I \longmapsto Ce^{-A(t)} + y_p(t) \middle| C \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{où } A : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est } \underline{\textbf{une}} \text{ primitive de } a.$$

Pour résoudre complètement l'équation différentielle (E_1), il reste donc à déterminer *une* solution particulière y_p de (E_1).

Recherche d'une solution particulière : second membre et coefficients constants. Lorsque second membre et coefficients sont constants, on peut rechercher une solution particulière simplement sous forme d'une constante lorsque $a \neq 0$. Voyons deux exemples.

Exemple 19

- Résoudre $y' + 3y = -1$.

- Résoudre $\tau \dfrac{dv}{dt} + v = E$ où E, τ sont deux réels fixés tels que $\tau \neq 0$.

Exemple 20 Soit $k \in \mathbb{R}^{+\star}$. Résoudre $y' + ky = 2$.

Recherche d'une solution particulière : variation de la constante. Nous commençons par une méthode qui fonctionne toujours dès que le second membre est continu : la *méthode de variation de la constante*. Il s'agit de chercher une solution de la forme des solutions de (2.2), où la *constante* C est remplacée par une **fonction** dérivable $t \in I \longmapsto C(t)$. Nous faisons donc *varier* la constante C au sens propre du terme.

Méthode Variation de la constante

Chercher y_p sous la forme $t \in I \longmapsto C(t)e^{-A(t)}$, où la fonction $C : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et est à déterminer.

Justifions tout d'abord que cette méthode fonctionne toujours.

Preuve Si l'on pose $y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$, pour tout $t \in I$, où C est une fonction dérivable sur I, alors :

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de } (E_1) &\iff (y_p)' + ay_p = b \\
&\iff (Ce^{-A})' + aCe^{-A} = b \\
&\iff C'e^{-A} - CA'e^{-A} + aCe^{-A} = b \\
&\iff C'e^{-A} - Cae^{-A} + aCe^{-A} = b \\
&\iff C'e^{-A} = b \\
&\iff C' = be^{A} \\
&\iff C \text{ est une primitive de } be^{A} \text{ sur I.}
\end{aligned}$$

On est donc ramené à un calcul de primitive. Une fois C déterminé (à une constante additive près!), une solution particulière est donnée sur I par $y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$.
Donc la méthode de variation de la constante fonctionne si et seulement s'il existe une primitive à la fonction be^{A} sur I. Cette dernière existe dès que la $t \longmapsto b(t)e^{A(t)}$ est continue, ce qui est le cas.

Exemple 21 Résoudre : $y' + 3x^2y = e^{x-x^3}$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

Exemple 22 Résoudre $y' + \dfrac{t}{t-1}y = \dfrac{e^{3t}}{t-1}$ sur $]1,\infty[$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

Parfois l'énoncé vous donnera aussi directement une forme sous laquelle chercher une solution particulière.

Exemple 23 Résoudre : $y' + y = e^{-\frac{t}{2}+2}$, en cherchant une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \alpha e^{at+b}$ où α, a et b seront des réels.

Nous savons donc à présent résoudre complètement une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Lorsque l'on ajoute en plus une *condition initiale*, alors il existe une unique solution.

Théorème 4 | Résolution avec condition initiale

Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

- Il existe une et une seule solution au « problème de Cauchy » :
$$\begin{cases} y' + a(t)y &= b(t), \\ y(t_0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
- [H.P] De plus, l'unique solution a pour expression :
$$\forall t \in I, \quad y(t) = e^{A(t_0)-A(t)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(u)-A(t)}b(u)\,du.$$

En résumé, sans condition initiale on a une infinité de solutions. Avec une condition initiale il y a généralement unicité.

Preuve

- Commençons par prouver le second point.
  - On sait déjà que toute solution y_H de l'homogène est de la forme $y_H : t \in I \longmapsto C\,e^{-A(t)}$.
  - On sait aussi d'après la méthode de variation de la constante qu'une solution particulière est de la forme $y_p : t \in I \longmapsto C(t)e^{-A(t)}$ où C est dérivable et vérifie $C' = be^{A}$. La fonction C définie par $C(t) = \int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u}\,du$ convient. *(unique primitive de be^A s'annulant en t_0)*
  - Il existe donc $C \in \mathbb{R}$, tel que :
$$\forall t \in I, \quad y(t) = Ce^{-A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u}\,du \times e^{-A(t)}.$$
  Or, $y(t_0) = Ce^{-A(t_0)} + 0 = y_0$ par hypothèse, donc : $C = e^{A(t_0)}y_0$.
  - On déduit alors :
$$\begin{aligned}\forall t \in I, \quad y(t) &= e^{A(t_0)}y_0e^{-A(t)} + \int_{t_0}^{t} b(u)e^{A(u)}\,du \times e^{-A(t)} \\ &= e^{A(t_0)-A(t)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(u)-A(t)}b(u)\,du.\end{aligned}$$
- L'expression ne dépend pas du choix d'une primitive, d'où l'unicité. En effet, si $B = A + c$

est une autre primitive, avec $c \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathrm{I}, \quad & \mathrm{e}^{\mathrm{B}(t_0)-\mathrm{B}(t)} y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{B}(u)-\mathrm{B}(t)} b(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t_0)+\cancel{c}-\mathrm{A}(t)-\cancel{c}} y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)+\cancel{c}-\mathrm{A}(t)-\cancel{c}} b(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t_0)-\mathrm{A}(t)} y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(u)-\mathrm{A}(t)} b(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Exemple 24 Résoudre $y' - 3y = 5,\ y(0) = 2$.

Exemple 25 On reprend l'Exemple 20, déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 1$.

Utilisation du principe de superposition. La méthode a déjà été présentée dans la section de généralités. La voici appliquée dans le cas de l'ordre 1.

Exemple 26 Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' - 2y = 3\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t}.$$

On cherche donc une solution particulière de ces deux équations différentielles :

$$y' - 2y = 3\mathrm{e}^{t}, \quad y' - 2y = \mathrm{e}^{2t}.$$

- Pour la première, on trouve par variation de la constante : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_1(t) = -3\mathrm{e}^{t}$.
- Dans le second cas $y_2(t) = t\mathrm{e}^{2t}$.

Par principe de superposition, la somme est alors une solution particulière de l'équation différentielle de départ :

$$y_{\mathbf{p}}(t) = t\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2.3. Équations différentielles linéaires du 2^{nd} ordre à coefficients constants

Définition 6 | Définition pour $n = 2$

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre sur* $\mathbb{R}$ toute équation de la forme (E_2).

Cadre

Dans toute la suite de cette sous-section, nous considèrerons des équations différentielles à coefficients constants. [2]

C'est donc une équation du type

$$y'' + ay' + by = c(t) \tag{E_2}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et $c \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Rappelons que nous avons également défini la notion d'*équation homogène associée* ou encore *équation sans second membre associée à* (E_2) l'équation suivante :

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{H_2}$$

2. Ce sont les seules au programme.

Définition 7 | Équation caractéristique
On introduit également l'*équation caractéristique* de (E_2) :
$$r^2 + ar + b = 0, \quad \text{d'inconnue } r \in \mathbb{C}. \qquad \text{(EC)}$$

Remarque 10 (Caractère $\mathscr{C}^2$ des solutions) Si y est une solution de (E_2), alors y'' est continue sur I, puisque $y'' = c - ay' - by$). La fonction y est donc un élément de $\mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

Cadre
Dans la suite de cette sous-section, on se fixe une équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t)$, avec $c : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et $a, b \in \mathbb{R}$.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE Nous savons là encore déterminer facilement l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Nous admettons le résultat.

Théorème 5 | Résolution de l'équation homogène
1. Si (EC) possède deux racines réelles distinctes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \longmapsto \mathrm{A}e^{\alpha t} + \mathrm{B}e^{\beta t} \,\middle|\, (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
2. Si (EC) possède une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, alors
$$\mathscr{S}_0 = \left\{ t \longmapsto e^{\alpha t}(\mathrm{A} + \mathrm{B}t) \,\middle|\, (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
3. Si (EC) possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, alors
$$\begin{aligned}\mathscr{S}_0 &= \left\{ t \longmapsto e^{\alpha t}(\mathrm{A}\cos(\beta t) + \mathrm{B}\sin(\beta t)) \,\middle|\, (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ t \longmapsto e^{\alpha t}\mathrm{A}\cos(\beta t + \varphi) \mid (\mathrm{A}, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\right\}\end{aligned}$$

Preuve Nous admettons l'ensemble du théorème, mais prouvons dans le cas où (EC) possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ que $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$ avec :
$$\mathscr{S} = \left\{ t \longmapsto e^{\alpha t}(\mathrm{A}\cos(\beta t) + \mathrm{B}\sin(\beta t)) \mid (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$\mathscr{S}' = \left\{ t \longmapsto e^{\alpha t}\mathrm{A}\cos(\beta t + \varphi) \mid (\mathrm{A}, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\right\}.$$

$\subset$

$\supset$

Exemple 27 (Homogènes d'ordre 2) Résoudre
1. $y'' - \omega^2 y = 0$ et $y'' + \omega^2 y = 0$ (où ω est un réel non nul).

2. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

3. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Résolution de l'équation complète On applique encore une fois le théorème déjà démontré sur le sujet : toute solution est obtenue en sommet les solutions de l'homogène et **une** solution particulière.

Théorème 5
L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) est :
$$\mathscr{S} = \left\{ y + y_{\mathbf{p}} \,\middle|\, y \in \mathscr{S}_0 \right\}.$$

Détermination de $y_{\mathbf{p}}$: cas de seconds membres constants. Pour résoudre complètement l'équation différentielle (E_2), il reste donc à déterminer *une* solution particulière $y_{\mathbf{p}}$ de (E_1). Le résultat au programme est celui où le second membre **c est constant**.

Remarque 11 Il existe une méthode générale, comme pour le premier ordre, appelée *méthode de variations des constantes*, mais elle n'est pas à notre programme.

Théorème 6 | Solution particulière pour $c \in \mathbb{R}$ une constante
On suppose que le second membre de (E_2) est de la forme
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad c(t) = c \in \mathbb{R}.$$
Alors :
- **si 0 n'est pas racine de (EC)** : on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$,
- **si 0 est racine simple de (EC)** : on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \lambda t, \lambda \in \mathbb{R}$,
- **si 0 est racine double de (EC)** : on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \lambda t^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 28 Déterminer une solution particulière réelle des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants suivantes :
1. $y'' - y' - 2y = 2$.

2. $y'' - 2y' + y = 1$.

3. $\mathrm{LC}\dfrac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2}+\mathrm{RC}\dfrac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}+u_{\mathrm{C}}=\mathrm{E}$ où $\mathrm{E},\mathrm{R},\mathrm{L},\mathrm{C}\in\mathbb{R}$.

Pour des seconds membres plus généraux, l'énoncé vous donnera toujours une forme de solution particulière.

Exemple 29 Déterminer une solution particulière des équations différentielles ci-après.

1. $2y''-y'-y=3\cos(2t)$. *Indication : On recherchera une solution particulière sous la forme* $y_{\mathrm{p}}:t\longmapsto a\cos(2t)+b\sin(2t)$ *avec* a,b *des réels à déterminer*

2. $y''-y=t\mathrm{e}^t$. *Indication : On recherchera une solution particulière sous la forme* $y_{\mathrm{p}}:t\longmapsto\left(at^2+bt+c\right)\mathrm{e}^t$ *avec* a,b,c *des réels à déterminer*

On commence par calculer les dérivées. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$y_{\mathrm{p}}'(t)=\left(at^2+(b+2a)t+(b+c)\right)\mathrm{e}^t$$
$$y_{\mathrm{p}}''(t)=\left(at^2+(b+4a)t+(2a+2b+c)\right)\mathrm{e}^t.$$

Ainsi, y_{p} est solution si et seulement si : $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\left(at^2+(b+4a)t+(2a+2b+c)-at^2-bt-c\right)\cancel{\mathrm{e}^t}=t\cancel{\mathrm{e}^t}.$$

Ou encore, de manière équivalente :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad 4at+(2a+b)=1t+0\iff\begin{cases}a&=\frac{1}{4}\\2a+2b&=0\end{cases}\iff a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{4}.$$

Il n'y a pas de condition sur c, donc on peut prendre $c=0$.

Ainsi : $\boxed{y_{\mathrm{p}}:t\in\mathbb{R}\longmapsto\dfrac{t(t-1)}{4}\mathrm{e}^{-t}}$ est une solution particulière.

Admettant l'existence d'une solution particulière avec un second membre continu d, on peut démontrer l'existence et l'unicité ci-après.

Théorème 7 | Résolution avec condition initiale

Soient $t_0\in\mathrm{I}$, $(y_0,y_0')\in\mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule solution au « problème de CAUCHY » :

$$\begin{cases}y''+ay'+by&=&c(t),\\y(t_0)&=&y_0,\\y'(t_0)&=&y_0'.\end{cases}$$

En particulier, toute solution qui s'annule est identiquement nulle.

Nous admettons ce résultat d'existence et unicité dans le cas de l'ordre 2.

PRINCIPE DE SUPERPOSITION. Le principe de superposition s'applique encore pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants admettant un second membre somme de plusieurs fonctions simples.

TECHNIQUE DU CHANGEMENT DE FONCTION INCONNUE On peut aussi parfois réaliser des changements de fonction inconnue dans les équations différentielles pour se ramener à un type que l'on sait résoudre (exemple typique : passer d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants à une version à coefficients constants, ou encore, comme dans l'exemple ci-dessous, passer d'une équation différentielle non linéaire à une version linéaire). Voyons cela sur un exemple avant de systématiser dans une méthode.

Méthode Résolution par changement de fonction inconnue

Soit (E) une équation différentielle en une fonction y que l'on ne sait pas résoudre *a priori*.

1. Soit une fonction z dépendant de y donnée par l'exercice (généralement « de la forme $z(t) = y \circ \varphi(t)$ »).
2. Calculer les dérivées successives $z, z', z'', \dots$ (en fonction de l'ordre de l'équation différentielle en y).
3. Évaluer (E) en $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Combiner **2)** et **3)** pour trouver une équation différentielle en z.

Exemple 30 (Non linéaire à linéaire) Résoudre l'équation différentielle (E) $\quad y' = y \ln y$. *<u>Indication :</u> On pourra réaliser le changement de fonction inconnue $y(t) = e^{z(t)}$ pour tout t*

Résumé

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit y une solution de (E). Alors posons $z = \ln \circ y$. On a vérifié que z est solution d'une équation différentielle (E′) résoluble.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit z une solution de (E′), alors $y = \exp \circ z$ est une solution de (E).
En d'autres termes, il y a une correspondance bijective entre les solutions de (E) et (E′) — il suffit donc de résoudre l'une ou l'autre pour toutes les avoir.

Exemple 31 (Non constants à constants) Résoudre $(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2) y' + 4y = 0$ sur $\biguplus_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. *<u>Indication :</u> On pourra réaliser le changement de fonction inconnue $z(x) = y(\tan x)$ pour tout x*

3. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître la définition de l'intégrale de fonctions continues sur un segment
2. Concernant les primitives :
   - connaître les primitives usuelles ☐
   - savoir déterminer des primitives dans les cas de dérivation classique ☐
   - connaître les opérations sur les primitives ☐
3. Connaître les différentes propriétés de l'intégrale :
   - linéarité et relation de CHASLES ☐
   - positivité et croissance de l'intégrale ☐
4. Concernant les méthodes de calcul d'intégrales :
   - l'intégration par parties ☐
   - le changement de variable ☐
5. Concernant les équations différentielles :
   - savoir résoudre l'homogène d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 ☐
   - savoir effectuer une variation de la constante pour l'ordre 1 ☐
   - savoir trouver une solution particulière pour l'ordre 2 lorsque le second membre est constant ☐
   - savoir que lorsqu'aucune condition initiale n'est imposée, on a une infinité de solution, on conclut en donnant un ensemble ☐
   - savoir que lorsqu'une condition initiale est imposée, on conclut en donnant une fonction solution ☐

3.1. Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 1 | **Primitives par calcul direct** Solution Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto \cos(3x)$
2. $x \longmapsto \cos^3(x)$
3. $x \longmapsto \cos(x)\sin^4(x)$
4. $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
5. $x \longmapsto \tan(x)$
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
7. $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+1}$
9. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
10. $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

11. $x \longmapsto \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$ *Indication : On commencera par chercher $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{5x-12}{x(x-4)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-4}$ pour tout x dans un ensemble à préciser*

Exercice 2 | **Primitives avec arctan** Solution Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+3}$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+16}$
3. $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
4. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
6. $x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$

Exercice 3 | **Primitives avec intégration par parties** Solution Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto x^3\cos(6x)$
2. $x \longmapsto x\cos^2(x)$
3. $x \longmapsto x^2 e^{-x}$
4. $x \longmapsto x^3 e^{-x^2}$

Exercice 4 | **Intégrales par calcul direct** Solution Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(x)|\,dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$

Exercice 5 | **Intégrales avec intégration par parties** Solution Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n\,dx,\ n \in \mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_1^t x^n\ln(x)\,dx,\ n \in \mathbb{N},\ t>0$

Exercice 6 | **Intégrales par changement de variable** Solution Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x)+\tan^3(x))\,dx \quad (u=\tan x)$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx \quad (u=\cos x)$
3. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\,dt,\ a>0 \quad (t=a\sin u)$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx \quad (t=1+x^3)$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \quad (t=e^x)$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{2+x}}{1+x}\,dx \quad (x=u^2-2)$

Exercice 7 | **Primitive par changement de variable** Solution À l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses, calculer une primitive des fonctions d'une variable réelle suivantes.

1. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^4} \quad (u=t^2)$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\sqrt{x}} \quad (u=2+\sqrt{t})$
3. $x \longmapsto e^{2x}\sin(e^x) \quad (u=e^t)$
4. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x} \quad (u=\sqrt{t})$
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)} \quad (u=\tan(t))$
6. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)} \quad (u=\sqrt{\sin(t)})$
7. $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+e^{-x}} \quad (u=e^t)$

Exercice 8 | **Intégrales de fractions rationnelles (1)** Solution Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$ *On pourra commencer par effectuer le changement $u=e^x$*
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

Exercice 9 | **Intégrales de fractions rationnelles (2)** Solution

1. Montrer que :
$$\forall x \in [-1,1],\quad \frac{x+1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\times\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{x^2+4x+5},$$
puis que : $\dfrac{1}{x^2+4x+5} = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}$. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx$.

2. Avec la même méthode, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{2x-x^2-4}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 | ♥ Solution

1. Soit f continue sur $[a,b]$. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x.$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

3.2. Équations différentielles du premier ordre

Exercice 11 | Solution Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$
3. $x^2y' - y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
4. $xy' - (1+2x)y = -x^2\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
5. $y' - 2xy = -(2x-1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$
6. $y' - \dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}y = 2$ sur $]1,+\infty[$
7. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$
8. $y' + \dfrac{2}{x^2-1}y = x$ sur $]1,+\infty[$

Exercice 12 | Solution Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
2. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$
3. $y' - y = x^2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$
4. $xy' + (1-2x)y = 1$
5. $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$
6. $(1-x^2)y' - 2xy = 1$
7. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. *Indication : On pourra chercher une solution particulière affine.*

Exercice 13 | **Avec conditions initiales** Solution Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de résolution.

1. $y'\cos x - y\sin x = 0, \quad y(0) = 1$
2. $y' + xy = 2x, \quad y(0) = 1$

3.3. Équations différentielles du second ordre

Exercice 14 | Solution Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$
2. $4y'' - 4y' + y = 4$
3. $y'' - 2y' + 5y = 5$
4. $y'' - 2y' = 2$

Exercice 15 | **Avec second membres particuliers** Solution Déterminer une solution particulière des équations différentielles suivantes.

1. $y'' - y' + y = t^2 + 6$. On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = at^2 + bt + c$ avec a, b, c trois réls.
2. $y'' + 4y = -\mathrm{e}^{2t}$. On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = a\mathrm{e}^{2t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. $y'' + y = \cos(t) + \sin(t)$. On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = t(a\cos(t) + b\sin(t))$, avec a, b deux réls.
4. $y'' + y' - 2y = 2\mathrm{e}^t$. On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = at\mathrm{e}^t$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 | **Avec conditions initiales** Solution Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = 2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Indication : On recherchera, pour les deux équations différentielles, une solution particulière sous forme d'une constante

3.4. Techniques particulières

Exercice 17 | ♥ **Changement de fonction inconnue** Solution Résoudre
$$x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$
sur $\mathbb{R}^{+\star}$ en posant $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 | **Changement de fonction inconnue** Solution Résoudre l'équation différentielle
$$x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$$
sur $\mathbb{R}^{+\star}$ en posant $z(x) = x^2y(x)$.

Exercice 19 | ♥ **Systèmes différentiels** Solution Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des systèmes différentiels suivants

1. $\begin{cases} x' &= 4x - 3y \\ y' &= 2x - y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

On déterminera une équation différentielle du second ordre dont y est solution. Pour le second système, on distinguera des cas selon la valeur de θ.

3.5. Contexte physique/chimique

Exercice 20 | **Circuits électriques** Solution

1. **[Circuit RC]** On place en série un condensateur de capacité C et une résistance R, alimentés par un générateur de force électromotrice V. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation
$$q'(t) + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{V}{R}.$$
Calculer l'expression explicite de q, sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de q à l'aide de Python (>_).
2. **[Circuit LC]** On place en série un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L, alimentés par un générateur de force électromotrice V. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation
$$q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = \frac{V}{L}.$$
Calculer l'expression explicite de q, sachant que la charge initiale est nulle et que $q'(0) = 0$, et tracer le graphe de q à l'aide de Python (>_).

Exercice 21 | **Loi de Fick** Solution Une cellule est plongé dans une solution de potassium de concentration c_p. On note $c(t)$ la concentration de potassium dans la cellule à l'instant t, et on suppose que $c(0) = 0$. D'après la loi de Fick, la vitesse de variation de la concentration de potassium dans la cellule est proportionnelle au gradient de concentration $c_p - c(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante τ homogène à un temps telle que : $\quad c'(t) = \dfrac{c_p - c(t)}{\tau}$.
Déterminer $c(t)$ et tracer le graphe de c.

Exercice 22 | **Datation au carbone** 14 Solution La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'anné t, y vérifie l'équation différentielle
$$y'(t) = -ky(t),$$
où $k = 1.238 \times 10^{-4}\,\mathrm{an}^{-1}$ est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de $y(t)$ en fonction du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

Exercice 23 | **Cinétique chimique d'ordre 1** Solution On considère la réaction chimique d'équation bilan : $2N_2O_5 \Longrightarrow 4NO_2 + O_2$. Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par $v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d[N_2O_5]}{dt}$ vérifie l'équation : $\quad v = k[N_2O_5]$.
En posant $y(t) = [N_2O_5](t)$, et en notant $c_0 = y(0)$, donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe. En déduire le temps de demi-réaction.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) Énoncé On rappelle que les primitives sont toutes définies à une constante près. Ici je ne fais pas apparaître les constantes que je prends toujours égales à 0.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \dfrac{\sin(3x)}{3}}$: Primitive usuelle.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \dfrac{\sin(3x)}{12} + \dfrac{3}{4}\sin x = \sin(x) - \dfrac{\sin^3(x)}{3}}$: Linéarisation ou utilisation du fait que la puissance est impaire pour faire apparaître la forme $u'u^2$.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \dfrac{\sin^5(x)}{5}}$: Reconnaître la forme $u'u^4$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{\cos x}}$: on reconnaît une primitive de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$.
5. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = -\ln|\cos x| = -\ln(\cos x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $-\dfrac{u'}{u}$.
6. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. Il existe donc F une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = \ln|\ln x| = \ln(\ln x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{u}$.
7. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2 > 0$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \sqrt{1+x^2}}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
8. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes strictements positifs. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = x - \ln|e^x + 1| = x - \ln(e^x + 1)}$: On utilise l'astuce $1 = 1 + e^x - e^x$ puis on coupe en deux et on reconnaît sur l'un des deux bouts : $\dfrac{u'}{u}$.
9. La fonction est continue sur $]1,+\infty[$. Il existe donc F une primitive sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$: $\boxed{F(x) = 2\sqrt{x-1}}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
10. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3,1\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $]-3,1[$ et pour tout $x \in]-3,1[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right| = -\ln(-x^2-2x+3)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$.
11. * La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,4\}$. Il existe donc F une primitive sur par exemple $]-\infty,0[$ et pour tout $x \in]-\infty,0[$: $\boxed{F(x) = 3\ln|x| + 2\ln|x-4| = 3\ln(-x) + 2\ln(4-x)}$: on commence par chercher $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{5x-12}{x(x-4)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-4}$.

Solution (exercice 2) Énoncé

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ en mettant le 3 en facteur au dénominateur.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{4}\arctan\left(\dfrac{x}{4}\right)}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ après avoir mis 16 en facteur au dénominateur.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes strictement positifs. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \arctan(e^x)}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \arctan(\sin x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$.
5. La fonction est continue sur $]0,+\infty[$. Il existe donc F une primitive sur $]0,+\infty[$

et pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\boxed{F(x) = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ en écrivant que : $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$ et en remarquant que la dérivé de la racine carré est bien $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. La fonction est continue sur $]-\infty, 2\ln 2[$ car : $4 - e^x > 0 \iff 2\ln 2 > x$. Il existe donc F une primitive sur $]-\infty, 2\ln 2[$ et pour tout $x \in]-\infty, 2\ln 2[$: $\boxed{F(x) = -2\sqrt{4 - e^x}}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Solution (exercice 3) Énoncé Dans tous ces exemples, on ne peut pas calculer directement une primitive... L'idé alors d'exprimer cette primitive sous la forme d'une intégrale pour pouvoir la calculer plus facilement. On ne détaille pas tous les calculs, seulement des indications pour guider l'intégration par parties.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{F(x) = \int_0^x t^3 \cos(6t)\,dt = \frac{x^3\sin(6x)}{6} + \frac{x^2\cos(6x)}{12} - \frac{x\sin(6x)}{36} - \frac{\cos(6x)}{6^3}}.$$
Trois intégration par parties en dérivant le polynôme.

2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x t\cos(2t)\,dt + \frac{x^2}{4} = \frac{x\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}}.$$
Linéarisation du cosinus carré puis une intégration par parties.

3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{F(x) = \int_0^x \arctan(t)\,dt = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}.$$
1 intégration par parties en dérivant la fonction arctangente et en intégrant 1 puis on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.

4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\,dt = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}}.$$
2 intégration par parties en dérivant le polynôme.

5. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{F(x) = \int_0^x t^3 e^{-t^2}\,dt = -\frac{(x^2+1)e^{-x^2}}{2}}.$$
1 intégration par parties en dérivant le polynôme $t \longmapsto t^2$ et en intégrant $t \longmapsto t e^{-t^2}$ où on reconnaît $u'e^u$ (ici on commence par écrire que $t^3 = t^2 \times t$). Puis dans la nouvelle intégrale de l'intégration par parties, on reconnaît encore la forme $u'e^u$.

Solution (exercice 4) Énoncé

1. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est continue sur $[2,3]$ comme somme et quotient de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$ et ainsi $\boxed{I = -\ln 2}$.
2. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$ est continue sur $[2,3]$ comme somme et quotient de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ et ainsi $\boxed{I = \dfrac{1}{2}}$.
3. La fonction $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On reconnaît la forme $u'u$ et ainsi $\boxed{I = \dfrac{1}{2}}$.
4. La fonction $f : x \longmapsto |\cos(x)|$ est continue sur $[0,\pi]$ comme composé de fonctions donc l'intégrale I existe. On utilise le théorème de CHASLES pour couper en deux l'intégrale et ainsi pouvoir enlever la valeur absolue. Ainsi on a :
$$\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,dx = 2.}$$
5. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $[1,2]$ comme quotient de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On reconnaît la forme $u'u$ et ainsi $\boxed{I = \dfrac{(\ln 2)^2}{2}}$.
6. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On utilise alors l'astuce "$-1+1$" et on obtient que :
$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2-1+1}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$
Une primitive est alors $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + \ln|1+x|$ et donc : $\boxed{I = -\dfrac{1}{2} + \ln(2)}$.

Solution (exercice 5) Énoncé Je ne donne là encore que les idés de la méthode et le résultat mais toute intégration par parties doit être correctement rédigé, en particulier il faut à chaque fois justifier que les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, comme nous l'avons fait dans les exemples du cours.

1. La fonction $f: x \longmapsto x\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,\pi]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On dérive le polynôme et on obtient par intégration par parties que : $\boxed{\mathrm{I}=-2}$.
2. La fonction $f: x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ dont sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On dérive le polynôme et on obtient par intégration par parties que : $\boxed{\mathrm{I}=\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{4}}$.
3. La fonction $f: x \longmapsto x(1-x)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On dérive le polynôme de degré 1 et on intègre la fonction $x \longmapsto (1-x)^n$ dont une primitive est de la forme $\mathrm{F}: x \longmapsto -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. On obtient alors par intégration par parties : $\mathrm{I}=0+\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ car une primitive de $x \longmapsto (1-x)^{n+1}$ est $\boxed{\mathrm{F}: x \longmapsto -\dfrac{(1-x)^{n+2}}{n+2}}$.
4. La fonction $f: x \longmapsto x^n\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc sur $[1,t]$ ou $[1,t]$ car $t>0$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On dérive la fonction logarithme népérien et on intègre la fonction $x \longmapsto x^n$ dont une primitive est de la forme $\mathrm{F}: x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient alors par intégration par parties : $\boxed{\mathrm{I}=\dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_1^t x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{t^{n+1}\ln t}{n+1}-\dfrac{t^{n+1}-1}{(n+1)^2}}$.

Solution (exercice 6) Énoncé

1. La fonction $x \longmapsto \tan(x)+\tan^3(x)$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ comme composé et somme de fonctions continues. Donc I existe.
   Calculons I grâce à un changement de variable : on pose $u=\tan x$, $\mathrm{d}u=(1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x=$. Donc :
   $$(\tan(x)+\tan^3(x))\,\mathrm{d}x=\tan(x)(1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x.$$
   De plus $\varphi: x \longmapsto \tan(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ comme fonction usuelle. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que : $\boxed{\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^1 u\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}}$.
2. La fonction $x \longmapsto \sin^3(x)\cos^2(x)$ est continue sur $[0,\pi]$ comme composé et produit de fonctions continues. Donc I existe.
   Calculons I grâce à un changement de variable : $u=\cos x$, $\mathrm{d}u=-\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Donc :
   $$\sin^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x=-u^2(1-u^2)\,\mathrm{d}u.$$
   On a $x=0 \implies u=\cos(0)=1$, et $x=\pi \implies u=\cos(\pi)=-1$. De plus $\varphi: x \longmapsto \cos(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ comme fonction usuelle.
   Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
   $$\boxed{\mathrm{I}=\int_1^{-1} -u^2(1-u^2)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{15}}.$$
3. La fonction $t \longmapsto \sqrt{1-\dfrac{t^2}{a^2}}$ est continue sur $[0,a]$ comme quotient, somme et composé de fonctions continues. Donc I existe.
   Calculons I grâce à un changement de variable. On pose $t=a\sin u$, $\mathrm{d}t=a\cos(u)\,\mathrm{d}u$, et :
   $$\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\,\mathrm{d}t=a\cos u\,|\cos u|\,\mathrm{d}u.$$
   On a $t=0 \iff a\sin u=0 \iff u=0$, et $t=a \iff a\sin u=a \iff u=\dfrac{\pi}{2}$ si $u\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. De plus $\varphi: u \longmapsto a\sin(u)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme fonction usuelle.
   Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
   $$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos u\,|\cos u|\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 u\,\mathrm{d}u=\boxed{\frac{a\pi}{4}}.$$
   On a utilisé ici le fait que le cosinus est positif sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et on a ensuite linéarisé le carré en utilisant le formulaire de trigonométrie.
4. La fonction $x \longmapsto x^2\sqrt{1+x^3}$ est continue sur $[0,1]$ comme composé et produit de fonctions continues. Donc I existe.
   Calculons I grâce à un changement de variable : $t=1+x^3$, $\mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x$, $x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{t}}{3}\mathrm{d}t$. On a $x=0 \implies t=1$, et $x=1 \implies t=2$. La fonction $\varphi: x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ comme fonction usuelle.
   Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
   $$\mathrm{I}=\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{3}\,\mathrm{d}t=\boxed{\frac{4\sqrt{2}-2}{9}}.$$
5. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ est continue sur $[0,1]$ comme composé, somme et produit de fonctions continues. Donc I existe.
   Calculons I grâce à un changement de variable. On pose $t=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

$\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. On a $x=0 \implies t=1$, et $x=1 \implies t=e$. La fonction $\varphi : x \longmapsto e^x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ comme fonction usuelle.
Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{I = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \arctan e - \frac{\pi}{4}}.$$

6. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2+x}}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$ comme composé, somme et quotient de fonctions continues. Donc I existe.
Calculons I grâce à un changement de variable. On a $x = u^2-2$, $dx = 2u\,du$, donc :

$$\frac{\sqrt{2+x}}{1+x}\,dx = \frac{2u\,|u|}{u^2-1}\,du = \frac{2u\,|u|}{u^2-1}\,du.$$

En nouvelles bornes on peut choisir $u=\sqrt{2}$ et $u=\sqrt{3}$. La fonction $\varphi : u \longmapsto u^2-1$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$ comme fonction usuelle. D'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\begin{aligned} I &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{u^2}{u^2-1}\,du \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du \\ &= \boxed{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)}. \end{aligned}$$

Solution (exercice 7) Énoncé

1.
- Existence : la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^4}\,dt$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& t^2 \\ du &=& 2t\,dt \\ \dfrac{t}{1+t^4}\,dt &=& \dfrac{du}{2(1+u^2)}. \end{array}\right.$
  - ◇ On a $t=0 \implies u=0$, et $t=x \implies u=x^2$.
  - ◇ On a :
    - $\varphi : t \longmapsto t^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
    - $u \longmapsto \dfrac{1}{2(1+u^2)}$ est continue sur $[0,x^2]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x) = \int_0^{x^2} \frac{du}{2(1+u^2)} = \frac{\arctan(x^2)}{2}}.$$

2.
- Existence : la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+\sqrt{t}}\,dt$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& 2+\sqrt{t} \\ du &=& \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \iff 2(u-2)\,du = dt\Big(\text{car}\sqrt{t}=u-2\Big)\dfrac{1}{2+\sqrt{t}} \\ dt &=& \dfrac{2(u-2)}{u}\,du. \end{array}\right.$
  - ◇ On a $t=0 \implies u=2$, et $t=x \implies u=2+\sqrt{x}$.
  - ◇ On a :
    - $\varphi : t \longmapsto 2+\sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
    - $u \longmapsto \dfrac{2(u-2)}{u}$ est continue sur $[2,2+\sqrt{x}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x) = 2\int_2^{2+\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{u}\right)du = 2\sqrt{x}-4\ln\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}.$$

3.
- Existence : la fonction $x \longmapsto e^{2x}\sin(e^x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composé et produit de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t}\sin(e^t)\,dt$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& e^t \\ du &=& e^t\,dt \\ e^{2t}\sin(e^t)\,dt &=& u\sin(u)\,du. \end{array}\right.$
  - ◇ On a $t=0 \implies u=1$, et $t=x \implies u=e^x$.
  - ◇ On a :
    - $\varphi : t \longmapsto e^t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
    - $u \longmapsto u\sin(u)$ est continue sur $[1,e^x]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_1^{e^x} u\sin u\,du=-x\cos x+\sin x+\cos(1)-\sin(1)},$$

en faisant une intégration par parties.

4. • Existence : la fonction $x\longmapsto\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u&=&\sqrt{t}\\ du&=&\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}\\ \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt&=&\dfrac{2u^2}{1+u^2}\,du.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0\Longrightarrow u=0$, et $t=x\Longrightarrow u=\sqrt{x}$.

◇ On a :

– $\varphi: t\longmapsto\sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.

– $t\longmapsto\dfrac{2u^2}{1+u^2}$ est continue sur $[0,\sqrt{x}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{2u^2}{1+u^2}\,dt=2(\sqrt{x}-\arctan(\sqrt{x}))},$$

en utilisant l'astuce $u^2=1+u^2-1$.

5. • Existence : la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{\cos^4(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur par exemple l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\cos^4(t)}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u&=&\tan(t)\\ du&=&\dfrac{dt}{\cos^2(t)}\\ \dfrac{dt}{\cos^4(t)}&=&(1+u^2)\,du.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0\Longrightarrow u=0$, et $t=x\Longrightarrow u=\tan x$.

◇ On a :

– $\varphi: t\longmapsto\tan(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.

– $u\longmapsto 1+u^2$ est continue sur $[0,\tan(x)]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_0^{\tan(x)}(1+u^2)\,du=\tan(x)+\frac{1}{3}\tan^3(x)}.$$

6. • Existence : la fonction $x\longmapsto\dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ est continue sur par exemple $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall X\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sqrt{\sin(t)}}{\cos(t)}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u&=&\sqrt{\sin(t)}\\ du&=&\dfrac{\cos(t)\,dt}{2\sqrt{\sin(t)}}\\ \dfrac{\sqrt{\sin(t)}}{\cos(t)}\,dt&=&\dfrac{2\sin(t)}{\cos^2(t)}\dfrac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}\,dt\\ &=&\dfrac{2\sin(t)}{1-\sin^2(t)}\dfrac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}\,dt=\dfrac{2u^2}{1-u^4}\,du.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0\Longrightarrow u=0$, et $t=x\Longrightarrow u=\sqrt{\sin(x)}$.

◇ On a :

– $\varphi: t\longmapsto\sqrt{\sin(t)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.

– $u\longmapsto\dfrac{2u^2}{1-u^4}$ est continue sur $[0,\sqrt{\sin(x)}]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_0^{\sqrt{\sin(x)}}\frac{2u^2}{1-u^4}\,du=-\arctan(\sqrt{\sin x})+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{\sin(x)}}{1+\sqrt{\sin(x)}}\right)},$$

en écrivant que $\dfrac{u^2}{1-u^4}=\dfrac{A}{1-u^2}+\dfrac{B}{1+u^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-u^2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+u^2}$ puis en écrivant encore $\dfrac{1}{1-u^2}=\dfrac{C}{1-u}+\dfrac{D}{1+u}$.

7. • Existence : la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composé, somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\begin{cases} u &= e^t \\ du &= e^t\,dt \\ \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt &= \dfrac{du}{1+u^2}. \end{cases}$

◇ On a $t=0 \Longrightarrow u=1$, et $t=x \Longrightarrow u=e^x$.

◇ On a :

– $\varphi : t \longmapsto e^t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.

– $u \longmapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue sur $[1,e^x]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_1^{e^x}\frac{du}{1+u^2}=\arctan(e^x)-\frac{\pi}{4}}.$$

Solution (exercice 8) Énoncé

1. • La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif). Ainsi I existe.
   • On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$ en posant $u(x)=x^2+x+1$.
   • Calcul : $\boxed{I=\left[\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_0^1=\ln(3)}$.
2. • La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2-1}$ est continue sur $[2,3]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $[2,3]$ (les racines étant 1 et -1). Ainsi I existe.
   • On cherche A et B réls tels que : $\dfrac{x+3}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.
   • Calcul : $\boxed{I=[2\ln(|x-1|)-\ln(|x+1|)]_2^3=\ln 3}$.
3. • La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}$ est continue sur $[0,\ln 2]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ comme somme de trois termes strictement positifs. Ainsi I existe.
   • On commence par faire un changement de variable : $u=e^x$, $du=e^x\,dx$, $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx=\dfrac{u}{u^2+3u+2}\,du$. On a $x=0 \Longrightarrow u=1$, et $x=\ln 2 \Longrightarrow u=2$. La fonction $\varphi : x \longmapsto e^x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\ln 2]$ comme fonction usuelle. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
   $$I=\int_1^2\frac{u}{u^2+3u+2}\,du.$$
   • On calcule I à présent. On a $\Delta=1>0$ et les deux racines sont : -2 et -1 et ainsi on cherche deux réls A et B tels que :
   $$\frac{u}{u^2+3u+2}=\frac{A}{u+2}+\frac{B}{u+1}.$$
   On obtient que : $\dfrac{u}{u^2+3u+2}=\dfrac{2}{u+2}-\dfrac{1}{u+1}$
   • Ainsi, on a : $\boxed{I=5\ln(2)-3\ln(3)}$.
4. • La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi I existe bien.
   • ◇ On utilise l'astuce du $+1-1$: $\dfrac{x}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.
   ◇ Ainsi, on a : $\boxed{I=\left[\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1=\ln(2)-\dfrac{1}{2}}$.

Solution (exercice 9) Énoncé

1. Les égalités sur les fractions se prouvent simplement par calculs directs. Passons au calcul des intégrales.
   • La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+4x+5}$ est continue sur $[-1,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas (discriminant négatif). Ainsi I existe bien.
   • On fait apparaître $\dfrac{u'}{u}$:
   $$I=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}\times\frac{2x+4}{x^2+4x+5}-\frac{1}{x^2+4x+5}\right)dx=\ln(\sqrt{5})-\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$
   • On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :
   $$I=\ln(\sqrt{5})-\int_{-1}^1\frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx.$$
   • On fait apparaître la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$, en posant $u(x)=x+2$.
   Ainsi $\boxed{I=\ln(\sqrt{5})-[\arctan(x+2)]_{-1}^1=\ln(\sqrt{5})+\dfrac{\pi}{4}-\arctan(3)}$.
2. • La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{2x-x^2-4}$ est continue sur $[0,2]$ comme quotient de fonctions polynomiales et car $\Delta=-12<0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Ainsi I existe.
   • On applique alors la méthode suivante.
   ◇ On fait apparaître $\dfrac{u'}{u}$:
   $$I=\int_0^2\left(-\frac{-2x+2}{-x^2+2x-4}+\frac{3}{-x^2+2x-4}\right)dx=0-3\int_0^2\frac{1}{x^2-2x+4}\,dx.$$
   ◇ On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :

$$\mathrm{I} = -3\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2+3}\,\mathrm{d}x.$$

◇ On fait apparaître la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$:

$$\mathrm{I} = -\int_0^2 \frac{1}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{3}\int_0^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^2 = \boxed{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Solution (exercice 10) Énoncé

1. La fonction f est continue sur $[a,b]$ par hypothèse et ainsi les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(a+b-x)$ sont elles aussi continues sur $[a,b]$ comme composé de fonctions continues pour la deuxième. Ainsi les deux intégrales existent bien.
Partons par exemple de $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$ et vérifions en faisant un changement de variable que cette intégrale vaut bien $\displaystyle\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y$.
On pose $y = a+b-x$, $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$, donc $f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = -f(y)\,\mathrm{d}y$. Et $x = a \Longrightarrow y = b$, et $x = b \Longrightarrow y = a$, la fonction $\varphi : x \longmapsto a+b-x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ comme fonction usuelle. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a (-f(y))\,\mathrm{d}y = \boxed{\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y}.$$
On obtient bien le résultat cherché.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est bien continue sur $[0,\pi]$ comme composé, somme, produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ existe bien et on est bien sous l'hypothèse du résultat de la question précédente. Ainsi, on obtient en utilisant la question précédente que :
$$\mathrm{I} = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x - \mathrm{i}$$
en utilisant le cercle trigonométrique. Ainsi, on a : $2\mathrm{i} = \pi\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$ et on reconnaît alors une primitive usuelle et on obtient donc :
$$2\mathrm{i} = -\pi\left[\arctan(\cos(x))\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$
Ainsi, on vient de montrer que $\boxed{\mathrm{I} = \dfrac{\pi^2}{4}}$.

Solution (exercice 11) Énoncé Je ne détaille pas tous les calculs.

1. **Résolution de l'homogène.** Résolution de l'équation homogène associé : $y' - 2y = 0$. La fonction $a : x \longmapsto a(x) = -2$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}(x) = -2x$. On en déduit : $\mathscr{S}_0 = \left\{x \longmapsto \mathrm{C}e^{2x} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$
Recherche d'une solution particulière. Comme la fonction a est constante et que le second membre est de type polynôme, on peut chercher cette solution sous la forme : $y^{\mathrm{p}}(x) = ax^2+bx+c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On obtient ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ que : $-2ax^2+(-2b+2a)x+b-2c = x+x^2$. Par identification des coefficients, on obtient :
$$\begin{cases} -2a &= 1 \\ -2b+2a &= 1 \\ b-2x &= 0. \end{cases}$$
Ainsi, on obtient que : $y^{\mathrm{p}}(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{2}$.
Conclusion. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto \mathrm{C}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}}$
2. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. Comme on a $1+x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, il est équivalent de résoudre $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Résolution de l'homogène. La fonction $a : x \longmapsto a(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2 > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif et ainsi on a toujours $1+x^2 \neq 0$. Donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}(x) = \ln\left|1+x^2\right| = \ln(1+x^2)$. On a de plus $e^{-\ln(1+x^2)} = \dfrac{1}{1+x^2}$. Donc : $\mathscr{S}_0 = \left\{x \longmapsto \dfrac{\mathrm{C}}{1+x^2} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$.
Recherche d'une solution particulière. On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y^{\mathrm{p}}(x) = \dfrac{\mathrm{C}(x)}{1+x^2}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi y^{p} est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on obtient :
$$(y^{\mathrm{p}})'(x) + \frac{2x}{1+x^2}y^{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{1+x^2} \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{C}'(x)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \Longleftrightarrow \mathrm{C}'(x) = 1,$$
ainsi on peut prendre $\mathrm{C}(x) = x$, et donc $y^{\mathrm{p}}(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Conclusion. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto \frac{C+x}{1+x^2} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$

3. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. Comme on la résout sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on a : $x^2 \neq 0$ et ainsi il est équivalent de résoudre : $y' - \frac{y}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$.

Résolution de l'homogène. La fonction $a : x \longmapsto a(x) = -\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $A(x) = \frac{1}{x}$.
On a donc : $\mathscr{S}_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto Ce^{-\frac{1}{x}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$

Recherche d'une solution particulière. En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_(x) = C(x)e^{-\frac{1}{x}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi y_1 est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on obtient :

$$(y^{\mathbf{p}})'(x) - \frac{y^{\mathbf{p}}(x)}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \iff C'(x) = \frac{1}{x^2}$$

en simplifiant par $e^{-\frac{1}{x}} \neq 0$. Ainsi pour tout $x > 0$: $C(x) = -\frac{1}{x}$. Ainsi : $y^{\mathbf{p}}(x) = -\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ est une solution particulière.

Conclusion. La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto \left(C - \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$

4. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Cxe^{2x} + (x^2 - x)e^x \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$

5. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Ce^{x^2} + e^x \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$

6. **Résolution de l'homogène.** La fonction $a : x \longmapsto a(x) = -\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}$ est continue sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc il existe une primitive A de a sur $]1, +\infty[$. Calculons une primitive de a : pour cela, on écrit a sous la forme

$$a(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2 - 1}.$$

Par identification, on obtient $\alpha = 1$ $\beta = -2$ et $\gamma = 0$, donc on a $a(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2-1}$. Une primitive de a sur $]1, +\infty[$ est donc $A(x) = \ln|x| - \ln\left|x^2-1\right| = \ln x - \ln(x^2-1)$. On en déduit $e^{-A(x)} = e^{-\ln x + \ln(x^2-1)} = \frac{x^2-1}{x}$. On obtient donc : $\mathscr{S}_0 = \left\{x \in]1, \infty[\longmapsto C\frac{x^2-1}{x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y^{\mathbf{p}}(x) = C\frac{x^2-1}{x}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi $y^{\mathbf{p}}$ est bien dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in]1, +\infty[$, on obtient :

$$(y^{\mathbf{p}})' - \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}y^{\mathbf{p}} = 2 \iff C'(x)\frac{x^2-1}{x} = 2 \iff C'(x) = \frac{2x}{x^2-1},$$

ainsi on peut prendre $C(x) = \ln\left|x^2-1\right| = \ln(x^2-1)$ sur $]1, +\infty[$, et on a $y^{\mathbf{p}}(x) = \ln(x^2-1)\frac{x^2-1}{x}$.

Conclusion. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]1, \infty[\longmapsto (C + \ln(x^2-1))\frac{x^2-1}{x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

7. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Ce^{-\frac{1}{12}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

8. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]1, +\infty[\longmapsto \left(C + \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln(x+1)\right)\frac{x+1}{x-1} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

Solution (exercice 12) Énoncé Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

1. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto (C+x)(1+x^2) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

2. On se place par exemple sur $]0, +\infty[$, la résolution est similaire sur $]-\infty, 0[$.
$\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]0, +\infty[\longmapsto Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

3. **Résolution de l'homogène.** La fonction $a : x \longmapsto a(x) = -1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = -x$. La solution générale de l'équation homogène associé est alors : $x \longmapsto Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

Recherche d'une solution particulière. À l'aide de la méthode de variation de la constante et d'intégrations par parties, on trouve une solution particulière $x \longmapsto \frac{x^3}{3}e^x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x$.

Conclusion. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Ce^x + \frac{x^3}{3}e^x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

4. On se place par exemple sur $]0, +\infty[$, la résolution est similaire sur $]-\infty, 0[$.

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{C}{x}e^{2x} - \frac{1}{2x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

5. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]0,+\infty[\longmapsto Cx^4 e^{\frac{2}{x^2}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.
6. On se place par exemple sur $]1,+\infty[$, la résolution est similaire sur $]-\infty,-1[$ et $]-1,1[$. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]0,+\infty[\longmapsto \frac{C-x}{x^2-1} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$
7. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]0,+\infty[\longmapsto Ce^{-\frac{1}{x}} + x - 1 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$

Solution (exercice 13) Énoncé

1. On résout sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, un intervalle contenant 0 sur lequel la fonction cosinus ne s'annule pas. Il est alors équivalent de résoudre :
$$y' - \frac{\sin x}{\cos x} y = 0.$$
On obtient puisque l'équation différentielle est déjà homogène : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \frac{C}{\cos x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

   Condition initiale. On a $y(0) = 1 = \frac{C}{\cos 0}$, donc on a $C = 1$. On en déduit que l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$ est $\boxed{y : x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \frac{1}{\cos x}}$.

2. **Résolution de l'homogène.** La fonction $a : x \longmapsto a(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \frac{x^2}{2}$. On a donc : $\mathscr{S}_0 = \left\{x \longmapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

   Recherche d'une solution particulière. En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y^{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi y^{p} est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient : $(y^{\mathrm{p}})'(x) + xy^{\mathrm{p}}(x) = 2x \iff C'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}}$, et $y^{\mathrm{p}}(x) = 2$ est une solution particulière.

   Conclusion. $\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

   Condition initiale. Comme $y(0) = 1$, on a : $y(0) = Ce^0 + 2 = C + 2 = 1 \iff C = -1$. Ainsi il existe une unique solution qui est : $\boxed{y : x \longmapsto 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

Solution (exercice 14) Énoncé **Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.**

1. **Résolution de l'homogène.** On étudie l'équation caractéristique associé : $r^2 + 8r + 15 = 0$. Ses solutions sont réelles distinctes, donnés par $r_1 = -5$ et $r_2 = -3$. Les solutions sont donc donnés par $\mathscr{S}_0 = \left\{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{-5t} + Be^{-3t} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

   Recherche d'une solution particulière. $y^{\mathrm{p}}(t) = \alpha$. On a alors $(y^{\mathrm{p}})'(t) = (y^{\mathrm{p}})''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 15\alpha = 5$, soit $\alpha = \frac{1}{3}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{y : t \longmapsto Ae^{-5t} + Be^{-3t} + \frac{1}{3} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

   Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $A + B + \frac{1}{3} = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $q'(t) = -5Ae^{-5t} - 3Be^{-3t}$, donc $q'(0) = -5A - 3B = 1$. On doit donc résoudre :
$$\begin{cases} A + B &= -\frac{1}{3} \\ -5A - 3B &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 0 \\ B &= -\frac{1}{3}. \end{cases}$$
   La solution est donc donné par $\boxed{y : t \longmapsto \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})}$.

2. **Résolution de l'homogène.** On étudie l'équation caractéristique associé : $4r^2 - 4r + 1 = 0$. Cette équation admet une solution double, donné par $r = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc donnés par $\mathscr{S}_0 = \left\{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto (A + Bt)e^{\frac{t}{2}} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

   Recherche d'une solution particulière. $y^{\mathrm{p}}(t) = \alpha$. On a alors $(y^{\mathrm{p}})'(t) = (y^{\mathrm{p}})''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \alpha = 4$, soit $\alpha = 4$.
   On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto (A + Bt)e^{\frac{t}{2}} + 4 \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

   Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $A = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = \frac{A}{2}e^{\frac{t}{2}} + Be^{\frac{t}{2}} + \frac{B}{2}te^{\frac{t}{2}}$, donc $y'(0) = \frac{A+B}{2} = 1$, soit $B = 2$. La solution est donc donné par $\boxed{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto 2te^{\frac{t}{2}} + 4}$.

3. On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

   Résolution de l'homogène. On étudie l'équation caractéristique associé : $r^2 - 2r + 5 = 0$. Ses solutions sont complexes conjugués, donnés par $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$. Les solutions sont donc donnés par $\mathscr{S}_0 = \left\{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^t\left(A\cos(2t) + B\sin(2t)\right) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. $y^{\mathrm{p}}(t) = \alpha$. On a alors $(y^{\mathrm{p}})'(t) = (y^{\mathrm{p}})''(t) = 0$, donc on doit avoir $0+5\alpha = 5$, soit $\alpha = 1$.
On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{e}^t\left(\mathrm{A}\cos(2t)+\mathrm{B}\sin(2t)\right)+1 \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $\mathrm{A}+1 = 0$, donc $\mathrm{A} = -1$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = \mathrm{e}^t(\mathrm{A}\cos(2t)+\mathrm{B}\sin(2t)) + \mathrm{e}^t(-2\mathrm{A}\sin(2t)+2\mathrm{B}\cos(2t))$, donc $y'(0) = \mathrm{A}+2\mathrm{B} = 1$. On en déduit $\mathrm{B} = \dfrac{1-\mathrm{A}}{2} = 1$. La solution est donc donné par $\boxed{y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{e}^t(-\cos(2t)+\sin(2t))+1}$.

4. On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants. Cependant, ici le coefficient du terme y est nul : on se ramène à une équation du premier ordre, en $z = y'$. On commence donc par résoudre l'équation $z' - 2z = 2$. La solution de l'équation homogène associé sont de la forme $z_h(t) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{2t}$, avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière constante : $z_p(t) = \alpha$. On obtient $\alpha = -1$. Les solutions générales sont donc de la forme $z(t) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{2t} - 1$, avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
Revenons à présent à y : on a $y' = z$, donc y est une primitive de z. On en déduit que y s'écrit sous la forme : $\boxed{\mathrm{S} = \left\{y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{\mathrm{C}}{2}\mathrm{e}^{2t} - t + \mathrm{K} \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.
On utilise les conditions initiales pour déterminer C et K : on a $y(0) = 0$, soit $\dfrac{\mathrm{C}}{2} + \mathrm{K} = 0$. De plus, on a $y'(t) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{2t} - 1$, donc $y'(0) = 1$ donne $\mathrm{C} - 1 = 1$, soit $\mathrm{C} = 2$. En revenant à l'équation $\dfrac{\mathrm{C}}{2} + \mathrm{K} = 0$, on obtient alors $\mathrm{K} = -1$. On a donc finalement $\boxed{y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{e}^{2t} - t - 1}$.

Solution (exercice 15) Énoncé à faire

Solution (exercice 16) Énoncé

1. Résolution de l'homogène. L'équation caractéristique associé est : $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4 < 0$. L'équation caractéristique a donc deux solutions complexes conjugués $r_1 = 2+\mathrm{i}$ et $r_2 = 2-\mathrm{i}$.
Ainsi $\mathscr{S}_0 = \left\{x \longrightarrow \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x)) \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. En remplaçant par une constante K dans l'équation, on obtient : $\mathrm{K} = \dfrac{1}{5}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y^{\mathrm{p}}(x) = \dfrac{1}{5}$.

Conclusion. $\mathscr{S} = \left\{x \longrightarrow \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x)) + \dfrac{1}{5} \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Or on sait que $y(0) = \mathrm{A} + \dfrac{1}{2}$, et d'autre part, on a $y'(x) = \mathrm{e}^{2x}(2\mathrm{A}\cos(x)+2\mathrm{B}\sin(x) - \mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x) + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.
On en déduit que $y'(0) = 2\mathrm{A}+\mathrm{B}+\dfrac{1}{2}$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \mathrm{A}+\dfrac{1}{2} &= 1 \\ 2\mathrm{A}+\mathrm{B}+\frac{1}{2} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{A} &= \frac{1}{2} \\ \mathrm{B} &= -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales donnés est $\boxed{y : x \longrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}(\cos(x) - 3\sin(x)) + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x}$.

2. Résolution de l'homogène. D'après la question précédente : $\mathscr{S}_0 = \left\{x \longrightarrow \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x)) \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. En remplaçant par une constante K dans l'équation, on obtient : $\mathrm{K} = \dfrac{1}{5}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y^{\mathrm{p}}(x) = \dfrac{2}{5}$.

Conclusion. $\mathscr{S} = \left\{x \longrightarrow \mathrm{e}^{2x}(\mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x)+1) \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Or on sait que $y(0) = \mathrm{A}+1$, et d'autre part, on a $y'(x) = \mathrm{e}^{2x}(2\mathrm{A}\cos(x)+2\mathrm{B}\sin(x)+2-\mathrm{A}\sin x+\mathrm{B}\cos x)$. On en déduit que $y'(0) = 2\mathrm{A}+2+\mathrm{B}$. On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \mathrm{A}+1 &= 0 \\ 2\mathrm{A}+\mathrm{B}+2 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{A} &= -1 \\ \mathrm{B} &= 1. \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales donnés est $\boxed{y : x \longrightarrow \mathrm{e}^{2x}(-\cos(x)+\sin(x)+1)}$.

Solution (exercice 17) Énoncé On commence par calculer les dérivées de z. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t), \\ &= \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + \left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''(\mathrm{e}^t) \\ &= z'(t) + \left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''(\mathrm{e}^t). \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a en utilisant l'équation différentielle de départ :

$$\left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''(\mathrm{e}^t) = -3\mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) - y(\mathrm{e}^t) - (\mathrm{e}^t+1)^2,$$

donc

$$\left(\mathrm{e}^t\right)^2 y''(\mathrm{e}^t) = -3z'(t) - z(t) - (\mathrm{e}^t+1)^2.$$

Donc z vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) = z'(t) - 3z'(t) - z(t) - (e^t + 1)^2,$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) + 2z'(t) + z(t) = (e^t + 1)^2.$$

C'est cette fois-ci une équation différentielle linéaire à coefficients constants, l'équation caractéristique est $x^2 + 2x + 1 = 0 = (x+1)^2$. Donc

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (At + B)e^{-t}.$$

Constatons que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^t) \iff \forall x > 0, \quad y(x) = z(\ln x).$$

Donc

$$\boxed{\forall x > 0, \quad y(x) = \frac{A\ln x + B}{x}}.$$

Solution (exercice 18) Énoncé On calcule les dérivés successives de z. On a $z'(x) = 2xy(x) + x^2y'(x)$, et

$$z''(x) = 2y(x) + 2xy'(x) + 2xy'(x) + x^2y''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2y''(x).$$

On en déduit que l'on a :

$$z'' - z = x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

Donc z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Résolution de l'homogène. $z'' - z = 0$. On résout l'équation caractéristique associé : $r^2 - 1 = 0$. On a deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. La solution générale de l'équation homogène est donc donné par $z_h(x) = Ae^x + Be^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière. Le second membre est une constante, on cherche donc une solution sous la forme $z_p(t) = \alpha$. En remplaçant dans l'équation, on obtient $\alpha = -1$.

Conclusion. La solution générale de l'équation en z est donc $z(x) = Ae^x + Be^{-x} - 1$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On revient à y : on a $y(x) = \dfrac{z(x)}{x^2}$, soit $\boxed{y(x) = \dfrac{Ae^x + Be^{-x} - 1}{x^2}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Solution (exercice 19) Énoncé Dans les deux cas, les équations différentielles sont couplés, car elles contiennent toutes les deux des termes en x et en y. Il s'agit de trouver une équation qui ne porte que sur l'une des fonctions. On peut déjà justifier que x, y sont à chaque fois deux fois dérivables car x', y' sont alors des combinaisons linéaires de fonctions dérivables.

1. **Analyse.** Soit (x, y) une solution. On dérive la première équation, et on obtient $x'' = 4x' - 3y'$. Or on sait que $y' = 2x - y$. On a donc $x'' = 4x' - 6x + 3y$. Enfin, d'après la première équation, on a $3y = 4x - x'$, donc finalement x vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants suivante :

$$x'' - 3x' + 2x = 0.$$

Son équation caractéristique est donné par $r^2 - 3r + 2 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 1$, elle possède deux deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. On a donc $\boxed{x(t) = Ae^t + Be^{2t}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. On en déduit y grâce à la première équation : $y = \dfrac{4x - x'}{3}$, soit $\boxed{y(t) = Ae^t + \dfrac{2}{3}e^{2t}}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Synthèse. On vérifie facilement que les fonctions x et y trouvés sont bien solutions du système différentiel.

2. On applique la même méthode.

Analyse. On dérive la première équation, et on obtient $x'' = x'\cos\theta - y'\sin\theta$. Or on sait que $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$. On a donc $x'' = x'\cos\theta - x\sin^2\theta - y\sin\theta\cos\theta$. Enfin, d'après la première équation, on a $y\sin\theta = x\cos\theta - x'$, donc on a : $x'' = x'\cos\theta - x\sin^2\theta - x\cos^2\theta + x'\cos\theta$. Finalement x vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants suivante :

$$x'' - 2x'\cos\theta + x = 0.$$

Son équation caractéristique est donné par $r^2 - 2\cos\theta r + 1 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta$. On fait plusieurs cas :

- Cas 1 : si $\theta \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a $\Delta = 0$, et les deux équations du départ se simplifient en :

$$\begin{cases} x' &= x, \\ y' &= y. \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{x(t) = Ae^t}$ et $\boxed{y(t) = Be^t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- Cas 2 : si $\theta \in \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a $\Delta = 0$, et les deux équations du départ se simplifient en :

$$\begin{cases} x' &= -x, \\ y' &= -y. \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{x(t) = Ae^{-t}}$ et $\boxed{y(t) = Be^{-t}}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

- Cas 3 : si $\theta \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On a alors $\Delta < 0$, et l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjugués $r = \cos\theta \pm i\sin\theta$, de partie réelle $\cos\theta$, et de partie imaginaire $\sin\theta$. On a donc $\boxed{x(t) = e^{(\cos\theta)t}(A\cos((\sin\theta)t) + B\sin((\sin\theta)t))}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On en déduit y avec la première équation : $y(t) = \dfrac{x(t)\cos\theta - x'(t)}{\sin\theta}$, car $\sin\theta \neq 0$. On a donc $\boxed{y(t) = \mathrm{e}^{(\cos\theta)t}(\mathrm{A}\sin((\sin\theta)t) - \mathrm{B}\cos((\sin\theta)t))}$ avec $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.

Synthèse. On vérifie facilement que les fonctions x et y trouvés sont bien solutions du système différentiel.

Solution (exercice 20) Énoncé

1. On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants.

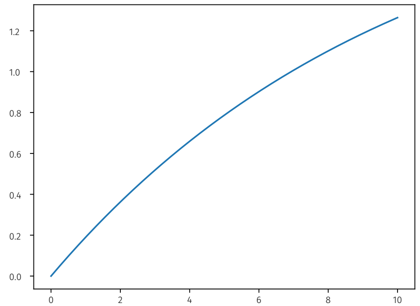
Résolution de l'homogène. L'ensemble des solutions est : $\mathscr{S}_0 = \left\{q : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}} \,\middle|\, \mathrm{K} \in \mathbb{R}\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. $q_p(t) = \alpha$. On a alors $q_p'(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \dfrac{1}{\mathrm{RC}}\alpha = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}$, soit $\alpha = \mathrm{VC}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{q : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}} + \mathrm{VC} \text{ avec} \in \mathbb{R}\right\}}$.
:

Condition initiale. Comme de plus on a $q(0) = 0$, on a $\mathrm{K} + \mathrm{VC} = 0$, soit $\mathrm{K} = -\mathrm{VC}$. Finalement, la solution est donné par $\boxed{q : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{VC}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}\right)}$.

```python
R, C, V = 10, 1, 2
T = np.linspace(0, 10, 10**3)
Q = [V*C*(1-ma.exp(-t/(R*C))) for t in T]
plt.plot(T, Q)
```



On constate que la charge tend vers VC. On peut trouver le temps caractéristique du circuit en calculant le point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote $y = \mathrm{VC}$. Ce temps est ici $t_c = \mathrm{RC}$.

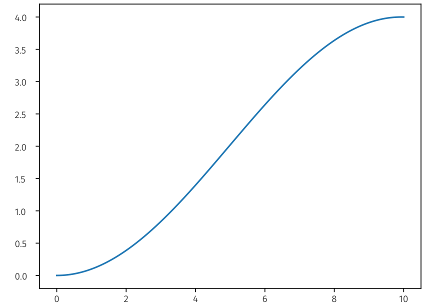
2. **Résolution de l'homogène.** On étudie l'équation caractéristique associé : $r^2 + \dfrac{1}{\mathrm{LC}} = 0$. Ses solutions sont complexes conjugués, donnés par $r_1 = i\omega$ et $r_2 = -i\,\omega$ avec $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$. L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_0 = \{q : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t) \text{ avec} (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\}$.

Recherche d'une solution particulière. $q_p(t) = \alpha$. On a alors $q_p''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \dfrac{1}{\mathrm{LC}}\alpha = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{L}}$, soit $\alpha = \mathrm{VC}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathrm{S} = \{q : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t) + \mathrm{VC} \text{ avec} (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\}}$.

Condition initiale. On a $q(0) = \mathrm{A} + \mathrm{VC} = 0$, soit $\mathrm{A} = -\mathrm{VC}$. De plus, on doit avoir $q'(0) = 0$. On calcule la dérivé de q : $q'(t) = -\mathrm{A}\omega\sin(\omega t) + \mathrm{B}\omega\cos(\omega t)$, donc $q'(0) = \mathrm{B} = 0$. On a donc finalement : $\boxed{q : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{VC}(1 - \cos(\omega t))}$.

```python
L, C, V = 10, 1, 2
omega = 1/ma.sqrt(L*C)
T = np.linspace(0, 10, 10**3)
Q = [V*C*(1-ma.cos(t*omega)) for t in T]
plt.plot(T, Q)
```



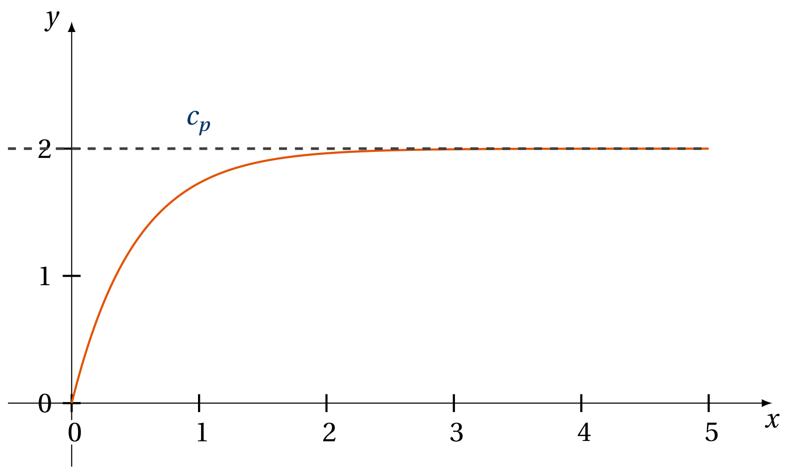
On constate que la charge oscille entre 0 et 2VC. La période de charge est donné par $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\mathrm{LC}}$.

Solution (exercice 21) Énoncé On doit résoudre l'équation différentielle : $c' + \dfrac{1}{\tau}c = \dfrac{1}{\tau}c_p$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants.

Résolution de l'homogène. On commence par étudier l'équation homogène associé : $c' + \dfrac{1}{\tau}c = 0$. L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_0 = \left\{c_h t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. $f(t) = \alpha$. On a alors $f'(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \frac{1}{\tau}\alpha = \frac{1}{\tau}c_p$, soit $\alpha = c_p$.

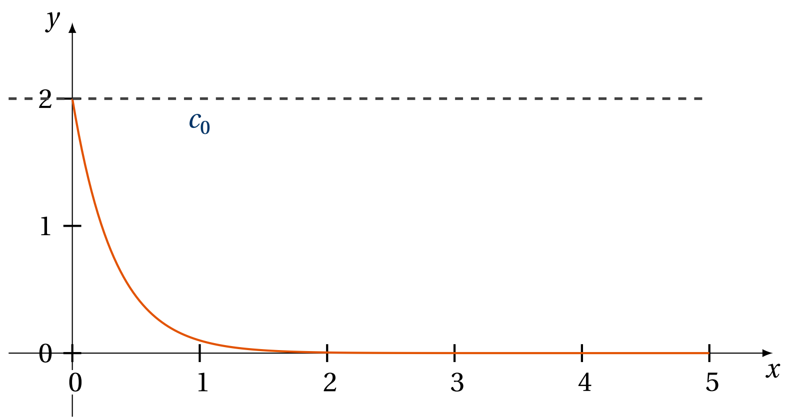
Conclusion. On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \left\{t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow Ce^{-\frac{t}{\tau}} + c_p \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$. Comme de plus on a $c(0) = 0$, on a $C + c_p = 0$, soit $C = -c_p$. Finalement, la solution est donné par $\boxed{c : t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow c_p\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$. Pour tracer la courbe, il suffit d'étudier les variations de la fonctions c, en supposant que τ et c_p sont des constantes strictement positives. On constate que la concentration tend vers c_p : les concentrations en potassium s'équilibrent entre le milieu extérieur et la cellule.



Solution (exercice 22) Énoncé

1. On doit résoudre l'équation différentielle $y' + ky = 0$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et homogène. On connaît donc l'ensemble des solutions :
$$S = \left\{y : t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow Ce^{-kt} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}.$$
De plus, on a $y(0) = N_0$, donc $Ce^{-k\times 0} = N_0$, soit $C = N_0$. On en déduit que y a pour expression $\boxed{y : t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow N_0 e^{-kt}}$.
2. On cherche $t_{0.5}$ tel que :
$$y(t_{0.5}) = \frac{1}{2}N_0 \iff N_0 e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2}N_0 \iff e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2} \iff -kt_{0.5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $\boxed{t_{0.5} = \frac{\ln 2}{k}}$.
L'application numérique donne $t_{0.5} \simeq 5599$ ans.
3. On cherche t_1 tel que :
$$y(t_1) = 0.7N_0 \iff N_0 e^{-kt_1} = 0.7N_0 \iff e^{-kt_1} = 0.7 \iff -kt_1 = \ln(0.7)$$
a par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $\boxed{t_1 = -\frac{\ln 0.7}{k}}$.
L'application numérique donne comme estimation $t_1 \simeq 2881$ ans pour ces fragments.

Solution (exercice 23) Énoncé On doit résoudre l'équation différentielle : $-\frac{1}{2}y' = ky$, c'est-à-dire $y' + 2ky = 0$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et homogène. On connaît donc l'ensemble des solutions :
$$S = \left\{y : t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow Ce^{-2kt} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}.$$
De plus, on a $y(0) = c_0$, donc $Ce^{-2k\times 0} = c_0$, soit $C = c_0$. L'unique solution est donc : $\boxed{y : t \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow c_0 e^{-2kt}}$. Pour tracer la courbe, il suffit d'étudier les variations de la fonctions y, en supposant que k et c_0 sont des constantes strictement positives.



On peut calculer la constante de temps caractéristique de la réaction en calculant le point d'intersection entre la tangente à l'origine et l'axe des abscisses. Ce temps est ici $t_c = \frac{1}{2k}$.