Chapitre (AN) 3 Suites récurrentes usuelles & Modélisation

I say, that the power of population is indefinitely greater than the power in the earth to produce subsistence for man. Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio. Subsistence increases only in an arithmetical ratio.

— Thomas. R. Malthus [a]

a. à l'origine de l'un des premiers modèles de dynamique des populations

Résumé & Plan

L'objectif de ce chapitre est de modéliser à l'aide de suites numériques ou d'équations différentielles divers contextes de la vie réelle présentant une dynamique au cours du temps. La théorie des équations différentielles a été vue dans le Chapitre (AN) 2, il convient à présent de faire quelques compléments sur les suites récurrentes usuelles qui nous serviront.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. SUITES RÉCURRENTES USUELLES

Cette section est composée de révisions de lycée (suites arithmétiques et géométriques), et de nouveautés (suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2).

1.1. Généralités

Commençons par définir l'objet suite.

Définition 1 | Suite réelle

- Une *suite réelle* est une application de $[\![n_0\,,\,+\infty[\![$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, de la forme : $u \left| \begin{array}{rcl} [\![n_0\,,\,+\infty[\![& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n. \end{array} \right.$
  - ◇ La suite $u : [\![n_0\,,\,+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ou encore $(u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots)$.
  - ◇ La valeur u_{n_0} est appelé le *premier terme de la suite.*
  - ◇ Pour tout entier $n \geqslant n_0$, u_n est *le terme de rang n* de la suite.
- Une *suite réelle finie* est une application de $[\![n_0\,,\,n_1]\!]$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_1 \geqslant n_0$ entier, dans $\mathbb{R}$, de la forme : $u \left| \begin{array}{rcl} [\![n_0\,,\,n_1]\!] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n. \end{array} \right.$ On la note généralement $(u_n)_{n=n_0}^{n_1}$ ou encore $(u_{n_0}, \dots, u_{n_1})$.

La plupart du temps, nous aurons $n_0 = 0$ ou éventuellement 1, et nous étudierons le plus souvent des suites non finies.

Notation Abus de ...

Parfois on notera seulement (u_n) au lieu de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Cela signifiera donc implicitement que l'on considère le plus petit entier n_0 telle que l'expression u_n soit définie pour tout $n \geqslant n_0$.

Notation

L'ensemble des suites définies à partir de n_0 est $\mathbb{R}^{[\![n_0,+\infty[\![}$, notation déjà rencontrée pour les applications. *On rappelle que* E^{F} *désigne l'ensemble des applications d'un ensemble* F *dans un ensemble* E.

Attention

De-même qu'il ne faut pas confondre une fonction f et l'image $f(x)$ de x par f, on prendra garde de bien distinguer la suite (u_n) de son terme général d'ordre n noté lui u_n sans parenthèse.

Nous arrêtons là les généralités, le reste sera développé dans le Chapitre (AN) 4 dédié aux suites.

1.2. Suites récurrentes

1.2.1. Généralités

Définition 2 | Suites récurrentes

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *suite récurrente d'ordre* $\boldsymbol{p}$ si chaque terme de la suite ne dépend que des p termes précédents, c'est-à-dire si elle vérifie une équation de récurrence de la forme :

$$u_{n+p} = \mathrm{E}\left(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}\right)$$

où $\mathrm{E}\left(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}\right)$ est une expression dépendant de $u_n, u_{n+1}, \dots$ et u_{n+p-1}.

Note | *L'ordre est donc le nombre de termes consécutifs de la suite apparaissant dans la relation moins un.*

Exemple 1

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une suite récurrente d'ordre 3.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+5} = \ln(u_{n+2}) - u_{n+1} + u_n^2$ est une suite récurrente d'ordre 5.
- Il faut toutefois se méfier : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, est une suite récurrente d'ordre 2. En effet, la relation de récurrence peut se réécrire : $\quad \forall n \geqslant 2, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Une suite récurrente d'ordre p est donc entièrement déterminée par :

1. son équation de récurrence,
2. ses conditions initiales : la donnée de ses p premiers termes.

Ainsi, la même équation de récurrence avec des conditions initiales différentes donnera deux suites *a priori* différentes.

Lorsque l'on étudiera une suite récurrente, on se posera principalement les deux questions suivantes :

1. La suite admet-elle une limite ? Si c'est le cas, cette limite sera une des solutions de l'équation de récurrence. Par exemple, si la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ converge, c'est vers ℓ tel que $\ell = 2\ell + 1$ donc $\ell = -1$. Ce point sera étudié dans le Chapitre (AN) 4.
2. Peut-on obtenir une écriture explicite du terme général d'une telle suite ? Ce problème est généralement difficile lorsque l'on sort des cas connus (principalement suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques). Par exemple, la formule explicite de la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ est :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_0 + 1)2^n - 1.$$

1.2.2. Suites arithmétiques et géométriques

Définition 3 | Suite arithmétique

On appelle *suite arithmétique* de *raison* $a \in \mathbb{R}$ toute suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + a.$$

On rappelle que l'on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p + (n-p)a,$$

formule que l'on peut démontrer par récurrence.

$$\begin{tikzcd}
u_1 \arrow[r, bend left, "+a"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+a"] & u_3 \arrow[r, bend left, "+a"] & u_4 \arrow[r, bend left, "+a"] & \dots \arrow[r, bend left, "+a"] & u_n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
u_p \arrow[r, bend left, "+a"] & u_{p+1} \arrow[r, bend left, "+a"] & u_{p+2} \arrow[r, bend left, "+a"] & u_{p+3} \arrow[r, bend left, "+a"] & \dots \arrow[r, bend left, "+a"] & u_n
\end{tikzcd}$$

Théorème 1 | Somme arithmétique de raison a

Soit $a \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite arithmétique de raison a. Alors :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant p, \qquad \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{u_p + u_n}{2} \times (n-p+1).$$

Preuve Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant p$. On a déjà vu que : $\forall k \in [\![p\,,\,n]\!], \quad u_k = u_p + (k-p)a$.
Donc :

Exemple 2 Calculer la somme : $S = 2 + 7 + 12 + \cdots + 47$.

- Introduisons la suite arithmétique u définie par :

  $$u_0 = 2, \quad \text{et :} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = u_k + 5.$$

  Écrivons la somme à l'aide de cette suite :

- Calcul de la somme :

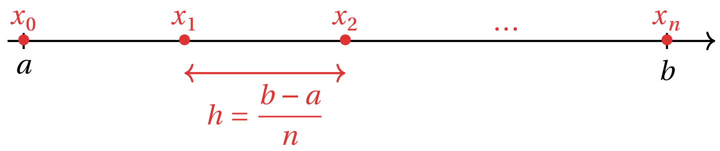
Nous pouvons retenir une formule générale de la manière suivante :

$$\sum \text{suite arithmétique} = \text{nb termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

EXEMPLE : SUBDIVISION D'UN INTERVALLE. Précisons enfin une notion utile dans plusieurs futurs chapitres (tracés de fonctions en info, intégration en Maths *etc.*).

Définition 4 | Subdivision (régulière)

Soit $[a,b]$ un intervalle, avec $a < b$ deux réels et n un entier non nul. On appelle *subsdivision de* $[a,b]$ *en* $n+1$ *points* l'unique suite arithmétique $(x_k)_{k=0}^{n}$ telle que : $\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = b. \end{cases}$



SUBDIVISION RÉGULIÈRE D'UN INTERVALLE

On a donc sur ce dessin : $n+1$ points, et n intervalles.

Proposition 1 | Expression d'une subdivision régulière

Soit $[a,b]$ un intervalle, avec $a < b$ deux réels et n un entier non nul. Alors la suite $(x_k)_{k=0}^{n}$ définie précédemment a pour expression :

$$\forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Voici le dessin typique à avoir en tête.

Preuve

Exemple 3 Déterminer l'expression de la subdivision régulière de $[-1,3]$ en $n+1$ points.

Définition 5 | Suite géométrique

On appelle *suite géométrique* de *raison* $q \in \mathbb{R}$ toute suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n.$$

On rappelle que l'on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_p q^{n-p},$$

formule que l'on peut démontrer par récurrence.

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_4 \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} u_p \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{p+1} \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{p+2} \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{p+3} \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n \end{tikzcd}$$

Théorème 2 | Somme géométrique de raison q

Soit $q \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant p, \quad \sum_{k=p}^{n} u_k = \begin{cases} u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ u_p(n-p+1) & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Preuve Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2, n \geqslant p$. On a déjà vu que : $\forall k \in [\![p\,,n]\!], \quad u_k = u_p \times q^{k-p}$. Donc :

Nous pouvons retenir une formule générale de la manière suivante :

$$\sum \text{suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nb termes}}}{1-\text{raison}}.$$

Exemple 4 Calculer la somme : $S = 3-9+27-81+\cdots+243$. *(indication : $243 = 3^5$)*

- Introduisons la suite géométrique u définie par :

  $u_0 = 3, \quad$ et : $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = -3u_k.$

  Écrivons la somme à l'aide de cette suite :

- Calcul de la somme :

Exemple 5 (Suite « sous »-géométrique) Parfois nous recontrerons dans les exercices des suites (u_n) vérifiant, pour $q \in \mathbb{R}^+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant q u_n.$$

On montre en fait, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant q^n u_0.$$

Note *Cela signifie simplement que (u_n) est inférieure à une suite géométrique de raison q, de premier terme u_0. Le même résultat est vrai pour des suites arithmétiques, mais rarement utile en pratique.*

Initialisation.

Hérédité.

1.2.3. Suites arithmético-géométriques

Introduisons à présent un nouveau type de suites : les *suites arithmético-géométriques*, qui sont en quelque sorte un mélange des deux suites précédentes.

Définition 6 | Suite arithmético-géométrique

On appelle *suite arithmético-géométrique* toute suite (u_n) pour laquelle il existe $q \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n + a.$$

L'expression du terme général en fonction de $n \in \mathbb{N}$ semble être ici moins évidente. En revanche, nous allons pouvoir facilement nous ramener à quelque chose de géométrique. En effet, supposons tout d'abord que $q \neq 1$ (sinon la suite est simplement arithmétique) et fixons-nous $\ell \in \mathbb{R}$ de sorte que $\ell = q\ell + a$, c'est-à-dire $\ell = \dfrac{a}{1-q}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= qu_n + a \\ \ell &= q\ell + a \end{cases} \implies u_{n+1} - \ell = q(u_n - \ell) + \cancel{a} - \cancel{a} = q(u_n - \ell).$$

Et là, on a donc fait apparaître $(v_n) = (u_n - \ell)_n$ qui est une suite géométrique.

Méthode (AN) 3.1 (Trouver l'expression explicite d'une suite vérifiant $u_{n+1} = qu_n + a, q \neq 1$)

1. Chercher ℓ tel que $\ell = q\ell + a$.
2. Montrer que la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison q, puis en déduire l'expression de $(u_n - \ell)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Mettons en oeuvre cette méthode sur des exemples.

Exemple 6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 1.$

Exemple 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2.$
Déterminer une expression explicite en fonction de n de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1.2.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 7 | Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On appelle *suite récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants sur* $\mathbb{R}$ toute suite (u_n) pour laquelle il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

On appelle *équation caractéristique associée à* (u_n) l'équation

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad \text{(EC)}$$

Remarque 1

- Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 généralise en fait les suites géométriques ; en effet, une suite géométrique de raison q vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 avec $a = 0, b = 1, c = -q$.
- En revanche, une suite arithmétique n'est pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2, sauf si sa raison est nulle.

Théorème 3 | Expression explicite

Soient (u_n) une suite récurrente linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants et (EC) son équation caractéristique. On suppose que $a \neq 0$ *((EC) est alors bien du second degré)* et on note Δ le discriminant de (EC).

- Si $\Delta > 0$, alors (EC) possède deux racines réelles distinctes α et β, et :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

- Si $\Delta = 0$, alors (EC) possède une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, et :
$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An+B)\alpha^n.$$
- Si $\Delta < 0$, alors (EC) possède deux racines distinctes complexes conjuguées α et $\overline{\alpha}$. On pose $\rho = |\alpha| > 0$ et θ un argument de α, si bien que $\alpha = \rho e^{i\theta}$. Alors :
$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right).$$

Attention

Attention aux confusions avec le résultat analogue sur les équations différentielles dans le cas $\Delta < 0$: il fait appel à la **forme algébrique des racines** pour les équations différentielles, et la **forme exponentielle** pour les suites.

Exemple 8 Déterminer une expression de (u_n) en fonction de n définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, et : $\quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

Exemple 9 Déterminer une expression de (v_n) en fonction de n définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 0$, et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$.

Exemple 10 Déterminer une expression de (w_n) en fonction de n définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} - 2w_{n+1} + 4w_n = 0$.

Exemple 11 Déterminer les suites 2-périodiques.

Exemple 12 On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad \text{et :} \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}.$$
Justifier que la suite est bien définie, et terminer son expression en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

2. MODÉLISATION DE DYNAMIQUES CONTINUES

L'interprétation physique du nombre dérivé est une vitesse instantanée. Il sera donc possible de décrire des phénomènes d'évolution continue à l'aide d'équations différentielles. Nous nous intéresserons également dans la suite aux modèles décrivant des dynamiques de population dans un contexte continu (le cas discret sera quant à lui étudié dans la section suivante).

2.1. Taux d'évolution et dynamiques linéaires

Lorsqu'une grandeur continue y (une fonction dérivable) varie, on cherche à quantifier souvent la variation de cette grandeur entre deux instants. Pour le signe, *i.e.* savoir si elle croît ou décroît, on dispose déjà d'outils : le calcul de y' pour les fonctions. On pourrait d'autre part s'intéresser plus précisément à l'amplitude de la variation en un temps donné.

Si t, h sont deux réels positifs, alors la *variation de y entre les temps t et h* est définie comme $y(t+h) - h(t)$. Mais plutôt que de regarder des variations, on peut aussi se demander quel est le pourcentage (ou taux) d'augmentation/diminution par rapport à une valeur antérieur — c'est le principe par exemple des livrets bancaires. En effet, si $[t, t+h]$ est un intervalle de temps correspondant à 1 année, et y désigne votre capital à un instant t rémunéré à un taux τ, alors :

$$y(t+h) = y(t) + h\tau y(t) \iff \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \tau y(t).$$

Si l'on fait tendre h vers zéro, on obtient : $\boxed{\tau = \frac{y'}{y}}$.

Définition 8 | Taux d'évolution continu
Soit y une fonction dérivable.

- Si $t \in \mathbb{R}^+$, alors on définit le *taux d'évolution en t* noté $\tau_t(y)$ par :
$$\tau_t(y) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h \times y(y)}.$$
Lorsque y décrit une population d'individus, on parle de *taux de reproduction (resp. mortalité) en y* si $\tau_t(y) \geqslant 0$ (*resp.* $\leqslant 0$).
- On dit que y suit une *évolution linéaire* lorsque le taux d'évolution est constant au cours du temps.

Dans la suite de cette section, nous n'utiliserons presque plus que le taux d'évolution en un temps donné. L'avantage de cette quantité est qu'elle possède une interprétation très intuitive, et permet donc de formaliser mathématiquement des situations très diverses d'évolution. Voyons quelques exemples.

Exemple 13 Dans cet exemple, on considère $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Quelles sont les fonctions y de taux d'évolution constant égal à $\tau \in \mathbb{R}$? Analysez la limite.

2.2. Modélisation

L'utilisation de suites numériques d'une part, et de fonctions d'autre part permet de modéliser de manière très fidèle des systèmes présentant une dynamique simple.

De manière formelle, si une grandeur V *(discrète ou continue et éventuellement vectorielle)* décrit une évolution, alors schématiquement :

- **[Discret]** bilan de V entre n et $n+1 \Longrightarrow$ relation de récurrence sur (v_n).
- **[Continu]** bilan de V entre t et $t+h \Longrightarrow$ équation différentielle sur V.

Faisons ce travail de bilan de grandeur, dans plusieurs contextes, pour le moment uniquement continus (avec des fonctions).

Exemple 14 **(Modélisation)** Modéliser les situations ci-après à l'aide d'une fonction, et déterminer une expression de ladite fonction.

1. **[Cinétique chimique d'ordre 1]** On considère une réaction chimique notée $A \longrightarrow B$, on suppose que le réactif A disparait entre deux instants très proches $t, t+h$ de manière proportionnelle au temps écoulé et à la concentration [A] en réactif A présent au début de l'intervalle de temps.

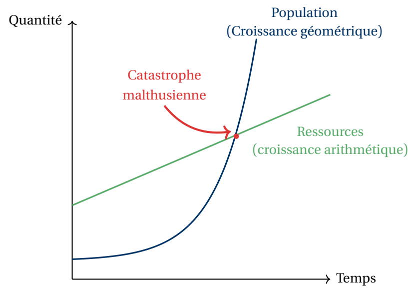
2. **[Évolution radioactive]** On considère une population d'atomes de carbone 14. On suppose qu'entre deux instants très proches $t, t+h$ une proportion $\rho_\dagger \in \mathbb{R}^+$ d'atomes se désintègrent, et une proportion $t\rho_b \in \mathbb{R}^+$ se crée, proportionnellement à la longueur h de l'intervalle de temps.

3. **[Compétition entre deux populations]** Une population d'adorables petits lapins « fonction y » se reproduit selon un taux constant égal à 1, et une population de renards « fonction z » se reproduit selon un taux constant égal à $\frac{1}{2}$ mais chassent les lapins, selon le modèle suivant : il y a diminution du nombre de lapins entre deux temps égale au produit du nombre de renards par le nombre de lapins et par la longueur de l'intervalle de temps. On suppose qu'initialement il y a 5 lapins et 5 renards.

2.3. Dynamique (continue) des populations

MODÈLE MALTHUSIEN : ÉVOLUTION LIBRE. Il est largement considéré que c'est au crédit de Thomas. R. MALTHUS que l'on accorde la paternité de l'un des premiers modèles mathématiques de croissance de population, qui publie (anonymement, dans sa première version) son célèbre *Essai sur le principe de population* en 1798.

Selon MALTHUS, *cf.* la citation présentée en début de chapitre, la croissance d'une population aurait un ratio géométrique, *a contrario* de la croissance des ressources qui serait arithmétique. MALTHUS ne vérifia pas rigoureusement cette théorie de rapport de croissances, prenant comme argument d'autorité l'évidence de ses propos. MALTHUS estime que la population mondiale double toutes les 25 années - fatalement, la population tendra rapidement à s'accroître au-delà des moyens de subsistance, engendrant selon lui pléthores de conséquences plutôt dévastatrices (guerres, famines, épidémies, ...).



Représentation du modèle de MALTHUS. Lorsque la quantité de population (augmentation géométrique) dépasse celle des ressources (augmentation arithmétique), la catastrophe malthusienne s'enclenche.

L'appréhension d'une telle catastrophe démographique associée à une préconisation de la limitation du nombre de naissances porte désormais le nom de *malthusianisme*. Notons que, comme le souligne l'anthropologue C. MEILLASSOUX, cette peur d'une croissance excessive au délà des moyens de subistances est complètement irréaliste : en réalité, comment une population pourrait-elle continuer à croître exponentiellement en ayant épuisé les ressources nécessaires à son développement? MALTHUS le reconnaît d'ailleurs lui-même (traduction en Français) : « Je sais bien, que les millions d'habitants en excès dont j'ai parlé n'existeront jamais ». Mais cette pensée malthusienne eut tout de même des conséquences importantes, comme par exemple la politique de l'enfant unique en Chine. Présentons à présent une description mathématique.

On suppose que la population grandit en se multipliant par un nombre fixe β appelé *taux de reproduction* ou *taux de fertilité*, et meurt selon un *taux de mortalité* $\mu > 0$ supposés constant ici. Ainsi, si P désigne le cardinal[1] de la population.

BILAN DE POPULATION MALTHUSIEN CONTINU.

On débouche alors sur la définition ci-après.

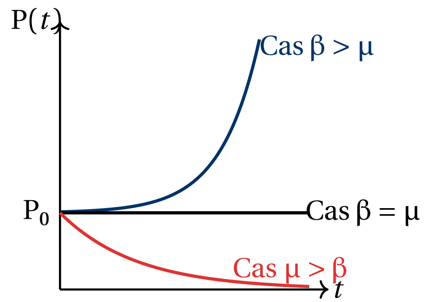
Définition 9 | Modèle de MALTHUS

On dit qu'une fonction P suit un *modèle malthusien de taux* β, μ, *condition initiale* $P_0 \in \mathbb{R}$ si P est dérivable en t et vérifie :

$$P'(t) = (\beta - \mu)P(t) \quad (t \geqslant 0), \quad P(0) = P_0. \tag{Malthus}$$

On appelle β le taux de natalité, μ le taux de mortalité. Le taux d'évolution est alors $\beta - \mu$. *(conséquence directe de la définition!)*

De manière équivalente, cela signifie que $P(t) = P_0 e^{(\beta-\mu)t}$ pour tout $t \geqslant 0$. Ici nous ne supposons donc pas l'existence de prédateurs, et que les ressources naturelles sont en quantité illimité. Ainsi la population a donc la possibilité de se développer indéfiniment.



Ce modèle très simpliste met en évidence un point très important : l'évolution d'une population est dictée par la balance entre taux de fertilité et taux de mortalité, que ce soit dans le cas discret ou le cas continu.

MODÈLE LOGISTIQUE DE VERHULST : ÉVOLUTION SOUS CAPACITÉ DE MILIEU.

En 1838, Pierre-François VERHULST répond à MALTHUS en proposant un modèle *logistique* de dynamique de population. À l'instar du modèle de MALTHUS, il suppose qu'une population sans limitation de ressources croît de manière exponentielle mais que la croissance de la population est freinée par sa propre dynamique et par la limitation des ressources du milieu. Dans sa note, VERHULST suppose la résistance à la croissance d'une population proportionnelle au carré de la vitesse avec laquelle la population tend à croître (à l'instar d'un mobile en chute libre traversant un milieu résistant — cette intuition fut d'ailleurs fournie à VERHULST par le physicien QUETELET). Le bilan de population est quant à lui le même que pour MALTHUS, avec simplement l'ajout d'un terme proportionnel à $-P(t)^2$. À renommage de variables près, on arrive directement sur la définition ci-après.

1. abus de vocabulaire, puisque P n'a aucune raison d'être un entier positif

Définition 10 | Modèle de VERHULST

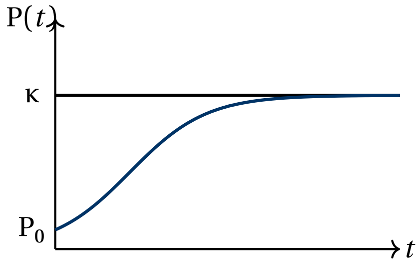
On dit qu'une fonction P suit un *modèle de VERHULST de taux* β, μ, κ, *condition initiale* $P_0 \in \mathbb{R}$ si P est dérivable en t et vérifie :

$$P'(t) = (\beta - \mu)\left(P(t) - \frac{P(t)^2}{\kappa}\right) \quad (t \geqslant 0), \quad P(0) = P_0. \qquad \text{(Verhulst)}$$

On appelle β le taux de natalité, μ le taux de mortalité, et κ la capacité du milieu [a].

Si $P_0 > 0$, nous pouvons établir (*cf.* TD) que :

$$P(t) = \frac{\kappa}{1 + e^{-(\beta-\mu)t}\left(\frac{\kappa}{P_0} - 1\right)}.$$



Modèle de VERHULST continu.

MODÈLE DE GOMPERTZ. Un modèle ressemblant au précédent, seule la vitesse de convergence vers la valeur limite est modifiée ainsi que la pente initiale.

Définition 11 | Modèle de GOMPERTZ

On dit qu'une fonction P suit un *modèle de GOMPERTZ de taux* β, μ, κ, *condition initiale* $P_0 \in \mathbb{R}$ si P est dérivable en t et vérifie :

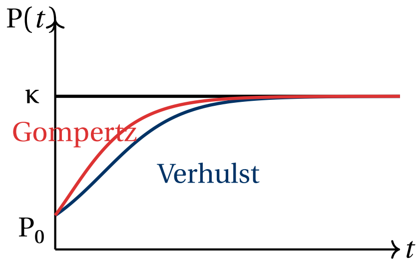
$$P'(t) = (\beta - \mu)\ln\left(\frac{\kappa}{P(t)}\right)P(t) \quad (t \geqslant 0), \quad P(0) = P_0. \qquad \text{(Gompertz)}$$

On appelle β le taux de natalité, μ le taux de mortalité, et κ la capacité du milieu.

Là encore, on ne peut pas obtenir d'expression explicite pour le modèle discret. En revanche dans le cas continu, si $P_0 > 0$, nous pouvons établir (*cf.* TD) que :

$$P(t) = \kappa e^{\ln\left(\frac{P(0)}{\kappa}\right)e^{-(\beta-\mu)t}}.$$

Nous ferons la résolution explicite en TD.



Modèle de GOMPERTZ continu

a. C'est donc ce terme supplémentaire qui vient freiner la croissance de la population si $\beta - \mu > 0$, et accélérer la croissance si $\beta - \mu < 0$

MODÈLE PROIES-PRÉDATEURS DE LOTKA-VOLTERRA : COMPÉTITION ENTRE DEUX POPULATIONS. Si deux espèces dont les populations sont représentées par P_1 et P_2 se partagent le milieu, on peut adapter le modèle de VERHULST pour tenir compte de cette compétition.

Définition 12 | Modèle de LOTKA-VOLTERRA

On dit qu'une fonction P suit un *modèle de LOTKA-VOLTERRA de taux* β, μ, κ si P est dérivable en t et vérifie :

$$\begin{cases} P_1'(t) &= ((\beta_1 - \mu_1) - \pi_1 P_2(t))P_1(t), \\ P_2'(t) &= ((\beta_2 - \mu_2) - \pi_2 P_1(t))P_2(t). \end{cases} \qquad \text{(LoktaVolt)}$$

On appelle β_1 le taux de natalité, μ_1 le taux de mortalité pour la première (avec β_2, μ_2 pour la seconde), et π_1, π_2 les taux de prédation.

Remarque 2 (Interprétation du système) Nous annotons chacun des termes présents dans le système.

$$\begin{cases} P_1'(t) &= (\beta_1 - \mu_1)P_1(t) - \pi_1 P_2(t)P_1(t), \\ P_2'(t) &= (\beta_2 - \mu_2)P_2(t) - \pi_2 P_1(t)P_2(t). \end{cases}$$

La résolution et l'étude générale d'un tel système est en revanche difficile.

3. MODÉLISATION DE DYNAMIQUES DISCRÈTES

On s'intéresse ici aux dynamiques discrètes, c'est-à-dire des grandeurs qui évoluent en des temps ponctuels.

Définition 13 | Taux d'évolution discret

Soit $u = (u_n)$ une suite.

- Si $n \in \mathbb{N}$, alors on définit le *taux d'évolution en n* noté $\tau_n(u)$ par :
$$\tau_n(u) = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}.$$
Lorsque u décrit une population d'individus, on parle de *taux de reproduction (resp. mortalité) en n* si $\tau_n(u) \geqslant 0$ (*resp.* $\leqslant 0$).
- On dit que u suit une *évolution linéaire* lorsque le taux d'évolution est constant au cours du temps.

Exemple 15 Si $u = (u_n)$ désigne la suite représentant le capital à l'année n d'un livret bancaire rémunérée à τ%, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \tau u_n.$$
Donc $\tau_n(u) = \tau$ — le taux de rémunération que vous connaissez depuis longtemps est simplement le taux d'évolution de la suite des capitaux.

Exemple 16 Quelles sont les suites (u_n) de taux d'évolution constant égal à $\tau \in \mathbb{R}$? Analysez la limite.

- **[Discret]** bilan de V entre n et $n+1$ $\Longrightarrow$ relation de récurrence sur (v_n).
- **[Continu]** bilan de V entre t et $t+h$ $\Longrightarrow$ équation différentielle sur V.

Faisons à nouveau ce travail de bilan de grandeur dans plusieurs contextes discrets ici.

Exemple 17 (Modélisation) Modéliser les situations ci-après à l'aide d'une suite, et déterminer une expression de ladite suite.

1. **[Dune]** En 2018, la largeur maximale de la dune du Pilat était estimée à 616 mètres. Une étude a montré que, chaque année, la dune progresse en moyenne de 3,5 mètres à l'intérieur des terres. En admettant que cette évolution se poursuit, comment peut-on modéliser l'évolution de la largeur de la dune chaque année ?

2. **[Reproduction cellulaire très simplifiée]** On considère une population de cellules, qui se reproduisent tous les ans. On suppose que chaque cellule donne alors lieu à deux cellules à l'année suivante.

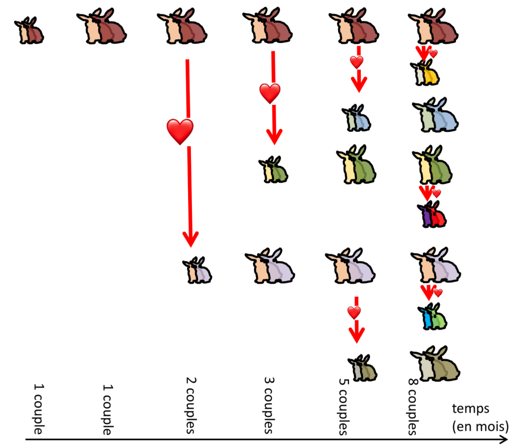
3. **[Invasion]** La pyrale est une chenille invasive qui s'attaque aux buis. Selon un relevé statistique, chaque année, le nuisible fait disparaitre 15% des buis du massif. Alors que l'on compte en 2017, 75000 pieds de buis, l'ONF préconise de replanter 3000 plants chaque année pour compenser les dégâts de la pyrale.
   - Modéliser la situation si la préconisation de l'ONF n'est pas suivie.

- Modéliser la situation si la préconisation de l'ONF est suivie.

4. [Lapins de Fibonacci]

Fibonacci émet les hypothèses suivantes au sujet de la reproduction d'un couple de lapin initial :

- Un mois donné, on isole un couple de nouveaux-nés dans un lieu clos.
- Tout couple de lapins ne peut se reproduire qu'au bout de deux mois de vie (lorsque les individus sont adultes).
- Tout couple de lapins adultes se reproduit chaque mois en donnant naissance à un couple de bébés lapins.
- Les lapins ne meurent jamais.



Modèle de Fibonacci

Comment peut-on modéliser l'évolution du nombre de couples de lapins ?

5. [Deux populations à évolution liée] On considère une population de tortues, composée de bébés (âgés d'un an) et d'adultes (âgés de 2 ans ou plus). On suppose l'évolution suivante :

- les tortues deviennent adultes à 2 ans, et que seules 20% parviennent à cet âge,
- 40% des tortues adultes de l'année n meurent avant la fin de l'année,
- les femelles composent la moitié de la population et donnent naissance à 4 bébés chaque année, de l'âge de 2 ans jusqu'à la fin de leur vie. Les bébés deviennent alors des tortues âgées d'1 an à la génération suivante, puis une partie d'entre elles deviendront adulte à la génération encore d'après (à 2 ans).

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: a_n le nombre d'adultes vivant l'année n, et b_n le nombre de bébés provenant de la génération n (le nombre de tortues âgées d'1 an à la génération $n \in \mathbb{N}^\star$ est alors b_{n-1}).

Faisons un bilan de quantité entre $n \in \mathbb{N}$ et $n+1$ pour les adultes déjà. Le modèle invite à établir une récurrence d'ordre 2.

$$a_{n+2} = \underbrace{0.6 \times a_n}_{\text{adultes survivants de la génération précédente}} + \underbrace{0.2 b_n}_{\text{bébés de l'année } n \text{ passant adultes à 2 ans}}, \quad b_n = \underbrace{4}_{\text{nombre de bébés par femelle}} \times \underbrace{\frac{a_n}{2}}_{\text{adultes femelles génération } n}.$$

On déduit alors que (a_n) satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 0.6 a_n + 0.4 a_n}.$$

3.3. Modèles de populations

On reprend brièvement ici les modèles de dynamique des populations vus dans le Chapitre (AN) 2 mais dans un cadre discret.

Bilan de population malthusien continu. On rappelle que selon Malthus, la population grandit en se multipliant par un nombre fixe β appelé *taux de reproduction* ou *taux de fertilité*, et meurt selon un *taux de mortalité* $\mu > 0$ supposés constant ici. Ainsi, si (p_n) représente le cardinal de la population, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = p_n + \beta p_n - \mu p_n = (1+\beta-\mu) p_n.$$

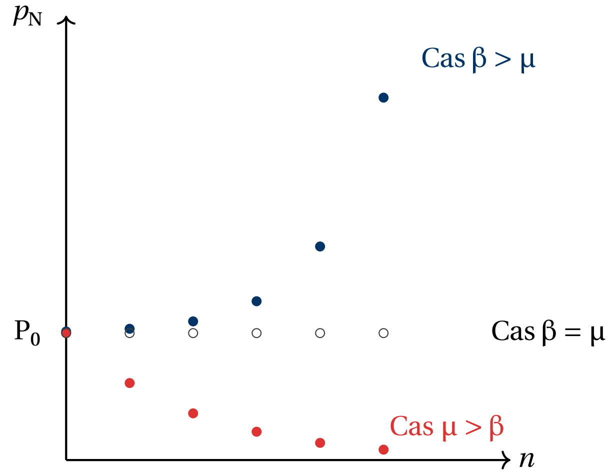
On débouche alors sur la définition ci-après.

Définition 14 | Modèle de Malthus
On dit qu'une suite (p_n) suit un *modèle malthusien de taux* β, μ, *condition initiale* $p_0 \in \mathbb{R}$ si (p_n) vérifie :

$$p_{n+1} = p_n + (\beta-\mu) p_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad p_0 = \mathrm{P}_0. \qquad \text{(Malthus,disc)}$$

On appelle β le taux de natalité, μ le taux de mortalité. Le taux d'évolution est alors $\beta - \mu$.

De manière équivalente, cela signifie que $p_n = (1+\beta-\mu)^n \mathrm{P}_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ici nous ne supposons donc pas l'existence de prédateurs, et que les ressources naturelles sont en quantité illimité. Ainsi la population a donc la possibilité de se développer indéfiniment.



Modèle logistique de Verhulst et autres modèles. Comme pour le modèle continu, on ajoute ici un terme qui vient freiner la croissance de la population, cela permet de tenir compte de la capacité d'un milieu.

Définition 15 | Modèle de Verhulst
On dit qu'une suite (p_n) suit un *modèle de Verhulst de taux* β, μ, κ, *condition initiale* $\mathrm{P}_0 \in \mathbb{R}$ si (p_n) vérifie :

$$p_{n+1} = p_n + (\beta-\mu)\left(p_n - \frac{p_n^2}{\kappa}\right) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad p_0 = \mathrm{P}_0. \qquad \text{(Verhulst,disc)}$$

On appelle β le taux de natalité, μ le taux de mortalité, et κ la capacité du milieu [a].

Pour le modèle de Verhulst, il n'est pas possible d'obtenir d'expression explicite de (p_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$. L'étude de cette suite récurrente est par ailleurs difficile. De-même que les modèles de Gompertz et Lokta-Volterra introduisant une prédation.

a. C'est donc ce terme supplémentaire qui vient freiner la croissance de la population si $\beta - \mu > 0$, et accélérer la croissance si $\beta - \mu < 0$

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (AN) 3.1 **(Trouver l'expression explicite d'une suite vérifiant $u_{n+1} = qu_n + a$, $q \neq 1$)**

1. Chercher ℓ tel que $\ell = q\ell + a$.
2. Montrer que la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison q, puis en déduire l'expression de $(u_n - \ell)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de (u_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Pas de question de cours dans ce chapitre

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les suites usuelles (arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, récurrente linéaire d'ordre deux) :
   - connaitre leur relation récurrence . . . . ☐
   - savoir exprimer leur terme général en fonction de n . . . . ☐
   - savoir traduire une condition initiale . . . . ☐
2. Concernant la modélisation :
   - savoir traduire des dynamiques discrètes à l'aide d'une suite récurrente . . . . . . ☐
   - savoir traduire des dynamiques continues à l'aide d'une équation différentielle ☐
   - avoir une idée générale des deux principaux modèles de dynamique des populations (évolution libre [Malthus], et évolution avec capacité [logistique]) ☐

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

4.1. Suites usuelles

Exercice 1 | 👁 Récurrences arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques [Solution]

1. Calculer le terme général, étudier la convergence, et calculer la somme des termes $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour les suites (u_n) définies par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   - $u_{n+1} = u_n + 3$
   - $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}$
   - $u_{n+1} = u_n - 5$
   - $u_{n+1} = 3u_n$
   - $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$
   - $u_{n+1} = -5u_n$
   - $u_{n+1} = 3u_n + 3$
   - $u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{3}$
   - $u_{n+1} = -u_n - 4$.
2. Dans chacun des cas ci-dessus, calculer $S = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2 | 👁 Récurrences linéaires d'ordre 2 [Solution] Déterminer en fonction de n, le terme u_n des suites qui vérifient

1. $u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n-1} = 0.$
2. $u_0 = 2, \quad u_1 = -3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -8u_{n+1} - 16u_n.$
3. $u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -4u_n.$

Exercice 3 | Récurrences de type homographique [Solution] On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}, \quad v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \geqslant 3$, et que $u_n > 1$.
2. En déduire que la suite (v_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.
3. Montrer que (v_n) est géométrique.
4. En déduire l'expression explicite de (v_n) puis de (u_n).

Exercice 4 | 👁 [Solution] On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{2}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1. En étudiant (v_n) définie par $v_n = u_n \times \sqrt{2} - n$ pour tout n, donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ en fonction de n.

4.2. Modélisation discrète

Exercice 5 | Injection d'un traitement [Solution] Toutes les heures, on injecte à un sujet, une même dose de 1,8 unités, d'une substance médicamenteuse dans le sang. On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée. En l'espace d'une heure, la quantité de cette substance présente dans le sang diminue de 30%. La première injection se fait à $t = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Q_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t = n$ (en heures), dès que la nouvelle injection est faite.

1. Donner Q_0 et déterminer une relation de récurrence entre Q_{n+1} et Q_n.
2. Écrire une fonction en langage Python Q qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie Q_n au dixième près. Donner grâce à cette fonction une approximation au dixième près de la quantité de substance présente dans le sang à l'instant à $t = 5$ puis conjecturer le comportement asymptotique de la suite (Q_n).
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}*$, le terme Q_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (Q_n).

4. Écrire une fonction en langage Python proche qui prend en argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie le plus petit entier n tel que $|Q_n - 6| < \varepsilon$. Autrement dit, à partir de quel rang n la quantité Q_n sera-t-elle " proche ", à ε près, de sa limite 6 ?

Exercice 6 | [Solution] Un arboriculteur possède, au 1er janvier 2020, 5000 pommiers. Chaque année, il arrache 4% des pommiers (endommagés) et en replante 300 nouveaux. On note P_n le nombre de pommiers au 1er janvier de l'année $2020 + n$. La superficie du terrain permet à l'arboriculteur d'avoir 6000 pommiers au maximum.

1. Donner P_0 et déterminer une relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n.
2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le terme P_n et déterminer la limite de la suite (P_n).
3. Écrire un script Python permettant de représenter sur le même graphique le nombre de pommiers entre 2020 et 2050 et la droite d'équation $y = 6000$. Estimer par lecture graphique en quelle année l'arboriculteur devra acquérir un nouveau terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.
4. Écrire maintenant un script Python permettant de déterminer l'année précédente.

4.3. Modélisation continue

Exercice 7 | **Cinétique chimique d'ordre 2** [Solution] On considère une réaction chimique notée $A \longrightarrow B$, on suppose que le réactif A disparait avec un taux proportionnel (on note $k \in \mathbb{R}$ le coefficient associé) à la concentration de réactif. Déterminer la concentration [A] en réactif en fonction du temps, en supposant que la concentration ne s'annule pas.

Exercice 8 | **Propagation d'une rumeur** [Solution] On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation est proportionnelle au produit du pourcentage $y \in [0, 1]$ de ceux qui sont au courant de la rumeur par le pourcentage de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.

1. Écrire une équation différentielle vérifiée par y. On admet dans la suite que la seule solution s'annulant quelque part est la solution nulle, on résout donc l'équation différentielle sur l'ensemble des fonctions y ne s'annulant pas.
2. En déduire une équation différentielle vérifiée par $z = \dfrac{1}{y}$.
3. Résoudre l'équation vérifiée par z et en déduire y.
4. **[Application]** Une petite ville compte 1000 habitants. À 8 heures du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. À midi, la moitié de la ville est au courant. A quel moment de la journée est-ce que 90% de la population sera au courant de cette nouvelle ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près, on précisera aussi dans quelle unité il est exprimé.

Exercice 9 | **Hauteur d'une baignoire** [Solution] On considère une baignoire de forme parallélépipédique dont la base est de dimensions ab que l'on remplit avec un débit constant noté d. On note $z(t)$ la hauteur d'eau dans la baignoire à l'instant t et $V(t)$ son volume. On suppose que $V(0) = 0$.

La baignoire a une fissure au fond qui laisse s'échapper plus ou moins d'eau en fonction de la pression exercée par l'eau sur celle-ci. On rappelle que la pression au fond de la baignoire est égale à $p(z) = \rho g z$. Le débit de la fuite est $d_f = \alpha p$ avec $\alpha > 0$ et p la pression qui s'y exerce. Toutes les grandeurs sont en unité SI.

1. Si on suppose la baignoire suffisamment haute, montrer que le volume d'eau tend vers un volume à l'équilibre V_{eq} que l'on déterminera.
2. Si la baignoire a un volume V (que l'on suppose inférieur au volume d'équilibre), au bout de combien de temps sera-t-elle pleine ?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1. C'est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2+3n, \quad \mathrm{S} = 2(n+1)+3\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1)+3\frac{n(n+1)}{2}.$$
2. C'est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2+\frac{n}{2}$. On a :
$$\mathrm{S} = 2(n+1)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1)+\frac{n(n+1)}{4}.$$
3. C'est une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2-5n, \quad \mathrm{S} = 2(n+1)-5\sum_{k=0}^{n} k = 2(n+1)-5\frac{n(n+1)}{2}.$$
4. C'est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 2, ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 23^n, \quad \mathrm{S} = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1}-1.$$
5. C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2, ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \mathrm{S} = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$
6. C'est une suite géométrique de raison -5 et de premier terme 2, ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2(-5)^n, \quad \mathrm{S} = 2\sum_{k=0}^{n}(-5)^k = \frac{1}{3}\left(1-(-5)^{n+1}\right).$$
7. C'est une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode vue en cours pour trouver l'expression de u_n en fonction de n.
   - Calcul de la limite éventuelle. On suppose que (u_n) converge vers ℓ. Alors par passage à la limite, on a $3\ell+3 = \ell \iff \ell = -\frac{3}{2}$.
   - On pose $v_n = u_n - \ell = u_n + \frac{3}{2}$. On a alors :
   $$v_{n+1} = u_{n+1}+\frac{3}{2} = 3u_n+3+\frac{3}{2} = 3u_n+\frac{9}{2} = 3\left(u_n+\frac{3}{2}\right) = 3v_n,$$
   donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0+\frac{3}{2} = \frac{7}{2}$. On obtient donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{7}{2}\times 3^n$.
   - On en déduit : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}\times 3^n - \frac{3}{2}$.

   On a de plus : $\quad \mathrm{S} = \frac{7}{4}\left(3^{n+1}-1\right)-\frac{3(n+1)}{2}$.
8. C'est une suite arithmético-géométrique. On obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{16}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{9}, \quad \mathrm{S} = \frac{32}{27}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+\frac{2(n+1)}{9}.$$
9. C'est une suite arithmético-géométrique. On obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4(-1)^n-2, \quad \mathrm{S} = 2\left(1-(-1)^{n+1}\right)-2(n+1).$$

Solution (exercice 2) [Énoncé] Toutes ces suites sont des suites linéaires récurrentes d'ordre deux, on les résout en étudiant l'équation caractéristique. Je ne donne ici que le résultat.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{4}\left(3^{n+1}+(-1)^n\right)$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(2-\frac{5}{4}n\right)(-4)^n$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$.

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. Comme toujours pour ce genre de question, on fait une récurrence.
   On montre par récurrence sur $n \geqslant 3$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\quad u_n$ défini et$u_n > 1$.

   Initialisation. pour $n = 3$, on a : $u_1 = -1$ puis $u_2 = -7$ et $u_3 = \frac{37}{5} > 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(3)$ est vraie.

   Hérédité. soit $n \geqslant 3$, on suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n > 1$, donc $u_n - 1 \neq 0$ et u_{n+1} est bien défini. De plus, on a
   $$u_{n+1} > 1 \iff \frac{5u_n-2}{u_n+2} > 1 \iff 5u_n-2 > u_n+2 \iff u_n > 1.$$
   Ici on a utilisé le fait que $u_n > 1$ d'après $\mathscr{P}(n)$, et donc que $u_n+2 > 0$. On arrive $u_n > 1$ qui est bien vrai, donc par équivalences, $u_{n+1} > 1$ est vrai aussi. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\forall n \geqslant 3, \quad u_n > 1$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car u_0, u_1, u_2 ne sont pas égaux à 1 et ensuite on a $\forall n \geqslant 3, u_n > 1$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $u_n - 1 \neq 0$ et v_n bien défini.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{5u_n-2-2u_n-4}{u_n+2}}{\frac{5u_n-2-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{3u_n-6}{4u_n-4} = \frac{3}{4}\frac{u_n-2}{u_n-1} = \frac{3}{4}v_n.$$
   Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme 2.

4. On en déduit la formule explicite de v_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{v_n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

En remarquant que : $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$ et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était toujours différente de 1, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \implies \boxed{u_n = \frac{2(\frac{3}{4})^n - 2}{2(\frac{3}{4})^n - 1}}.$$

Solution (exercice 4) [Énoncé] Attention, (u_n) n'est pas du tout arithmético-géométrique.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \sqrt{2}.u_{n+1} - (n+1)\\
&= \sqrt{2}\left(\frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (n+1)\\
&= \frac{u_n}{\sqrt{2}} + \frac{n}{2} + 1 - n - 1\\
&= \frac{v_n + n}{\sqrt{2}^2} + \frac{n}{2} - n\\
&= \frac{v_n}{2} + n - n = \frac{1}{2}v_n.
\end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et donc $v_n = \frac{v_0}{2^n} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}} + \frac{n}{\sqrt{2}}}.$$

2.
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{3\cdot 2^{i-1}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{2}{3}\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \boxed{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{n(n+1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Solution (exercice 5) [Énoncé]

1. On a $Q_0 = 1.8$ puis d'après l'énoncé : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{Q_{n+1} = 0.7Q_n + 1.8}$. C'est donc une suite arithmético-géométrique.

2.
```python
def Q(n):
    Q = 1.8
    for _ in range(1, n+1):
        Q = 0.7*Q + 1.8
    return Q
```

```
>>> Q(5)
5.294106
```

3. On cherche ℓ telle que $\ell = 0.7\ell + 1.8$. On trouve après résolution $\ell = \frac{1.8}{0.3} = \boxed{6}$. Alors faisant la différence entre les relation $Q_{n+1} = 0.7Q_n + 1.8$, $\ell = 0.7\ell + 1.8$, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient que $Q_{n+1} - \ell = 0.7(Q_n - \ell)$ donc $(Q_n - \ell)$ est géométrique de raison 0.7, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n - 6 = 0.7^n(Q_0 - 6) \iff \boxed{Q_n = 6(1 - 0.7^n)}.$$

4. >_🐍
```python
def seuil(eps):
    n = 0
    Q = 1.8
    while abs(Q-6) > eps:
        Q = 0.7*Q + 1.8
        n += 1
    return n
```

```
>>> n = seuil(10**(-3))
>>> n
24
>>> Q(n) # c'est bien une valeur approchée de 6 à la \
↪ précision souhaitée
5.9991953588282
```

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. D'après l'énoncé : $P_0 = 5000$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{P_{n+1} = 0.96P_n + 300}$.

2. On cherche ℓ telle que $\ell = 0.96\ell + 300$. On trouve après résolution $\ell = \frac{300}{0.04} = \boxed{7500}$. Alors faisant la différence entre les relation $P_{n+1} = 0.96P_n + 300$, $\ell = 0.96\ell + 300$, pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient que $P_{n+1} - \ell = 0.96(P_n - \ell)$ donc $(P_n - \ell)$ est géométrique de raison 0.06, donc :

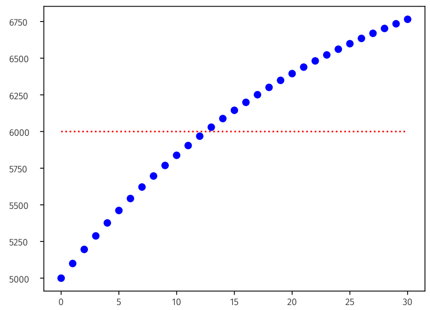
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n - 7500 = 0.96^n(5000 - 7500) \iff \boxed{P_n = 7500 - 2600.(0.96)^n}.$$

Cette suite converge vers 7500 car $|0.96| < 1$.

3. >_🐍

```python
def P(n):
    P = 5000
    for _ in range(1, n+1):
        P = 0.96*P + 300
    return P

plt.plot([P(n) for n in range(31)], 'bo')
plt.plot([0, 30], [6000, 6000], 'r:')
```



Par lecture graphique, on déduit qu'il faut attendre l'année $\boxed{\text{2013 environ}}$.

4. C'est une structure typique d'utilisation de boucle `while`.

```python
def seuil():
    P = 5000
    n = 0
    while P < 6000:
        P = 0.96*P + 300
        n += 1
    return n
```

```
>>> seuil()
13
```

Solution (exercice 7) [Énoncé] Le taux d'évolution est négatif, puisqu'il y a disparition comme l'indique l'énoncé, et donc

$$\frac{[\mathrm{A}]'(t)}{[\mathrm{A}](t)} = -k\cdot[\mathrm{A}](t).$$

On peut aussi reformuler sans utiliser la définition du taux, en faisant un bilan de concentration entre t et $t+h$, $t, h \geqslant 0$:

$$[\mathrm{A}](t+h) = [\mathrm{A}](t) - h(k\cdot[\mathrm{A}](t))\cdot[\mathrm{A}](t),$$

donc en faisant $h \longrightarrow 0$, on retrouve que [A] est solution de

$$\boxed{y' = -ky^2}.$$

Supposons que la concentration ne s'annule pas, on obtient :

$$\forall t \geqslant 0,\quad \int_0^t -\frac{[\mathrm{A}]'(u)}{[\mathrm{A}]^2(u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^t k\,\mathrm{d}u$$
$$\iff \left[\frac{1}{[\mathrm{A}](u)}\right]_0^t = k[u]_0^t$$
$$\iff \frac{1}{[\mathrm{A}](t)} - \frac{1}{[\mathrm{A}](0)} = kt.$$

Donc : $\boxed{[\mathrm{A}](t) = \dfrac{1}{kt + \frac{1}{[\mathrm{A}](0)}}}$.

Solution (exercice 8) [Énoncé]

1. La vitesse de propagation étant la dérivée, nous avons d'après l'énoncé pour une certaine constante $k \in \mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad \boxed{y'(t) = ky(t)(1-y(t))}.$$

2. Par quotient, z est dérivable et $z' = \dfrac{-y'}{y^2}$ donc en divisant l'équation différentielle précédente par y^2, on déduit :

$$-z' = k\frac{1-y}{y} = k(z-1).$$

Donc z vérifie $\boxed{z' = -kz + k}$.

3. On cherche une solution particulière sous la forme d'une constante, on trouve que la constante 1 est solution, donc l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{K}e^{-kt} + 1 \,\middle|\, \mathrm{K} \in \mathbb{R}\right\}}.$$

Donc y est de la forme : $\boxed{y : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{K}e^{-kt}+1}}$.

4. On peut imaginer que 8 heures correspond à l'origine de l'échelle des temps de sorte que l'on cherche y vérifiant $y(0) = 80$ ce qui est équivalent à $\mathrm{K}+1 = \dfrac{1}{80}$ d'où $\mathrm{K} = -\dfrac{79}{80}$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\quad y(t) = \frac{1}{1-\frac{79}{80}e^{-kt}}.$$

On a comme condition : $\dfrac{1}{1-\frac{79}{80}e^{-4k}} = 500$ ce qui permet de fixer k :

$$1-\frac{79}{80}e^{-4k} = \frac{1}{500} \iff \frac{499\times 80}{500\times 79} = e^{-4k} \iff e^{-4k} = \frac{1\,996}{1\,975} \iff k = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1\,996}{1\,975}\right).$$

On cherche alors t de sorte que

$$\frac{1}{1-\frac{79}{80}e^{-kt}} = 900 \iff 1-\frac{79}{80}e^{-kt} = \frac{1}{900} \iff \frac{899}{900} = \frac{79}{80}e^{-kt}.$$

On trouve alors : $t = -\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{3\,596}{3\,555}\right) \approx \boxed{4.41 \text{ heures.}}$

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. On rappelle qu'un débit est homogène à un volume sur un temps. Pour mettre en équation le problème, on fait un bilan de volume d'eau entre deux temps très proches. Soient $t \in \mathbb{R}^+$, $h \in \mathbb{R}^+$. D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(t+h) &= \mathrm{V}(t) + \text{volume d'eau ajouté} - \text{volume sortant} \\ &= \mathrm{V}(t) + \mathrm{d}\times h - \mathrm{d}_f h \\ &= \mathrm{V}(t) + \mathrm{d}\times h - \alpha\rho g z(t) h \\ &= \mathrm{V}(t) + \mathrm{d}\times h - \frac{\alpha\rho g}{ab}\mathrm{V}(t) h. \end{aligned}$$

$\mathrm{V}(t) = abz(t)$

En passant $\mathrm{V}(t)$ à gauche, puis en divisant par h et en faisant $h \longrightarrow 0$, on trouve finalement que V est solution de :

$$\boxed{y' = -\frac{\alpha\rho g}{ab} y + \mathrm{d}}.$$

Dans la suite on notera : $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\alpha\rho g}{ab}$. Le second membre est ici constant, on peut donc chercher une solution particulière sous forme d'une constante, $\tau\,\mathrm{d}$ convient. On déduit alors que V est de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathrm{V}(t) = \mathrm{K}e^{-t/\tau} + (\tau d),$$

avec $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$. Or, $\mathrm{V}(0) = 0$ donc $\mathrm{K} + \tau d = 0$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \boxed{\mathrm{V}(t) = \tau d\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}.$$

Ainsi, par règle usuelle sur les limites, on déduit que $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \mathrm{V}(t) = \boxed{\tau d = \mathrm{V}_{eq}}$.

2. Si la baignoire a un volume V (que l'on suppose inférieur au volume d'équilibre), on doit résoudre en t : $\mathrm{V}(t) = \mathrm{V}$, c'est-à-dire :

$$\tau d\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \mathrm{V} \iff e^{-t/\tau} = 1 - \frac{\mathrm{V}}{\tau d} \iff \boxed{t = -\tau \ln\left(1 - \frac{\mathrm{V}}{\tau d}\right)}.$$