Chapitre (ALG) 7 Calcul matriciel

Être visionnaire c'est regarder le monde au-delà du temps. Mais on ne voit pas plus loin, que les choix que l'on ne peut pas comprendre.
— L'Oracle dans *The Matrix*

Résumé & Plan

Le calcul matriciel est un puissant outil pour traiter de nombreux problèmes. En analyse les suites récurrentes linéaires ou de systèmes différentiels linéaires, en algèbre il permet l'étude efficace des applications linéaires ou encore des systèmes d'équations linéaires. L'objectif de ce chapitre est de développer les notions du calcul matriciel qui nous permettront de traiter les problèmes précédents plus tard dans l'année.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST1, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 1.

Commençons par introduire une notation importante que nous utiliserons dans le chapitre.

Notation Symbole de Kronecker

Soient x, y deux éléments d'un ensemble E, alors le *symbole de Kronecker de* x, y est défini par :

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1 Soit $E = [\![1\,,\,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, et $i, j, k \in [\![1\,,\,n]\!]$.

- $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $1 - \delta_{i,j} = \begin{cases} 1-0 & \text{si } i \neq j \\ 1-1 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $\delta_{i,j} \times \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1 MATRICES & OPÉRATIONS

1.1 Généralités

Définition 1 | Matrice
On appelle *matrice $n \times p$ à coefficients dans* $\mathbb{K}$, on dit encore *de format $n \times p$*, toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!]$, c'est-à-dire une application $[\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$. On note une telle matrice :

- sous la forme $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, ou plus simplement $(A_{i,j})_{i,j}$ si le contexte est clair.
- Ou encore sous la forme d'un tableau entre parenthèses à n lignes et p colonnes :
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}.$$
- Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on appelle $A_{i,j}$ *coefficient de la ligne i et de la colonne j*.
- Si $p = 1$, on parle de *vecteur colonne*, et $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{pmatrix}$.
- Si $n = 1$, on parle de *vecteur ligne*, et $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \end{pmatrix}$.
- Si $n = p$, on dit que la matrice est *carrée*.

Remarque 1 (Lignes avec ou sans virgules ?) En toute rigueur les éléments de $\mathbb{K}^p$ (produit cartésien défini plus tôt dans l'année) sont notés $(x_1, \ldots, x_p)$ alors que ceux de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont notés $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}$. Mais dans les deux cas, ces éléments sont définis comme des applications de $[\![1\,,\,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$, on s'autorisera donc à écrire : $\quad (x_1, \ldots, x_p) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}$.

Attention

- De même qu'on ne confond pas une suite u (une famille) avec son n-ième terme u_n (pour $n \in \mathbb{N}$, un nombre réel),
- on ne confondra pas une matrice $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ (une famille) avec son coefficient (i,j) noté $A_{i,j}$ (un élément de $\mathbb{K}$).

Notation

- On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Lorsque $n = p$, on note plus simplement $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et on note plus simplement $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ au lieu de $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.

Dans les notations précédentes, le premier indice désignera toujours le numéro de ligne, et le second le numéro de colonne.

Exemple 2

- $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, $\quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & \mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} & 8 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{C})$,
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne, alors que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est une matrice colonne.
- $(2^i + 3j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 2}} = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+6 \\ 4+3 & 4+6 \\ 8+3 & 8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \\ 11 & 14 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
- Les écritures sous forme de tableaux de $A = (i-j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 3}}$ et $B = \left(2^{i+j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 2}}$ sont :

Exemple 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de format $n \times n$. Écrire le coefficient (i,j) de la matrice A en fonction de $\delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$.

Définition 2 | Égalité matricielle

Soient A, B deux matrices. Alors A et B sont dites *égales* si :

- elles ont même taille, c'est-à-dire $A, B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ pour un certain $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,
- et : $\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!], \quad A_{i,j} = B_{i,j}$.

Exemple 4 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos(0) & e^{i\pi} \\ \tan(0) & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $A = B$ mais $A \neq C$ et $B \neq C$.

Notation Écriture en lignes/colonnes d'une matrice

Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on notera en ligne ou en colonnes de la manière suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1(A) & \dots & C_p(A) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} L_1(A) \\ \hline \vdots \\ \hline L_n(A) \end{array} \right).$$

Exemple 5 Pour $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$C_1(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_2(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C_3(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$L_1(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

MATRICES USUELLES. Pour terminer, définissons quelques matrices usuelles. La terminologie associée aux deux premières n'est pas anodine, il y a un lien avec les applications linéaires identiques et les homothéties définies dans les **????**, ce lien sera explicité plus tard dans ce chapitre.

Définition 3 | Matrice nulle

On appelle *matrice nulle de* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $n \times p$ ayant tous ses coefficients égaux à zéro :

$$0_{n,p} = (0)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 4 | Matrice identité

On appelle *matrice identité de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice $n \times n$ n'ayant que des uns sur la diagonale, et des zéros ailleurs :

$$I_n = \left(\delta_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots^{\,n\text{fois}} & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 5 | Matrice homothétique

On appelle *matrice homothétique de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *de rapport* $\lambda \in \mathbb{K}$ la matrice $n \times n$ suivante :

$$\lambda I_n = \left(\lambda\delta_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots^{\,n\text{fois}} & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Définition 6 | Matrice ATTILA

On appelle *matrice* ATTILA *de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice $n \times n$ suivante :

$$J_n = (1)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 6

- $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Définition 7 | Matrices élémentaires (ou base canonique)
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et $\ell \in [\![1, p]\!]$, on appelle *matrice élémentaire d'indice* (k,ℓ), notée $E_{k,\ell}$, la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constituée de zéros partout sauf pour le coefficient en ligne k et colonne ℓ, qui vaut un.

Exemple 7 (pour $n = 2, p = 3$) Dans $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, on a :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2 (Réécriture avec le symbole de Kronecker) Autrement dit,

$$E_{k,\ell} = \left(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

En effet, tous les coefficients sont nuls, sauf si :

$$\delta_{i,k}\delta_{j,\ell} = 1 \iff \delta_{i,k} = 1 \ \underline{\textbf{et}}\ \delta_{j,\ell} = 1 \iff i = k, j = \ell.$$

C'est-à-dire si le coefficient considéré est sur la ligne k et la colonne ℓ.

1.2 Opérations sur les matrices

Addition et multiplication externe. On commence par deux opérations très intuitives sur les matrices.

Définition 8 | Somme matricielle
Soient $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $A+B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice *définie* par :

$$A + B = \left(A_{i,j} + B_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit, les coefficients de $A+B$ sont obtenus en sommant ceux de A avec ceux de B.

On peut également multiplier une matrice par un scalaire, et ainsi définir une opération externe sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 9 | Multiplication par un scalaire d'une matrice
Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors la matrice λA est définie par :

$$\lambda A = \left(\lambda A_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit, les coefficients de λA sont obtenus en multipliant ceux de A par λ.

En particulier, pour $\lambda = -1$, on arrive à la définition suivante.

Définition 10 | Matrice opposée
Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *matrice opposée de* A la matrice $-A$.

Exemple 8 Calculer $-2A + B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 9 Écrire $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ en fonction de $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$.

Exemple 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $A^2 = A \times A = \alpha A + \beta I_2$.

Remarque 3 (Matrice comme combinaison linéaire de matrices élémentaires) Plus généralement, si $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$A = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} A_{i,j}E_{i,j}.$$

Exemple 11 (Produit-nul « avec un λ ») Soit $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que : $\lambda X = 0_{n,1} \iff \lambda = 0$ <u>**ou**</u> $X = 0$.

$\Longleftarrow$

$\Longrightarrow$

Les opérations +, . sur les matrices possède des propriétés similaires à celles des nombres réels déjà rencontrées, dont la vérification ne présente pas de difficulté.

Proposition 1 | Propriétés de la somme

Soient $(A, B, C) \in\in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$.

- **[Associativité]** $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- **[Commutativité]** $A+B = B+A$.
- **[Élément neutre]** $A+0_{n,p} = 0_{n,p}+A = A$. On dit que $0_{n,p}$ est un *élément neutre* pour l'addition matricielle.
- **[Élément opposé]** $A+(-A) = 0_{n,p}$.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication externe

Soient $(A, B) \in\in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

- **[Associativité]** $(\lambda\mu).A = \lambda.(\mu.A)$.
- **[Élément neutre]** $1.A = A$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication externe.
- **[Distributivité]** $(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu\cdot A, \quad \lambda\cdot(A+B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$.

MULTIPLICATION INTERNE. Passons à présent à une troisième opération : celle du produit matriciel. Nous allons chercher cette fois-ici à multiplier deux matrices entre elles. La définition ci-après peut paraître parachutée pour le moment, mais elle trouvera tout son sens dans le **??** où nous utiliserons les matrices pour traiter des problèmes d'algèbre linéaire. Pour l'instant l'objectif n'est donc pas de comprendre pourquoi on définit le produit matriciel ainsi, mais de savoir les calculer.

Définition 11 | Produit matriciel

Soient $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,\mathbf{p}}(\mathbb{K})$ et $B = (B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{p},q}(\mathbb{K})$, donc <u>**telles que le nombre de colonnes de** A **soit égal au nombre de lignes de** B</u>. Alors on appelle *matrice produit de* A *par* B, notée $A \times B$ ou plus simplement AB, la matrice de format $n \times q$ définie par :

$$A \times B = \left(\sum_{\underline{k}=1}^{p} A_{i,\underline{k}}B_{\underline{k},j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}, \quad \text{autrement dit :}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,q]\!], \quad (A\times B)_{i,j} = \sum_{\underline{k}=1}^{p} A_{i,\underline{k}}B_{\underline{k},j}.$$

Remarque 4 (Sur le format des matrices) On remarque que le nombre de colonnes de A doit obligatoirement être égal au nombre de lignes de B. On pourra retenir le schéma suivant type « relation de CHASLES » pour connaître le format de la matrice produit :

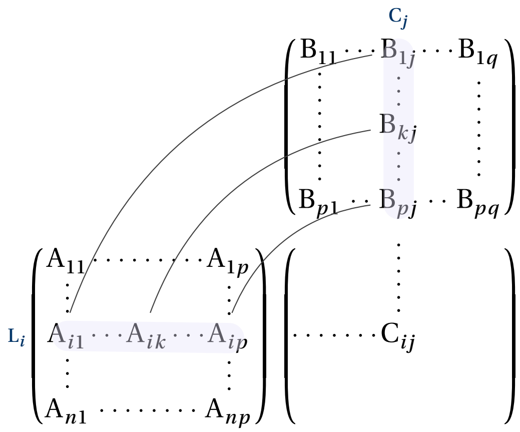
Matrice $n \times \cancel{p}$ $\times$ Matrice $\cancel{p} \times q$ $=$ Matrice $n \times q$

En particulier, le produit de deux matrices carrées de taille n est encore une matrice carrée de taille n.

Attention Existence du produit matriciel

Toujours vérifier les formats des matrices avant de calculer le produit matriciel des deux.

Remarque 5 **(Visualisation du produit matriciel)** Le produit matriciel peut être illustré, **au brouillon**, de la façon suivante.



C'est l'image précédente qu'il faut avoir en tête, mais dans la pratique on écrira toujours les deux matrices sur une seule ligne. On retiendra en particulier que pour calculer le coefficient (i, j) du produit, on a besoin de regarder la i-ième ligne de la première et la j-ième colonne de la deuxième.

Exemple 12 Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 13 Calculer, si c'est possible, les produits AB et BA dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

Faire trois constats de ces calculs de produits.

- **[Constat 1]**
- **[Constat 2]**
- **[Constat 3]**

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[Constat]

Résumons les différents constats faits précédemment.

Attention Mises en garde calculatoires

- Vous avez vu au collège qu'un « un produit (de nombres réels) est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul » (le résultat est encore vrai pour des complexes). Ceci est en revanche **faux** pour les matrices. En résumé, on ne peut simplifier par A ci-dessous :

$$AB = AC \not\Longrightarrow B = C.$$

De-même, pour tout vecteur colonne X :

$$AX = 0 \not\Longrightarrow X = 0.$$

Note | *En revanche, on pourra opérer à ces simplifications si* A *est « inversible », voir plus bas.*

- Le produit matriciel n'est pas commutatif, c'est-à-dire en règle générale $AB \neq BA$.

Définition 12 | Matrices qui commutent

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ deux matrices carrées. On dit que A *et* B *commutent* si

$$AB = BA.$$

Pour des « grosses » matrices, il peut être parfois judicieux d'utiliser la formule du produit matriciel avec la somme pour alléger les calculs. Voyons deux exemples.

Exemple 14

- Pour $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, calculer J_2AJ_2.

- Conjecturer une formule pour J_nAJ_n lorsque $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. La prouver en utilisant l'expression en somme du produit matriciel.

Exemple 15 On considère la matrice A de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \dots 1 \\ 2 \dots 2 \\ \vdots \quad \vdots \\ n \, .. \, n \end{pmatrix}.$$

À l'aide de la formule du produit matriciel, déterminer l'expression du coefficient général des matrices ci-après. Soit $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$.

1. $[AJ_n]_{i,j} =$

2. $[J_nA]_{i,j} =$

Remarque 6 **(Produit et écriture en colonne)** Il peut être parfois utile de retenir le produit matriciel de la manière suivante, lorsque la matrice de droite est écrite en colonne.

$$AB = A \times \left(C_1(B) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, C_q(B) \right) = \left(A \times C_1(B) \,\middle|\, \dots \,\middle|\, A \times C_q(B) \right).$$

Les $A \times C_i(B)$, $i \in [\![1\,,\,q]\!]$, sont des vecteurs colonnes par définition du produit matriciel, qui forment les colonnes de la matrice produit AB. En effet, par définition la j-ème colonne de AB est

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} A_{1,k}B_{k,j} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}B_{k,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \cdots A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \cdots A_{2,p} \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} \cdots A_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{p,j} \end{pmatrix} = A \times C_j(B).$$

Proposition 3 | Propriétés de la multiplication

Soient n, q, p, r trois entiers non nuls et $(A, A') \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $(B, B') \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})^2$, $C \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- **[Linéarité à gauche]** $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$,
- **[Linéarité à droite]** $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda A \times B'$.
- **[Associativité]** $A \times (BC) = (AB)C$.
- **[Neutre]** Si $n = p$, c'est-à-dire si A est une matrice carrée, alors :

  $I_n \times A = A \times I_n = A.$

Exemple 16 Constatons la dernière propriété déjà sur un exemple.

Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. Alors :

- $AI_2 =$

- $I_2A =$

Preuve

- On a : $A + \lambda A' \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ donc $(A + \lambda A') \times B \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. On a aussi $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ donc $A \times B \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{R})$, de-même pour $A' \times B$. Les deux matrices ont donc même format. Soit maintenant $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,q]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} ((A + \lambda A') \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} (A + \lambda A')_{i,k} B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(A_{i,k} + \lambda A'_{j,k}\right) B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(A_{i,k}B_{k,j} + \lambda A'_{j,k}B_{k,j}\right) \quad \textit{linéarité de la somme} \\ &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j} + \lambda \sum_{k=1}^{p} A'_{j,k}B_{k,j} \\ &= (AB)_{i,j} + \lambda (A'B)_{i,j}. \end{aligned}$$

- Identique à la précédente.
- Découle de l'associativité du produit de réels.
- Montrons par exemple que $I_n \times A = A$, l'autre se prouvant de la même manière. On a déjà $I_n \times A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, les deux matrices ont donc bien le même format.

Les propriétés précédentes sont donc analogues à celles déjà rencontrées sur les nombres réelles dans le Chapitre (ALG) 2, avec une exception très importante : la non-commutativité du produit matriciel.

TRANSPOSITION MATRICIELLE. L'opération de transposition est une opération qui réalise une « symétrie d'axe $i = j$ » dans les coefficients de la matrice, c'est-à-dire un échange entre les lignes et les colonnes.

Exemple 17 Transposer la matrice suivante selon ce principe : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Où se retrouve le coefficient $A_{1,2}$ après transposition ?

Voyons à présent une définition plus formelle.

Définition 13 | Transposée

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.

- On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$, telle que pour tout $i \in [\![1\,,\,p]\!]$ et tout $j \in [\![1\,,\,n]\!]$:
  $$A^\top_{i,j} = A_{j,i}.$$
- Autrement dit, le coefficient $(i,j) \in [\![1\,,\,p]\!] \times [\![1\,,\,n]\!]$ de la matrice $A^\top$ est le coefficient (j,i) de A.

En particulier, le nombre de lignes de $A^\top$ est le nombre de colonnes de A, et le nombre de colonnes de $A^\top$ est le nombre de lignes de A.

Attention

Parfois certains livres ou sujets de concours notent la transposée à gauche, c'est-à-dire ${}^\top A$, mais cette notation a tendance à disparaitre au profit de la notation anglo-saxonne de ce cours (et du programme).

Exemple 18 On a : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4 | Propriétés de la transposition

- **[Linéarité]** Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :
  $$(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$
- **[Involutivité]** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors : $\left(A^\top\right)^\top = A$.
- **[Transposée d'un produit]** Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors :
  $$(A \times B)^\top = B^\top A^\top.$$

Attention À la formule d'un produit

La transposition **échange** l'ordre d'un produit.

Preuve

- Comme $\lambda A + \mu B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $(\lambda A + \mu B)^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. De-même $A^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ donc $\lambda A^\top + \mu B^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

- Comme $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, donc $\left(A^\top\right)^\top \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Comme $AB \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^\top \in \mathfrak{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, d'autre part $A^\top \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B^\top \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $B^\top A^\top \in \mathfrak{M}_{q,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 19 **(Produits $XX^\top$ et $X^\top X$)** Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 1$ et $x_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$. Quel est le format de $X^\top X$? de $XX^\top$? Exprimer le coefficient général de chacune des matrices.

Exemple 20 **(Produit $X^\top.M.X$)** On considère $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Calculer $X^\top DX$.

On considère $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $X^\top TX$.

1.3 Et en Python ?

Un TP sera consacré aux manipulations de matrices en Python, et aux principales fonctions existantes. Un outil est dédié pour cela : le module `numpy`, qui crée notamment des objets appelés *tableaux numpy* et qui permettent de traiter toute sorte de calculs matriciels. Nous faisons une synthèse des résultats qui seront vus plus tard.

(Quelques manipulations matricielles en Python)

```
>>> import numpy as np
>>>
>>> # Création
>>> A = np.array([[1,2,3], [4,5,6]])
>>> A
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
>>> B = np.array([[2,3,4], [5,6,7]])
>>> B
array([[2, 3, 4],
       [5, 6, 7]])
>>> type(A)
<class 'numpy.ndarray'>
>>> A.dtype # type des éléments contenus dans A
dtype('int64')
>>> A[1][2]
np.int64(6)
>>> A[1, 2] # autre notation
np.int64(6)
>>> n, p = A.shape # ou np.shape(A) : format de A
>>> A[:, 2] # slicing
array([3, 6])
>>> C = A + B # somme
>>> C
array([[ 3,  5,  7],
       [ 9, 11, 13]])
>>> np.transpose(C) # Transposition
array([[ 3,  9],
       [ 5, 11],
```

```
       [ 7, 13]])
>>> A @ np.transpose(B) #Produit Ou encore np.dot(A, \
↪ np.transpose(B))
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>> #Matrices usuelles :
>>> np.zeros((1, 4))
array([[0., 0., 0., 0.]])
>>> np.ones((2, 1)) #Attention : des tuples sont requis pour \
↪ ces deux fonctions
array([[1.],
       [1.]])
>>> np.eye(3, 3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
>>> #Mais cela fonctionne aussi :
>>> np.eye(3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

Comment créer une matrice sous numpy ? On procède généralement en deux étapes.

1. On initialise un tableau généralement de zéros (à l'aide de `np.zeros`) qui a le bon format.
2. On complète les coefficients voulus, généralement à l'aide d'une boucle `for`.

Voyons un exemple.

Exemple 21 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :
$$\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \quad a_{ij} = (i+j)^2.$$
Alors la fonction suivante code la matrice A.

```
def creer_matrice(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i, j] = ((i+1)+(j+1))**2
    return A
```

```
>>> creer_matrice(4)
array([[ 4.,  9., 16., 25.],
       [ 9., 16., 25., 36.],
       [16., 25., 36., 49.],
       [25., 36., 49., 64.]])
```

Ou bien :

```
def creer_matrice(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, n+1):
            A[i-1, j-1] = (i+j)**2
    return A
```

Attention
Il convient de faire très attention au décalage entre les indices mathématiques (`i+1, j+1` ici car `i, j` partent de 0), et informatiques (`i, j`).

2 MATRICES CARRÉES

Dans cette section, nous discutons de résultats très spécifiques aux matrices carrées. Elles seront donc le plus souvent de format $n \times n$ avec $n \geqslant 1$.

2.1 Matrices remarquables

Définition 14 | Matrice diagonale, triangulaire
Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Alors :

- on appelle *coefficients diagonaux* de la matrice A les coefficients de la forme $A_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ce sont ceux sur la diagonale de A (colorés en bleu *infra*) :
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$
- On dit que A est une *matrice diagonale* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si :
$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_{i,j} = 0.$$
Autrement dit, si tous les coefficients de A sont nuls sauf peut-être ceux de la

diagonale, A est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- On dit que A est une *matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure)* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2, \quad i > j \quad (\textit{resp. } i < j) \Longrightarrow A_{i,j} = 0.$$

Autrement dit, si tous les coefficients de A situés en-dessous (*resp.* au-dessus) de la diagonale sont nuls, A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \textit{resp.} \quad A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \cdots & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Elle est dite *strictement triangulaire supérieure* (*resp. strictement triangulaire inférieure*) si elle est triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) à coefficients diagonaux nuls.

Remarque 7 (Négations) Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On peut écrire les proposition logiques suivantes à l'aide de quantificateurs.

- « A n'est pas triangulaire supérieure »,

- « A n'est pas diagonale ».

Notation

Si A est diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, on note généralement $A = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$.

Proposition 5 | Stabilité

- Le produit et la somme de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
- Le produit et la somme de deux matrices triangulaires supérieures (*resp.* inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure).
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) est une matrice triangulaire inférieure (*resp.* supérieure).

Définition 15 | Matrice symétrique/antisymétrique

Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On dit que :

- A est *symétrique* si $A^\top = A$, c'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = A_{j,i}. \qquad \textit{(analogie : notion de fonction paire)}$$

- A est *antisymétrique* si $A^\top = -A$, c'est-à-dire si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = -A_{j,i}. \qquad \textit{(analogie : notion de fonction impaire)}$$

Exemple 22 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 8 Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. En effet, soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Soit $i \in [\![1\,,\,n]\!]^2$, alors par définition :

$$A_{i,i} = -A_{i,i} \Longleftrightarrow 2A_{i,i} = 0 \Longleftrightarrow A_{i,i} = 0.$$

Exemple 23 Parmi les matrices suivantes, préciser leur nature diagonale, triangulaire, symétrique *etc.* : I_n, J_n.

Exemple 24 Soit $M \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Montrer que $S = M^\top M$ est symétrique.

2.2 Puissances & Nilpotence

Définition 16 | Puissance p-ième

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$. On définit par récurrence la matrice A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ comme étant :

$$A^0 = I_n, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} = A \times A^p = A^p \times A.$$

De manière plus explicite, il s'agit d'un produit de p matrices, toutes égales à A :

$$A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p\text{-fois}}.$$

Le calcul des puissances itérées d'une matrice est généralement difficile, nous verrons dans cette section quelques techniques pour y parvenir.

Définition 17 | Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Alors :

- A est dite *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_{n,n}$.
- Dans ce cas, l'*indice de nilpotence* est le plus petit exposant k vérifiant $A^k = 0_{n,n}$.

Exemple 25 Les matrices $0_{n,n}$ et I_n sont-elles nilpotentes ? Si oui, de quelle ordre ?

Exemple 26

- Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente. *(Une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale est le cas typique de matrice nilpotente)*

- Montrer que $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente. *(Il existe donc des matrices nilpotentes qui ne sont pas strictement triangulaires supérieures)*

L'intérêt d'une matrice nilpotente est qu'il est facile de calculer ses puissances car elles s'annulent toutes à partir d'un certain rang.

Exemple 27 Conjecturer une formule pour les puissances de I_2, J_2, puis I_n, J_n.

Démontrer cette conjecture par récurrence sur l'indice de puissance.

Proposition 6 | Propriétés de la puissance

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$A^p \times A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}.$$

Attention

En revanche, en règle générale $(AB)^p \neq A^p B^p$, sauf si les matrices A et B commutent.

De manière générale, pour les matrices diagonales nous avons le résultat suivant.

Proposition 7 | Puissances d'une matrice diagonale

Soit $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire :

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$D^k = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Cette proposition parait anecdotique, et pourtant elle servira très régulièrement en 2ème année.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** k)*
Faisons par exemple la preuve dans le cas $n = 2$.

Théorème 1 | Binôme de Newton pour les matrices

Soit $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})^2$ deux matrices carrées qui **commutent**, c'est-à-dire telles que : $AB = BA$. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Attention

L'hypothèse de commutativité est cruciale. En effet, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, sauf si A, B commutent.

Note *Pour des réels ou complexes la formule du binôme ne faisait pas apparaitre une telle hypothèse, tout simplement car deux réels ou deux complexes commutent toujours !*

La preuve est strictement la même que pour les réelles et complexes.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** p)*
Montrons par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Initialisation. On a $(A+B)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k} = \binom{0}{0} A^0 B^0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&\overset{\text{linéarité de la somme}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B A^k B^{n-k} \\
&\overset{A,B \text{ commutent}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} \\
&\overset{i=k+1}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} A^i B^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} A^{n+1} B^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} A^i B^{n-i+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} + \binom{n}{0} A^0 B^{n+1-0} \\
&= A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) A^k B^{n+1-k} + B^{n+1} \\
&\overset{\text{formule de Pascal}}{=} A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k} + B^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

La plupart du temps, les matrices A, B précédentes ne seront pas données explicitement. Un premier enjeu sera donc de pouvoir décomposer une matrice donnée en une somme $A+B$ avec A, B qui commutent. Le plus souvent, afin de simplifier les calculs, nous essaierons de choisir B nilpotente.

Méthode (ALG) 7.1 (Binôme et calculs des puissances)

- Si on arrive à écrire une matrice comme somme d'une matrice D diagonale et d'une matrice nilpotente N (c'est-à-dire telle que $N^{k_0} = 0$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{N}$), qui **commutent**, on utilise la formule du binôme matricielle :
$$(D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k.$$
Supposons que N est nilpotente d'ordre k_0, alors : $N^k = 0_{n,n}$ dès que $k \geqslant k_0$.
Et on a :
$$
\begin{aligned}
(D+N)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k \\
&= \sum_{k=0}^{k_0-1} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k}_{=0}.
\end{aligned}
$$
La seconde somme est toujours nulle : soit parce que N est nilpotente d'ordre k_0 si $p \geqslant k_0$, soit par convention sur les sommes dans le cas $p < k_0$.
- On peut toujours écrire une matrice B sous la forme suivante :
$$
\begin{aligned}
B^p &= (B - I_n + I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (B - I_n)^k \\
&= (B + I_n - I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (B + I_n)^k.
\end{aligned}
$$

Exemple 28 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Montrer que $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & 2p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

✎

Exemple 29 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

✎

Exemple 30 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Calcul des puissances à l'aide d'un polynôme annulateur. Lorsqu'une matrice satisfait une relation polynôme, on peut s'en servir pour calculer ses puissances. Voyons cela au travers d'un exemple. *(la méthode sera toujours détaillée par des questions intermédiaires)*

Exemple 31 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = 3A - 2I_2$.

2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = u_n A + v_n I_2.$$

Initialisation.

Hérédité.

3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, en montrant que (u_n) satisfait une récurrence linéaire d'ordre 2.

2.3 Inversion

On a vu que la multiplication matricielle nous réserve certaines surprises, en particulier la simplification est impossible de manière systématique. Mais qu'entendait-on par simplification ?

Remarque 9 (Position du problème) On souhaite définir une nouvelle notion permettant de simplifier par une matrice dans une égalité, c'est-à-dire :

$$\cancel{A} \times B = \cancel{A} \times C \implies B = C.$$

- Regardons le cas de réels. Soient $(b, c) \in (\mathbb{R})^2$ et $a \in \mathbb{R}^*$ (non nul). Supposons que :
$$ab = ac, \quad \text{et on souhaite prouver que } b = c.$$
Comme $a \neq 0$, on peut multiplier de chaque côté par $a^{-1} = \frac{1}{a}$:
$$ab = ac \implies (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \implies b = c.$$
- Pour des matrices, on ne dispose par encore de matrice « A^{-1} ». Pour la définir, deux idées possibles. Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
  - **[Mauvaise idée]** Poser $A^{-1} = \left(\frac{1}{A_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ lorsque les coefficients sont tous non nuls. Seulement on voit assez vite avec cette définition que $A^{-1} \times A \neq I_n$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, alors $AB \neq I_2$.
  - **[Bonne idée]** Une propriété que vérifie a^{-1} dans $\mathbb{R}$, et parfaitement prolongeable aux matrices, est :
$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

On arrive alors directement à la notion de matrice inverse.

2.3.1 Généralités

Définition/Proposition 1 | Matrice inversible & Groupe linéaire

- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ telle que : $\quad A \times B = B \times A = I_n$.
- Dans ce cas, B est aussi inversible, elle est unique, on l'appelle la *matrice inverse de* A, et on la note $B = A^{-1}$.

Notation

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles, appelé *groupe linéaire de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

On pourrait éventuellement considérer des matrices rectangulaires dans la définition précédente mais nous aurons très vite plus tard dans l'année des arguments pour prouver qu'il n'existe que des matrices carrées inversibles. *(Un argument pourrait être donné dès maintenant si nous avions la trace d'une matrice au programme.)*

Preuve *(Unicité de l'inverse)* Il nous faut prouver l'unicité de B : soient donc B, B' deux inverses de A. Alors : $B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'$.

Puisque l'on multiplie tantôt à droite et tantôt à gauche, la notion d'inverse n'est valable que pour des matrices carrées.

La définition mentionne qu'il faut avoir $AB = BA = I_n$, en pratique c'est un peu plus simple

Théorème 2 | Inverse à droite/gauche

- Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})^2$, alors : $\quad AB = I_n \iff BA = I_n$.
- Par conséquent, pour $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$:
$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \exists B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K}), \quad AB = I_n, \quad \text{(inverse à droite)} \\ &\iff \exists B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K}), \quad BA = I_n. \quad \text{(inverse à gauche)} \end{aligned}$$

Nous admettons ce résultat, dont la preuve dépasse très largement le programme de BCPST.

Exemple 32 Étudier l'inversibilité de la matrice nulle, de l'identité, puis des matrices homothétiques.

Exemple 33 **(Inverse donné)** Soient $C = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Alors C est inversible d'inverse D.

Exemple 34 **(Inverse non donné)** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles, en utilisant la définition.

Attention **Une somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible**

Les matrices A et B définies dans l'exemple précédent sont inversibles mais leur somme ne l'est pas, car égale à la matrice nulle qui n'est pas inversible.

Proposition 8 | Propriétés de l'inversion

- **[Inverse d'un produit]** Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversibles, alors $A \times B$ est inversible et : $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.
- **[Inverse d'un inverse]** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible. Alors A^{-1} est inversible d'inverse elle-même : $(A^{-1})^{-1} = A$.
- **[Transposition et inversion commutent]** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible. Alors $A^\top$ est inversible aussi et l'on a : $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

Attention **À la formule d'un produit**

L'inversion **échange** l'ordre d'un produit, comme pour la transposition.

Preuve *(Point clef — **Vérifier la définition d'une matrice inverse**)*

-
-
-

Revenons à présent à la motivation initiale : celle de pouvoir simplifier des matrices dans des égalités.

Proposition 9 | Simplification par une matrice inversible

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice **inversible**. Alors :

- $\forall B, C \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad AB = AC \implies B = C$.
- $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0_{n,1} \implies X = 0_{n,1}$.

Attention à ne pas oublier d'analyser l'inversibilité. Nous avons déjà vu des contre-exemples dans le cas contraire.

Preuve

-

-

Exemple 35 Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Peut-elle être inversible ?

Inversibilité de matrices remarquables. Les inversibilités mentionnées ci-après pourront être utilisées sans justification supplémentaire. Nous admettons pour le moment celle concernant les matrices triangulaires.

Proposition 10 | Inversibilité de matrices diagonales & triangulaires

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

- **[Cas diagonal]** Soit $M = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors :
$$M \text{ est inversible} \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \neq 0.$$
Dans ce cas, nous avons :
$$M^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$
- **[Cas triangulaire]** Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors :
$$M \text{ est inversible} \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \neq 0.$$

En revanche, dans le cas triangulaire, il n'y a pas d'expression simple de l'inverse.

Preuve Faisons pour simplifier la preuve dans le cas $n = 2$. Elle est identique dans le cas général.

- $\boxed{\Longleftarrow}$

  $\boxed{\Longrightarrow}$

- Admis provisoirement. On peut déduire le résultat pour les triangulaires inférieures à l'aide des supérieures en transposant.

2.3.2 Premières techniques de calcul

On présente des techniques de calcul très proches de la définition dans cette section. La méthode principale, dite d'« échelonnement », sera vue dans le **??**.

Avec la définition. Cette technique a été employée dans l'Exemple 34. On cherche l'inverse sous la forme $B = (B_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et on injecte ces inconnues dans le problème $AB = BA = I_n$. En revanche, cette méthode est vite compliquée à mettre en oeuvre dès que les matrices sont de taille au moins 3×3.

Calcul d'un inverse à l'aide d'un polynôme annulateur. Cette méthode est basée sur l'existence d'une relation polynomiale en la matrice. Découvrons-là au travers d'un exemple.

Exemple 36 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice M vérifie la relation $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$.

- On déduit alors que M est inversible et on peut calculer son inverse.

<u>*Indication :*</u> *On montrera que* $\mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Attention Factorisation matricielle

Attention à la factorisation par une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$:
- par exemple $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = \mathrm{A}\left(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n\right)$ ✅,
- et non $\mathrm{A}\left(\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + 1\right)$ ⛔ qui n'a pas de sens. *(on ne peut ajouter un réel à une matrice!)*

De manière générale, formalisons cela dans une méthode.

Méthode (ALG) 7.2 (Inverse matriciel à l'aide d'un polynôme annulateur) Supposons qu'il existe $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$, et soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée vérifiant :

$$a_0 \mathrm{I}_n + a_1 \mathrm{A} + \dots + a_p \mathrm{A}^p = 0_n. \quad (\star)$$

On dit que $\mathrm{P} : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$ est *un polynôme annulateur de* A.
- Si $a_0 = 0$: alors on montre par l'absurde que A n'est **<u>pas inversible</u>**.
- Si $a_0 \neq 0$: alors on montre que <u>A **est inversible**</u>. En effet, $(\star)$ est équivalente à $a_1 \mathrm{A} + \dots + a_p \mathrm{A}^p = -a_0 \mathrm{I}_n$, puis étant donné que a_0 est non nul :
$$\mathrm{A}\left(-\frac{a_1}{a_0}\mathrm{I}_n + \dots - \frac{a_p}{a_0}\mathrm{A}^{p-1}\right) = \mathrm{I}_n.$$
La matrice A est alors inversible (on a montré l'existence d'un inverse à droite) d'inverse $-\frac{a_1}{a_0}\mathrm{I}_n + \dots - \frac{a_p}{a_0}\mathrm{A}^{p-1}$.

Attention

Il est fondamental que a_0, c'est-à-dire le coefficient devant l'identité, soit non nul.

Exemple 37
- Une matrice nilpotente vérifie une relation du type $\mathrm{A}^p = 0$ avec p un entier, elle n'est pas inversible (nous l'avion déjà prouvé). On le retrouve avec la méthode précédente puisque le coefficient devant l'identité est nul.
- Montrer que si $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{I}_n$ alors A n'est pas inversible.
- Montrer que J_n n'est pas inversible.

Cas particulier de la dimension deux. Passons à présent aux petites matrices de tailles 2×2.

Définition 18 | Déterminant d'une matrice 2×2

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de* A, noté $\det \mathrm{A}$, la quantité $\det \mathrm{A} = ad - bc$.

Définition/Proposition 2 | Inversibilité d'une matrice 2×2 & Déterminant

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. Alors : $\quad A$ est inversible $\iff \det(A) \neq 0$.
- En cas d'inversibilité, on a : $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculons AB.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A) \times I_2.$$

- Supposons $\det(A) \neq 0$, alors $A \times \left(\frac{1}{\det(A)} B\right) = I_2$. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Supposons que $\det(A) = 0$. Si A était inversible, alors $AB = 0_{2,2}$ entraînerait $A^{-1}AB = 0_{2,2}$, c'est-à-dire $B = 0_{2,2}$ ce qui est clairement absurde. Ainsi A n'est pas inversible.

On déduit donc le résultat.

Exemple 38 Retrouver l'inversibilité des matrices de l'Exemple 34 à l'aide du déterminant, en précisant l'inverse.

Exemple 39 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quand est-ce que la matrice $A - \lambda I_2$ est inversible ?

Exemple 40 Soit $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Exprimer $\det\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $\det A$.

2.4 Matrices semblables

Définition 19 | Matrices semblables

- Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Alors A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que : $\quad A = PBP^{-1}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, deux matrices sont dites *semblables sur* $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Notation

On notera $A \sim B$ lorsque deux matrices sont semblables.

Proposition 11 | Puissances et matrices semblables [H.P]

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, $\quad A = PBP^{-1}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1}.$$

Ce résultat est indiqué comme [H.P] (vous ne pouvez pas l'utiliser tel quel), mais est extrêmement classique, il est donc important d'en connaître la preuve. L'idée intuitive est la suivante : il y a une simplification terme par terme.

$$\left(PBP^{-1}\right)^n = \left(PB\cancel{P^{-1}}\right) \times \left(\cancel{P}B\cancel{P^{-1}}\right) \times \cdots \times \left(\cancel{P}BP^{-1}\right) = PB^nP^{-1}.$$

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur n**)*

Nous verrons dans de futurs chapitres une interprétation de la relation de similitude entre deux matrices. Nous nous intéressons seulement ici à une application calculatoire.

Définition 20 | Diagonalisable, Trigonalisable

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

- La matrice A est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ diagonale, et $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible de sorte que : $A = PDP^{-1}$. De manière équivalente :
$$A \text{ est diagonalisable } \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad P^{-1}AP \text{ est diagonale.}$$
Diagonaliser A c'est trouver un choix de D, P qui convient.
- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe $T \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, et $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible de sorte que : $A = PTP^{-1}$. De manière équivalente :
$$A \text{ est trigonalisable } \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad P^{-1}AP \text{ est triangulaire.}$$
Trigonaliser A c'est trouver un choix de T, P qui convient.

En première année, les matrices P et D seront toujours données, en seconde année vous aurez des méthodes pour savoir si une matrice est diagonalisable ou pas, et le cas échéant déterminer D, P. La trigonalisation ne sera quant à elle pas étudiée en BCPST de manière générale.

Exemple 41

1. Déterminer les matrices semblables à l'identité.

2. Justifier que la matrice nulle est diagonalisable, la matrice identité ainsi que toute matrice diagonale.

À quoi peut bien servir de diagonaliser une matrice? Une application importante est la possibilité de pouvoir calculer les puissances facilement (cette application en induit beaucoup d'autres, notamment en analyse sur les suites, mais nous le verrons plus tard).

Méthode (ALG) 7.3 (Comment trouver les puissances d'une matrice diagonalisable ?)

1. Diagonaliser la matrice A : vérifier la relation $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible. En première année les matrices D, P seront toujours données.
2. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $A^n = PD^nP^{-1}$, que l'on montre généralement par récurrence, on en déduit A^n.

Appliquons cette démarche sur un exemple.

Exemple 42 Considérons $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Montrer que J_2 est diagonalisable.

3. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad J_2^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire J_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Constater que l'on retrouve bien l'expression établie dans un précédent exemple.

Exemple 43 Considérons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$: même preuve que précédemment.
4. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1}+2^{n-1}3^n & 2^{3n-1}-2^{n-1}3^n & -2^{2n-1}+2^{3n-1} \\ 2^{2n-1}-2^{n-1}3^n & 2^{3n-1}+2^{n-1}3^n & -2^{2n-1}+2^{3n-1} \\ -2^{2n-1}+2^{n-1}3^n & 2^{3n-1}-2^{n-1}3^n & 2^{2n-1}+2^{3n-1} \end{pmatrix}.$$

TRAITEMENT MATRICIEL D'UNE RÉCURRENCE LINÉAIRE SUR UN EXEMPLE. Il est possible de reformuler une récurrence linéaire d'ordre deux ou plus à l'aide de matrices, mais pour simplifier nous ferons la présentation uniquement pour l'ordre deux.

Exemple 44 **(Traitement matriciel d'une suite récurrente linéaire)** On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}.$$
Cette dernière égalité est équivalente à la suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -\frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en définissant

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

nous obtenons la récurrence vectorielle ci-après :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n, \quad X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ revient donc à trouver X_n en fonction de n, puis à regarder la première coordonnée de X_n.

- (♥) On déduit alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$.

  Initialisation.

  Hérédité.

- On calcule ensuite A^n en diagonalisant la matrice A. *On montrera que* $A = PDP^{-1}$ *avec* $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- On peut ensuite conclure.

On peut garder en tête de cet exemple :

Récurrence linéaire d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$	$\Leftrightarrow$	**Récurrence géométrique (d'ordre 1) dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$**

Remarque 10

- Les calculs précédents s'étendent naturellement aux récurrences d'ordre supérieur, le vecteur colonne X_n aura simplement une dimension plus grande que 2.
- De façon générale, si (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre $p \in \mathbb{N}$, alors le vecteur X_n introduit aura un format $p \times 1$.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (ALG) 7.1 **(Binôme et calculs des puissances)**

- Si on arrive à écrire une matrice comme somme d'une matrice D diagonale et d'une matrice nilpotente N (c'est-à-dire telle que $N^{k_0} = 0$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{N}$), qui **commutent**, on utilise la formule du binôme matricielle :

$$(D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k.$$

Supposons que N est nilpotente d'ordre k_0, alors : $N^k = 0_{n,n}$ dès que $k \geqslant k_0$. Et on a :

$$\begin{aligned}(D+N)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k}_{=0}.\end{aligned}$$

La seconde somme est toujours nulle : soit parce que N est nilpotente d'ordre k_0 si $p \geqslant k_0$, soit par convention sur les sommes dans le cas $p < k_0$.

- On peut toujours écrire une matrice B sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}B^p = (B - I_n + I_n)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (B - I_n)^k \\ = (B + I_n - I_n)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (B + I_n)^k.\end{aligned}$$

Méthode (ALG) 7.2 **(Inverse matriciel à l'aide d'un polynôme annulateur)** Supposons qu'il existe $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{K}$, et soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée vérifiant :

$$a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_p A^p = 0_n. \quad (\star)$$

On dit que $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ est *un polynôme annulateur de* A.

- Si $a_0 = 0$: alors on montre par l'absurde que A n'est **pas inversible**.
- Si $a_0 \neq 0$: alors on montre que A **est inversible**. En effet, $(\star)$ est équivalente à $a_1 A + \ldots + a_p A^p = -a_0 I_n$, puis étant donné que a_0 est non nul :

$$A\left(-\frac{a_1}{a_0} I_n + \ldots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}\right) = I_n.$$

La matrice A est alors inversible (on a montré l'existence d'un inverse à droite) d'inverse $-\frac{a_1}{a_0}\mathrm{I}_n + \ldots - \frac{a_p}{a_0}\mathrm{A}^{p-1}$.

Méthode (ALG) 7.3 **(Comment trouver les puissances d'une matrice diagonalisable ?)**

1. Diagonaliser la matrice A : vérifier la relation $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec D diagonale et P inversible. En première année les matrices D, P seront toujours données.
2. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$, que l'on montre généralement par récurrence, on en déduit A^n.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Inversibilité d'une matrice carrée 2×2	$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\det \mathrm{M} = ad - bc \neq 0$	*Connaitre aussi la définition : il existe* N *de même format que* M *telle que* $\mathrm{MN} = \mathrm{NM} = \mathrm{I}_2$
Définition d'une matrice carrée inversible	Il existe N de même format que M telle que $\mathrm{MN} = \mathrm{NM} = \mathrm{I}_n$	*Ne pas oublier les deux égalités, même si théoriquement on peut se passer de l'une d'entre elles (voir une remarque du cours)*
Matrices semblables : définition	A, B sont deux matrices semblables s'il existe P inversible telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$	

3 EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir calculer avec les matrices (sommes, produits, transposés) ☐
2. Connaître définition et propriétés des matrices inversibles ☐
3. Savoir déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice :
   - par récurrence, en conjecturant l'expression générale ☐
   - par la formule du binôme de Newton ☐
   - par diagonalisation, lorsque celle-ci est donnée ☐

Signalétique du TD

- Le logo désigne les exercices que vous traiterez en devoir à la maison. Vous pouvez m'en rendre un ou plusieurs, au plus tard le lundi qui précède un devoir surveillé concernant ce chapitre. Ce travail est facultatif mais fortement conseillé.
- Le logo désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

3.1 Généralités & opérations sur les matrices

Exercice 1 | [Solution] On considère les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Calculer, lorsque cela est possible, $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, AB, BA, A^2, AC, $\mathrm{B}^\top\mathrm{A}^\top$, CA, C^2, $(\mathrm{C}-2\mathrm{I}_3)^3$, XB et $\mathrm{B}^\top\mathrm{X}$.

Exercice 2 | [Solution] Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Représenter la matrice A dans les cas suivants :

1. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \quad \mathrm{A}_{i,j} = \max(i,j),$
2. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \quad \mathrm{A}_{i,j} = 1$ si $i \leqslant j$, $\quad \mathrm{A}_{i,j} = 0$ sinon,
3. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \quad \mathrm{A}_{i,j} = |i-j|,$
4. $\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \quad \mathrm{A}_{i,j} = (i-1)n + j.$

On pourra, en cas de besoin, commencer par se placer dans le cas particulier $n = 2$ ou 3 Dans chaque cas,

- écrire une fonction d'en-tête `creer_matrice(n)` qui renvoie un tableau numpy de format $n \times n$ correspondant à la matrice. Les faire afficher pour $n = 4$.
- Démontrer certaines propriétés sur la matrice A, en travaillant sur le terme général.

3.2 Puissances de matrice carrée

Exercice 3 | [Solution] Soient les deux matrices suivantes :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?
2. Calculer les puissances n-ièmes de C.

Exercice 4 | Puissances par récurrence [Solution] Soit : $\quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A^n est de la forme : $\quad \mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$
2. Déterminer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 | Puissances avec binôme [Solution] On considère :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et on pose :} \quad \mathrm{B} = \mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3.$$

Calculer B^n et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 | Puissances par polynôme annulateur [Solution]

Soit : $\quad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

1. Calculer N^2. Donner une relation entre N^2, N et I_3. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = u_n N + v_n I.$$
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n. Puis donner l'expression de N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. **[Application]** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= -x_n + 2y_n. \end{cases}$$
Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 7 | Puissances par polynôme annulateur

[Solution] Soit :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^\star.$$

1. Calculer A^2 et montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_4.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n vérifiant $A^n = a_n A + b_n I_4$. Que peut-on dire de la suite $(a_n - b_n)$?
4. Soit $c_n = (-1)^n b_n$, trouver une relation de récurrence entre c_{n+1} et c_n. En déduire A^n.

Exercice 8 | Puissances par diagonalisation

[Solution]

1. **[Généralités]** Soit A une matrice carrée diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale.
   - **1.1)** Exprimer A en fonction de D.
   - **1.2)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la formule du cours, établie par récurrence, reliant A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.
   - **1.3)** Montrer que A inversible si et seulement si D est inversible et, qu'on a alors : $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
2. **[Application]** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   - **2.1)** Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   - **2.2)** Vérifier que M est diagonalisable et calculer la matrice diagonale associée.
   - **2.3)** Étudier l'inversibilité de M.
   - **2.4)** Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3 Inversibilité de matrice carrée

Exercice 9 |

[Solution] On considère les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA. Qu'en déduire ?
2. Calculer A^2 et CB. Les matrices A et B sont-elles inversibles ? *On n'utilisera pas le déterminant dans cette question.*
3. La matrice C est-elle inversible ?

Exercice 10 |

[Solution] Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M^2 = (a+d)M - (ad - bc)I_2$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et déterminer alors M^{-1}. On posera $\Delta = ad - bc$.

Exercice 11 | Matrices de rotation

[Solution] Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathscr{R}$ est un élément de $\mathscr{R}$.
2. Montrer que deux matrices de $\mathscr{R}$ commutent.
3. Montrer que $I_2 \in \mathscr{R}$.
4. Montrer que tout élément de $\mathscr{R}$ est inversible et que son inverse est encore dans $\mathscr{R}$.

Pour tout $X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, le vecteur $M_\theta X$ correspond à la rotation (à montrer avec un peu de trigonométrie) du vecteur X d'angle θ. Ceci permet d'interpréter géométriquement les résultats précédents.

Exercice 12 |

[Solution] Soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et l'écrire en fonction de A et de I_3.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 13 | [Solution] Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.

1. $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $\quad \mathrm{M}^4 - 4\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} - 5\mathrm{I}_3 = 0_3$.
2. $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^5 - \mathrm{A} = 0_3$ et telle que $\mathrm{A}^4 \neq \mathrm{I}_3$.

Exercice 14 | [Solution] Soient a, b, c, d des réels non tous nuls, et :
$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & -d & c & -b \\ d & a & -b & -c \\ -c & b & a & -d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit matriciel $\mathrm{M}^\top \times \mathrm{M}$.
2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, calculer M^{-1}.

Exercice 15 | Identité moins nilpotente [Solution] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n - \mathrm{A}^{p+1} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \times \sum_{k=0}^{p} \mathrm{A}^k.$$
2. Soit $\mathrm{N} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $\mathrm{I}_n - \mathrm{N}$ est inversible.
3. **[Application]** Considérons la matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,4}(\mathbb{K})$. Montrer que B est inversible et donner son inverse.

Exercice 16 | [Solution] Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\quad \mathrm{A}\mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

1. Montrer que A^{-1} est symétrique. En déduire que A est aussi symétrique.
2. Supposons qu'il existe P inversible vérifiant $\mathrm{P}^\top \mathrm{P} = \mathrm{I}_n$, et telle que $\mathrm{A} = \mathrm{P}^\top \mathrm{D}\mathrm{P}$, où D est diagonale à coefficients réels. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.

Exercice 17 | Application matricielle [Solution] Soit f l'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M}_3(\mathbb{R},) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$
On rappelle que $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de format 3×3.

1. L'application f est-elle injective ?
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f(x)f(y)$ et montrer que $f(x)f(y) \in f(\mathbb{R})$.
3. En déduire :
   3.1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et
   3.2) que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donner son inverse. A-t-on $f(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$?

3.4 Devoir-maison

Exercice 18 | Une suite récurrente linéaire d'ordre 3 [Solution] On se propose d'étudier la suite réelle récurrente linéaire d'ordre 3 $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :
$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - \tfrac{5}{4}u_{n+1} + \tfrac{1}{4}u_n.$$
On pose $\mathrm{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.
2. **2.1)** Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n$.
   2.2) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$.
3. Soit P, Q et T les matrices suivantes :
$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   3.1) Calculer le produit PQ.
   En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.
   3.2) Calculer le produit $\mathrm{P}\mathrm{T}\mathrm{P}^{-1}$.
   3.3) Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $\mathrm{A}^n = \mathrm{P}\mathrm{T}^n\mathrm{P}^{-1}$.

4. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

4.1) Donner la matrice N et calculer N^2.

4.2) Déterminer pour tout entier $k \geq 2$, la matrice N^k.

4.3) Calculer DN et ND.

4.4) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $T^n = \left(\frac{1}{2}^n\right)\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.5) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

5. **5.1)** Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

5.2) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1)

Énoncé On obtient :

- $A+B$ impossible : A et B pas de même taille.
- $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
- $BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
- A^2 impossible : A n'est pas carrée.
- AC impossible : $A \in \mathfrak{M}_{32}(\mathbb{R})$, $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
- $B^\top A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- $CA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.
- $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(C-2I_3)^3 = 0_{33}$.
- XB impossible : $X \in \mathfrak{M}_{31}(\mathbb{R})$, $B \in \mathfrak{M}_{23}(\mathbb{R})$.
- $B^\top X$ impossible : $B^\top \in \mathfrak{M}_{32}(\mathbb{R})$, $X \in \mathfrak{M}_{31}(\mathbb{R})$.

Solution (exercice 2)

Énoncé

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots n \\ 2 & 2 & 3 & 4 \dots n \\ 3 & 3 & 3 & 4 \dots n \\ 4 & 4 & 4 & 4 \dots n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ n & n & n & n \dots n \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \ddots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & & & \vdots \\ n^2-n+1 & \dots & \dots & n^2 \end{pmatrix}$

Passons à présent à la création avec Python. L'idée est de : créer un tableau numpy de zéros de la bonne taille, puis de le compléter à l'aide d'une boucle `for` (consulter le TP d'Informatique associé pour plus de détails). Attention au décalage d'indice entre l'indicage Mathématique et l'indicage numpy.

```python
def creer_matrice1(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i, j] = max(i+1, j+1)
    return A

def creer_matrice2(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(i, n):
            A[i, j] = 1
    return A

def creer_matrice3(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i, j] = abs((i+1) - (j+1))
    return A

def creer_matrice4(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i, j] = (i*n)+(j+1)
    return A
```

```
>>> creer_matrice1(4)
array([[1., 2., 3., 4.],
       [2., 2., 3., 4.],
       [3., 3., 3., 4.],
```

```
        [4., 4., 4., 4.]])
>>> creer_matrice2(4)
array([[1., 1., 1., 1.],
       [0., 1., 1., 1.],
       [0., 0., 1., 1.],
       [0., 0., 0., 1.]])
>>> creer_matrice3(4)
array([[0., 1., 2., 3.],
       [1., 0., 1., 2.],
       [2., 1., 0., 1.],
       [3., 2., 1., 0.]])
>>> creer_matrice4(4)
array([[ 1.,  2.,  3.,  4.],
       [ 5.,  6.,  7.,  8.],
       [ 9., 10., 11., 12.],
       [13., 14., 15., 16.]])
```

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. On obtient $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$ et ainsi : $\forall n \geqslant 3, \quad B^n = 0_3$. La matrice B est donc nilpotente.
Mais B n'est pas inversible. En effet, supposons par l'absurde que B est inversible, alors B^{-1} existe donc et on peut multiplier de chaque côté à gauche de l'égalité $B^3 = 0_3$ par B^{-1}. On obtient alors en utilisant que $BB^{-1} = I_3$ que : $B^2 = 0_3$. Absurde car $B^2 \neq 0_3$. Contradiction. Donc $\boxed{\text{la matrice B n'est pas inversible.}}$

2. On remarque que : $C = 2I_3 + B$. Comme la matrice I_3 commute avec toutes les matrices carrées de taille 3, on a : $BI_3 = B = I_3B$ et on peut donc appliquer le binôme de NEWTON. Soit $n \in \mathbb{N}$, on obtient donc

$$C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k.$$

On utilise alors le fait que la matrice B est nilpotente et on obtient pour $n \geqslant 3$:

$$C^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = 2^n I_3 + 2^{n-1} n B + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-2}n(n+5) \\ 0 & 2^n & 2^n n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 4) [Énoncé]

1. Il s'agit là encore de démontrer l'existence de deux suites. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \text{« il existe deux nombres réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \text{».}$$

Initialisation. pour $n = 0$:
D'un côté, on a : $A^0 = I_3$. Les deux nombres $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait donc qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

De plus, un calcul donne :

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} a_n - 2b_n & -a_n & -a_n \\ -a_n & a_n - 2b_n & -a_n \\ -a_n & -a_n & a_n - 2b_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il suffit de poser : $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : il résulte du principe de récurrence l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. On a de plus :

$$a_0 = 1, b_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+1} = a_n - 2b_n, \quad b_{n+1} = -a_n.$$

2. En utilisant la relation de récurrence des deux suites, on obtient : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est une suite récurrente d'ordre 2, l'équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$, le discriminant est $\Delta = 9$ et les solutions sont donc : -1 et 2. On obtient ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n.$$

On trouve avec les conditions initiales que $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$. Ainsi, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n}.$$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n = -a_{n-1}$, on en déduit que $\boxed{b_n = \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On vérifie que cette relation est aussi vraie pour $n = 0$. On obtient ainsi l'expression des puissances n-ièmes de A (à faire).

Solution (exercice 5) [Énoncé]

- $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4C$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On voit après calculs que $C^2 = 0_{3,3}$ donc que C est nilpotente d'ordre 2, ainsi $B^2 = 16C^2 = 0_{3,3}$. Donc : $\boxed{B^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n = 0 \\ B & \text{si } n = 1 \\ 0_{3,3} & \text{sinon.} \end{cases}}$.
- Ainsi, comme $A = B + 2I_3$, que B et $2I_3$ commutent, on a d'après la formule du binôme :

$$A^n = (B+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k}_{=0}$$
$$= 2^n B^0 + n2^{n-1} B$$
$$= \boxed{\begin{pmatrix} 4n2^{n-1} + 2^n & 4n2^{n-1} & 0 \\ -4n2^{n-1} & 2^n - 4n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 6) [Énoncé]

Par la méthode de récurrence et la méthode où l'on connaît une relation entre les puissances.

1. Le calcul donne : $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. En cherchant $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aN + bI_3 = N^2$, c'est-à-dire, en calculant $aN + bI_3$ et en identifiant les coefficients avec N^2, on obtient : $\boxed{N^2 = -2N + 3I_3}$.
Comme on connaît une relation entre les puissances de N, on sait tout de suite si N est inversible ou pas. Ici, on a : $N\left(\frac{1}{3}(N + 2I_3)\right) = I_3$ et $\left(\frac{1}{3}(N + 2I_3)\right)N = I_3$. Ainsi, N est inversible et son inverse est :

$$\boxed{N^{-1} = \frac{1}{3}(N + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}.$$

2. C'est la méthode classique pour calculer les puissances n-ièmes d'une matrice.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : « \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } N^n = u_n N + v_n I_3 ».$$

Initialisation. pour $n = 0$:
D'un côté, on a : $N^0 = I_3$ et de l'autre côté, on a : $u_0 N + v_0 I_3$. Il suffit de prendre : $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a : $N^{n+1} = N \times N^n$. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe deux nombres u_n et v_n tels que : $N^n = u_n N + v_n I_3$. On obtient donc :

$$N^{n+1} = N(u_n N + v_n I_3) = u_n N^2 + v_n N.$$

Il suffit alors d'utiliser : $N^2 = -2N + 3I_3$ et on obtient :

$$N^{n+1} = (-2u_n + v_n)N + 3u_n I_3.$$

En posant $u_{n+1} = -2u_n + v_n \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = 3u_n \in \mathbb{R}$, on a bien l'existence de $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ et de $v_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que : $N^{n+1} = u_{n+1} N + v_{n+1} I_3$.
Conclusion : il résulte du principe de récurrence l'existence de deux suites (u_n) et (v_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^{n+1} = u_n N + v_n I_3$.
Cette démonstration par récurrence nous donne aussi la relation de récurrence vérifiée par les deux suites. On a en effet

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = -2u_n + v_n,\ v_{n+1} = 3u_n.$$

3. Différentes méthodes peuvent être utilisées là. La méthode classique est de se ramener à une suite récurrente linéaire d'ordre deux pour la suite (u_n). En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n.$$

De plus, on peut calculer les deux conditions initiales et on a : $u_0 = 1$ et $u_1 = -2u_0 + v_0 = -2$. L'équation caractéristique est alors : $r^2 + 2r - 3 = 0$, le discriminant est $\Delta = 16$ et les solutions sont : $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. Ainsi, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha(-3)^n + \beta$.
On calcule α et β grâce aux conditions initiales et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = \frac{-1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}}.$$

En utilisant alors le fait que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = 3u_{n-1}$, on obtient $\boxed{v_n = \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On vérifie de plus que la relation est toujours vraie pour $n = 0$.
On peut alors calculer les puissances n-ièmes de N en utilisant $N^n = u_n N + v_n I_3$:

$$N = \left(\frac{-1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}\right)N + \left(\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4}\right)I_3$$
$$= \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-3)^n & 2(-3)^n-2 & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ (-3)^n-1 & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}}$$

4. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, et on écrit la relation de récurrence sous forme matricielle : $X_{n+1} = NX_n$. On conjecture alors $X_n = N^n X_0$, et on démontre par récurrence cette relation (à faire). On obtient alors :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = N^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+(-3)^n \\ 2+2(-3)^n \\ 1-(-3)^n \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1. Par simple calcul, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a^2} & \frac{2}{a^3} \\ 2a & 3 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a^2} \\ 2a^2 & 2a & 3 & \frac{2}{a} \\ 2a^3 & 2a^2 & 2a & 3 \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire $\boxed{A^2 = 2A + 3I_4.}$

2. On obtient alors $A(A-2I_4) = 3I_4$ soit

$$A\left(\frac{A}{3} - \frac{2I_4}{3}\right) = \left(\frac{A}{3} - \frac{2I_4}{3}\right)A = I_4.$$

Ainsi, A est inversible d'inverse $\frac{A}{3} - \frac{2I_4}{3}$ soit

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3.a} & \frac{1}{3.a^2} & \frac{1}{3.a^3} \\ \frac{a}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3.a} & \frac{1}{3.a^2} \\ \frac{a^2}{3} & \frac{a}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3.a} \\ \frac{a^3}{3} & \frac{a^2}{3} & \frac{a}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}}.$$

3. Montrons l'existence par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on pose $\boxed{a_0 = 0, b_0 = 1}$ car $A^0 = I_4$.

Hérédité. Supposons l'existence de a_n, b_n en un certain rang n, ainsi

$$A^n = a_n A + b_n I_4, \implies A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A = a_n(2A + 3I_4) + b_n A,$$

soit en factorisant $A^{n+1} = (2a_n + b_n)A + 3a_n I_4$. On pose alors

$$\boxed{a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 3a_n}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{il existe } a_n, b_n \text{ vérifiant } A^n = a_n A + b_n I_4.}$ Que peut-on dire de la suite $(a_n - b_n)$? Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + b_n - 3a_n = -(a_n - b_n),$$

donc la suite $\boxed{(b_n - a_n) \text{ est géométrique de raison } 1}$, avec $a_0 - b_0 = -1$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = (-1)^{n+1}.$$

4. Soit $c_n = (-1)^n b_n$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1} b_{n+1} = (-1)^{n+1}(3a_n) = 3(-1)^{n+1}(b_n - (-1)^{n+1})$$
$$= 3(-1)^{n+1} b_n - 3 = -3c_n - 3.$$

Il s'agit alors d'une suite arithmético-géométrique. On cherche alors ℓ de sorte que

$$\ell = -3\ell - 3 \iff \ell = -\frac{3}{4}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, en faisant la différence des deux lignes du système

$$\begin{cases} c_{n+1} & = -3c_n - 3, \\ \ell & = -3\ell - 3 \end{cases},$$

on trouve que $(c_n - \ell)$ est géométrique de raison -3. Donc

$$c_n - \ell = (-3)^n (c_0 - \ell),$$

soit

$$c_n = 3^n (-1)^n \frac{7}{4} - \frac{3}{4}.$$

D'où :

$$b_n = (-1)^n c_n = 3^n \frac{7}{4} - (-1)^n \frac{3}{4}, \quad a_n = \frac{1}{3} b_{n+1} = 3^n \frac{7}{4} - (-1)^{n+1} \frac{1}{4}.$$

En conclusion :

$$A^n = \left(3^n \frac{7}{4} - (-1)^{n+1}\frac{1}{4}\right)A + \left(3^n \frac{7}{4} - (-1)^n \frac{3}{4}\right) I_4,$$

ce qui fournit après de longs calculs :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3.(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4.a} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4.a^2} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4.a^3} \\ \frac{-(-1)^n.a + 3^n.a}{4} & \frac{3.(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4.a} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4.a^2} \\ \frac{-(-1)^n.a^2 + 3^n.a^2}{4} & \frac{-(-1)^n.a + 3^n.a}{4} & \frac{3.(-1)^n + 3^n}{4} & \frac{-(-1)^n + 3^n}{4.a} \\ \frac{-(-1)^n.a^3 + 3^n.a^3}{4} & \frac{-(-1)^n.a^2 + 3^n.a^2}{4} & \frac{-(-1)^n.a + 3^n.a}{4} & \frac{3.(-1)^n + 3^n}{4} \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 8) [Énoncé]

1. 1.1) On a $P^{-1}AP = D \implies PP^{-1}AP = PD \implies AP = PD \implies APP^{-1} = PDP^{-1} \implies \boxed{A = PDP^{-1}}$.

1.2) Voir cours.

1.3) On peut procéder par double implication.

$\boxed{\implies}$ Si A est inversible. Alors $D = P^{-1}AP$ est aussi inversible en tant que produit de matrices inversibles.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si D est inversible, alors $A = PDP^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
Donc : $\boxed{\text{A inversible} \iff \text{D inversible}}$. De plus, le cours livre :
$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = \boxed{PD^{-1}P^{-1}}.$$

2. **2.1)** On a $\det(M) = 3 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2.2) On calcule $P^{-1}MP$ et on vérifie qu'elle est bien diagonale. Le calcul donne : $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi $\boxed{\text{M est bien diagonalisable}}$ et on note $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$. On a : $M = PDP^{-1}$.

2.3) On sait de plus tout de suite que M est inversible car D est inversible car elle est diagonale et qu'elle n'a aucun 0 sur sa diagonale. De plus, on sait alors que : $M^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4) On a vu que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$. Or D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, on obtient pour les puissances n-ièmes de M :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{M^n = \begin{pmatrix} \frac{2+(-2)^n}{3} & \frac{1-(-2)^n}{3} & \frac{2(1-(-2)^n)}{3} & \frac{1+2(-2)^n}{3} \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. Le calcul matriciel donne $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = 0_2$. Les matrices $\boxed{\text{A et B ne commutent pas}}$.
2. Le calcul matriciel donne : $A^2 = A$ et $CB = B$.
   - Inversibilité de A : par l'absurde, si A est inversible, alors A^{-1} existe et on peut donc multiplier à gauche par A^{-1} l'égalité $A(A - I_2) = 0_2$. Comme $A^{-1} \times A = I_2$ et $A^{-1} \times 0_2 = 0_2$, on obtient : $A - I_2 = 0_3 \iff A = I_2$. Absurde car $A \neq I_2$. Ainsi par un raisonnement par l'absurde, on a montré que $\boxed{\text{A n'est pas inversible.}}$
   - Inversibilité de B : on obtient : $CB - B = 0_2 \iff (C - I_2)B = 0_2$. Par l'absurde, si B est inversible, alors B^{-1} existe et on peut donc multiplier à droite par B^{-1} l'égalité $(C - I_2)B = 0_2$. Comme $BB^{-1} \times = I_2$ et $0_2 \times B^{-1} = 0_2$, on obtient : $C - I_2 = 0_3 \iff C = I_2$. Absurde car $C \neq I_2$. Ainsi par un raisonnement par l'absurde, on a montré que $\boxed{\text{B n'est pas inversible.}}$
3. C est une matrice triangulaire supérieure avec un 0 sur la diagonale donc $\boxed{\text{C n'est pas inversible}}$.

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. On calcule $(a+d)M - (ad-bc)I_2$ d'un côté et M^2 de l'autre et on obtient bien le résultat voulu.
2. On fait deux cas selon la valeur de Δ.
   - On suppose que $\Delta \neq 0$. On a alors : $M^2 - (a+d)M = -(ad-bc)I_2$, à savoir, comme $\Delta \neq 0$:
   $$M((a+d)I_2 - M) = (ad-bc)I_2 \iff M\left(\frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - M)\right) = I_2.$$
   De même en effectuant le produit matriciel dans l'autre sens. Ainsi M est bien inversible et son inverse est : $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - M) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
   - On suppose que $\Delta = 0$. Montrons par l'absurde que M n'est pas inversible. On suppose que M est inversible. On a alors : $M^2 = (a+d)M$, à savoir : $M(M - (a+d)I_2) = 0_2$. Mais comme par hypothèse M est inversible, on peut multiplier à gauche de chaque côté par M^{-1}. On obtient alors : $M - (a+d)I_2 = 0_2$. On obtient alors en calculant coefficient par coefficient $a = b = c = d = 0$, contradiction, car la matrice nulle n'est pas inversible. On en déduit donc que si $\Delta = 0$, alors M n'est pas inversible.

   On a donc bien démontré que : M inversible si et seulement si $\Delta \neq 0$. De plus, on a vu que si M est inversible, alors on a : $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Solution (exercice 11) [Énoncé]

1. On prend donc deux éléments quelconques de $\mathscr{R}$. Soit donc M_θ et M_α éléments de $\mathscr{R}$ avec $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$M_\theta M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha & -(\cos\theta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\theta) \\ \cos\theta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\theta & \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & -\sin(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) \end{pmatrix} = M_{\theta+\alpha}.$$
2. Soit $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, on calcule le produit $M_\theta M_\alpha$ et $M_\alpha M_\theta$. D'après le calcul fait précédemment et en utilisant le fait que $\alpha + \theta = \theta + \alpha$, on a
$$M_\theta M_\alpha = M_{\theta+\alpha} = M_\alpha M_\theta.$$
3. Il suffit de prendre $\theta = 0$ et on obtient bien que : $I_2 = M_0 \in \mathscr{R}$.
4. Soit un élément M_θ de $\mathscr{R}$. On cherche s'il existe une matrice M telle que $M_\theta M = I_2 = MM_\theta$. Or on sait que $I_2 = M_0$ et que : $M_\theta M_\alpha = M_{\theta+\alpha} = M_\alpha M_\theta$. On voit ainsi que pour que $M_{\theta+\alpha}$ soit égal à I_2, il suffit de prendre $\alpha = -\theta$. On obtient ainsi que M_θ est bien inversible et que $\boxed{(M_\theta)^{-1} = M_{-\theta}}$. Cet inverse est

donc bien dans $\mathscr{R}$.

Solution (exercice 12) [Énoncé]

1. Un calcul donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque alors que : $A^2 = A + 2I_3$.
2. On connaît une relation entre les puissances de A, on sait donc tout de suite si A est inversible ou pas. Ici, on a $A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$ **et** $\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right)A = I_3$. Ainsi

   A est inversible d'inverse : $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

Solution (exercice 13) [Énoncé]

1. On a : $M(M^3 - 4M + I_3) = 5I_3 \iff M \times \left[\frac{1}{5}(M^3 - 4M + I_3)\right] = I_3$ et de même : $\left[\frac{1}{5}(M^3 - 4M + I_3)\right] \times M = I_3$. Ainsi on a trouvé une matrice $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M \times C = I_3$. Donc par définition d'une matrice inversible, on sait que M est inversible et que $\boxed{M^{-1} = C = \frac{1}{5}(M^3 - 4M + I_3)}$.
2. On a : $A(A^4 - I_3) = 0_3$. Par l'absurde, si A est inversible, alors A^{-1} existe et on peut donc multiplier à gauche par A^{-1} l'égalité $A(A^4 - I_3) = 0_3$. Comme $A^{-1} \times A = I_3$ et $A^{-1} \times 0_3 = 0_3$, on obtient : $A^4 - I_3 = 0_3 \iff A^4 = I_3$. Absurde car par hypothèse, on sait que : $A^4 \neq I_3$. Ainsi par un raisonnement par l'absurde, on a montré que $\boxed{\text{A n'est pas inversible}}$.

Solution (exercice 14) [Énoncé]

1. On obtient

$$\begin{aligned} M^\top M &= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a^2+b^2+c^2+d^2)I_4. \end{aligned}$$

2. Comme les a, b, c, d sont non tous nuls, on a $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$. On en déduit $\frac{M^\top}{a^2+b^2+c^2+d^2} M = I_4$ et de même $M \frac{M^\top}{a^2+b^2+c^2+d^2} = I_4$. Donc M est inversible, et $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} M^\top}$.

Solution (exercice 15) [Énoncé]

1. Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On développer :

$$\begin{aligned} (I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p} A^k &= \sum_{k=0}^{p} A^k - \sum_{k=0}^{p} A^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} A^k - \sum_{k=1}^{p+1} A^k \qquad \textit{téléscopage} \\ &= A^0 - A^{p+1} = I_n - A^{p+1}. \end{aligned}$$

   Donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^\star, \quad \boxed{I_n - A^{p+1} = (I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p} A^k}.$$

2. Supposons que A est nilpotente, alors il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^k = 0$. Posons $p = k - 1 \geqslant 0$. La question précédente fournit :

$$I_n - N^{p+1} = I_n - N^k = I_n = (I_n - A)\sum_{k=0}^{k-1} A^k.$$

   Donc :

$$\boxed{I_n - \text{N est inversible}}, \quad \boxed{(I_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{k-1} A^k}.$$

3. **[Application]** On peut décomposer $B = I_4 - aN$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente et vérifie $N^4 = 0_{4,4}$. Ainsi, la matrice $-aN$ est aussi nilpotente et vérifie $(-aN)^4 = 0_{4,4}$. Donc d'après la question précédente, B est inversible d'inverse $I_4 + (-aN) + (-aN)^2 + (-aN)^3$. Après calculs on trouve :

$$\boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 16) [Énoncé]

1. Par hypothèse, A est inversible d'inverse $A^\top.A$. Mais $A^\top.A$ est symétrique, donc $\boxed{A^{-1} \text{ est symétrique}}$ c'est-à-dire $\top\left(A^{-1}\right) = A^{-1}$. Or, $\top\left(A^{-1}\right) = \left(A^\top\right)^{-1}$, donc $\left(A^\top\right)^{-1} = A^{-1}$ d'où l'on tire $A^\top = A$, c'est-à-dire que $\boxed{\text{A est symétrique}}$.
2. Supposons qu'il existe P inversible vérifiant $P^\top P = I_n$, et telle que $A = P^\top DP$, où D est diagonale à coefficients réels. En remplaçant dans l'hypothèse, on trouve :

   $P^\top D^3 P = I_n \iff D^3 = I_n$.

   Donc tous les coefficients diagonaux (réels) de D sont solution de l'équation $x^3 = 1$, qui n'admet que 1 pour solution. Donc $D = I_n$. On conclut ensuite :

   $A = P^\top DP = P^\top P = \boxed{I_n}$.

Solution (exercice 17) [Énoncé]

1. Oui. Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, tels que $f(x) = f(x')$. Alors $-x = -x'$, $x = x'$ et $-\frac{x^2}{2} = -\frac{x'^2}{2}$, ceci implique bien $x = x'$. Donc f $\boxed{\text{est injective.}}$

2. Soient x, y deux réels. Alors un simple produit matriciel prouve que $f(x)f(y) = f(x+y) \in f(\mathbb{R})$ car $x+y \in \mathbb{R}$. Donc $\boxed{f(x)f(y) \in f(\mathbb{R})}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

3. **3.1)** Par récurrence évidente : $\boxed{f(x)^n = f(nx) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nx \\ -nx & 1 & -\frac{n^2x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

3.2) Premier point : est-ce que toute matrice de la forme $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est inversible ? Oui, puisqu'en choisissant $y = -x$ dans la question précédente, on déduit $f(x)f(-x) = f(x-x) = f(0) = \mathrm{I}_3$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) \text{ est inversible et : } \quad f(x)^{-1} = f(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ +x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Deuxième point : est-ce que toute matrice inversible est de la forme $f(x)$? Non, considérer par exemple $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors T est inversible (triangulaire avec trois coefficients diagonaux non nuls) et n'est pas de la forme $f(x)$ puisque le coefficient $(1,2)$ est non nul. Donc $\boxed{f(\mathbb{R}^3) \neq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).}$

Solution (exercice 18) [Énoncé]

1. On a $\boxed{X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$. De plus, $u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2$, donc $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

2. 2.1) Les relations $\begin{cases} u_{n+3} &= 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} &= u_{n+2} \\ u_{n+1} &= u_{n+1} \end{cases}$ s'écrivent matriciellement sous la forme : $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$\boxed{X_{n+1} = AX_n}$ puisque $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$.

2.2) **Initialisation.** Comme $A^0 = I_3$, la propriété est bien initialisée.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = A^n X_0$. Alors :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &\overset{\text{hypothèse de réc.}}{=} AA^nX_0 = A^{n+1}X_0. \end{aligned}$$

On a donc par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{X_n = A^nX_0}$.

3. 3.1) On trouve

$$\boxed{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{4I_3}.$$

On en déduit que $P \times \frac{1}{4}Q = \frac{1}{4}PQ = I_3$, ce qui montre que $\boxed{\text{P est inversible}}$, avec $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$.

3.2) On trouve

$$PT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{puis} \quad PTP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

On obtient que $\boxed{A = PTP^{-1}}$.

3.3) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(n) : A^n = PT^nP^{-1}$.

Initialisation. $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{H}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$, de sorte que $A^n = PT^nP^{-1}$. On en déduit que :

$$A^{n+1} = A^nA = \left(PT^nP^{-1}\right)\left(PTP^{-1}\right) = PT^n\left(P^{-1}P\right)TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

car $P^{-1}P = I_3$. D'où le résultat par le principe de récurrence.

4. 4.1) On a que $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$. On trouve $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

4.2) Pour tout entier $k \geq 2$, $\boxed{N^k} = N^2 \times N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = \boxed{0}$(matrice nulle).

4.3) On trouve $\boxed{DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND}$.

4.4) De $N = T - D$, on déduit $T = D + N$. Puisque $DN = ND$ (D et N commutent), la formule du binôme donne, pour tout entier $n \geq 2$,
$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^{n-k}N^k$. Puisque, pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0$, la somme se réduit aux termes correspondant à $k = 0$ et à $k = 1$.
Puisque $\binom{n}{0}D^nN^0 = D^n$, et $\binom{n}{1}D^{n-1}N = nD^{n-1}N$, on a :

$$\boxed{T^n = D^n + nD^{n-1}N}.$$

D étant diagonale, on a :

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où : $D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \boxed{T^n} &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

On voit (remplacer n par 0, puis par 1) que la formule est aussi vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

4.5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On trouve :

$$\mathrm{PT}^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

puis :

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4\times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4\times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4\times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}}$$

5. 5.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On obtient u_n en calculant le vecteur colonne X_n par la formule $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$. Comme $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient X_n en recopiant simplement la première colonne de A^n. Ainsi, $\mathrm{X}_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}$ et en particulier, puisque $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$: $\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4\times 2^n - 4n - 4)}$.

5.2) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4 - \frac{4n}{2^n} - \frac{4}{2^n}$. On déduit que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 4}$ car $2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et par croissances comparées.