Séance 7 : applications

Exercice 1 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Etablir le tableau de variation complet de f sur $\mathcal{D}_f$.

3. La fonction f est-elle injective sur $\mathcal{D}_f$?

4. Proposer deux intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit bijective.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle à déterminer.

2. Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}.

3. Justifier que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition $\mathcal{D}_{f^{-1}}$.

4. Montrer : $\forall x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}, (f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1+f^{-1}(x)}$. Calculer $(f^{-1})'(-1)$.

Exercice 3 :

Etudier complètement la fonction $f : x \mapsto \sin(2\arctan(x))$. (Ensemble de définition, parité, variations, limites aux bornes.)

Exercice 4 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Etudier la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 5 :

Montrer que $f : x \longmapsto \cos(\arctan(2x+1))$ réalise une bijection de $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ dans un ensemble J à déterminer.
Obtenir alors $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.