Chapitre # (NUM) 1 Fonctions

La question de savoir si les machines peuvent penser... est à peu près aussi pertinente que celle de savoir si les sous-marins peuvent nager.
— **Edsger Dijkstra**

Résumé & Plan

Tracer un graphe de fonction ou suite peut donner beaucoup d'informations sur cette dernière : la monotonie, les limites éventuelles, *etc.*. L'objectif de ce court chapitre est de se familiariser avec le module dédié à cela en Python : `matplotlib`. Nous développons aussi quelques algorithmes relatifs aux fonctions.

- Les chapitres d'Informatique sont composés de cours et d'exercices intégrés. Le cours sera projeté au tableau.
- Il n'est pas attendu que toute la classe aborde tous les exercices. Traitez donc en priorité les exercices présents dans la liste donnée à chaque début de séance.
- Exercices 🌓 / **Pour aller plus loin** : exercices plus difficiles, ou plus techniques. À ne regarder que si les autres sont bien compris.

Dans tout ce TP, on supposera importé le module `matplotlib` de la manière suivante.

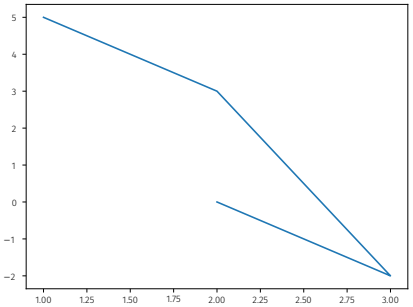
```
import matplotlib.pyplot as plt
```

1. COMMANDES PRINCIPALES

1.1. Généralités

Exemple 1 (Introductif) Commençons par un exemple illustrant le fonctionnement de `matplotlib`. Plaçons par exemple les points de coordonnées $(1,5)$, $(2,3)$, $(3,-2)$ et $(2,0)$, dans cet ordre, sur un graphique.

```
X = [1, 2, 3, 2]
Y = [5, 3, -2, 0]
plt.plot(X, Y)
```



On notera que par défaut, les points sont reliés par des segments de droite. Python a donc relié ici successivement les 4 points de $\mathbb{R}^2$ mentionnés.

Commande	Effet
`plt.plot(X, Y)`	Trace le nuage de points d'abscisses `X` et ordonnées `Y`
`plt.text(x, y, "texte")`	affiche `texte` au point de coordonnées `(x, y)`
`plt.savefig("chemin.eps")`	enregistre le graphique obtenu

Voici quelques autres options pour les paramètres optionnels de la commande

`plt.plot`, ils se placent après `color = 'r', linewidth = 4` dans la commande ci-dessus.

PARAMÈTRES OPTIONNELS POUR `plot`

Propriétés	Rôle	Valeurs possibles
`color`	Trace le nuage de points	`'red'`, `'blue'` *etc.* d'abscisses `X` et ordonnées `Y`
`label`	Légende de la courbe	une chaîne
`linestyle`	type de ligne (pointillés, etc.)	`'-'`, `'-.'`, `':'`
`linewidth`	épaisseur du trait	un entier
`marker`	forme des points	`'+'`, `','`, `'o'`, `'1'`, `'2'` *etc.* (`'o'` adapté aux suites)

Attention

La commande `savefig` doit être placée avant `show` et après `plot`.

OPTIONS POUR `linestyle`

Option	Rôle
`""`	les points ne sont pas reliés
`"-"`	tracé en trait plein
`"--"`	tracé avec des tirets
`":"`	tracé en pointillés
`"-."`	alternance de tirets et de points

COMMANDES DE FORMATAGE DES TITRES, LÉGENDES, AXES

Nom	Rôle
`plt.legend(loc = 'upper left')`	permet de placer les légendes (ici haut gauche)
`plt.title('titre')`	permet de placer un titre au tracé
`plt.axis('off')`	permet d'enlever les axes
`plt.axis('scaled')`	impose la même échelle aux deux axes
`plt.axis(xmin = .., xmax = ..,..)`	impose des valeurs min/max à chaque axe en spécifiant `xmax`, `ymax`, `xmin`, `ymin`

COMMANDES DE FORMATAGE DES TITRES, LÉGENDES, AXES

`plt.grid(True)`	trace le quadrillage
`plt.xlabel('texte')`	nom pour l'axe des abscisses
`plt.ylabel('texte')`	nom pour l'axe des ordonnées

1.2. Tracé d'une fonction

En général, pour les fonctions :

- la liste `X` est construite en utilisant la fonction `linspace` du module `numpy`. Elle permet de découper l'intervalle de tracé avec un grand nombre de points.
- La liste `Y` est alors construite par compréhension à l'aide de `X`.

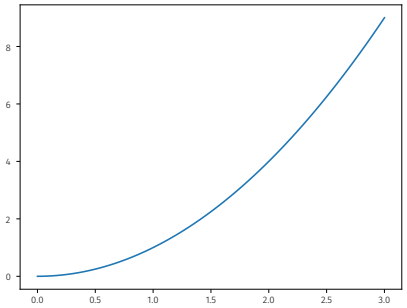
Voyons déjà un exemple d'utilisation de `linspace`.

```
>>> import numpy as np
>>> np.linspace(0, 3, 3) # découpage de l'intervalle en 3 points
array([0. , 1.5, 3. ])
>>> np.linspace(-1, 2, 10) # découpage de l'intervalle en 10 \
↪ points
array([-1.        , -0.66666667, -0.33333333,  0.        , \
↪ 0.33333333,
        0.66666667,  1.        ,  1.33333333,  1.66666667,  2.   \
        ↪       ])
```

Remarque 1 Vous constaterez dans les résultats précédents que le type du résultat d'un `linspace` n'est pas vraiment une liste. Ce n'est effectivement pas le cas, mais ce n'est pas la peine de se poser trop de questions dans ce TP, nous lèverons le mystère plus tard dans l'année.

Exemple 2 **(Tracer une fonction)** Représentons la fonction carré sur $[0,3]$ grâce à des compréhensions de listes. On a besoin de découper $[0,3]$ en un très grand nombre de points, on utilise alors `linspace`.

```
X = np.linspace(0, 3, 10**3)
Y = [x**2 for x in X] # liste des carrés
plt.plot(X, Y)
```



On observe que, par défaut, Python trace une ligne brisée bleue reliant les points donnés. Pour obtenir l'illusion d'une courbe, il suffit de placer suffisamment de points, dans la pratique on prendra toujours `10**3`.

En enchaînant plusieurs `plot`, on peut tracer plusieurs courbes sur un même graphique.

Exercice 1 | Ensemble de fonctions puissances Solution Créer une fonction d'en-tête `trace_puissances(a, b)` qui prend en argument deux réels a, b tels que $a \leqslant b$, et trace les graphes des fonctions $f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \{0.5, 1, 2, 3\}$, sur $[a, b]$. *On affichera en légende la puissance en question, et on utilisera une boucle* ***for***.

Tester cette fonction sur l'intervalle $[0, 5]$.

Exercice 2 | Fonctions trigonométriques Solution

1. Créer une fonction d'en-tête `trace_trigo(a, b)` qui prend en argument deux réels a, b tels que $a \leqslant b$, et trace les graphes des fonctions cos, sin sur $[a, b]$.
2. Écrire une fonction d'en-tête `trace_tanatan()` sans arguments, qui trace sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction tan, et superpose celle d'arctan. Ajouter en pointillés la droite d'équation $y = x$.

Dans tout cet exercice, on pourra utiliser le module `numpy` *pour accéder aux deux fonctions trigonométriques* `np.cos`, `np.sin`, *et* ***uniquement celles-ci****. Par ailleurs, une valeur approchée de* π *existe avec* `np.pi`

Voici la méthode générale.

Méthode Tracer une fonction f (et/ou sa réciproque)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, définie sur cet intervalle et que l'on souhaite tracer.

1. On commence par définir la fonction f dans Python avec :

```
def f(x):
    return # expression de f(x)
```

2. On crée les listes `X` et `Y`, puis on trace.

```
X = np.linspace(a, b, 10**3)
Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(X, Y)
plt.show()
```

3. Si on souhaite ajouter le graphe de la réciproque, on exploite la propriété déjà vue dans le cours de Mathématiques : les graphes sont symétriques par rapport à $y = x$, cela revient à échanger `X` et `Y` dans la commande `plot`.

```
X = np.linspace(a, b, 10**3)
Y = [f(x) for x in X]
plt.plot(Y, X)
plt.show()
```

On peut aussi enchaîner plusieurs `plot`, il est alors intéressant de spécifier des légendes pour identifier chaque courbe. La couleur quant à elle change automatiquement à chaque `plot`.

1.3. Tracé de courbes paramétrées

Les *courbes paramétrées* sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, donc des applications de la forme $t \in \mathrm{I} \longmapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ où $x, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions définies sur I, un intervalle. La méthode précédente s'adapte alors sans difficulté : on utilise un `linspace` pour subdiviser l'intervalle I, que l'on utilise ensuite pour former nos listes `X` et `Y`.

Exercice 3 | Cercle trigonométrique Solution Dessiner le cercle trigonométrique à l'aide de matplotlib. *On utilisera la commande* `plt.axis("scaled")`

Exercice 4 | Autres courbes paramétrées Solution Tracer le graphe des applications suivantes.

1. $t \in [0, 2\pi] \longmapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))$ appelée *astroïde*,
2. $t \in \mathbb{R} \longmapsto \left(\dfrac{t}{1+t^4}, \dfrac{t^3}{1+t^4}\right)$ appelée *Lemniscate de* BERNOULLI,
3. $t \in [0, 2\pi] \longmapsto (\sin t + \cos t, \cos(3t))$.

1.4. Grille de graphiques

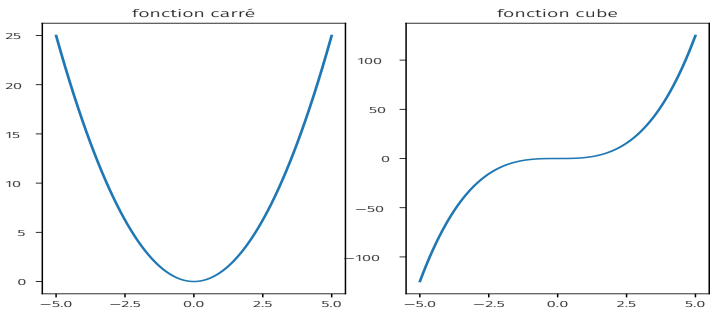
On a déjà vu comment dessiner plusieurs courbes sur la même figure, en invoquant plusieurs fois la fonction `plot()` avant le `show()` final. On peut aussi souhaiter tracer des courbes sur plusieurs figures au sein d'une même fenêtre graphique. Pour cela, on utilisera la fonction `subplot`.

Nom	Rôle
`plt.subplot(N1, N2, i)`	crée la figure de la case i d'un tableau de `N1` lignes et `N2` colonnes

Chaque `subplot()` définit une figure de notre fenêtre graphique, et celle-ci possède ses propres labels, titres et légendes. Par contre, les figures sont un peu petites. Voyons un exemple.

Exemple 3 (Tracer une grille de graphes) Représentons les fonctions $x \longmapsto x^n$ pour $n = 2, 3$ sur deux graphes côte à côte, sur l'intervalle $[-5, 5]$.

```
X = np.linspace(-5, 5, 10**3)
Y = [x**2 for x in X] # liste des carrés
Z = [x**3 for x in X] # liste des puissances 3
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.title("fonction carré")
plt.plot(X, Y)
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.title("fonction cube")
plt.plot(X, Z)
```



Exercice 5 | Grille de taille 2×2 Solution On souhaite comparer les fonctions $f : x \longmapsto e^{1/x} - 1$ et $g : x \longmapsto 1/x$ au voisinage de l'infini.

1. Définir deux fonctions Python `f` et `g`, correspondant aux fonctions mathématiques f et g.
2. Écrire une fonction `trace_grille()` sans argument, qui trace dans un carré 2×2 de figures les courbes de $f, g, f - g, \dfrac{f}{g}$ sur $[10, 30]$. Que conjecturer ?
3. Retrouver $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ par le calcul.

2. CONJECTURER DES PROPRIÉTÉS SUR LES FONCTIONS

Dans cette section, les domaines de tracés et d'autres éléments sont laissés à votre appréciation afin de répondre aux questions posées à l'aide de Python.

2.1. Conjecturer une bijectivité

Exercice 6 | Sinus hyperbolique Solution On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions

$$f : x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad g : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

1. Écrire une fonction d'en-tête `trace_fg()` représentant sur une même figure les courbes des fonctions f, g et Id sur $[-3, 3]$. Ajouter au tracé l'instruction suivante :
   ```
   plt.plot([-10, 10], [-10, 10], ':')
   ```
   Qu'observe-t-on ?
2. Afficher, directement dans la console, une liste de valeurs de $f \circ g - \mathrm{Id}, g \circ f - \mathrm{Id}$ arrondies à deux décimales, pour x dans $[-2, 2]$. Que peut-on conjecturer ? Pour l'arrondi, on pourra se servir de `round`. Par exemple :
   ```
   >>> round(1.123456, 2)
   1.12
   ```
3. Démontrer mathématiquement la conjecture.

2.2. Approximation d'extremum [H.P]

On souhaite dans cette section trouver une méthode afin d'approcher le minimum global ou local d'une fonction en cas d'existence. Commençons par une première méthode.

Comme cela est précisé par le logo [H.P] , cette dernière partie doit être considérée comme des exercices supplémentaires pour s'entraîner, dont le contenu n'est pas à apprendre.

Exercice 7 | Approximation d'un argmin **par discrétisation** Solution On considère une fonction $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $a < b$ deux rels, telle que f possède un minimum et un maximum global (c'est le cas par exemple si f est continue). Une idée est de réaliser une recherche de minimum ou maximum des valeurs de f sur une subdivision de $[a,b]$.

1. Soit `L` une liste contenant des valeurs de l'intervalle $[a,b]$ (un `linspace` dans la suite). Écrire une fonction d'en-tête `maximum_sub(L, f)` qui retourne le maximum des valeurs que prend `f` sur la liste des éléments de `L` ainsi que la valeur de l'abscisse correspondante (un élément de `L`). Par exemple, si f est la fonction carré, et `L = [-2, 0, 1]` alors la fonction retournera le tuple `(4, -2)`. *Pour tester, on commencera donc par définir la fonction carré dans Python, en tapant :*

```
def f(x):
    return x**2
```

On pourra compléter le code ci-après.

```
def maximum_sub(L, f):
    ind_maxi = 0
    maxi = _______
    for i in range(1, len(L)):
        if _______ > maxi:
            ind_maxi = i
            maxi = _______
    return maxi, _______
```

2. Même question avec le minimum.
3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \arctan\left(x^3 - x - \frac{1}{2}\right)$. *On pourra par exemple utiliser la fonction `np.arctan` présente dans le module `numpy`.*
   - **3.1)** Tracer cette fonction sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. Que pouvez-vous conjecturer sur l'existence d'un minimum ou maximum global ?
   - **3.2)** Déterminer numériquement ces valeurs à l'aide des questions précédentes. *Pour la liste `L`, vous ferez varier le nombre de points.*

Exercice 8 | Application à la distance minimale à une ellipse Solution

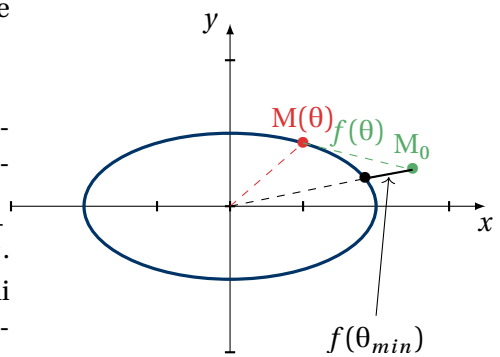
Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et $\mathscr{E}$ l'ellipse centrée en O de demi grand axe 2, et demi petit axe 1, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \{(2\cos(\theta), \sin(\theta)) \,|\, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $f(\theta)$ la distance entre $(2\cos\theta, \sin\theta)$ (point de l'ellipse tournée d'un angle θ) et M_0, soit :

$$f(\theta) = \sqrt{(2\cos(\theta) - x_0)^2 + (\sin(\theta) - y_0)^2}.$$

On souhaite trouver le réel θ minimal qui est le plus proche de M_0 donc qui minimise la fonction f. Voici un schéma de la situation.



1. Étudions le point $M_0 = (2,2)$ qui correspond globalement à la situation du dessin. On écrit donc en préambule `x_0, y_0 = 2, 2`
   - **1.1)** Conjecturer géométriquement la présence d'un minimum global. En quel(s) θ sont-ils atteints ? *On répondra à cette question en s'aidant de `matplotlib`*
   - **1.2)** Retrouver ce résultat numériquement en utilisant l'exercice précédent.
2. Mêmes questions avec le point $M_0 = (-1/2, 0)$.

Exercice 9 | Approximation d'un argmin **par dichotomie (Modélisation 2021)** Solution On considère une fonction $f : I = [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $a < b$ deux réels, tels

qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ vérifiant :

- f est strictement décroissante sur $[a, x_0]$,
- f est strictement croissante sur $[x_0, b]$.

Ainsi, f admet un minimum global sur I en x_0. On souhaite trouver un algorithme convergeant vers $x_0 = \text{argmin}_I f$, c'est-à-dire l'unique point x_0 tel que $\min_I f = f(x_0)$.

1. Dessiner l'allure de f.

2. L'idée est de construire une suite d'intervalles $[a_k, b_k], k \in \mathbb{N}$ qui vont approcher de plus en plus de x_0, on stoppe l'algorithme une fois une certaine précision $\varepsilon > 0$ atteinte.

- On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$.
- Supposons que a_k, b_k sont bien définis pour un entier $k \in \mathbb{N}$. On découpe l'intervalle $[a_k, b_k]$ en trois morceaux de taille identique, *i.e.* on pose

$$a_k < x_g = a_k + \frac{b_k - a_k}{3} < x_d = b_k - \frac{b_k - a_k}{3} < b_k.$$

— Si $f(x^g) < f(x^d)$, alors x_0 est « à gauche » de x_d [1], on pose alors $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x^d$.
— Si $f(x^g) > f(x^d)$, alors x_0 est « à gauche » de x_g, on pose alors $g_{k+1} = x^g, d_{k+1} = d_k$.
— Si $f(x^g) = f(x^d)$, alors on pose $g_{k+1} = x^g, d_{k+1} = x^d$.

On recommence ce procédé tant que $d - g > \varepsilon$ et on retourne à la la fin la meilleure des valeurs parmi $f(g), f(d), f((g+d)/2)$.

2.1) Écrire une fonction d'en-tête `argmin3(f, x, y, z)` qui renvoie parmi les trois valeurs `x, y` et `z`, celle en laquelle `f` est minimale.

2.2) Compléter le script suivant implémentant cet algorithme.

Algorithme d'approximation d'un minimum

```
def minimum_valf(f, A, B, eps):
    g = A
    d = B
    while d - g > eps:
        # calcul de xg xd
        xg = g + (d-g)/3
        xd = d - (d-g)/3
        if f(xg) < f(xd):
            d = xd
        elif f(xg) > f(xd):
            g = ____________________
        else:
            # on est sûr que x 0 est entre g et d
            g = ____________________
            d = ____________________
    return argmin3(f, g, d, (g+d)/2)
```

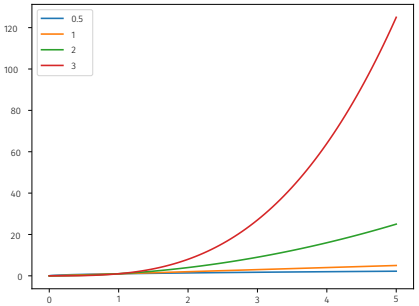
3. On considère la fonction $f : x \in [0,1] \longmapsto x^2 - \frac{1}{2}x + 1$. Montrer que la fonction f vérifie bien les conditions de l'énoncé et lui appliquer l'algorithme. Quelle valeur approchée s'attendait-on à trouver ? Est-ce cohérent ?

1. Raisonner par l'absurde, s'il était à droite de x_d alors x_g, x_d se situeraient dans l'ensemble où f est strictement décroissante, donc on aurait $f(x^g) > f(x^d)$ car $x_g < x_d$ — contradiction.

3. SOLUTIONS DES EXERCICES

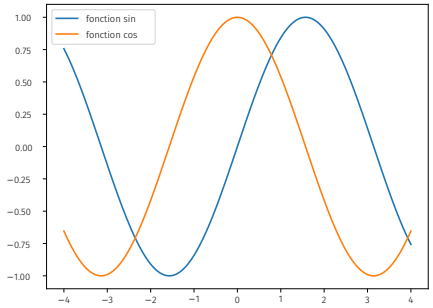
Solution (exercice 1) Énoncé

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def trace_puissances(a, b):
    L_pui = [0.5, 1, 2, 3]
    X = np.linspace(a, b, 10**3)
    for alpha in L_pui:
        Y = [x**alpha for x in X]
        plt.plot(X, Y, label=str(alpha))
        plt.legend()

trace_puissances(0, 5)
```

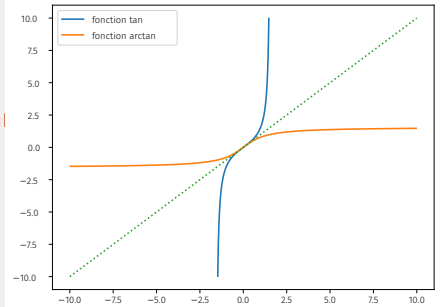


Solution (exercice 2) Énoncé

```
def trace_trigo(a, b):
    X = np.linspace(a, b, 10**3)
    Y = [np.sin(x) for x in X]
    Z = [np.cos(x) for x in X]
    plt.plot(X, Y, label="fonction si
    plt.plot(X, Z, label="fonction co
    plt.legend()
trace_trigo(-4, 4)
```

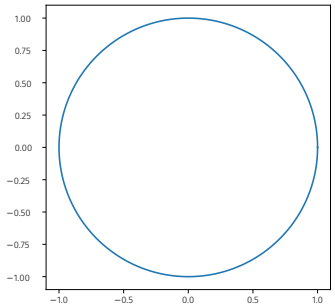



```
def trace_tanatan():
    X = np.linspace(-np.pi/2+0.1, \
↪ np.pi/2-0.1, 10**3)
    Y = [np.tan(x) for x in X]
    plt.plot(X, Y, label="fonction ta
    plt.plot(Y, X, label="fonction
arctan")
    plt.plot([-10, 10], [-10, 10], \
↪ ':') # relie deux points
    plt.legend()
trace_tanatan()
```



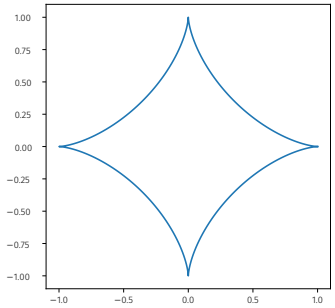
Solution (exercice 3) Énoncé On utilise que le cercle trigonométrique est simplement l'ensemble $\{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$.

```
T = np.linspace(0, 2*np.pi, 10**3)
X = [np.cos(x) for x in T]
Y = [np.sin(x) for x in T]
plt.plot(X, Y)
plt.axis("scaled")
```

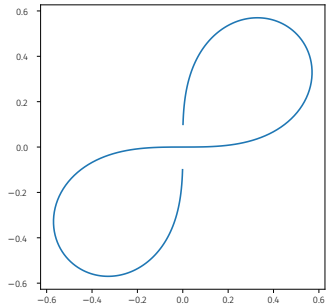


Solution (exercice 4) Énoncé

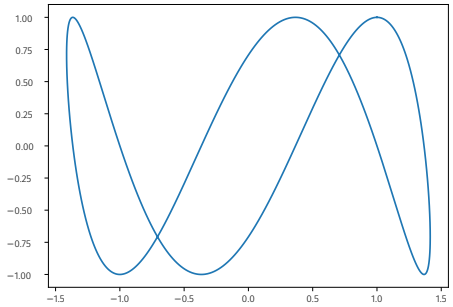
```
T = np.linspace(0, 2*np.pi, 10**3)
X = [np.cos(t)**3 for t in T]
Y = [np.sin(t)**3 for t in T]
plt.plot(X, Y)
plt.axis("scaled")
```



```
T = np.linspace(-10, 10, 10**3)
X = [t/(1+t**4) for t in T]
Y = [t**3/(1+t**4) for t in T]
plt.plot(X, Y)
plt.axis("scaled")
```



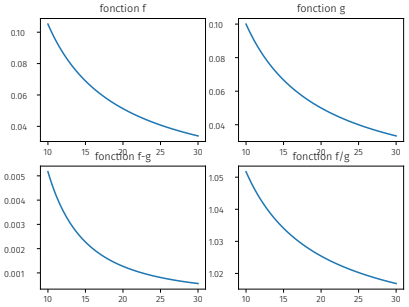
```
T = np.linspace(0, 2*np.pi, 10**3)
X = [np.sin(t)+np.cos(t) for t in T]
Y = [np.cos(3*t) for t in T]
plt.plot(X, Y)
plt.axis("scaled")
```



Solution (exercice 5) Énoncé

1.
```
def f(x):
    return ma.exp(1/x)-1
def g(x):
    return 1/x
```

2.
```
def trace_grille():
    X = np.linspace(10, 30, 10**3)
    plt.subplot(2, 2, 1)
    Y = [f(x) for x in X]
    plt.title("fonction f")
    plt.plot(X, Y)
    plt.subplot(2, 2, 2)
    Y = [g(x) for x in X]
    plt.title("fonction g")
    plt.plot(X, Y)
    plt.subplot(2, 2, 3)
    Y = [f(x)-g(x) for x in X]
    plt.title("fonction f-g")
    plt.plot(X, Y)
    plt.subplot(2, 2, 4)
    Y = [f(x)/g(x) for x in X]
    plt.title("fonction f/g")
    plt.plot(X, Y)
trace_grille()
```



On peut conjecturer les valeurs des limites $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, et même :

$$\lim_{x\to\infty} (f(x)-g(x)) = 0, \quad \textbf{et} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

3. On souhaite calculer : $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$ qui est une forme indéterminée.
En effectuant le changement de variable $y = 1/x$, on déduit que, en cas d'existence :

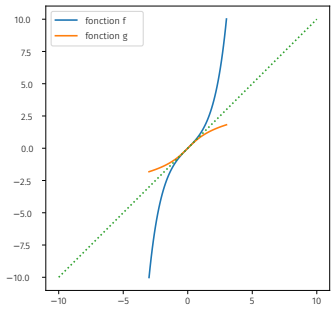
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{y}-1}{y} = \exp'(0) = \boxed{1}$$

en reconnaissant un taux d'accroissement.

Solution (exercice 6) Énoncé

1.
```
def trace_fg():
    X = np.linspace(-3, 3, 10**3)

    def f(x):
        return (ma.exp(x)-ma.exp(-x))/2

    def g(x):
        return ma.log(x+ma.sqrt(x**2+1))

    Y = [f(x) for x in X]
    Z = [g(x) for x in X]
    plt.plot(X, Y, label="fonction f")
    plt.plot(X, Z, label="fonction g")
```

```
    plt.plot([-10, 10], [-10, 10], ':') # relie deux points
    plt.legend()
    plt.axis("scaled")
trace_fg()
```



Les graphes semblent être symétriques par rapport à $y = x$, donc les fonctions semblent être réciproques l'une de l'autre.

2.
```
>>> X = np.linspace(-2, 2, 10)
>>> L_fg = [round(f(g(x))-x, 2) for x in X]
>>> L_gf = [round(g(f(x))-x, 2) for x in X]
>>> L_fg
[1.14, 0.77, 0.44, 0.18, 0.02, 0.03, 0.28, 0.93, 2.18, 4.39]
>>> L_gf
[-0.54, -0.55, -0.57, -0.62, -0.79, -0.21, -0.38, -0.43, \
↪ -0.45, -0.46]
```

On retrouve la conjecture faite dans la précédente question, à savoir que $f \circ g \approx \mathrm{Id}, g \circ f \approx \mathrm{Id}$, et donc que f, g sont réciproques l'une de l'autre.

3. Prouvons-le mathématiquement. Les deux fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

- Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(g(x)) = x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2} \\ &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{x^2 + (x^2+1) + 2x\sqrt{x^2+1} - 1}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= x \times \frac{2(x+\sqrt{x^2+1})}{2(x+\sqrt{x^2+1})} = x. \end{aligned}$$

- Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(f(x)) = x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

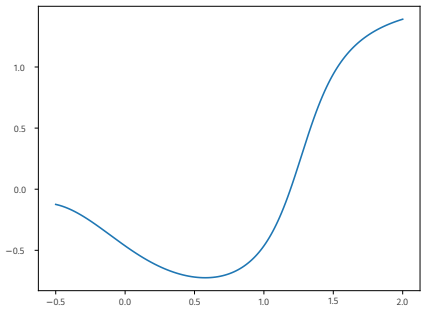
$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2 + 4}{4}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \ln(e^x) = x. \end{aligned}$$

On a bien montré que f, g sont réciproques l'une de l'autre. On obtient au passage la bijectivité de f.

Solution (exercice 7) Énoncé

```
def maximum_sub(L, f):
    ind_max = 0
    max = f(L[0])
    for i in range(1, len(L)):
        if f(L[i]) > max:
            ind_max = i
            max = f(L[i])
    return max, L[ind_max]

def minimum_sub(L, f):
    ind_mini = 0
    mini = f(L[0])
    for i in range(1, len(L)):
        if f(L[i]) < mini:
            ind_mini = i
            mini = f(L[i])
    return mini, L[ind_mini]

def f(x):
    return ma.atan(x**3-x-0.5)

X = np.linspace(-0.5, 2, 10**3)
Y = [f(x) for x in X]
```

```
plt.plot(X, Y)
```



On constate l'existence d'un minimum global, et d'un maximum global. Testons à présent sur plusieurs subdivisions les fonctions précédentes.

```
>>> L = np.linspace(-0.5, 2, 4)
>>> maximum_sub(L, f)
(1.3909428270024184, 2.0)
>>> minimum_sub(L, f) # pas terrible pour le min
(-0.6724785026448458, 0.33333333333333337)
>>> L = np.linspace(-0.5, 2, 100)
>>> maximum_sub(L, f)
(1.3909428270024184, 2.0)
>>> minimum_sub(L, f) # c'est mieux !
(-0.7243390760778351, 0.5858585858585859)
```

Il est logique que le maximum fonctionne bien puisqu'il est situé au bord de l'intervalle, donc appartient au `linspace`.

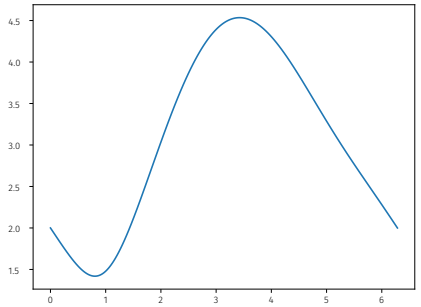
On peut proposer une autre version de `minimum_sub` en exploitant la propriété suivante : x_0 est un minimum de f si et seulement si x_0 est un maximum de $-f$. Nous déduisons alors la version ci-après.

```
def minimum_sub(L, f):
    def g(x):
        return -f(x)
    mini, x_mini = maximum_sub(L, g)
    return -mini, x_mini
```

Solution (exercice 8) Énoncé

```
x_0, y_0 = 2, 2
def f(theta):
    return \
    ↪ ((2*ma.cos(theta)-x_0)**2+(ma.sin(theta)-y_0)**2)**(0.5)
```

```
# tracé du graphe
T = np.linspace(0, 2*ma.pi, 10**3)
Y = [f(theta) for theta in T]
plt.plot(T, Y)
```

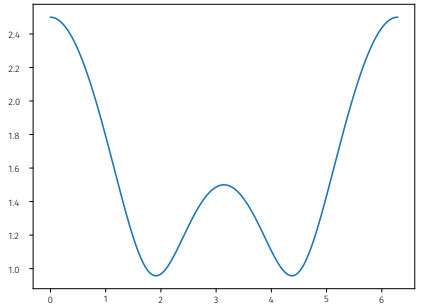


La fonction semble avoir un seul minimum dans ce cas, et on constate bien cela sur le dessin. Obtenons une valeur approchée à l'aide de l'exercice précédent.

```
>>> minimum_sub(np.linspace(0, 2*ma.pi, 10**3), f)
(1.4188012291403918, 0.8050527720910781)
```

Changeons à présent le point M_0.

```
x_0, y_0 = -0.5, 0
Y = [f(theta) for theta in T]
plt.plot(T, Y)
```

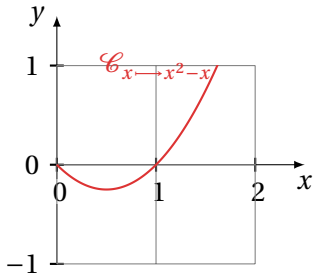


La fonction semble avoir cette fois deux minimums, ce qui est cohérent avec le dessin.

```
>>> minimum_sub(np.linspace(0, 2*ma.pi, 10**3), f)
(0.9574297092404375, 1.9120003337163105)
```

Solution (exercice 9) Énoncé

1. Par exemple, une parabole $(a = 0, b = 1, x_0 = \frac{1}{2})$.



2.
```
def argmin3(f, x, y, z):
    mini = x
    if f(y) < f(mini):
        mini = y
    if f(z) < f(mini):
        mini = z
    return mini

def minimum_valf(f, A, B, eps):
    g = A
    d = B
    while d - g > eps:
        # calcul de xg xd
        xg = g + (d-g)/3
        xd = d - (d-g)/3
        if f(xg) < f(xd):
            d = xd
        elif f(xg) > f(xd):
            g = xg
        else:
            # on est sûr que x 0 est entre g et d
            g = xg
            d = xd
    return argmin3(f, g, d, (g+d)/2)
```

3. Faisons un test sur la fonction proposée.
```
def f(x):
    return x**2-1/2*x+1
argmini = minimum_valf(f, 0, 1, 10**(-3))
```
Alors `argmini` vaut 0.2500324034230415. Ce qui est tout à fait cohérent, puisque le minimum est atteint en $-\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.