Programme de colles
du 4 au 8/12/2023

- Cette semaine : les applications, insister surtout sur la fin du chapitre (fonction arctan, théorème de la bijection, dérivée de f^{-1}). Et le dénombrement mais **uniquement en question de cours**, j'ai fait trop peu d'exercices pour le moment.
- Une seule question de cours.

1. [MATHS] INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS. BIJECTIONS NUMÉRIQUES.

Attention

- L'image réciproque d'une partie n'est pas au programme.
- Conformément au programme de BCPST, on limitera les exercices aux fonctions numériques. À la rigueur, dans un second temps, des applications complexes, de $\mathbb{R}^2$, *etc.*. On évitera tout exercice théorique.
- Éviter les exercices non guidés sur arcsin et arccos (même sans fonction), le(s) question(s) de cours suffira(ont).

- **Fonctions & Applications.** Définitions. Égalité de deux applications. Graphe. Applications usuelles : identité, indicatrice, ligne de niveau de l'indicatrice. Restriction & prolongement. Applications composables et composition d'applications. Propriété de la composition.
- **Injection, surjection, bijection.** Image directe, image directe d'une réunion et intersection. Injection, surjection. Injections usuelles : identité, injection canonique. Bijection. Reformulation à l'aide du nombre de solutions d'une équation. Réciproque d'une application. Si f est bijective : définition de f^{-1}, f^{-1} est une réciproque de f et même la réciproque de f. Bijectivité et existence d'une réciproque. Propriété de $.^{-1}$: réciproque d'une composée et d'une réciproque.
- **Applications aux fonctions numériques.** Bijection numérique, obtenir le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f. Théorème de la bijection continu : utilisation pour l'existence et l'unicité d'une solution à une équation (plusieurs exemples, cas d'une suite implicite), utilisation pour déterminer des images directes de parties en combinant éventuellement avec la propriété « $f(A \cup B) = \dots$ ». Extension finale des définitions de puissance : cas des puissances de la forme $a^{\frac{1}{2k+1}}$. Dérivabilité d'une bijection réciproque. Fonctions circulaires réciproques : arcsin, arccos (définition, relations $\arcsin(\sin(\dots)) = \dots$, $\sin(\arcsin(\dots)) = \dots$), arctan (étude complète : définition, relations $\arctan(\tan(\dots)) = \dots$, $\tan(\arctan(\dots)) = \dots$, parité, dérivée, limites, graphe).

Attention

Aucune autre notion que celles indiquées entre parenthèses ne sont au programme pour arcsin, arccos, mais cela peut faire l'objet d'exercices guidés.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application bijective. Expliquer ce qu'est $f^{-1} : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ (définition). Montrer, en résolvant une équation, que $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{2x+1} \end{array} \right.$ est bijective et déterminer sa réciproque.
2. Citer le théorème de la bijection. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{-x} = x$.
3. Définir la fonction arccos *(uniquement la définition en utilisant le théorème de la bijection)* et expliquer les relations $\arccos(\cos x) = x, \cos(\arccos x) = x$ pour x dans un ensemble à préciser.
4. Fonction usuelle arctan : définition, parité, allure du graphe, limites remarquables, dérivabilité.
5. Rappeler le domaine de dérivabilité d'arctan, la dérivée et montrer la formule ci-après : $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
6. Soit I un ensemble et $(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de parties d'un ensemble E. Écrire la définition (avec accolades) de $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i, \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$, et rappeler les lois de Morgan.
7. Soit E un ensemble. Donner la définition de partition $(\mathrm{A}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de E, puis la formule sur $\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$ deux sous-ensembles de E.
8. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Donner le nombre de p-listes, et le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n. Justifier ces deux formules.
9. Soient p, n deux entiers positifs tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Donner le nombre de p-combinaisons d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n. Déduire le nombre d'anagrammes de CHEVAL et ANANAS.

À venir : le dénombrement en exercices, puis primitives & équations différentielles.