Chapitre (AN) 2 Calculs de primitives, intégrales & Équations différentielles

Résumé & Plan

Nous allons voir dans une chapitre un outil clef qui va nous permettre de modéliser divers phénomènes : la notion d'équations différentielles. Ce type d'objet apparait naturellement dans de nombres domaines : en électricité, en mécanique, en biologie (dynamiques de population) *etc.*

D'après un théorème de LIOUVILLE*, la fonction* $x \longmapsto e^{-x^2}$ *ne possède pas de primitive qui puisse s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles* (ln, exp, cos, sin *etc.*).

— **Le saviez-vous ?**

Parmi toutes les disciplines mathématiques, la théorie des équations différentielles est la plus importante. Elle fournit l'explication de toutes les manifestations élémentaires de la nature où le temps est impliqué.

— **Sophus Lie**

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST1, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Un objet central nous servira pour la résolution d'équations différentielles : les primitives. On commence donc par des révisions & compléments sur le sujet.

1 CALCULS DE PRIMITIVES

1.1 Généralités

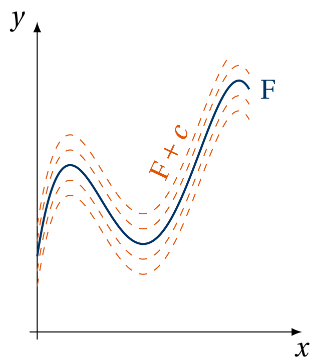
Définition 1 | Primitives
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\mathrm{F}' = f$.

Une primitive réalise l'opération inverse de la dérivation : on part d'une fonction, et on cherche à savoir si elle s'écrit sous forme d'une dérivée.

Exemple 1

- $x \longmapsto \frac{x^2}{2}$ et $x \longmapsto \frac{x^2}{2} - 6$ sont des primitives de $x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$,
- $x \longmapsto e^x - \ln(x)$ est une primitive de $x \longmapsto e^x - \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1 | Ensemble des primitives
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Si $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **une** primitive de f sur l'intervalle I, alors **les** primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $\mathrm{F} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.



On retiendra notamment que si f admet une primitive, alors elle en admet même une infinité : puisque si F est une primitive, toutes les fonctions $\mathrm{F} + c$ avec c une constante en sont aussi. Il n'est donc pas question de parler de *la* primitive de f. Nous admettons le théorème ci-après, difficile à démontrer.

Preuve

Théorème 1 | Existence de primitives pour les fonctions continues
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle I. Alors :
- f possède une primitive sur I.
- Pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Graphiquement, parmi toutes les primitives de f, il n'en existe qu'une seule F dont la courbe représentative $\mathscr{C}_\mathrm{F}$ passe par le point (x_0, y_0). Ce théorème est admis, la démonstration (peu importe laquelle) dépasse très largement le programme de 1ère année.

Preuve Nous admettons l'existence. Démontrons l'unicité avec condition initiale.

Enfin, la propriété de linéarité de la dérivation se transmet alors automatiquement aux primitives.

Proposition 2 | Linéarité de la primitivation
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, F une primitive de f et G une primitive de g. Alors : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda\mathrm{F} + \mu\mathrm{G}$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

Preuve Immédiat par linéarité de la dérivation : $(\lambda\mathrm{F} + \mu\mathrm{G})' = \lambda\mathrm{F}' + \mu\mathrm{G}' = \lambda f + \mu g$.

Méthode (AN) 2.1 (Justifier l'existence d'une primitive) Il suffit de montrer la continuité de la fonction, le plus souvent en utilisant des théorèmes d'opérations élémentaires sur les fonctions continues.

Exemple 2 Déterminer, sur un domaine à préciser, une primitive des fonctions ci-après.

1. $x \longmapsto 2x$
2. $x \longmapsto x^2 - 3x + 1$
3. $x \longmapsto \mathrm{e}^x$
4. $x \longmapsto \frac{1}{x}$
5. $x \longmapsto \cos x$
6. $x \longmapsto \sin x$
7. $x \longmapsto 3^x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Exemple 3
- Pour $x > 0$, on pose $\mathrm{F}(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et calculer la dérivée, ainsi que $\mathrm{F}(\mathrm{e})$. Que remarque-t-on ?
- En déduire l'unique primitive de ln qui s'annule en 1.

1.2 Primitive & Intégrale sur un segment

Nous allons introduire une notation qui sera étudiée plus en détail plus tard dans l'année (**??**). Nous ne motivons pas encore outre mesure son introduction, pour l'instant il faudra juste comprendre son utilité pour le calcul de primitives.

Cadre
Dans toute cette sous-section, la notation $[a,b]$ désignera toujours un segment, avec $a,b \in \mathbb{R}$.

Définition/Proposition 1 | Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.

- On appelle *intégrale de f sur le segment $[a,b]$* le réel noté $\int_a^b f$ $\Big($ou encore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)$ défini par :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\textbf{(défi.)}}{=} [\mathrm{F}(x)]_a^b \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a),$$
(où F désigne **une** primitive de f).
- On appelle *intégrande de* $\int_a^b f$ la fonction f.

Preuve La quantité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de la primitive choisie. La définition de l'intégrale sera donc bien posée.

Remarque 1

- Si $a=b$, alors avec les notations de la définition précédente, on a :
$$\int_a^a f = [\mathrm{F}]_a^a = \mathrm{F}(a)-\mathrm{F}(a) = 0.$$
- Si $f = \mathrm{K} \in \mathbb{R}$ est constante, alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{K}x]_a^b = \mathrm{K}(b-a)$.
- La variable utilisée dans l'intégrale est, comme dans les sommes et produits, **muette**.

Exemple 4 Calculer les intégrales ci-après.

1. $\int_0^1 (-4x^3+x^2-1)\,\mathrm{d}x$,

2. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2t-1}$,

3. $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_0 e^{-t/\tau}\, dt$ avec $\mathrm{I}_0, \mathrm{T}, \tau \in \mathbb{R}^+$.

PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES DE L'INTÉGRALE. L'idée est ici seulement d'établir les propriétés qui vont nous servir pour le calcul de primitives. Nous viendrons compléter cette liste plus tard, dans le **??** dédié à l'intégration.

Proposition 3 | Propriétés de l'intégrale

Soient I un intervalle et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

- **[Linéarité]** Pour tout $(f,g) \in (\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$
- **[Positivité]** Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $a \leqslant b$, alors :
$$f \geqslant 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0.$$
- **[Croissance]** Si $(f,g) \in (\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R}))^2$ et $a \leqslant b$, alors :
$$f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$
- **[Relation de CHASLES]** Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $c \in \mathrm{I}$. Alors :
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$
- **[Ordre des bornes]** Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$, alors :
$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Preuve

-

- Si F est une primitive de f, alors l'hypothèse nous donne $\mathrm{F}' \geqslant 0$, donc que F est croissante. On obtient immédiatement $\int_a^b f = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \geqslant 0$ puisque $a \leqslant b$.
-
-
-

Citons également deux propriétés parfois utiles dans les calculs, qui concernent le crochet, et qui ont déjà été justifiées dans la preuve précédente.

Proposition 4 | Propriétés du crochet

Soient I un intervalle et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$.

- **[Linéarité]** Soient $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$[\lambda \mathrm{F} + \mu \mathrm{G}]_a^b = \lambda [\mathrm{F}]_a^b + \mu [\mathrm{G}]_a^b.$$
- **[Ordre des bornes]** Si $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors :
$$[\mathrm{F}]_a^b = -[\mathrm{F}]_b^a.$$

La relation de CHASLES permet de calculer notamment des intégrales dont l'intégrande est définie par morceaux, voyons un exemple avec la valeur absolue.

Exemple 5

1. Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)|\, dx$.

2. Calculer $\int_0^1 \min\left(\frac{1}{2}, x\right) \mathrm{d}x$.

LIEN ENTRE PRIMITIVE ET INTÉGRALE. Par définition de l'intégrale, il est nécessaire de connaître une primitive pour la calculer, il existe donc un fort lien entre les deux notions. Voyons lequel.

Théorème 2 | Lien primitive & Intégrale
Soient I un intervalle, $a \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction :

$$\mathrm{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a**.

Notation
Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Le théorème précédent justifie la notation ci-dessous parfois utilisée :

- $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int f$ désigne *une* primitive de f, c'est une fonction, et
- $\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int^x f$ désigne la valeur en $x \in \mathbb{R}$ d'*une* primitive de f, c'est un réel.

Note | *Je n'utiliserai pas ces notations.*

Preuve

Le théorème précédent nous montre tout l'intérêt de calculer des intégrales pour obtenir une primitive.

Méthode (AN) 2.2 **(Primitiver une fonction en utilisant une intégrale)** Lorsque vous avez besoin d'une technique d'intégration (intégration par parties ou changement de variable par exemple) pour primitiver une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, choisir $a \in \mathrm{I}$, puis calculer $\int_a^x f$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Si la fonction f n'est pas définie en un point, on prendre garde à bien effectuer ces calculs pour les x où c'est possible.

Exemple 6 Donner la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $x \longmapsto 2^x$.

1.3 Primitives usuelles

Dans les tableaux suivants, pour chaque fonction f définie sur un *intervalle* I précisé, on donne *une* primitive F. Les primitives suivantes doivent être connues par cœur, ou *a minima* être retrouvées rapidement.

$f(x) = \dots$	$\mathrm{F}(x) = \dots$	$x \in \mathrm{I} \subset \dots$	Condition
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,\infty[$	$\alpha \neq -1$

$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	$\mathbb{R}\smallsetminus\{a\}$	$a\in\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$a\in\mathbb{R}^*$
$\ln\|x\|$	$x\ln\|x\|-x$	$\mathbb{R}^*$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$a\in\mathbb{R}^\star$
$\cos(x)$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$a\in\mathbb{R}^*$
$\tan(x)$	$-\ln\|\cos(x)\|$	$\cos(x)\neq 0$	

À l'aide des formules du tableau et de la dérivation d'une composée, on peut calculer une primitive de $u'u^n$, $\frac{u'}{u^n}$, $\frac{u'}{u}$, $u'\cos u$, $u'\sin u$, $u'e^u$ *etc.* lorsque u est dérivable.

$f=\ldots$	$F=\ldots$
$u'\times u^a, a\neq -1$	$\frac{1}{a+1}u^{a+1}$
$u'\times\exp(u)$	$\exp(u)$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\|u\|)$
$u'\times\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\times\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)}=u'\left(1+\tan^2(u)\right)$	$\tan(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

On a donc par conséquent (lorsque $u(x)=ax+b$ et $u'(x)=a$.

$f(x)=\ldots$	$F(x)=\ldots$	$x\in I\subset\ldots$	**Condition**
$(ax+b)^\alpha$	$\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{a}$	$]0,\infty[$	$\alpha\neq -1$
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\frac{\ln\|ax+b\|}{a}$	$\mathbb{R}\smallsetminus\{a\}$	$a\in\mathbb{R}$
e^{ax+b}	$\dfrac{e^{ax+b}}{a}$	$\mathbb{R}$	$a\in\mathbb{R}^*$
$\sin(ax+b)$	$\dfrac{-\cos(ax)}{a}$	$\mathbb{R}$	$a\in\mathbb{R}^\star$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{\sin(ax)}{a}$	$\mathbb{R}$	$a\in\mathbb{R}^*$
$\tan(ax+b)$	$\dfrac{-\ln\|\cos(ax+b)\|}{a}$	$\cos(x)\neq 0$	

Exemple 7 **(Puissances)** Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x\longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$.

2. $g : x\longmapsto x\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$.

Exemple 8 Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x\longmapsto \frac{x^2}{1+x^3}$.

2. $g : x\longmapsto \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$.

3. $h = \tan$. *(Cela justifie la formule énoncée dans le tableau)*

CAS DE FRACTIONS RATIONNELLES. On s'intéresse ici aux inverses de fonctions trinôme.

Méthode (AN) 2.3 **(Primitives de fractions rationnelles)** On sait déterminer une primitive des fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de discuter selon la valeur du discriminant Δ :

1. si $\Delta > 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, puis on écrit la fraction comme somme de deux autres *(vous serez toujours guidés à cette étape dans les exercices)* qui se primitivent avec un logarithme.
2. Si $\Delta = 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$,
3. si $\Delta < 0$, alors on met le dénominateur **sous forme canonique** et on effectue un changement de variable pour se ramener à $u \longmapsto \dfrac{1}{u^2+1}$.

Exemple 9 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un domaine à préciser.

- $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$.
  - **[Domaine]** Cherchons le domaine de continuité $\mathscr{D}$ de la fraction.
  - **[Décomposition en éléments simples]** Déterminer $A, B \in \mathbb{R}$ deux constantes de sorte que :
  $$\forall x \in \mathscr{D}, \quad \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$
  - **[Primitivation]**
- $g : x \longmapsto \dfrac{1}{4x^2-4x+1}$

- $h : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

Remarque 2 Dans les exemples précédents, le numérateur était égal à 1. N'importe quelle fraction rationnelle peut se « ramener » à une telle fraction ; c'est le théorème de « décomposition en éléments simples » complètement [H.P] en BCPST. Vous serez donc toujours guidés sur ce sujet.

Cas de fonctions trigonométriques.

Méthode (AN) 2.4 **(Primitive de $\cos^p \sin^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$)**

1. Si $p = 1$, une primitive directe de $\cos \times \sin^q$ est : $\frac{\sin^{q+1}}{q+1}$.
2. Si $q = 1$, une primitive directe de $\cos^p \times \sin$ est : $-\frac{\cos^{p+1}}{p+1}$.
3. Dans tous les autres cas : commencer par linéariser l'expression (si elle comporte des produits/puissances), à l'aide de nombres complexes si besoin, puis primitiver.

Exemple 10

1. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \longmapsto \sin^2 x$.
2. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \longmapsto \cos^3 x$.
3. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \longmapsto \cos^3 x \sin x$.

1.4 Techniques de calculs d'intégrales

Nous avons vu précédemment que calculer une primitive revient à un calcul d'intégrale. Pour ces dernières nous disposons de deux techniques principales de calcul : l'intégration par parties et le changement de variable. Ces techniques doivent être envisagées naturellement lorsque l'intégrande ne se primitive pas de manière évidente. Introduisons au préalable une notation qui nous permettra de décrire les hypothèses portant sur les fonctions avec lesquelles nous allons travailler.

Définition 2 | Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction f définie sur I est de *classe* $\mathscr{C}^1$ si :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ est dérivable sur I,} \\ \textbf{(ii)} & f' \text{ est continue sur I.} \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}^1(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs réelles.

Note | *On dit parfois, lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$, que « f est continûment dérivable »*

Il existe des fonctions dérivables non forcément $\mathscr{C}^1$; en revanche, de tels exemples seront étudiés plus tard dans l'année (ils ne sont pas à chercher parmi les fonctions usuelles en tout état de cause).

INTÉGRATION PAR PARTIES. Cette formule sert dès que l'on souhaite intégrer un produit dont l'un des termes devient plus simple en le dérivant.

Théorème 3 | Intégration par parties

Soient $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t + [uv]_a^b.$$

On utilise une intégration par parties dès que $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ est plus simple à calculer que $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$: on ne s'occupe pas trop du crochet, puisque c'est un terme qui se calculera de toute façon.

Attention

Toute intégration par parties doit être justifiée, en rappelant convenablement l'hypothèse $\mathscr{C}^1$ sur des fonctions appropriées.

Preuve (*Point clef — **Intégrer la formule de dérivation d'un produit***)
Puisque u, v sont supposées $\mathscr{C}^1$, les fonctions u, v sont continues car dérivables, et u', v' sont continues. Ainsi, uv' et $u'v$) sont continues, donc leur intégrale sur $[a,b]$ existe.

Méthode (AN) 2.5 (Quand utiliser l'intégration par parties? et mise en place) Pour intégrer un *produit* de deux fonctions, dont l'une est facile à *primitiver* et l'autre est facile à *dériver*. Exemple : une exponentielle multipliée par un polynôme. Lorsque l'on effectue une intégration par parties, on :

1. indique pour plus de clarté le terme que l'on dérive (écrire « $v =$ » sous le terme) et que l'on primitive (écrire « $u' =$ » sous le terme).
2. Lors de l'écriture de la formule d'intégration par parties, on rappelle les hypothèses de classe $\mathscr{C}^1$ sur les fonctions u, v.

Toute intégration par parties doit être justifiée.

Exemple 11 Calculer les intégrales suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

1. $\displaystyle\int_0^x t e^t\,\mathrm{d}t$,

2. $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - t + 3)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$.

3. $\displaystyle\int_0^x t\ln(t^2+1)\,\mathrm{d}t$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$.

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2(t)\,\mathrm{d}t$. *Indication : On reviendra à la définition de la fonction tangente...*

Exemple 12 Calculer une primitive de $t \longmapsto \frac{\ln t}{t^2}$ sur un domaine à préciser, en effectuant une intégration par parties.

Note — *Vous noterez ici que l'on peut effectuer un « nettoyage » a posteriori des constantes apparaissant.*

Exemple 13 Parmi les intégrales ci-dessous, expliquer la ou lesquelles vous semblent calculables. La calculer le cas échéant.

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{I}_2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{I}_3 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Nous avions déjà montré la proposition qui suit (en dérivant l'expression donnée). Il s'agit ici de la retrouver *via* une autre méthode.

Proposition 5 | Primitive du logarithme
La fonction $x \in \mathbb{R}^{+\star} \longmapsto x\ln x - x$ est l'unique primitive de ln qui s'annule en e.

Preuve *(Point clef — **intégration par parties**)*

Note — *On aurait pu également simplement dériver l'expression, et constater qu'elle s'annule en* e.

Changement de variable. Voici à présent une technique ressemblant assez fortement à celle de changement d'indice vue pour les sommes et produits dans le Chapitre (ALG) 4. Autant nous étions assez contraints pour les changements d'indices (seuls quelques changements étaient autorisés), autant pour les intégrales la plupart des fonctions $\mathscr{C}^1$ conviendront. Voici la formule.

Théorème 4 | Formule du changement de variable
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle I, et $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathrm{I}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ appelée *fonction de changement de variable.* Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

« On pose $x = \varphi(t)$ »

Contrairement aux changements d'indices dans les sommes, on vous donnera toujours le changement de variable à réaliser. En revanche, vous devez savoir le mettre en place, et le justifier.

Attention

Tout changement de variable doit être justifié, en rappelant que la fonction associée est de classe $\mathscr{C}^1$.

Preuve *(Point clef — **Intégrer la formule de dérivation d'une composée.**)*
Notons que f et $f\circ\varphi.\varphi'$ sont continues sur I et sur $[a,b]$ respectivement, ce qui assure l'existence des intégrales. Introduisons une primitive F de f sur I (il en existe puisque f est continue). Alors $\mathrm{F}\circ\varphi$ est dérivable de dérivée $\mathrm{F}'\circ\varphi\times\varphi' = f\circ\varphi\times\varphi'$. Autrement dit :

$$\forall t\in[a,b],\quad (\mathrm{F}\circ\varphi)'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Dans la pratique, on réalise assez peu souvent un changement de variable en essayant de « coller » à cette formule. On utilise plutôt les calculs formels ci-après, qui correspondant à la formule de changement de variable « non-intégrée »[1] : ainsi, si on pose $x=\varphi(t)$, on écriera

$$\text{« } f(x)\,\mathrm{d}x = f(\varphi(t))\,\mathrm{d}(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.\text{ »}$$

Ainsi, pour réaliser le changement $x=\varphi(t)$, on commence par écrire formellement :

$$\text{« } \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\varphi(t)) = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \iff \frac{\mathrm{d}d\varphi(t)}{\mathrm{d}\mathrm{d}t} = \varphi'(t)\text{ »}.$$

Méthode (AN) 2.6 (Changement explicite – Nouvelle variable en fonction de l'ancienne) Pour répondre à une question de type « Calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u=\varphi(t)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a,b]$ et que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
3. Poser $u=\varphi(t)$ et calculer : $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}t = \frac{1}{\varphi'(t)}\mathrm{d}u$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
4. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

1. Et avec des gros guillemets, car cette version sans intégrale n'a aucun sens mathématique.

Exemple 14 (Changement de variable explicite)

- Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
  - en posant $u=\sqrt{t}$.
  - Retrouver le résultat précédent par primitivation directe.
- Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}\,\mathrm{d}t$ en posant $x=\sqrt{\mathrm{e}^t+1}$.

Méthode (AN) 2.7 **(Changement implicite – Ancienne variable en fonction de la nouvelle)** Pour répondre à une question de type « Calculer $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a, b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale c'est-à-dire trouver deux réels a' et b' tels que $a = \varphi(a')$ et $b = \varphi(b')$.
3. Vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment d'extrémités a' et b'.
4. Poser $t = \varphi(u)$ et calculer : $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u \iff \mathrm{d}u = \frac{1}{\varphi'(u)}\mathrm{d}t$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
5. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

Exemple 15 **(Changement de variable implicite)**

1. Calculer $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \cos u$.

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin t$.

3. Soients : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

   3.1) Montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$ en posant $u = \frac{\pi}{2} - x$.

   3.2) Calculer $\mathrm{I} + \mathrm{J}$, *puis* déterminer la valeur de I.

Exemple 16 Calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ sur un domaine à préciser, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Corollaire 1 | Intégrale & Parité/Périodicité

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors :
$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors :
$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$
- Soit $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_+^*$ et soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$, alors pour tout a $\in \mathbb{R}$,
$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 3 Ces formules trouveront une interprétation simple dans le **??**, lorsque nous aurons revu l'intégrale comme aire sous la courbe représentative de l'intégrande. Représentons déjà la 1ère sur un dessin.

Preuve

-
- Même preuve que précédemment, avec le même changement de variable à opérer dans $\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Commençons par décomposer l'intégrale comme ci-dessous (grâce à la relation de CHASLES) :
$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{T}}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Cadre

Dans toute cette section,
- **I désignera un intervalle réel, qui sera appelé le *domaine sde définition de l'équation différentielle*.**
- **L'entier n désignera l'ordre de l'équation différentielle, le plus souvent $n = 1, 2$.**

Conformément au programme, nous étudierons mathématiquement uniquement les équations différentielles **linéaires**. En Informatique, nous nous intéresserons à la résolution numérique d'équations différentielles plus générales.

2.1 Généralités

Définition 3

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
- Une *équation différentielle d'ordre n sur* $\mathbb{R}$ toute équation en une fonction inconnue $y \in \mathscr{D}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$, et portant sur $y, y', \dots, y^{(n)}$.
- *Résoudre* une équation différentielle consiste à déterminer une solution du problème.

Définition 4 | Linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n sur* $\mathbb{R}$ toute équation de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \qquad (\mathrm{E}_n)$$

où $a_i \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n-1]\!]$. La fonction $y \in \mathscr{D}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$ est appelée *inconnue* de (E_n). On appelle *solution* de (E_n) toute fonction $y : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t).$$

- Elle est dite à coefficients constants si les fonctions $a_{n-1}, \dots, a_1$ sont constantes.
- *Résoudre* une équation différentielle consiste à trouver une solution.
- On appelle *courbe intégrale* toute courbe représentative d'une solution.

Il est très important de comprendre que l'on résout ici le problème en une **fonction** y : c'est l'inconnue de notre équation. Vous étiez habitués jusque là à résoudre des équations portant sur des réels ou complexes.

Définition 5 | Homogène

- L'équation (E_n) est dite *homogène*, ou *sans second membre*, si b est la fonction nulle. *(il n'y a donc que les termes en y)*
- On appelle *équation homogène associée* à (E_n) ou encore *équation sans second membre associée à* (E_n) l'équation suivante :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \qquad (\mathrm{H}_n)$$

Notation

Dans la suite, nous noterons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E_n), et $\mathscr{S}^0$ l'ensemble des solutions de (H_n).

Remarque 4 **(Forme normalisée $\Longleftrightarrow$ Forme générale)** Une équation de la forme

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = c(t)$$

est encore appelée une équation différentielle linéaire d'ordre n. La forme faisant intervenir un coefficient *1* devant la dérivée s'appelle la *forme normalisée* de l'équation différentielle, elle s'obtient en divisant les deux membres par la fonction a_n sur tout intervalle J où a_n ne s'annule pas,

$$\forall t \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}, \quad y^{(n)} + \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}y^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_1(t)}{a_n(t)}y' + \frac{a_0(t)}{a_n(t)}y = \frac{b(t)}{a_n(t)}.$$

Dans la suite tous les résultats seront énoncés pour la forme normalisée, *i.e.* celle des équations (E_n) et (H_n).

Exemple 17 Préciser les caractéristiques des équations différentielles ci-après ; nom de la fonction inconnue, nom de la variable, ordre, ce que signifie qu'une fonction f est solution, homogène ou pas, *etc.*

1. $y' + ty = 0$.

2. $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 3q$.

3. $2 - xz' = x^2 z''$.

4. $3x^3 y''' + 2x^2 y'' + y = \pi$.

Structure de l'ensemble des solutions de (E_n). Mais pourquoi introduire une version « homogène » d'une équation différentielle ? Nous allons constater que les ensembles des solutions de (E_n) et (H_n) possèdent un lien fort.

Théorème 5 | Structure des solutions de l'équation complète

Si $y_{\mathbf{p}} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **<u>une</u>** solution particulière de l'équation complète (E_n), alors *les* solutions de (E_n) sont les éléments de :

$$\mathscr{S} = \left\{ y_{\mathrm{H}} + y_{\mathbf{p}} \,\middle|\, y_{\mathrm{H}} \in \mathscr{S}_h \right\} \quad \text{où } \mathscr{S}_h \text{ est l'ensemble des solutions de } (\mathrm{H}_n).$$

En résumé :

Solution générale de l'équation COMPLÈTE	**=**	**Solution générale de l'équation HOMOGÈNE**	**+**	**Solution PARTICULIÈRE (= une solution quelconque de l'équation complète)**

La preuve ci-dessous exploite très largement la linéarité de l'équation, ce résultat est faux dans le cas contraire.

Preuve Faisons par exemple la preuve dans le cas $n = 1$, elle est complètement similaire dans les autres cas.

Les étapes de résolution d'une équation différentielle homogène sont maintenant claires :

1. calculer explicitement l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions de l'homogène,
2. déterminer une solution particulière $y_{\mathbf{p}}$ de l'équation complète. Pour l'ordre 1, nous aurons une méthode systématique appelée *variation de la constante*, pour l'autre 2 une forme à tester vous sera toujours donnée.

2.2 Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

Définition 6 | Définition pour $n = 1$

- On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre sur* I toute équation de la forme (E_1), c'est-à-dire une équation de la forme :
$$y' = a(t)y + b(t), \qquad (\mathrm{E}_1)$$
où $a, b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
- L'*équation homogène associée* ou encore *équation sans second membre associée à* (E_1) est l'équation suivante :
$$y' = a(t)y. \qquad (\mathrm{H}_1)$$

Exemple 18

- $2y' = 3ty$ est homogène d'inconnue $y : t \longmapsto y(t)$,
- $y' + \mathrm{e}^x y = x^2 \cos(x)$ d'inconnue $y : x \longmapsto y(x)$ L'équation homogène associée est $y' + \mathrm{e}^x y = 0$.
- Pour E, τ deux réels, $\tau \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = \mathrm{E}$ d'inconnue $v : t \longmapsto v(t)$ à coefficients constants et second membre constant. La fonction $v_s : t \longmapsto \mathrm{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est une solution de cette équation car :

Cadre

Dans la suite de cette sous-section, on se fixe une équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$, avec $a, b \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

2.2.1 Résolution de l'équation homogène

On connaît par un calcul direct l'ensemble des solutions de l'équation (H_1).

Théorème 6 | Résolution de l'équation homogène

L'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions de (H_1) est :
$$\mathscr{S}_h = \left\{t \longmapsto \mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{où } \mathrm{A} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est } \underline{\textbf{une}} \text{ primitive de } a.$$

Preuve *(Point clef — **Multiplier par** $\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$**, méthode du « facteur intégrant »**)*
La fonction a étant continue sur I, elle admet une primitive A sur cet intervalle.

- Si y est dérivable, calculons tout d'abord $\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} y\right)'$.

-

Remarque 5

- Lorsque $a = 1$, on obtient l'équation différentielle $y' = y$ et le théorème précédent affirme que $y(t) = \mathrm{C}\mathrm{e}^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On retrouve notre brave fonction exponentielle ! En effet, étant donné que $\exp(0) = 1$, on a alors $\mathrm{C} \times 1 = 1$ donc $\mathrm{C} = 1$, et dès lors : $\quad y = \exp$.
- Il arrive parfois dans les sujets que l'équation différentielle homogène soit donnée (pour l'ordre 1) sous cette forme :
$$y' + \tilde{a}(t)y = 0.$$
On se ramènera alors à la forme du cours, puisque :
$$y' + \tilde{a}(t)y = 0 \iff y' = \underbrace{-\tilde{a}(t)}_{=a(t)} y.$$
Dans ce cas, l'ensemble des solutions est alors :
$$\mathscr{S}_h = \left\{t \longmapsto \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} \,\middle|\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{où } \mathrm{A} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est } \underline{\textbf{une}} \text{ primitive de } a.$$
Bref, dans tous les cas, on essaie de mettre y' à gauche, seule, et le terme en y à droite, puis on applique le théorème du cours qui a le mérite de ne pas faire

apparaitre de signe « – » dans l'exponentielle.

Exemple 19 (Homogènes d'ordre 1)

1. Résoudre : $y' + ty = 0$.
2. Résoudre : $\frac{dq}{dt} = 3q$.
3. Résoudre : $y' - \frac{t}{t^2-1}y = 0$.
4. Résoudre : $(1+t^2)y' + 4ty = 0$.

2.2.2 Résolution de l'équation complète

On applique simplement le théorème déjà démontré dans les généralités : toute solution est obtenue en sommant les solutions de l'homogène et **une** solution particulière.

Théorème 7 | Résolution de l'équation complète

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) est :

$$\mathscr{S} = \left\{t \in I \longrightarrow Ce^{A(t)} + y_p(t) \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}, \quad \text{où } \begin{cases} A : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est } \underline{\textbf{une}} \text{ primitive de } a \\ y_p \text{ est } \underline{\textbf{une}} \text{ solution de } (E_1). \end{cases}$$

Pour résoudre complètement l'équation différentielle (E_1), il reste donc à déterminer *une* solution particulière y_p de (E_1).

CAS DE COEFFICIENTS a, b CONSTANTS. Lorsque second membre et coefficients sont constants, on peut rechercher une solution particulière simplement sous forme d'une constante ; c'est ce cas qui arrive le plus souvent en Physique-Chimie et S.V.T. notamment. Voyons plusieurs exemples.

Exemple 20

- Résoudre : $y' = -3y - 1$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

- Résoudre : $\tau\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v=\mathrm{E}$ où E,τ sont deux réels fixés tels que $\tau\neq 0$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

Exemple 21 Soit $k\in\mathbb{R}^{+\star}$. Résoudre : $y'+ky=2$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

Exemple 22 **(Généralisation)** Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}$. Résoudre : $y'=ay+b$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

On retrouve alors ici une formule qui vous aviez peut-être déjà vue au lycée :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)=\mathrm{C}e^{at}-\frac{b}{a}\quad\text{avec } \mathrm{C}\in\mathbb{R}.$$

Cette formule n'est plus à apprendre par coeur, mais à retrouver à chaque fois.

CAS GÉNÉRAL : VARIATION DE LA CONSTANTE. Il s'agit de chercher une solution particulière de la forme des solutions de (H_1), où la *constante* C est remplacée par une **fonction** dérivable $t\in\mathrm{I}\longmapsto\mathrm{C}(t)$. Nous faisons donc *varier* la constante C au sens propre du terme. Et ce procédé de recherche de solution particulière a le bon goût de fonctionner pour n'importe quelles fonctions continues a,b.

Méthode (AN) 2.8 **(Variation de la constante)** Chercher y_{p} sous la forme $t\in\mathrm{I}\longmapsto\mathrm{C}(t)e^{\mathrm{A}(t)}$, où la fonction $\mathrm{C}:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ est dérivable et est à déterminer.

Justifions tout d'abord que cette méthode fonctionne toujours.

Preuve Si l'on pose $y_{\mathbf{p}}(t) = \mathrm{C}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$, pour tout $t \in \mathrm{I}$, où C est une fonction dérivable sur I, alors :

$$\begin{aligned} y_{\mathbf{p}} \text{ solution de } (\mathrm{E}_1) &\iff y_{\mathbf{p}}' = a y_{\mathbf{p}} + b \iff (\mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{A}})' = a\mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{A}} + b \\ &\iff \mathrm{C}'\mathrm{e}^{\mathrm{A}} + \mathrm{C}\mathrm{A}'\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = a\mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{A}} + b \\ &\iff \mathrm{C}'\mathrm{e}^{\mathrm{A}} + \cancel{\mathrm{C}a\mathrm{e}^{\mathrm{A}}} = \cancel{a\mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{A}}} + b \\ &\iff \mathrm{C}'\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = b \iff \mathrm{C}' = b\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} \\ &\iff \mathrm{C} \text{ est une primitive de } b\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} \text{ sur I.} \end{aligned}$$

Puisque $b\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$ est continue, une telle primitive existe. Une fois C déterminée (à une constante additive près !), une solution particulière est donnée par : $\forall t \in \mathrm{I}, \quad y_{\mathbf{p}}(t) = \mathrm{C}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}$.

Exemple 23 Résoudre : $y' + 3x^2 y = \mathrm{e}^{x - x^3}$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

Exemple 24 Résoudre : $y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

Parfois l'énoncé *(alors sympathique)* vous donnera aussi directement une forme sous laquelle chercher une solution particulière.

Exemple 25 Résoudre : $y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}+2}$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_{\mathrm{p}} : t \longmapsto \alpha \mathrm{e}^{at+b}$ où α, a et b seront des réels.

Nous savons donc à présent résoudre complètement une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Lorsque l'on ajoute en plus une *condition initiale*, alors il existe une unique solution.

Théorème 8 | Résolution avec condition initiale

Soient $t_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule solution au « problème de CAUCHY » : $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t), \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

En résumé, sans condition initiale on a une infinité de solutions. Avec une condition initiale il y a unicité.

Preuve

- Commençons par chercher une expression de y, soit A une primitive de a.
  - On sait déjà que toute solution y_{H} de l'homogène est de la forme $y_{\mathrm{H}} : t \in \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$.
  - On sait aussi d'après la méthode de variation de la constante qu'une solution particulière est de la forme $y_{\mathrm{p}} : t \in \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{C}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$ où C est dérivable et vérifie $\mathrm{C}' = b\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$. La fonction C définie par $\mathrm{C}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(u)}\,\mathrm{d}u$ convient. *(unique primitive de $b\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$ s'annulant en t_0)*
  - Il existe donc $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$, tel que :
    $$\forall t \in \mathrm{I}, \quad y(t) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} + \int_{t_0}^{t} b(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(u)}\,\mathrm{d}u \times \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}.$$
    Or, $y(t_0) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t_0)} + 0 = y_0$ par hypothèse, donc : $\mathrm{C} = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t_0)}y_0 + 0$.
  - On déduit alors :
    $$\begin{aligned}\forall t \in \mathrm{I}, \quad y(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t_0)}\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} + \int_{t_0}^{t} b(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(u)}\,\mathrm{d}u \times \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$
- Il reste tout de même à vérifier que l'expression précédente ne dépend pas du choix d'une primitive, ce qui garantira l'unicité. En effet, si $\mathrm{B} = \mathrm{A}+c$ est une autre primitive, avec $c \in \mathbb{R}$, on a :
  $$\begin{aligned}\forall t \in \mathrm{I}, \quad & \mathrm{e}^{\mathrm{B}(t)-\mathrm{B}(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{B}(t)-\mathrm{B}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)+\cancel{c}-\mathrm{A}(t_0)-\cancel{c}}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)+\cancel{c}-\mathrm{A}(u)-\cancel{c}}b(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)-\mathrm{A}(u)}b(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Exemple 26 Résoudre : $y' - 3y = 5, \; y(0) = 2$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière.

Exemple 27 On reprend l'Exemple 21, déterminer l'unique solution vérifiant :

- $y(0) = 0$
- $y(0) = -1$
- $y(1) = 1$

PRINCIPE DE SUPERPOSITION. Ce principe s'applique aux équations différentielles lorsque le second membre s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire.

Proposition 6 | Principe de superposition pour l'ordre 1

Soient $a, b_1, b_2 \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et y_1, y_2 dérivables solutions de :

$$y_1' = a(t)y_1 + b_1(t), \quad y_2' = a(t)y_2 + b_2(t).$$

Alors $\quad y = \lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de : $\quad y' = a(t)y + [\lambda b_1(t) + \mu b_2(t)]$.

Le principe de superposition est donc utile lorsque le second membre fait apparaître une combinaison linéaire de seconds membres plus simples. Ce principe est cependant assez peu utile pour l'ordre 1, puisque l'on dispose de la méthode de variation de la constante.

Preuve

Exemple 28 Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\quad y' - 2y = 3e^t + e^{2t}$.

- On commence par chercher une solution particulière de $y' - 2y = e^t$. On trouve par variation de la constante : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t) = -e^t$.
- Ensuite on cherche une solution particulière de $y' - 2y = e^{2t}$. On trouve par variation de la constante : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_2(t) = te^{2t}$.
- Par superposition : $\quad y_{\mathbf{p}} : t \longmapsto te^{2t} - 3e^t$ est une solution particulière de l'équation différentielle de départ.

2.3 Équations différentielles linéaires du 2^{nd} ordre à coefficients constants

Définition 7 | Définition pour $n = 2$

- On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre sur* I *à coefficients constants* toute équation de la forme (E_2) c'est-à-dire une équation de la forme :
$$ay'' + by' + cy = d(t) \qquad (\mathrm{E}_2)$$
où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}^2$, et $d \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
- L'*équation homogène associée* ou encore *équation sans second membre associée à* (E_2) est l'équation suivante :
$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (\mathrm{H}_2)$$

Définition 8 | Équation caractéristique

On introduit également l'*équation caractéristique* de (E_2) :

$$ar^2 + br + c = 0, \quad \text{d'inconnue } r \in \mathbb{C}. \qquad (\mathrm{EC})$$

Exemple 29

- $2y'' = 3y$ est homogène d'inconnue $y : t \longmapsto y(t)$. Son équation caractéristiques est :
- $2y'' + y' - 3y = e^t$ n'est pas homogène, d'homogène $2y'' + y' - 3y = 0$, d'inconnue $y : t \longmapsto y(t)$. Son équation caractéristiques est :

- Pour E, τ deux réels, $\frac{\mathrm{d}^2u_c}{\mathrm{d}t^2}+2\omega_0\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u_C=0$ d'inconnue $u_C : t \longmapsto u_C(t)$ est à coefficients constants et homogène. La fonction $u_C : t \longmapsto (t+1)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$ est une solution de cette équation car :

Son équation caractéristiques est :

Cadre

Dans la suite de cette sous-section, on se fixe une équation différentielle $ay''+by'+cy=d(t)$, avec $d : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, et $a,b,c \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Résolution de l'équation homogène

Nous savons là encore déterminer facilement l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Nous admettons le résultat.

Théorème 9 | Résolution de l'équation homogène

Soit une équation différentielle de la forme (H_2) et (EC) son équation caractéristique. On suppose que $a \neq 0$. On note Δ le discriminant de (EC).

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si (EC) possède deux racines réelles distinctes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors :
$$\mathscr{S}_h = \left\{t \longmapsto \mathrm{A}\mathrm{e}^{\alpha t}+\mathrm{B}\mathrm{e}^{\beta t} \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si (EC) possède une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :
$$\mathscr{S}_h = \left\{t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(\mathrm{A}t+\mathrm{B}) \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire (EC) possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, alors :
$$\begin{aligned}\mathscr{S}_h &= \left\{t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(\mathrm{A}\cos(\beta t)+\mathrm{B}\sin(\beta t)) \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}\\ &= \left\{t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{C}\cos(\beta t+\varphi) \,\middle|\, (\mathrm{C},\varphi) \in \mathbb{R}^+\times[0,2\pi[\right\}\end{aligned}$$

(Dans la pratique, retenir la première forme, et savoir passer de l'une à l'autre en mettant en place une transformation de FRESNEL)

Preuve Nous admettons l'ensemble du théorème, mais prouvons dans le cas où (EC) possède deux racines complexes conjuguées $\alpha+\mathrm{i}\beta$ et $\alpha-\mathrm{i}\beta$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ que $\mathscr{S}=\mathscr{S}'$ avec :
$$\mathscr{S} = \left\{t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(\mathrm{A}\cos(\beta t)+\mathrm{B}\sin(\beta t)) \,\middle|\, (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$\mathscr{S}' = \left\{t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{A}\cos(\beta t+\varphi) \,\middle|\, (\mathrm{A},\varphi) \in \mathbb{R}^+\times[0,2\pi[\right\}.$$

$\boxed{\supset}$

$\boxed{\subset}$

Exemple 30 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + y' - 2y = 0$

2. $y'' - 2y' + y = 0$

3. $y'' - y' + y = 0$

4. Résoudre : $y'' - \omega^2 y = 0$ et $y'' + \omega^2 y = 0$ (où ω est un réel non nul).

2.3.2 Résolution de l'équation complète

On applique encore une fois le théorème déjà démontré sur le sujet : toute solution est obtenue en sommet les solutions de l'homogène et **une** solution particulière.

Théorème 10 | Résolution de l'équation complète

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) est :

$$\mathscr{S} = \left\{ y + y_{\mathbf{p}} \,\middle|\, y \in \mathscr{S}_h \right\} \text{ où } y_{\mathbf{p}} \text{ est \textbf{une} solution de } (\mathrm{E}_1).$$

Détermination de $y_{\mathbf{p}}$: cas de seconds membres constants. Pour résoudre complètement l'équation différentielle (E_2), il reste donc à déterminer *une* solution particulière $y_{\mathbf{p}}$ de (E_2). Le résultat au programme est celui où le second membre d **est constant**.

Théorème 11 | Solution particulière pour $c \in \mathbb{R}$ une constante

On suppose que le second membre de (E_2) est de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad d(t) = d \in \mathbb{R}. \quad \text{Alors :}$$

- **si 0 n'est pas racine de (EC)** : on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$,
- **si 0 est racine simple de (EC)** : on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \lambda t \quad (\lambda \in \mathbb{R})$,
- **si 0 est racine double de (EC)** : on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \lambda t^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Remarque 6 Dans l'immense majorité des cas, l'équation différentielle rentrera dans le cadre « 0 n'est pas racine de (EC) ». En effet :

- 0 est racine double de (EC) correspond à une équation caractéristique $a(r-0)^2 = r^2 = r^2 + 0 \times r + 0 = 0$, donc à l'équation différentielle $ay'' = 0$. Le cours est bien entendu inutile pour la résoudre ! en effet, si $a \neq 0$, il suffit de primitiver deux fois, pour avoir : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \mathrm{A}t + \mathrm{B}$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$.

- 0 est racine simple de (EC), si on note α la deuxième racine, correspond à une équation caractéristique $ar(r-\alpha) = 0$, donc si $a \neq 0$ à l'équation différentielle $y'' - \alpha y' = 0$; elle est « faussement d'ordre 2 », car si on note $z = y'$ on obtient $z' - \alpha z = 0$, une équation différentielle d'ordre 1 donc.

Exemple 31 Déterminer une solution particulière réelle des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants suivantes :

1. $y'' - y' - 2y = 2$.

2. $y'' - 2y' = 1$.

3. $\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2} + 2\omega_0 \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_\mathrm{C} = \mathrm{E}$ où : $\omega_0 \in \mathbb{R}$, et $\mathrm{E} \in \mathbb{R}$ tel que : $\mathrm{E} \neq -\omega_0$.

DÉTERMINATION DE y_p : CAS DE SECONDS MEMBRES PLUS GÉNÉRAUX. Pour des seconds membres plus généraux, l'énoncé vous donnera toujours une forme de solution particulière.

Exemple 32 Déterminer une solution particulière des équations différentielles ci-après.

1. $2y'' - y' - y = 3\cos(2t)$. *<u>Indication :</u> On recherchera une solution particulière sous la forme $y_\mathrm{p} : t \longmapsto a\cos(2t) + b\sin(2t)$ avec a, b des réels à déterminer*

2. $y'' - y = te^t$. <u>Indication :</u> *On recherchera une solution particulière sous la forme* $y_\mathbf{p} : t \longmapsto \left(at^2 + bt\right)e^t$ *avec* a, b *des réels à déterminer On commence par calculer les dérivées. Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$y_\mathbf{p}'(t) = \left(at^2 + (b+2a)t + (b+c)\right)e^t$$
$$y_\mathbf{p}''(t) = \left(at^2 + (b+4a)t + (2a+2b+c)\right)e^t.$$

Ainsi, $y_\mathbf{p}$ *est solution si, et seulement si, :* $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\left(at^2 + (b+4a)t + (2a+2b+c) - at^2 - bt - c\right)\cancel{e^t} = t\cancel{e^t}.$$

Ou encore, de manière équivalente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 4at + (2a+b) = 1t + 0 \iff \begin{cases} a &= \frac{1}{4} \\ 2a+2b &= 0 \end{cases} \iff a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{4}.$$

Il n'y a pas de condition sur c, *donc on peut prendre* $c = 0$.

Ainsi : $\boxed{y_\mathbf{p} : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{t(t-1)}{4}e^{-t}}$ *est une solution particulière.*

Admettant l'existence d'une solution particulière avec un second membre continu d, on peut démontrer l'existence et l'unicité ci-après.

Théorème 12 | Résolution avec condition initiale

Soient $t_0 \in \mathrm{I}$, $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule solution au « problème de Cauchy » :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by &= c(t), \\ y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y_0'. \end{cases}$$

Nous admettons ce résultat d'existence et unicité dans le cas de l'ordre 2.

Exemple 33 Résoudre : $y'' - 2y' - 3y = 9t^2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Résolution de l'homogène.

Recherche d'une solution particulière. *On recherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 2.*

Condition initiale.

PRINCIPE DE SUPERPOSITION. Le principe de superposition s'applique encore pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants admettant un second membre somme de plusieurs fonctions simples.

2.4 Technique du changement de fonction inconnue

- Le cadre de résolution des équations différentielles de ce cours est finalement assez restreint ; les coefficients doivent être constants pour l'ordre 2, et de manière générale les équations différentielles doivent être linéaires.
- Il est cependant parfois possible de s'y ramener à l'aide d'un « changement de fonction inconnue ».

Exemple 34 **(Non linéaire à linéaire)** Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = y \ln y \quad (E).$$

Cela revient donc à trouver l'ensemble des fonctions y, dérivables à **valeurs strictement positives**, telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = y(t) \ln y(t).$$

Indication : On pourra réaliser le changement de fonction inconnue $y(t) = e^{z(t)}$ *pour tout* t.

Résumé

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit y une solution de (E). Alors posons $z = \ln \circ y$. On a vérifié que z est solution d'une équation différentielle (E′) que l'on sait résoudre.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit z une solution de (E′), alors $y = \exp \circ z$ est une solution de (E). En d'autres termes, il y a une correspondance bijective entre les solutions de (E) et (E′) — il suffit donc de résoudre l'une ou l'autre pour toutes les avoir.

Exemple 35 **(Non constants à constants)** Résoudre :

$$(1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4y = 0 \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Indication : On pourra réaliser le changement de fonction inconnue $z(x) = y(\tan x)$ *pour tout* x

Méthode (AN) 2.9 **(Résolution par changement de fonction inconnue)** Soit (E) une équation différentielle en une fonction y que l'on ne sait pas résoudre *a priori*.

1. Soit une fonction z dépendant de y donnée par l'exercice (généralement « de la forme $z(t) = y \circ \varphi(t)$ »).
2. Calculer les dérivées successives $z, z', z'', \ldots$ (en fonction de l'ordre de l'équation différentielle en y).
3. Évaluer (E) en $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Combiner **2)** et **3)** pour trouver une équation différentielle en z.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (AN) 2.1 **(Justifier l'existence d'une primitive)** Il suffit de montrer la continuité de la fonction, le plus souvent en utilisant des théorèmes d'opérations élémentaires sur les fonctions continues.

Méthode (AN) 2.2 **(Primitiver une fonction en utilisant une intégrale)** Lorsque vous avez besoin d'une technique d'intégration (intégration par parties ou changement de variable par exemple) pour primitiver une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, choisir $a \in \mathrm{I}$, puis calculer $\displaystyle\int_a^x f$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Si la fonction f n'est pas définie en un point, on prendre garde à bien effectuer ces calculs pour les x où c'est possible.

Méthode (AN) 2.3 **(Primitives de fractions rationnelles)** On sait déterminer une primitive des fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de discuter selon la valeur du discriminant Δ :

1. si $\Delta > 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, puis on écrit la fraction comme somme de deux autres *(vous serez toujours guidés à cette étape dans les exercices)* qui se primitivent avec un logarithme.
2. Si $\Delta = 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$,
3. si $\Delta < 0$, alors on met le dénominateur **sous forme canonique** et on effectue un changement de variable pour se ramener à $u \longmapsto \dfrac{1}{u^2+1}$.

Méthode (AN) 2.4 **(Primitive de $\cos^p \sin^q$, avec $p, q \in \mathbb{N}$)**

1. Si $p = 1$, une primitive directe de $\cos \times \sin^q$ est : $\frac{\sin^{q+1}}{q+1}$.
2. Si $q = 1$, une primitive directe de $\cos^p \times \sin$ est : $-\frac{\cos^{p+1}}{p+1}$.
3. Dans tous les autres cas : commencer par linéariser l'expression (si elle comporte des produits/puissances), à l'aide de nombres complexes si besoin, puis primitiver.

Méthode (AN) 2.5 (Quand utiliser l'intégration par parties? et mise en place) Pour intégrer un *produit* de deux fonctions, dont l'une est facile à *primitiver* et l'autre est facile à *dériver*. Exemple : une exponentielle multipliée par un polynôme. Lorsque l'on effectue une intégration par parties, on :

1. indique pour plus de clarté le terme que l'on dérive (écrire « $v =$ » sous le terme) et que l'on primitive (écrire « $u' =$ » sous le terme).
2. Lors de l'écriture de la formule d'intégration par parties, on rappelle les hypothèses de classe $\mathscr{C}^1$ sur les fonctions u, v.

Toute intégration par parties doit être justifiée.

Méthode (AN) 2.6 (Changement explicite – Nouvelle variable en fonction de l'ancienne) Pour répondre à une question de type « Calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = \varphi(t)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a, b]$ et que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
3. Poser $u = \varphi(t)$ et calculer : $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{d}t = \frac{1}{\varphi'(t)}\mathrm{d}u$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
4. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

Méthode (AN) 2.7 (Changement implicite – Ancienne variable en fonction de la nouvelle) Pour répondre à une question de type « Calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$ », il faut :

1. vérifier que f est continue sur $[a, b]$.
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale c'est-à-dire trouver deux réels a' et b' tels que $a = \varphi(a')$ et $b = \varphi(b')$.
3. Vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment d'extrémités a' et b'.
4. Poser $t = \varphi(u)$ et calculer : $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u \iff \mathrm{d}u = \frac{1}{\varphi'(u)}\mathrm{d}t$. Dans certains contextes il peut être donc nécessaire que φ' ne s'annule pas, les calculs formels réalisés à cette étape justifient indirectement cela.
5. « Remplacer » les t par des u dans l'intégrale.

Méthode (AN) 2.8 (Variation de la constante) Chercher $y_{\mathbf{p}}$ sous la forme $t \in \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{C}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$, où la fonction $\mathrm{C} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et est à déterminer.

Méthode (AN) 2.9 (Résolution par changement de fonction inconnue) Soit (E) une équation différentielle en une fonction y que l'on ne sait pas résoudre *a priori*.

1. Soit une fonction z dépendant de y donnée par l'exercice (généralement « de la forme $z(t) = y \circ \varphi(t)$ »).
2. Calculer les dérivées successives $z, z', z'', \ldots$ (en fonction de l'ordre de l'équation différentielle en y).
3. Évaluer (E) en $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. Combiner **2)** et **3)** pour trouver une équation différentielle en z.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Si f est la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(x)=\sqrt{1-x}$ sur l'intervalle $]0,1[$, déterminer l'expression d'une de ses primitives sur $]0,1[$	$\sqrt{1-x}=(1-x)^{1/2}$ se primitive en $x\longmapsto -\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2}=-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$	*Se ramener à des fonctions puissances permet de ne retenir qu'une seule formule de primitivation/dérivation*
Donner la dérivée et une primitive de $t\longmapsto \frac{1}{t^3}$ sur $]0,+\infty[$	La fonction se primitive en $t\in\,]0,+\infty[\,\longmapsto \frac{t^{-2}}{-2}=-\frac{1}{2t^2}$	*Se ramener à des fonctions puissances* $\frac{1}{t^3}=t^{-3}$ *permet de ne retenir qu'une seule formule de primitivation/dérivation*
Si $\alpha\in\mathbb{R}$, déterminer l'expression d'une primitive de $x\longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$	$\frac{1}{x^\alpha}=x^{-\alpha}$ se primitive en $\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$ si $\alpha\neq 1$. Si $\alpha=1$, alors $x\longmapsto \ln\lvert x\rvert$ est une primitive	*Ne pas oublier de cas particulier sur* α*, et la valeur absolue dans le cas particulier*
Énoncer le théorème d'intégration par parties sur une intégrale	$u,v:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t+[uv]_a^b$.	*Ne pas oublier les hypothèses* $\mathscr{C}^1$*, aussi importantes que la formule*
Énoncer le théorème de changement de variable	$f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie et continue sur un intervalle I, et $\varphi:[a,b]\longrightarrow \mathrm{I}$ $\mathscr{C}^1$. Alors : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.	*Ne pas oublier les hypothèses* $\mathscr{C}^1$*, aussi importantes que la formule*
Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y'+a(t)y=0$?	$\{x\longrightarrow \mathrm{C}e^{-\mathrm{A}(x)},\quad \mathrm{C}\in\mathbb{R}\}$ où A est une primitive de a	*Dire également que* A *existe dès que* a *est continue, bien mentionner un* ***ensemble*** *de solutions (donc avec des accolades).*
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $y''+ay'+by=0$	(Considérer l'équation caractéristique $x^2+ax+b=0$, distinguer les cas $\Delta=a^2-4b$ positif, nul ou négatif)	*Montrer simplement que vous connaissez le résultat (donner des noms génériques pour les racines réelles ou complexes)*

3 EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître la définition de l'intégrale de fonctions continues sur un segment
2. Concernant les primitives :
   - connaître les primitives usuelles ☐
   - savoir déterminer des primitives dans les cas de dérivation classique ☐
   - connaître les opérations sur les primitives ☐
3. Connaître les différentes propriétés de l'intégrale :
   - linéarité et relation de CHASLES ☐
   - positivité et croissance de l'intégrale ☐
4. Concernant les méthodes de calcul d'intégrales :
   - l'intégration par parties ☐
   - le changement de variable ☐
5. Concernant les équations différentielles :
   - savoir résoudre l'homogène d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 ☐
   - savoir effectuer une variation de la constante pour l'ordre 1 ☐
   - savoir trouver une solution particulière pour l'ordre 2 lorsque le second membre est constant ☐
   - savoir que lorsqu'aucune condition initiale n'est imposée, on a une infinité de solution, on conclut en donnant un ensemble ☐
   - savoir que lorsqu'une condition initiale est imposée, on conclut en donnant une fonction solution ☐

Signalétique du TD

- Le logo 🏠 désigne les exercices que vous traiterez en devoir à la maison. Vous pouvez m'en rendre un ou plusieurs, au plus tard le lundi qui précède un devoir surveillé concernant ce chapitre. Ce travail est facultatif mais fortement conseillé.
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler : **11, 12, 13, 14, 27, 28**

3.1 Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 1 | Primitives par calcul direct [Solution] Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto \cos(3x)$
2. $x \longmapsto \cos^2(x)\sin^2(x)$
3. $x \longmapsto \cos(x)\sin^4(x)$
4. $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
6. $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
7. $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+1}$
8. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
9. $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

Exercice 2 | Primitives avec arctan [Solution] Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+3}$
2. $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
3. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Exercice 3 | Intégrales par calcul direct [Solution] Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos(x)|\,dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$

Exercice 4 | Intégrales avec intégration par parties [Solution] Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n\,dx,\ n\in\mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_1^t x^n\ln(x)\,dx,\ n\in\mathbb{N},\ t>0$

Exercice 5 | Primitives avec intégration par parties [Solution] Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto x^3\cos(6x)$
2. $x \longmapsto x\cos^2(x)$
3. $x \longmapsto x^2 e^{-x}$
4. $x \longmapsto x^3 e^{-x^2}$

Exercice 6 | Intégrales par changement de variable [Solution] Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x) + \tan^3(x))\,dx$ $(u = \tan x)$
2. $\int_0^{\pi} \sin^3(x)\cos^2(x)\,dx$ $(u = \cos x)$
3. $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$ $(t = 1+x^3)$
4. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ $(t = e^x)$.

Exercice 7 | Primitive par changement de variable [Solution] À l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses, calculer une primitive des fonctions d'une variable réelle suivantes.

1. $x \longmapsto \frac{x}{1+x^4}$ $(u = t^2)$
2. $x \longmapsto \frac{1}{2+\sqrt{x}}$ $(u = 2+\sqrt{t})$
3. $x \longmapsto e^{2x}\sin(e^x)$ $(u = e^t)$
4. $x \longmapsto \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ $(u = \sqrt{\sin(t)})$
5. $x \longmapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ $(u = e^t)$

Exercice 8 | Intégrales de fractions rationnelles (1) [Solution] Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

Exercice 9 | Intégrales de fractions rationnelles (2) [Solution]

1. Montrer que :
$$\forall x \in [-1,1], \quad \frac{x+1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\times\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{x^2+4x+5},$$
puis que : $\frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1}$. En déduire
$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx.$$
2. Avec la même méthode, calculer $\int_0^2 \frac{2x+1}{2x-x^2-4}\,dx$.

Exercice 10 | [Solution]

1. Soit f continue sur $[a,b]$. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$
2. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

3.2 Équations différentielles du premier ordre

Exercice 11 | [Solution] Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$
3. $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$
5. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$
6. $y' + \frac{2}{x^2-1}y = x$ sur $]1,+\infty[$
7. $y' - y = x^2(e^x + e^{-x})$
8. $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$
9. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. *Indication : On pourra chercher une solution particulière affine.*

Exercice 12 | Avec conditions initiales [Solution] Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de résolution.

1. $y'\cos x - y\sin x = 0$, avec $y(0) = 1$
2. $y' + xy = 2x$, avec $y(0) = 1$

Exercice 13 | Loi de Fick [Solution] Une cellule est plongé dans une solution de potassium de concentration c_p. On note $c(t)$ la concentration de potassium dans la cellule à l'instant t, et on suppose que $c(0) = 0$. D'après la loi de Fick, la vitesse de variation de la concentration de potassium dans la cellule est proportionnelle au gradient de concentration $c_p - c(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante τ homogène à un temps telle que : $c'(t) = \frac{c_p - c(t)}{\tau}$.
Déterminer $c(t)$ et tracer le graphe de c.

Exercice 14 | Datation au carbone 14 [Solution] La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'anné t, y vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = -ky(t),$$

où $k = 1.238 \times 10^{-4}\text{an}^{-1}$ est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de $y(t)$ en fonction du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

3.3 Équations différentielles du second ordre

Exercice 15 | [Solution] Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$
2. $4y'' - 4y' + y = 4$
3. $y'' - 2y' + 5y = 5$
4. $y'' - 2y' = 2$.

Exercice 16 | Recherche de solution particulière [Solution] Déterminer une solution particulière des équations différentielles suivantes.

1. $y'' - y' + y = t^2 + 6$ sous la forme $y_{\mathbf{p}}(t) = at^2 + bt + c$ avec a, b, c trois réels.
2. $y'' + 4y = -e^{2t}$ sous la forme $y_{\mathbf{p}}(t) = ae^{2t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. $y'' + y = \cos(t) + \sin(t)$ sous la forme $y_{\mathbf{p}}(t) = t(a\cos(t) + b\sin(t))$, avec a, b deux réls.
4. $y'' + y' - 2y = 2e^t$ sous la forme $y_{\mathbf{p}}(t) = ate^t$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 | Avec conditions initiales [Solution] Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = 2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

3.4 Techniques particulières

Exercice 18 | 💣 Changement de fonction inconnue [Solution] Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = 2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $z(t) = y(e^t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 | 💣 Changement de fonction inconnue [Solution] Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ en posant $z(x) = x^2y(x)$.

3.5 Devoir-maison

Exercice 20 | [Solution] Soit $a > 0$. Calculer :

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx$$

à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

Problème 1 | Équation différentielle linéaire d'ordre 3 [Solution] On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions ci-après :

$$g_1 : x \longmapsto e^{-x}, \quad g_2 : x \longmapsto e^{-2x}\cos(x), \quad g_3 : x \longmapsto e^{-2x}\sin(x).$$

Et on définit l'ensemble des « combinaisons linéaires de g_1, g_2, g_3 » comme étant :

$$\mathscr{E} = \{\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3\}.$$

On s'intéresse dans ce problème à la résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 suivante :

$$y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0 \quad \textbf{(H)}$$

et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de **(H)**.

1. **1.1)** Vérifier que g_1 est solution de **(H)**.

1.2) Vérifier que g_2 est solution de **(H)**. *On admet par la suite que* g_3 *est également solution de* ***(H)***

1.3) Justifier l'inclusion : $\mathscr{E} \subset \mathscr{S}$.

2. Dans cette question, on souhaite démontrer que : $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}$. Pour cela, on considère une fonction f solution de **(H)**.

2.1) On pose $g = f'' + 4f' + 5f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle : **(H1)** $y' + y = 0$.

2.2) Résoudre l'équation différentielle **(H1)**.

2.3) Résoudre l'équation différentielle : **(H2)** $y'' + 4y' + 5y = 0$.

2.4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle : **(H3)** $y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$.
Indication : On cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \mathrm{C}e^{-x}$ *avec* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ *à choisir*

2.5) Conclure.

3. Déterminer l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} y''' + 5y'' + 9y' + 5y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= e^{-\frac{\pi}{2}} \\ y'(0) &= 1. \end{cases}$$

Solution (exercice 1)

[Énoncé] On rappelle que les primitives sont toutes définies à une constante près. Ici je ne fais pas apparaître les constantes que je prends toujours égales à 0.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \frac{\sin(3x)}{3}}$: Primitive usuelle.
2. Il s'agit ici de linéariser, puis primitiver. D'après les formules d'EULER, on a après développements :
$$\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{-e^{4ix} + 2e^{2ix} - e^{2ix} + 4 - e^{-2ix} + 2e^{-2ix} - e^{-4ix}}{16}.$$
En réutilisant les formules, on déduit :
$$\cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{-2\cos(4x)+4}{16} = \frac{1}{8} - \frac{\cos(4x)}{8}.$$
On peut alors primitiver :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4x)}{32} = \boxed{\frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin(4x)}{4}\right)}.$$
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \frac{\sin^5(x)}{5}}$: Reconnaître la forme $u'u^4$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = \frac{1}{\cos x}}$: on reconnaît une primitive de la forme $-\frac{u'}{u^2}$.
5. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$. Il existe donc F une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = \ln|\ln x| = \ln(\ln x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\frac{u'}{u}$.
6. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $1 + x^2 > 0$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \sqrt{1+x^2}}$: on reconnaît une primitive de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$.
7. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes strictements positifs. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = x - \ln|e^x + 1| = x - \ln(e^x + 1)}$: On utilise l'astuce $1 = 1 + e^x - e^x$ puis on coupe en deux et on reconnaît sur l'un des deux bouts : $\frac{u'}{u}$.
8. La fonction est continue sur $]1,+\infty[$. Il existe donc F une primitive sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$: $\boxed{F(x) = 2\sqrt{x-1}}$: on reconnaît la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.
9. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3,1\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $]-3,1[$ et pour tout $x \in]-3,1[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right| = -\ln\left(-x^2-2x+3\right)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$.

Solution (exercice 2)

[Énoncé]

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ en mettant le 3 en facteur au dénominateur.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes strictement positifs. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \arctan(e^x)}$: on reconnaît la forme $\frac{u'}{1+u^2}$.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \arctan(\sin x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$.
4. La fonction est continue sur $]0,+\infty[$. Il existe donc F une primitive sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\boxed{F(x) = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)}$: on reconnaît la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ en écrivant que : $x = (\sqrt{x})^2$ et en remarquant que la dérivé de la racine carré est bien $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Solution (exercice 3)

[Énoncé]

1. La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est continue sur $[2,3]$ comme somme et quotient de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ et ainsi $\boxed{I = -\ln 2}$.
2. La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ est continue sur $[2,3]$ comme somme et quotient de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u^2}$ et ainsi $\boxed{I = \frac{1}{2}}$.
3. La fonction $f : x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On reconnaît la forme $u'u$ et ainsi $\boxed{I = \frac{1}{2}}$.
4. La fonction $f : x \longmapsto |\cos(x)|$ est continue sur $[0,\pi]$ comme composé de fonctions donc l'intégrale I existe. On utilise le théorème de CHASLES pour couper en deux l'intégrale et ainsi pouvoir enlever la valeur absolue. Ainsi on a :
$$\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,dx = 2.}$$

5. La fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc sur $[1,2]$ comme quotient de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On reconnaît la forme $u'u$ et ainsi $\boxed{\mathrm{I} = \frac{(\ln 2)^2}{2}}$.
6. La fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On utilise alors l'astuce "$-1+1$" et on obtient que :
$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2-1+1}{1+x} = x-1+\frac{1}{1+x}.$$
Une primitive est alors $\mathrm{F}(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|1+x|$ et donc : $\boxed{\mathrm{I} = -\frac{1}{2}+\ln(2)}$.

Solution (exercice 4) Énoncé Je ne donne là encore que les idés de la méthode et le résultat mais toute intégration par parties doit être correctement rédigé, en particulier il faut à chaque fois justifier que les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, comme nous l'avons fait dans les exemples du cours.

1. La fonction $f : x \longmapsto x\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,\pi]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On dérive le polynôme et on obtient par intégration par parties que : $\boxed{\mathrm{I}=-2}$.
2. La fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ dont sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On dérive le polynôme et on obtient par intégration par parties que : $\boxed{\mathrm{I} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}}$.
3. La fonction $f : x \longmapsto x(1-x)^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,1]$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On dérive le polynôme de degré 1 et on intègre la fonction $x \longmapsto (1-x)^n$ dont une primitive est de la forme $\mathrm{F} : x \longmapsto -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. On obtient alors par intégration par parties : $\mathrm{I} = 0 + \frac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ car une primitive de $x \longmapsto (1-x)^{n+1}$ est $\boxed{\mathrm{F} : x \longmapsto -\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}}$.
4. La fonction $f : x \longmapsto x^n\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc sur $[1,t]$ ou $[1,t]$ car $t>0$ comme produit de fonctions continues donc l'intégrale I existe. On dérive la fonction logarithme népérien et on intègre la fonction $x \longmapsto x^n$ dont une primitive est de la forme $\mathrm{F} : x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On obtient alors par intégration par parties : $\boxed{\mathrm{I} = \frac{t^{n+1}\ln t}{n+1} - \frac{1}{n+1}\displaystyle\int_1^t x^n\,\mathrm{d}x = \frac{t^{n+1}\ln t}{n+1} - \frac{t^{n+1}-1}{(n+1)^2}}$.

Solution (exercice 5) Énoncé Dans tous ces exemples, on ne peut pas calculer directement une primitive... L'idé alors d'exprimer cette primitive sous la forme d'une intégrale pour pouvoir la calculer plus facilement. On ne détaille pas tous les calculs, seulement des indications pour guider l'intégration par parties.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x t^3\cos(6t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3\sin(6x)}{6} + \frac{x^2\cos(6x)}{12} - \frac{x\sin(6x)}{36} - \frac{\cos(6x)}{6^3}}.$$
Trois intégration par parties en dérivant le polynôme.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x t\cos(2t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{4} = \frac{x\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}}.$$
Linéarisation du cosinus carré puis une intégration par parties.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}.$$
1 intégration par parties en dérivant la fonction arctangente et en intégrant 1 puis on reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}}.$$
2 intégration par parties en dérivant le polynôme.
5. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}}{2}}.$$
1 intégration par parties en dérivant le polynôme $t \longmapsto t^2$ et en intégrant $t \longmapsto t\,e^{-t^2}$ où on reconnaît $u'\mathrm{e}^u$ (ici on commence par écrire que $t^3 = t^2\times t$). Puis dans la nouvelle intégrale de l'intégration par parties, on reconnaît encore la forme $u'\mathrm{e}^u$.

Solution (exercice 6) Énoncé

1. La fonction $x \longmapsto \tan(x)+\tan^3(x)$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ comme composé et somme de fonctions continues. Donc I existe.
Calculons I grâce à un changement de variable : on pose $u=\tan x$, $\mathrm{d}u = (1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x =$. Donc :
$$(\tan(x)+\tan^3(x))\,\mathrm{d}x = \tan(x)(1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x.$$
De plus $\varphi : x \longmapsto \tan(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ comme fonction usuelle.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que : $\boxed{I=\int_0^1 u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}}$.

2. La fonction $x \longmapsto \sin^3(x)\cos^2(x)$ est continue sur $[0,\pi]$ comme composé et produit de fonctions continues. Donc I existe.

Calculons I grâce à un changement de variable : $u=\cos x$, $\mathrm{d}u=-\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Donc :

$$\sin^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x=-u^2(1-u^2)\,\mathrm{d}u.$$

On a $x=0 \Longrightarrow u=\cos(0)=1$, et $x=\pi \Longrightarrow u=\cos(\pi)=-1$. De plus $\varphi : x \longmapsto \cos(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ comme fonction usuelle.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{I=\int_1^{-1}-u^2(1-u^2)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{15}}.$$

3. La fonction $x \longmapsto x^2\sqrt{1+x^3}$ est continue sur $[0,1]$ comme composé et produit de fonctions continues. Donc I existe.

Calculons I grâce à un changement de variable : $t=1+x^3$, $\mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x$, $x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{t}}{3}\,\mathrm{d}t$. On a $x=0 \Longrightarrow t=1$, et $x=1 \Longrightarrow t=2$. La fonction $\varphi : x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1]$ comme fonction usuelle.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$I=\int_1^2\frac{\sqrt{t}}{3}\,\mathrm{d}t=\boxed{\frac{4\sqrt{2}-2}{9}}.$$

4. La fonction $x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ est continue sur $[0,1]$ comme composé, somme et produit de fonctions continues. Donc I existe.

Calculons I grâce à un changement de variable. On pose $t=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, $\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. On a $x=0 \Longrightarrow t=1$, et $x=1 \Longrightarrow t=\mathrm{e}$. La fonction $\varphi : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ comme fonction usuelle.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{I=\int_1^e\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan \mathrm{e}-\frac{\pi}{4}}.$$

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1.
- Existence : la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x\frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\begin{cases} u &= t^2\\ \mathrm{d}u &= 2t\,\mathrm{d}t\\ \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u^2)}.\end{cases}$
  - ◇ On a $t=0 \Longrightarrow u=0$, et $t=x \Longrightarrow u=x^2$.
  - ◇ On a :
    - $\varphi : t \longmapsto t^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
    - $u \longmapsto \frac{1}{2(1+u^2)}$ est continue sur $[0,x^2]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

  $$\boxed{F(x)=\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{2(1+u^2)}=\frac{\arctan(x^2)}{2}}.$$

2.
- Existence : la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2+\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ F(x)=\int_0^x\frac{1}{2+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\begin{cases} u &= 2+\sqrt{t}\\ du &= \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \iff 2(u-2)\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\left(\text{ car}\sqrt{t}=u-2\right)\frac{1}{2+\sqrt{t}}\\ \mathrm{d}t &= \frac{2(u-2)}{u}\,\mathrm{d}u.\end{cases}$
  - ◇ On a $t=0 \Longrightarrow u=2$, et $t=x \Longrightarrow u=2+\sqrt{x}$.
  - ◇ On a :
    - $\varphi : t \longmapsto 2+\sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
    - $u \longmapsto \frac{2(u-2)}{u}$ est continue sur $[2,2+\sqrt{x}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

  $$\boxed{F(x)=2\int_2^{2+\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u=2\sqrt{x}-4\ln\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}.$$

3.
- Existence : la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(\mathrm{e}^x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composé et produit de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\begin{cases} u &= \mathrm{e}^t\\ \mathrm{d}u &= \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{e}^{2t}\sin(\mathrm{e}^t) & \\ \mathrm{d}t &= u\sin(u)\,\mathrm{d}u.\end{cases}$
  - ◇ On a $t=0 \Longrightarrow u=1$, et $t=x \Longrightarrow u=\mathrm{e}^x$.

◇ On a :
- $\varphi : t \longmapsto e^t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
- $u \longmapsto u\sin(u)$ est continue sur $[1, e^x]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_1^{e^x} u\sin u \, du = -x\cos x + \sin x + \cos(1) - \sin(1)},$$

en faisant une intégration par parties.

4. • Existence : la fonction $x \longmapsto \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ est continue sur par exemple $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall X \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{\sin(t)}}{\cos(t)} dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u & = & \sqrt{\sin(t)} \\ du & = & \frac{\cos(t)\,dt}{2\sqrt{\sin(t)}} \\ \frac{\sqrt{\sin(t)}}{\cos(t)} dt & = & \frac{2\sin(t)}{\cos^2(t)} \frac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}} dt \\ & = & \frac{2\sin(t)}{1-\sin^2(t)} \frac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}} dt = \frac{2u^2}{1-u^4} du. \end{array}\right.$

◇ On a $t = 0 \Longrightarrow u = 0$, et $t = x \Longrightarrow u = \sqrt{\sin(x)}$.

◇ On a :
- $\varphi : t \longmapsto \sqrt{\sin(t)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
- $u \longmapsto \frac{2u^2}{1-u^4}$ est continue sur $[0, \sqrt{\sin(x)}]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^{\sqrt{\sin(x)}} \frac{2u^2}{1-u^4} du = -\arctan(\sqrt{\sin x}) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{\sin(x)}}{1+\sqrt{\sin(x)}}\right)},$$

en écrivant que $\frac{u^2}{1-u^4} = \frac{A}{1-u^2} + \frac{B}{1+u^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+u^2}$ puis en écrivant encore $\frac{1}{1-u^2} = \frac{C}{1-u} + \frac{D}{1+u}$.

5. • Existence : la fonction $x \longmapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composé, somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \frac{1}{e^t + e^{-t}} dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u & = & e^t \\ du & = & e^t\,dt \\ \frac{1}{e^t+e^{-t}} dt & = & \frac{du}{1+u^2}. \end{array}\right.$

◇ On a $t = 0 \Longrightarrow u = 1$, et $t = x \Longrightarrow u = e^x$.

◇ On a :
- $\varphi : t \longmapsto e^t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
- $u \longmapsto \frac{1}{1+u^2}$ est continue sur $[1, e^x]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_1^{e^x} \frac{du}{1+u^2} = \arctan(e^x) - \frac{\pi}{4}}.$$

Solution (exercice 8) [Énoncé]

1. • La fonction $x \longmapsto \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif). Ainsi I existe.

• On reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$ en posant $u(x) = x^2 + x + 1$.

• Calcul : $\boxed{\mathrm{I} = \left[\ln|x^2+x+1|\right]_0^1 = \ln(3)}$.

2. • La fonction $x \longmapsto \frac{x}{(x+1)^2}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi I existe bien.

• ◇ On utilise l'astuce du $+1-1$: $\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

◇ Ainsi, on a : $\boxed{\mathrm{I} = \left[\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln(2) - \frac{1}{2}}$.

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. Les égalités sur les fractions se prouvent simplement par calculs directs. Passons au calcul des intégrales.

• La fonction $x \longmapsto \frac{x+1}{x^2+4x+5}$ est continue sur $[-1,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas (discriminant négatif). Ainsi I existe bien.

• On fait apparaître $\frac{u'}{u}$:

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{x^2+4x+5}\right) dx = \ln(\sqrt{5}) - \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+5} dx.$$

• On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :

$$\mathrm{I} = \ln(\sqrt{5}) - \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+2)^2+1} dx.$$

• On fait apparaître la forme $\frac{u'}{1+u^2}$, en posant $u(x) = x + 2$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{I} = \ln(\sqrt{5}) - [\arctan(x+2)]_{-1}^1 = \ln(\sqrt{5}) + \frac{\pi}{4} - \arctan(3)}$.

2. • La fonction $x \longmapsto \frac{2x+1}{2x-x^2-4}$ est continue sur $[0,2]$ comme quotient de fonctions polynomiales et car $\Delta = -12 < 0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Ainsi I existe.

• On applique alors la méthode suivante.

◇ On fait apparaître $\frac{u'}{u}$:

$$\mathrm{I} = \int_0^2 \left(-\frac{-2x+2}{-x^2+2x-4} + \frac{3}{-x^2+2x-4}\right) dx = 0 - 3\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+4} dx.$$

◇ On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :

$$I=-3\int_0^2\frac{1}{(x-1)^2+3}\,dx.$$

- On fait apparaître la forme $\frac{u'}{1+u^2}$:

$$I=-\int_0^2\frac{1}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx=-\sqrt{3}\int_0^2\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx$$
$$=-\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^2=\boxed{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. La fonction f est continue sur $[a,b]$ par hypothèse et ainsi les fonctions $x\longmapsto f(x)$ et $x\longmapsto f(a+b-x)$ sont elles aussi continues sur $[a,b]$ comme composé de fonctions continues pour la deuxième. Ainsi les deux intégrales existent bien.
Partons par exemple de $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ et vérifions en faisant un changement de variable que cette intégrale vaut bien $\displaystyle\int_a^b f(y)\,dy$.
On pose $y=a+b-x$, $dy=-dx$, donc $f(a+b-x)\,dx=-f(y)\,dy$. Et $x=a\implies y=b$, et $x=b\implies y=a$, la fonction $\varphi: x\longmapsto a+b-x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ comme fonction usuelle. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx=\int_b^a(-f(y))\,dy=\boxed{\int_a^b f(y)\,dy}.$$
On obtient bien le résultat cherché.
2. La fonction $x\longmapsto\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est bien continue sur $[0,\pi]$ comme composé, somme, produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ existe bien et on est bien sous l'hypothèse du résultat de la question précédente. Ainsi, on obtient en utilisant la question précédente que :
$$I=\int_0^\pi\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx=\int_0^\pi\frac{(\pi-x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx=\pi\int_0^\pi\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx-i$$
en utilisant le cercle trigonométrique. Ainsi, on a : $2i=\pi\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$ et on reconnaît alors une primitive usuelle et on obtient donc :
$$2i=-\pi\left[\arctan(\cos(x))\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}.$$
Ainsi, on vient de montrer que $\boxed{I=\frac{\pi^2}{4}}$.

Solution (exercice 11) [Énoncé] Je ne détaille pas tous les calculs.

1. **Résolution de l'homogène.** Résolution de l'équation homogène associé : $y'=2y$.On en déduit : $\mathscr{S}_0=\{x\longmapsto Ce^{2x}\mid C\in\mathbb{R}\}$
Recherche d'une solution particulière. Par variation de la constante, on obtient que : $y^{\mathbf{p}}(x)=-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$.
Conclusion. $\boxed{\mathscr{S}=\{x\longmapsto Ce^{2x}-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\mid C\in\mathbb{R}\}}$
2. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. Comme on a $1+x^2\neq 0$ sur $\mathbb{R}$, il est équivalent de résoudre $y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{1}{1+x^2}$.
Résolution de l'homogène. La fonction $a: x\longmapsto a(x)=-\frac{2x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2>0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif et ainsi on a toujours $1+x^2\neq 0$. Donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $A(x)=-\ln\left|1+x^2\right|=-\ln(1+x^2)$. On a de plus $e^{-\ln(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$. Donc : $\mathscr{S}_0=\left\{x\longmapsto\frac{C}{1+x^2}\,\middle|\,C\in\mathbb{R}\right\}$.
Recherche d'une solution particulière. On utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $y^{\mathbf{p}}(x)=\frac{C(x)}{1+x^2}$ avec C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi $y^{\mathbf{p}}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x\in\mathbb{R}^{+\star}$, on obtient :
$$(y^{\mathbf{p}})'(x)+\frac{2x}{1+x^2}y^{\mathbf{p}}(x)=\frac{1}{1+x^2}\iff\frac{C'(x)}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}\iff C'(x)=1,$$
ainsi on peut prendre $C(x)=x$, et donc $y^{\mathbf{p}}(x)=\frac{x}{1+x^2}$.
Conclusion. $\boxed{\mathscr{S}=\left\{x\longmapsto\frac{C+x}{1+x^2}\,\middle|\,C\in\mathbb{R}\right\}}$
3. On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre. Comme on la résout sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on a : $x^2\neq 0$ et ainsi il est équivalent de résoudre :
$$y'=\frac{y}{x^2}+\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$
Résolution de l'homogène. La fonction $a: x\longmapsto a(x)=\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^{+\star}$, $A(x)=\frac{1}{x}$.
On a donc : $\mathscr{S}_0=\left\{x\in\mathbb{R}^{+}\longmapsto Ce^{-\frac{1}{x}}\,\middle|\,C\in\mathbb{R}\right\}$
Recherche d'une solution particulière. En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y_(x)=C(x)e^{-\frac{1}{x}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi y_1 est bien dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x\in\mathbb{R}^{+\star}$, on obtient :
$$(y^{\mathbf{p}})'(x)-\frac{y^{\mathbf{p}}(x)}{x^2}=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\iff C'(x)=\frac{1}{x^2}$$
en simplifiant par $e^{-\frac{1}{x}}\neq 0$. Ainsi pour tout $x>0$: $C(x)=-\frac{1}{x}$. Ainsi : $y^{\mathbf{p}}(x)=$

$-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$ est une solution particulière.

Conclusion. La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est alors : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto \left(C - \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$

4. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Ce^{x^2} + e^x \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$
5. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Ce^{-\frac{1}{12}\sin(3x)-\frac{3}{4}\sin x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.
6. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]1,+\infty[\longmapsto \left(C + \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln(x+1)\right)\frac{x+1}{x-1} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.
7. **Résolution de l'homogène.** La fonction $a : x \longmapsto a(x) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = x$. La solution générale de l'équation homogène associé est alors : $x \longmapsto Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$ constante.

   Recherche d'une solution particulière. À l'aide de la méthode de variation de la constante et d'intégrations par parties, on trouve une solution particulière $x \longmapsto \frac{x^3}{3}e^x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x$.

   Conclusion. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Ce^x + \frac{x^3}{3}e^x - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^x \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.
8. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]0,+\infty[\longmapsto Cx^4 e^{\frac{2}{x^2}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.
9. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in]0,+\infty[\longmapsto Ce^{-\frac{1}{x}} + x - 1 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$

Solution (exercice 12) Énoncé

1. On résout sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, un intervalle contenant 0 sur lequel la fonction cosinus ne s'annule pas. Il est alors équivalent de résoudre :
$$y' - \frac{\sin x}{\cos x}y = 0.$$
   On obtient puisque l'équation différentielle est déjà homogène : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \frac{C}{\cos x} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

   Condition initiale. On a $y(0) = 1 = \frac{C}{\cos 0}$, donc on a $C = 1$. On en déduit que l'unique solution vérifiant $y(0) = 1$ est $\boxed{y : x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longmapsto \frac{1}{\cos x}}$.
2. **Résolution de l'homogène.** La fonction $a : x \longmapsto a(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe une primitive A de a sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \frac{x^2}{2}$. On a donc : $\mathscr{S}_0 = \left\{x \longmapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

   Recherche d'une solution particulière. En utilisant la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière sous la forme : $y^{\mathrm{P}}(x) = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec C fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi y^{P} est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composé et produit de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient : $(y^{\mathrm{P}})'(x) + xy^{\mathrm{P}}(x) = 2x \iff C'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}}$, et $y^{\mathrm{P}}(x) = 2$ est une solution particulière.

   Conclusion. $\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2 \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

   Condition initiale. Comme $y(0) = 1$, on a : $y(0) = Ce^0 + 2 = C + 2 = 1 \iff C = -1$. Ainsi il existe une unique solution qui est : $\boxed{y : x \longmapsto 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

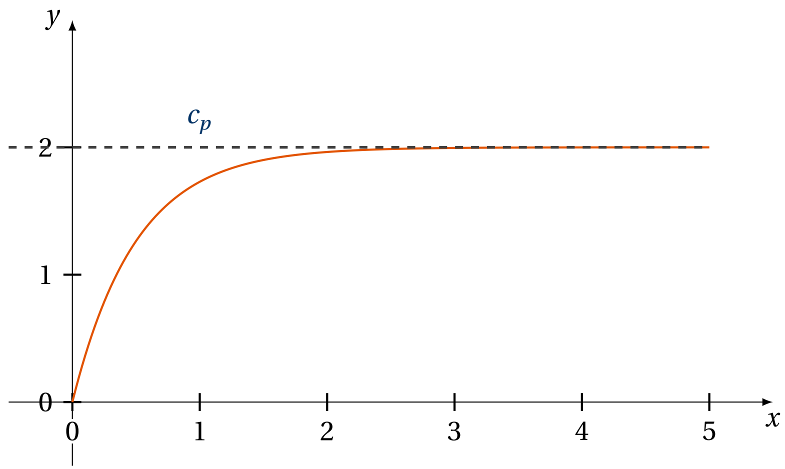
Solution (exercice 13) Énoncé

On doit résoudre l'équation différentielle : $c' + \frac{1}{\tau}c = \frac{1}{\tau}c_p$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants.

Résolution de l'homogène. On commence par étudier l'équation homogène associé : $c' + \frac{1}{\tau}c = 0$. L'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_0 = \left\{c_h t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto Ce^{-\frac{t}{\tau}}, \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. $f(t) = \alpha$. On a alors $f'(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \frac{1}{\tau}\alpha = \frac{1}{\tau}c_p$, soit $\alpha = c_p$.

Conclusion. On en déduit que l'ensemble des solutions est $S = \left\{t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto Ce^{-\frac{t}{\tau}} + c_p \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$. Comme de plus on a $c(0) = 0$, on a $C + c_p = 0$, soit $C = -c_p$. Finalement, la solution est donné par $\boxed{c : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto c_p\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$. Pour tracer la courbe, il suffit d'étudier les variations de la fonctions c, en supposant que τ et c_p sont des constantes strictement positives. On constate que la concentration tend vers c_p : les concentrations en potassium s'équilibrent entre le milieu extérieur et la cellule.



Solution (exercice 14) [Énoncé]

1. On doit résoudre l'équation différentielle $y' + ky = 0$. C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants et homogène. On connaît donc l'ensemble des solutions :
$$S = \left\{ y : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto Ce^{-kt} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$
De plus, on a $y(0) = N_0$, donc $Ce^{-k\times 0} = N_0$, soit $C = N_0$. On en déduit que y a pour expression $\boxed{y : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto N_0 e^{-kt}}$.
2. On cherche $t_{0.5}$ tel que :
$$y(t_{0.5}) = \frac{1}{2}N_0 \iff N_0 e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2}N_0 \iff e^{-kt_{0.5}} = \frac{1}{2} \iff -kt_{0.5} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $\boxed{t_{0.5} = \frac{\ln 2}{k}}$. L'application numérique donne $t_{0.5} \simeq 5599$ ans.
3. On cherche t_1 tel que :
$$y(t_1) = 0.7N_0 \iff N_0 e^{-kt_1} = 0.7N_0 \iff e^{-kt_1} = 0.7 \iff -kt_1 = \ln(0.7)$$
a par stricte croissance de la fonction logarithme. On en déduit $\boxed{t_1 = -\frac{\ln 0.7}{k}}$. L'application numérique donne comme estimation $t_1 \simeq 2881$ ans pour ces fragments.

Solution (exercice 15) [Énoncé] **Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.**

1. **Résolution de l'homogène.** On étudie l'équation caractéristique associé : $r^2 + 8r + 15 = 0$. Ses solutions sont réelles distinctes, donnés par $r_1 = -5$ et $r_2 = -3$. Les solutions sont donc donnés par $\mathcal{S}_0 = \left\{ y : t \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{-5t} + Be^{-3t} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

   Recherche d'une solution particulière. $y^p(t) = \alpha$. On a alors $(y^p)'(t) = (y^p)''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 15\alpha = 5$, soit $\alpha = \frac{1}{3}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \left\{ y : t \longmapsto Ae^{-5t} + Be^{-3t} + \frac{1}{3} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

   Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $A + B + \frac{1}{3} = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $q'(t) = -5Ae^{-5t} - 3Be^{-3t}$, donc $q'(0) = -5A - 3B = 1$. On doit donc résoudre :
$$\begin{cases} A + B &= -\frac{1}{3} \\ -5A - 3B &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 0 \\ B &= -\frac{1}{3}. \end{cases}$$
   La solution est donc donné par $\boxed{y : t \longmapsto \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})}$.
2. **Résolution de l'homogène.** On étudie l'équation caractéristique associé : $4r^2 - 4r + 1 = 0$. Cette équation admet une solution double, donné par $r = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc donnés par $\mathcal{S}_0 = \left\{ y : t \in \mathbb{R} \longmapsto (A + Bt)e^{\frac{t}{2}} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

   Recherche d'une solution particulière. $y^p(t) = \alpha$. On a alors $(y^p)'(t) = (y^p)''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + \alpha = 4$, soit $\alpha = 4$.
   On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ y : t \in \mathbb{R} \longmapsto (A + Bt)e^{\frac{t}{2}} + 4 \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

   Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $A = 0$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = \frac{A}{2}e^{\frac{t}{2}} + Be^{\frac{t}{2}} + \frac{B}{2}te^{\frac{t}{2}}$, donc $y'(0) = \frac{A+B}{2} = 1$, soit $B = 2$. La solution est donc donné par $\boxed{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto 2te^{\frac{t}{2}} + 4}$.
3. On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

   Résolution de l'homogène. On étudie l'équation caractéristique associé : $r^2 - 2r + 5 = 0$. Ses solutions sont complexes conjugués, donnés par $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$. Les solutions sont donc donnés par $\mathcal{S}_0 = \left\{ y : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^t\,(A\cos(2t) + B\sin(2t)) \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

   Recherche d'une solution particulière. $y^p(t) = \alpha$. On a alors $(y^p)'(t) = (y^p)''(t) = 0$, donc on doit avoir $0 + 5\alpha = 5$, soit $\alpha = 1$.
   On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ y : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^t\,(A\cos(2t) + B\sin(2t)) + 1 \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

   Condition initiale. On a $y(0) = 0$, soit $A + 1 = 0$, donc $A = -1$. De plus, on doit avoir $y'(0) = 0$. Or on a : $y'(t) = e^t(A\cos(2t) + B\sin(2t)) + e^t(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t))$, donc $y'(0) = A + 2B = 1$. On en déduit $B = \frac{1-A}{2} = 1$. La solution est donc donné par $\boxed{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^t(-\cos(2t) + \sin(2t)) + 1}$.
4. On doit résoudre une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants. Cependant, ici le coefficient du terme y est nul : on se ramène à une équation du premier ordre, en $z = y'$. On commence donc par résoudre l'équation $z' - 2z = 2$. La solution de l'équation homogène associé sont de la forme $z_h(t) = Ce^{2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière constante : $z_p(t) = \alpha$. On obtient $\alpha = -1$. Les solutions générales sont donc de la forme $z(t) = Ce^{2t} - 1$, avec $C \in \mathbb{R}$.
   Revenons à présent à y : on a $y' = z$, donc y est une primitive de z. On en déduit que y s'écrit sous la forme : $\boxed{S = \left\{ y : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{C}{2}e^{2t} - t + K \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.
   On utilise les conditions initiales pour déterminer C et K : on a $y(0) = 0$, soit $\frac{C}{2} + K = 0$. De plus, on a $y'(t) = Ce^{2t} - 1$, donc $y'(0) = 1$ donne $C - 1 = 1$, soit $C = 2$. En revenant à l'équation $\frac{C}{2} + K = 0$, on obtient alors $K = -1$. On a donc finalement $\boxed{y : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2t} - t - 1}$.

Solution (exercice 16) [Énoncé] Je ne donne pas tous les détails.

1. $y_p(t) = t^2 + 2t + 6$.

2. $y_p(t) = -\frac{1}{8}e^{2t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. $y_p(t) = t\left(-\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)\right)$.
4. $y_p(t) = \frac{2}{3}te^{t}$.

Solution (exercice 17) [Énoncé]

1. Résolution de l'homogène. L'équation caractéristique associé est : $r^2 - 4r + 5 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = -4 < 0$. L'équation caractéristique a donc deux solutions complexes conjugués $r_1 = 2 + i$ et $r_2 = 2 - i$.
Ainsi $\mathscr{S}_0 = \left\{x \longmapsto e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. En remplaçant par une constante K dans l'équation, on obtient : $K = \frac{1}{5}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y^{p}(x) = \frac{1}{5}$.

Conclusion. $\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) + \frac{1}{5} \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Or on sait que $y(0) = A + \frac{1}{2}$, et d'autre part, on a $y'(x) = e^{2x}(2A\cos(x) + 2B\sin(x) - A\sin x + B\cos x) + \frac{1}{2}e^{x}$. On en déduit que $y'(0) = 2A + B + \frac{1}{2}$. On doit donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + \frac{1}{2} & = & 1 \\ 2A + B + \frac{1}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \frac{1}{2} \\ B & = & -\frac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales donnés est $\boxed{y : x \longmapsto \frac{e^{2x}}{2}(\cos(x) - 3\sin(x)) + \frac{1}{2}e^{x}}$.

2. Résolution de l'homogène. D'après la question précédente : $\mathscr{S}_0 = \left\{x \longmapsto e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Recherche d'une solution particulière. En remplaçant par une constante K dans l'équation, on obtient : $K = \frac{1}{5}$. Ainsi une solution particulière de l'équation est : $y^{p}(x) = \frac{2}{5}$.

Conclusion. $\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x) + 1) \,\middle|\, (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Condition initiale. On a $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Or on sait que $y(0) = A + 1$, et d'autre part, on a $y'(x) = e^{2x}(2A\cos(x) + 2B\sin(x) + 2 - A\sin x + B\cos x)$. On en déduit que $y'(0) = 2A + 2 + B$. On doit donc résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A + 1 & = & 0 \\ 2A + B + 2 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & -1 \\ B & = & 1. \end{array}\right.$$

Ainsi, l'unique solution vérifiant les conditions initiales donnés est $\boxed{y : x \longmapsto e^{2x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1)}$.

Solution (exercice 18) [Énoncé]

- **[Recherche d'une équation différentielle en z]** On commence par calculer les dérivées de z. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$z'(t) = e^{t}y'(e^{t}),$$
$$z''(t) = e^{t}y'(e^{t}) + (e^{t})^2 y''(e^{t}) = z'(t) + (e^{t})^2 y''(e^{t}).$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a en utilisant l'équation différentielle de départ :

$$(e^{t})^2 y''(e^{t}) = -3e^{t}y'(e^{t}) - y(e^{t}) - 2,$$

donc :

$$(e^{t})^2 y''(e^{t}) = -3z'(t) - z(t) - 2.$$

Donc z vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z''(t) = z'(t) - 3z'(t) - z(t) - 2,$$

donc : $\quad z'' + 2z' + z = 2.$

- **[Résolution en z]** C'est cette fois-ci une équation différentielle linéaire à coefficients constants, l'équation caractéristique est $x^2 + 2x + 1 = 0$, et une solution particulière peut être cherchée sous la forme $y_p = K$ avec $K \in \mathbb{R}$. En remplaçant, on trouve $K = 2$. Donc :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = (At + B)e^{-t} + 2.$$

- **[Solutions y]** Constatons que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = y(e^{t}) \iff \forall x > 0, \quad y(x) = z(\ln x).$$

Donc :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad y(x) = \frac{A\ln x + B}{x} + 2}.$$

Solution (exercice 19) [Énoncé]

On calcule les dérivés successives de z. On a $z'(x) = 2xy(x) + x^2y'(x)$, et

$$z''(x) = 2y(x) + 2xy'(x) + 2xy'(x) + x^2y''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2y''(x).$$

On en déduit que l'on a :

$$z'' - z = x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1.$$

Donc z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Résolution de l'homogène. $z'' - z = 0$. On résout l'équation caractéristique associé : $r^2 - 1 = 0$. On a deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. La solution générale de l'équation homogène est donc donné par $z_h(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière. Le second membre est une constante, on cherche donc une solution sous la forme $z_p(t) = \alpha$. En remplaçant dans l'équation, on obtient $\alpha = -1$.

Conclusion. La solution générale de l'équation en z est donc $z(x) = Ae^{x} + Be^{-x} -$

1, avec $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.

On revient à y : on a $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$, soit $\boxed{y(x) = \frac{\mathrm{A}e^{x}+\mathrm{B}e^{-x}-1}{x^2}}$, avec $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.

Solution (exercice 20)

[Énoncé] La fonction inverse est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ donc en particulier sur $\left[\frac{1}{a}, a\right]$. De plus, $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, donc $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$, d'où :

$$\frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{(-\ln t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Par formule de changement de variable, on déduit donc :

$$\mathrm{I}(a) = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{I}(a).$$

On déduit alors que $2\mathrm{I}(a) = 0$ soit $\boxed{\mathrm{I}(a) = 0}$.

Solution (problème 1)

[Énoncé]

1. 1.1) La fonction $g_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux). Pour tout réel x, on a : $g_1'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow g_1''(x) = \mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow g_1'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ Ainsi, pour tout réel x : $g_1'''(x)+5g_1''(x)+9g_1'(x)+5g_1(x) = -\mathrm{e}^{-x}+5\mathrm{e}^{-x}-9\mathrm{e}^{-x}+5\mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc g_1 est solution de **(H)**.

1.2) La fonction $g_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\cos(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux). Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
&g_2'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}\cos(x) - \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\\
&\Longrightarrow g_2''(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\cos(x) + 4\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\\
&\Longrightarrow g_2'''(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}\cos(x) - 11\mathrm{e}^{-2x}\sin(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
&g_2'''(x)+5g_2''(x)+9g_2'(x)+5g_2(x)\\
&= -2\mathrm{e}^{-2x}\cos(x) - 11\mathrm{e}^{-2x}\sin(x) + 5\left[3\mathrm{e}^{-2x}\cos(x)+4\mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\right]\\
&+ 9\left[-2\mathrm{e}^{-2x}\cos(x) - \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)\right] + 5\mathrm{e}^{-2x}\cos(x)\\
&= \mathrm{e}^{-2x}\cos(x)(-2+15-18+5) + \mathrm{e}^{-2x}\sin(x)(-11+20-9)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc g_2 est solution de **(H)**.

1.3) Puisque g_1, g_2 et g_3 sont solutions de la même équation différentielle homogène linéaire **(H)** alors (par linéarité de la dérivation) toute combinaison linéaire de g_1, g_2 et g_3 est encore solution de **(H)** (d'après le cours).

Ainsi : $\forall f \in \mathscr{E}, f \in \mathscr{S}$. Ce qui s'écrit encore : $\boxed{\mathscr{E} \subset \mathscr{S}}$.

2. 2.1) On a : $g = f''+4f'+5f \Longrightarrow g' = f'''+4f''+5f'$. Alors : $g'+g = f'''+4f''+5f'+f''+4f'+5f = f'''+5f''+9f'+5f = 0$ car f est solution de **(H)**.

Ainsi : g est solution de $\mathbf{(H1)}\, y'+y = 0$.

2.2) D'après le cours, l'ensemble des solutions est $\boxed{\{x \in \mathbb{R} \longmapsto C\mathrm{e}^{-x} \mid C \in \mathbb{R}\}}$.

2.3) L'équation caractéristique associée à **(H2)** est $r^2+4r+5 = 0$. Ses solutions sont les complexes conjugués $-2 \pm \mathrm{i}$. L'ensemble des solutions de **(H2)** est alors :

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto (A\cos(x)+B\sin(x))\mathrm{e}^{-2x} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

2.4) On cherche une solution particulière de **(H3)** sous la forme $y_0 : x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. On a de plus :

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ solution de } (\mathrm{H}_3) &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad y_0''(x)+4y_0'(x)+5y_0(x) = \lambda\mathrm{e}^{-x}\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\quad C\mathrm{e}^{-x} - 4C\mathrm{e}^{-x} + 5C\mathrm{e}^{-x} = \lambda\mathrm{e}^{-x}\\
&\Longleftrightarrow C - 4C + 5C = \lambda\\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, y_0(x) = \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

car $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} \neq 0$

L'ensemble des solutions de **(H3)** est donc :

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto (A\cos(x)+B\sin(x))\mathrm{e}^{-2x} + \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-x} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

2.5) D'après ce qui précède, si $f \in \mathscr{S}$, c'est-à-dire si f est solution de **H**, alors f est solution de **(H3)**, c'est-à-dire : $\exists(\lambda,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = (\alpha\cos(x)+\beta\sin(x))\mathrm{e}^{-2x}+\lambda\mathrm{e}^{-x} = \lambda g_1(x)+\alpha g_2(x)+\beta g_3(x).$$

Ainsi f est une combinaison linéaire de g_1, g_2, g_3 donc $f \in \mathscr{E}$. On a donc : $\boxed{\mathscr{S} \subset \mathscr{E}}$.

3. D'après ce qui précède, on a :

$$\exists(\lambda,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \lambda g_1(x)+\alpha g_2(x)+\beta g_3(x).$$

Autrement dit :

$$\exists(\lambda,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3,\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = ((\beta-2\alpha)\cos(x)-(\alpha+2\beta)\sin(x))\mathrm{e}^{-2x}-\lambda\mathrm{e}^{-x}.$$

Il reste à traduire le système de conditions initiales.

$$\begin{cases} f(0) &= 0 &= \lambda+\alpha\\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} &= \beta\mathrm{e}^{-\pi}+\lambda\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\\ f'(0) &= 1 &= \beta-2\alpha-\lambda \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha &= -\lambda\\ \beta &= 1-\lambda\\ (1-\lambda)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}+\lambda &= 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = 1,\ \alpha = -1,\ \beta = 0.$$

Finalement, l'unique solution de (E) est : $\boxed{x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x} - \cos(x)\mathrm{e}^{-2x}}$.