

Séance 8 : Dénombrement

Exercice 1

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $A_i = \{i, 2i, 3i, 4i, 5i, 6i\}$.

Expliciter $\bigcap_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{i \in I} A_i$ puis déterminer si les parties $A_i, i \in I$ sont deux à deux disjointes.

1. $I = \{1, 2, 3, 6\}$
2. $I = \{2, 3, 7\}$.

Exercice 2

Une urne contient 3 boules blanches numérotées de 1 à 3, 4 boules rouges numérotées de 1 à 4 et 5 boules noires numérotées de 1 à 5. On note B l'ensemble des boules blanches, R l'ensemble des boules rouges, N l'ensemble des boules noires et $U = B \cup R \cup N$ l'ensemble des boules contenues dans l'urne.

On pioche avec remise $n \in \mathbb{N}^*$ boules de l'urne. On note alors Ω l'ensemble de tous les tirages possibles et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_i l'ensemble de tous les tirages dont la $i^{\text{ième}}$ boule est blanche, R_i l'ensemble de tous les tirages dont la $i^{\text{ième}}$ boule est rouge et N_i l'ensemble de tous les tirages dont la $i^{\text{ième}}$ boule est noire.

Ecrire à l'aide des ensembles B_i, R_i et N_i les ensembles suivants ainsi que leur complémentaire :

- E : l'ensemble de tous les tirages dont toutes les boules sont rouges ou noires.
- F : l'ensemble de tous les tirages dont aucune boule n'est rouge.
- G : l'ensemble de tous les tirages dont au moins une boule est rouge.
- H : l'ensemble de tous les tirages dont exactement une boule est noire.

Exercice 3

Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument de musique et 453 ne font ni sport, ni musique.

Déterminer le nombre d'élèves à la fois sportifs et musiciens.

Exercice 4

Un parlement est constitué de 470 parlementaires. On y procède à l'élection d'une commission de 5 membres. Chaque parlementaire vote pour 5 candidats. On suppose qu'il n'y a ni vote nul, ni abstention.

On considère les 3 candidats a, b et c.

282 parlementaires ont voté pour a, 117 pour a et b, 105 pour a et c, 79 pour a, b et c, 117 pour b et c mais pas pour a, 27 pour c mais pas pour a ni pour b, 133 pour b mais pas pour a.

On note enfin P l'ensemble des parlementaires, A l'ensemble des parlementaires ayant voté pour a, B l'ensemble des parlementaires ayant voté pour b et C l'ensemble de parlementaires ayant voté pour c.

1. Ecrire à l'aide de A, B et C et déterminer le cardinal de l'ensemble des parlementaires ayant voté :
 - a. Pour a mais pas pour b.
 - b. Pour b.
 - c. Pour b et c.
 - d. Pour c.
2. Ecrire à l'aide de A, B et C et déterminer le cardinal de l'ensemble des parlementaires ayant voté :
 - a. Pour a ou b ou c.
 - b. Ni pour a, ni pour b, ni pour c.

Exercice 5

On considère l'ensemble $E = \llbracket 1 ; 10 \rrbracket$. Donner :

1. Le nombre de 3-listes de E .
2. Le nombre de 3-listes sans répétition de E .
3. Le nombre de parties de E à 3 éléments.
4. Le nombre de permutations de E .
5. Le nombre de sous-ensembles de E .

Exercice 6

Déterminer le nombre d'anagrammes distincts des mots suivants :

1. BEZOUT
2. EULER
3. DESCARTES
4. HADAMARD

Exercice 7

Le digicode d'un immeuble est composé des 5 chiffres de 1 à 5 et des lettres A, B et C.

1.
 - a. Combien de codes contenant 5 caractères peut-on composer ?
 - b. Combien de codes à trois chiffres suivis de deux lettres peut-on composer ?
 - c. Combien de codes à trois chiffres suivis de deux lettres, commençant par 2 et finissant par C, peut-on composer ?
2. On suppose dans cette question que les chiffres et les lettres constituant le code sont tous distincts.
 - a. Combien de codes contenant 5 caractères peut-on composer ?
 - b. Combien de codes à trois chiffres suivis de deux lettres peut-on composer ?
 - c. Combien de codes à trois chiffres suivis de deux lettres, commençant par 2 et finissant par C, peut-on composer ?

Exercice 8

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir :

1. Sans imposer de contraintes sur les cartes ?
2. Contenant 5 carreaux ou 5 piques ?
3. Contenant 2 carreaux et 3 piques ?
4. Contenant au moins un roi ?
5. Contenant au plus un roi ?
6. Contenant exactement 2 rois et 3 piques ?