Chapitre # (ALG) 8 Calcul matriciel

Être visionnaire c'est regarder le monde au-delà du temps. Mais on ne voit pas plus loin, que les choix que l'on ne peut pas comprendre.
— **L'Oracle dans *The Matrix***

Résumé & Plan

Le calcul matriciel est un puissant outil pour traiter de nombreux problèmes. En analyse les suites récurrentes linéaires ou de systèmes différentiels linéaires, en algèbre il permet l'étude efficace des applications linéaires ou encore des systèmes d'équations linéaires. L'objectif de ce chapitre est de développer les notions du calcul matriciel qui nous permettront de traiter les problèmes précédents plus tard dans l'année.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 1.

Commençons par introduire une notation importante que nous utiliserons dans le chapitre.

Notation Symbole de Kronecker

Soient x, y deux éléments d'un ensemble E, alors le *symbole de Kronecker de* x, y est défini par :

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1 Soit $E = [\![1\,,\,n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, et $i, j, k \in [\![1\,,\,n]\!]$.

- $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $1 - \delta_{i,j} = \begin{cases} 1-0 & \text{si } i \neq j \\ 1-1 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- $\delta_{i,j} \times \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. MATRICES & OPÉRATIONS

1.1. Généralités

Définition 1 | Matrice

On appelle *matrice* $n \times p$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$, on dit encore *de format* $n \times p$, toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!]$, c'est-à-dire une application $[\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!] \longrightarrow \mathbb{K}$. On note une telle matrice :

- sous la forme $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, ou plus simplement $(A_{i,j})_{i,j}$ si le contexte est clair.
- Ou encore sous la forme d'un tableau entre parenthèses à n lignes et p co-

lonnes :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix}.$$

- Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on appelle $A_{i,j}$ *coefficient de la ligne i et de la colonne j*.
- Si $p = 1$, on parle de *vecteur colonne*, et
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ \vdots \\ A_{n,1} \end{pmatrix}.$$
- Si $n = 1$, on parle de *vecteur ligne*, et
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \end{pmatrix}.$$
- Si $n = p$, on dit que la matrice est *carrée*.

Remarque 1 **(Lignes avec ou sans virgules ?)** En toute rigueur les éléments de $\mathbb{K}^p$ (produit cartésien défini plus tôt dans l'année) sont notés $(x_1, \ldots, x_p)$ alors que ceux de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont notés $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}$. Mais dans les deux cas, ces éléments sont définis comme des applications de $[\![1\,,\,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$, on s'autorisera donc à écrire :
$$(x_1, \ldots, x_p) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix}.$$

Attention

- De même qu'on ne confond pas une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (une famille) avec son n-ième terme u_n (pour $n \in \mathbb{N}$, un nombre réel),
- on ne confondra pas une matrice $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ (une famille) avec son coefficient (i,j) noté $A_{i,j}$ (un élément de $\mathbb{K}$).

Notation

- On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Lorsque $n = p$, on note plus simplement $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et on note plus simplement $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ au lieu de $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

Dans les notations précédentes, le premier indice désignera toujours le numéro de ligne, et le second le numéro de colonne.

Exemple 2

- $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, $\begin{pmatrix} 5 & 0 & \mathrm{i} \\ 1+2\mathrm{i} & 8 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{C})$,
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne, alors que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ est une matrice colonne.
- $(2^i + 3j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 2}} = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+6 \\ 4+3 & 4+6 \\ 8+3 & 8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \\ 11 & 14 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.
- Les écritures sous forme de tableaux de $A = (i-j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 3}}$ et $B = (2^{i+j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3 \\ 1\leqslant j\leqslant 2}}$ sont :

Exemple 3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de format $n \times n$. Écrire le coefficient (i,j) de la matrice A en fonction de $\delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$.

Définition 2 | Égalité matricielle

Soient A, B deux matrices. Alors A et B sont dites *égales* si :

- elles ont même taille, c'est-à-dire $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ pour un certain n,
- et : $\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!], \quad A_{i,j} = B_{i,j}$.

Exemple 4 Soit

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}\cos(0) & e^{i\pi}\\ \tan(0) & 2\end{pmatrix},\quad \text{et}\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On a $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ mais $\mathrm{A}\neq\mathrm{C}$ et $\mathrm{B}\neq\mathrm{C}$.

Notation **Écriture en lignes/colonnes d'une matrice**

Si $\mathrm{A}\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on notera en ligne ou en colonnes de la manière suivante :

$$\mathrm{A}=\left(\begin{array}{c|c|c}\mathrm{C}_1(\mathrm{A}) & \dots & \mathrm{C}_p(\mathrm{A})\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\mathrm{L}_1(\mathrm{A})\\ \hline \vdots\\ \hline \mathrm{L}_n(\mathrm{A})\end{array}\right).$$

Exemple 5 Pour $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, on a :

$$\mathrm{C}_1(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix},\quad \mathrm{C}_2(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix},\quad \mathrm{C}_3(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{L}_1(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{L}_2(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

MATRICES USUELLES. Pour terminer, définissons quelques matrices usuelles. La terminologie associée aux deux premières n'est pas anodine, il y a un lien avec les applications linéaires identiques et les homothéties définies dans les Chapitres (ALG) 10 et (ALG) 11, ce lien sera explicité plus tard dans ce chapitre.

Définition 3 | Matrice nulle

On appelle *matrice nulle de* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $n\times p$ ayant tous ses coefficients égaux à zéro :

$$0_{n,p}=(0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Définition 4 | Matrice identité

On appelle *matrice identité de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice $n\times n$ n'ayant que des uns sur la diagonale, et des zéros ailleurs :

$$\mathrm{I}_n=\left(\delta_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n\,1\leqslant j\leqslant n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Définition 5 | Matrice homothétique

On appelle *matrice homothétique de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *de rapport* $\lambda\in\mathbb{K}$ la matrice $n\times n$ suivante :

$$\lambda\mathrm{I}_n=\left(\lambda\delta_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n\,1\leqslant j\leqslant n}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Définition 6 | Matrice ATTILA

On appelle *matrice* ATTILA *de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice $n\times n$ suivante :

$$\mathrm{J}_n=(1)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Exemple 6

- $0_{2,3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad 0_{4,1}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad 0_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$
- $\mathrm{I}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{J}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$

Définition 7 | Matrices élémentaires (ou base canonique)

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, et $\ell\in[\![1,p]\!]$, on appelle *matrice élémentaire d'indice* (k,ℓ), notée $\mathrm{E}_{k,\ell}$, la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constituée de zéros partout sauf pour le coefficient en ligne k et colonne ℓ, qui vaut un.

Exemple 7 **(pour $n=2, p=3$)** Dans $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, on a :

$$E_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad E_{1,3}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_{2,1}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad E_{2,2}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad E_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Remarque 2 **(Réécriture avec le symbole de KRONECKER)** Autrement dit,

$$E_{k,\ell}=\left(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

En effet, tous les coefficients sont nuls, sauf si :

$$\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}=1 \iff \delta_{i,k}=1 \ \underline{\textbf{et}}\ \delta_{j,\ell}=1 \iff i=k, j=\ell.$$

C'est-à-dire si le coefficient considéré est sur la ligne k et la colonne ℓ.

Exemple 8 Écrire $\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\-2&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ en fonction de $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$.

Remarque 3 **(Matrice comme combinaison linéaire de matrices élémentaires)** Plus généralement, si $A=(A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$A=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}A_{i,j}E_{i,j}.$$

Nous reparlerons plus largement des matrices usuelles plus tard dans l'année.

1.2. Opérations sur les matrices

ADDITION ET MULTIPLICATION EXTERNE. On commence par deux opérations très intuitives sur les matrices.

Définition 8 | Somme matricielle
Soient $A=(A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $A+B\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice *définie* par :

$$A+B=\left(A_{i,j}+B_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit, les coefficients de $A+B$ sont obtenus en sommant ceux de A avec ceux de B.

On peut également multiplier une matrice par un scalaire, et ainsi définir une opération externe sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 9 | Multiplication par un scalaire d'une matrice
Soit $A=(A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors la matrice λA est définie par :

$$\lambda A=\left(\lambda A_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit, les coefficients de λA sont obtenus en multipliant ceux de A par λ.

En particulier, pour $\lambda=-1$, on arrive à la définition suivante.

Définition 10 | Matrice opposée
Soit $A=(A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *matrice opposée de* A la matrice $-A$.

Exemple 9 Calculer $-2A+B$ où $A=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\-2&3&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&-4&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Les opérations $+,.$ sur les matrices possède des propriétés similaires à celles des nombres réels déjà rencontrées, dont la vérification ne présente pas de difficulté.

Proposition 1 | Propriétés de la somme
Soient $(A,B,C)\in\in\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$.

- **[Associativité]** $(A+B)+C=A+(B+C)$.
- **[Commutativité]** $A+B=B+A$.
- **[Élément neutre]** $A+0_{n,p}=0_{n,p}+A=A$. On dit que $0_{n,p}$ est un *élément*

neutre pour l'addition matricielle.
- **[Élément opposé]** $A + (-A) = 0_{n,p}$.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication externe

Soient $(A, B) \in\in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :
- **[Associativité]** $(\lambda\mu).A = \lambda.(\mu.A)$.
- **[Élément neutre]** $1.A = A$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication externe.
- **[Distributivité]** $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$, $\quad \lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.

MULTIPLICATION INTERNE. Passons à présent à une troisième opération : celle du produit matriciel. Nous allons chercher cette fois-ici à multiplier deux matrices entre elles. La définition ci-après peut paraître parachutée pour le moment, mais elle trouvera tout son sens dans le Chapitre (ALG) 11 où nous utiliserons les matrices pour traiter des problèmes d'algèbre linéaire. Pour l'instant l'objectif n'est donc pas de comprendre pourquoi on définit le produit matriciel ainsi, mais de savoir les calculer.

Définition 11 | Produit matriciel

Soient $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,\mathbf{p}}(\mathbb{K})$ et $B = (B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{p},q}(\mathbb{K})$, donc **<u>telles que le nombre de colonnes de</u>** A **<u>soit égal au nombre de lignes de</u>** B. Alors on appelle *matrice produit de* A *par* B, notée $A \times B$ ou plus simplement AB, la matrice de format $n \times q$ définie par :

$$A \times B = \left(\sum_{\underline{k}=1}^{p} A_{i,\underline{k}} B_{\underline{k},j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}, \qquad \text{autrement dit :}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,q]\!], \quad (A \times B)_{i,j} = \sum_{\underline{k}=1}^{p} A_{i,\underline{k}} B_{\underline{k},j}.$$

Remarque 4 (Sur le format des matrices) On remarque que le nombre de colonnes de A doit obligatoirement être égal au nombre de lignes de B. On pourra retenir le schéma suivant type « relation de CHASLES » pour connaître le format de la matrice produit :

$$\text{Matrice } n \times \cancel{q} \quad \times \quad \text{Matrice } \cancel{q} \times p \quad = \quad \text{Matrice } n \times p$$

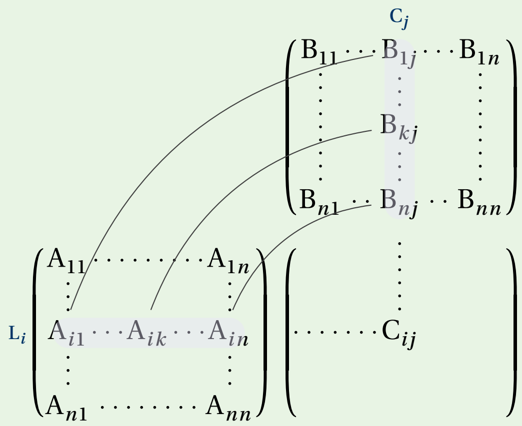
En particulier, le produit de deux matrices carrées de taille n est encore une matrice carrée de taille n.

Attention — Existence du produit matriciel

Toujours vérifier les formats des matrices avant de calculer le produit matriciel des deux.

Méthode — Visualisation du produit matriciel

Le produit matriciel peut être illustré, **<u>au brouillon</u>**, de la façon suivante.



C'est l'image précédente qu'il faut avoir en tête, mais dans la pratique on écrira toujours les deux matrices sur une seule ligne. On retiendra en particulier que pour calculer le coefficient (i, j) du produit, on a besoin de regarder la i-ième ligne de la première et la j-ième colonne de la deuxième.

Exemple 10 Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 11 Calculer, si c'est possible, les produits AB et BA dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 12

- Pour $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, calculer $J_2 A J_2$.

- Généraliser à $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, en calculant $J_n A J_n$.

Remarque 5 (Produit et écriture en colonne) Il peut être parfois utile de retenir le produit matriciel de la manière suivante, lorsque la matrice de droite est écrite en colonne.

$$AB = A \times \left(C_1(B) \middle| \dots \middle| C_q(B) \right) = \left(A \times C_1(B) \middle| \dots \middle| A \times C_q(B) \right).$$

Les $A \times C_i(B)$, $i \in [\![1\,,\,q]\!]$, sont des vecteurs colonnes par définition du produit matriciel, qui forment les colonnes de la matrice produit AB. En effet, par définition la j-ème colonne de AB est

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} A_{1,k}B_{k,j} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} A_{n,k}B_{k,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{p,j} \end{pmatrix} = A \times C_j(B).$$

Attention Non commutativité du produit matriciel

Le produit matriciel n'est pas commutatif (sauf pour $n = 1$). D'une part, cela n'a aucun sens en raison des tailles des matrices dès qu'elles ne sont pas carrées. D'autre part, même avec des matrices carrées, on peut calculer par exemple $A \times B$ et $B \times A$ pour :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 12 | Matrices qui commutent

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ deux matrices carrées. On dit que A *et* B *commutent* si

$$AB = BA.$$

Attention Pas de résultat sur les équations-produit

Vous avez vu au collège qu'un « un produit (de nombres réels) est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul » (le résultat est encore vrai pour des complexes). Ceci est en revanche **faux** pour les matrices. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC :

En résumé, on ne peut simplifier par A :

$$AB = AC \not\Longrightarrow B = C.$$

De-même, pour tout vecteur colonne X :

$$AX = 0 \not\Longrightarrow X = 0.$$

Note *En revanche, on pourra opérer à cette simplification si* A *est inversible, voir plus bas.*

Proposition 3 | Propriétés de la multiplication

Soient n, q, p, r trois entiers non nuls et $(A, A') \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $(B, B') \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- **[Linéarité à gauche]** $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$,
- **[Linéarité à droite]** $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda A \times B'$.
- **[Associativité]** $A \times (BC) = (AB)C$.
- **[Neutre]** Si $n = p$, c'est-à-dire si A est une matrice carrée, alors :

$$I_n \times A = A \times I_n = A.$$

Exemple 13 Constatons la dernière propriété déjà sur un exemple.

Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Alors :

- $AI_2 =$
- $I_2A =$

Preuve

- Soit $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,q]\!]$. Alors :
$$\begin{aligned}((A+\lambda A')\times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p}(A+\lambda A')_{i,k}B_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(A_{i,k}+\lambda A'_{j,k}\right)B_{k,j}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(A_{i,k}B_{k,j}+\lambda A'_{j,k}B_{k,j}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{p}A_{i,k}B_{k,j}+\lambda\sum_{k=1}^{p}A'_{j,k}B_{k,j} \quad \textit{linéarité de la somme}\\ &= (AB)_{i,j}+\lambda(A'B)_{i,j}.\end{aligned}$$
- Identique à la précédente.
- Découle de l'associativité du produit de réels.
-

Les propriétés précédentes sont donc analogues à celles déjà rencontrées sur les nombres réelles dans le Chapitre (ALG) 2, avec une exception très importante : la non-commutativité du produit matriciel.

TRANSPOSITION MATRICIELLE. L'opération de transposition est une opération qui réalise une « symétrie d'axe $i=j$ » dans les coefficients de la matrice, c'est-à-dire un échange entre les lignes et les colonnes. Voyons une définition plus formelle.

Définition 13 | Transposée
Soit $A=(A_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$, telle que pour tout $i \in [\![1\,,\,p]\!]$ et tout $j \in [\![1\,,\,n]\!]$:
$$A^\top_{i,j} = A_{j,i}.$$
Autrement dit, le coefficient $(i,j) \in [\![1\,,\,p]\!] \times [\![1\,,\,n]\!]$ de la matrice $A^\top$ est le coefficient (j,i) de A.

En particulier, le nombre de lignes de $A^\top$ est le nombre de colonnes de A, et le nombre de colonnes de $A^\top$ est le nombre de lignes de A.

Attention
Parfois certains livres ou sujets de concours notent la transposée à gauche, c'est-à-dire ${}^\top A$, mais cette notation a tendance à disparaitre au profit de la notation anglo-saxonne de ce cours (et du programme).

Exemple 14 On a : $\begin{pmatrix}-2&0&1\\3&2&1\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}-2&3\\0&2\\1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix}1&\dots&1\end{pmatrix}$.

Proposition 4 | Propriétés de la transposition
- **[Linéarité]** Soient $A,B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$. Alors :
$$(\lambda A+\mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$
- **[Involutivité]** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors : $(A^\top)^\top = A$.
- **[Transposée d'un produit]** Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors :
$$(A\times B)^\top = B^\top A^\top.$$

Attention **À la formule d'un produit**
La transposition **échange** l'ordre d'un produit.

Preuve
-
-
-

Exemple 15 **(Produits $XX^\top$ et $X^\top X$)** Soit $X = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 1$ et $x_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$. Quel est le format de $X^\top X$? de $XX^\top$? Exprimer le coefficient général de chacune des matrices.

Exemple 16 **(Produit $X^\top.M.X$)** On considère $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Calculer $X^\top DX$.

On considère $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \lambda_2,\ \alpha \in \mathbb{R}$. Calculer $X^\top TX$.

1.3. Et en Python ?

Un TP sera consacré aux manipulations de matrices en Python, et aux principales fonctions existantes. Un outil est dédié pour cela : le module numpy, qui crée notamment des objets appelés *tableaux numpy* et qui permettent de traiter toute sorte de calculs matriciels. Nous faisons une synthèse des résultats qui seront vus plus tard.

(Quelques manipulations matricielles en Python)

```
>>> import numpy as np
>>>
>>> # Création
>>> A = np.array([[1,2,3], [4,5,6]])
>>> B = np.array([[2,3,4], [5,6,7]])
>>> type(A)
<class 'numpy.ndarray'>
>>> A.dtype # type des éléments contenus dans A
dtype('int64')
>>> A[1][2]
6
>>> A[1, 2] # autre notation
6
>>> n, p = A.shape # ou np.shape(A) : format de A
>>> A[:, 2] # slicing
array([3, 6])
>>> C = A + B # somme
>>> C
array([[ 3,  5,  7],
       [ 9, 11, 13]])
>>> np.transpose(C) # Transposition
array([[ 3,  9],
       [ 5, 11],
       [ 7, 13]])
>>> A @ np.transpose(B) #Produit Ou encore np.dot(A, \
↪ np.transpose(B))
array([[20, 38],
       [47, 92]])
>>> #Matrices usuelles :
>>> np.zeros((1, 4))
array([[0., 0., 0., 0.]])
>>> np.ones((2, 1)) #Attention : des tuples sont requis pour \
↪ ces deux fonctions
array([[1.],
       [1.]])
>>> np.eye(3, 3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
>>> #Mais cela fonctionne aussi :
>>> np.eye(3)
array([[1., 0., 0.],
       [0., 1., 0.],
       [0., 0., 1.]])
```

Comment créer une matrice sous numpy? On procède généralement en deux étapes.

1. On initialise un tableau généralement de zéros (à l'aide de `np.zeros`) qui a le bon format.
2. On complète les coefficients voulus, généralement à l'aide d'une boucle `for`.

Voyons un exemple.

Exemple 17 Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots n\}^2, \quad a_{ij} = (i+j)^2.$$

Alors la fonction suivante code la matrice A.

```
def creer_matrice(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i, j] = ((i+1)+(j+1))**2
    return A
>>> creer_matrice(4)
array([[ 4.,  9., 16., 25.],
       [ 9., 16., 25., 36.],
       [16., 25., 36., 49.],
       [25., 36., 49., 64.]])
```

Ou bien :

```
def creer_matrice(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, n+1):
            A[i-1, j-1] = (i+j)**2
    return A
```

Attention

Il convient de faire très attention au décalage entre les indices mathématiques (`i+1, j+1` ici car `i, j` partent de 0), et informatiques (`i, j`).

2. MATRICES CARRÉES

Dans cette section, nous discutons de résultats très spécifiques aux matrices carrées. Elles seront donc le plus souvent de format $n \times n$ avec $n \geqslant 1$.

2.1. Matrices remarquables

Définition 14 | Matrice diagonale, triangulaire

Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Alors :

- on appelle *coefficients diagonaux* de la matrice A les coefficients de la forme $A_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ce sont ceux sur la diagonale de A (colorés en bleu *infra*) :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- On dit que A est une *matrice diagonale* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si $A_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Autrement dit, si tous les coefficients de A sont nuls sauf peut-être ceux de la diagonale, A est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- On dit que A est une *matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure)* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ si $A_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i > j$ (*resp.* $i < j$). Autrement dit, si tous les coefficients de A situés en-dessous (*resp.* au-dessus) de la diagonale sont nuls, A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}, \quad \textit{resp.} \quad A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \cdots & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Elle est dite *strictement triangulaire supérieure* (*resp. strictement triangulaire inférieure*) si elle est triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) à coefficients diagonaux nuls.

Notation

Si A est diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, on note généralement $A = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$.

Proposition 5 | Stabilité

- Le produit et la somme de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
- Le produit et la somme de deux matrices triangulaires supérieures (*resp.* inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure).
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) est une

matrice triangulaire inférieure (*resp.* supérieure).

Définition 15 | Matrice symétrique/antisymétrique
Soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On dit que :

- A est *symétrique* si $A^\top = A$, c'est-à-dire si : $\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = A_{j,i}$.
- A est *antisymétrique* si $A^\top = -A$, c'est-à-dire si : $\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2, \quad A_{i,j} = -A_{j,i}$.

Exemple 18 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 6 Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. En effet, soit $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique. Soit $i \in [\![1\,,\,n]\!]^2$, alors par définition :

$$A_{i,i} = -A_{i,i} \iff 2A_{i,i} = 0 \iff A_{i,i} = 0.$$

Exemple 19 Parmi les matrices suivantes, préciser leur nature diagonale, triangulaire, symétrique *etc.* : I_n, J_n et $X = U^\top U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{K})$.

2.2. Puissances & Nilpotence

Définition 16 | Puissance p-ième
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$. On définit par récurrence la matrice A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ comme étant :

$$A^0 = I_n, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} = A \times A^p = A^p \times A.$$

De manière plus explicite, il s'agit d'un produit de p matrices, toutes égales à A :

$$A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p\text{-fois}}.$$

Le calcul des puissances itérées d'une matrice est généralement difficile, nous verrons dans cette section quelques techniques pour y parvenir.

Définition 17 | Matrice nilpotente
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Alors :

- A est dite *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_{n,n}$.
- Dans ce cas, l'*indice de nilpotence* est le plus petit exposant k vérifiant $A^k = 0_{n,n}$.

L'intérêt d'une matrice nilpotente est qu'il est facile de calculer ses puissances car elles s'annulent toutes à partir d'un certain rang.

Les matrices nilpotentes ne font pas l'objet d'un travail particulier dans le programme, mais elles sont primordiales dans l'étude générale des matrices, nous en reparlerons plus tard. En outre, ce symbole puissance jouit des mêmes propriétés ci-après que celui sur les nombres réels.

Proposition 6 | Propriétés de la puissance
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$A^p \times A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}.$$

Attention
En revanche, en règle générale :

$$(AB)^p \neq A^p B^p,$$

sauf si les matrices A et B commutent.

Exemple 20 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Exemple 21 Conjecturer une formule pour les puissances de I_2, J_2, puis I_n, J_n.

Démontrer cette conjecture par récurrence sur l'indice de puissance.

De manière générale, pour les matrices diagonales nous avons le résultat suivant.

Proposition 7 | Puissances d'une matrice diagonale

Soit $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire :

$$D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$D^k = \operatorname{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Cette proposition parait anecdotique, et pourtant elle servira très régulièrement en 2ème année.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** k)*

Faisons par exemple la preuve dans le cas $n = 2$.

Théorème 1 | Binôme de Newton pour les matrices

Soit $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})^2$ deux matrices carrées qui **commutent**, c'est-à-dire telles que : $AB = BA$. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Attention

L'hypothèse de commutativité est cruciale. En effet, $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, sauf si A, B commutent.

Note — *Pour des réels ou complexes la formule du binôme ne faisait pas apparaitre une telle hypothèse, tout simplement car deux réels ou deux complexes commutent toujours !*

La preuve est strictement la même que pour les réelles et complexes.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** p)*

Montrons par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Initialisation. On a $(A+B)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k} = \binom{0}{0} A^0 B^0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{n+1} &= (\mathrm{A}+\mathrm{B}) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k} && \textit{linéarité de la somme}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^{k+1} \mathrm{B}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}\mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k} && \mathrm{A}, \mathrm{B}\ \textit{commutent}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^{k+1} \mathrm{B}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n+1-k} && i = k+1\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \mathrm{A}^i \mathrm{B}^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n+1-k}\\
&= \binom{n}{n} \mathrm{A}^{n+1} \mathrm{B}^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} \mathrm{A}^i \mathrm{B}^{n-i+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n+1-k} + \binom{n}{0} \mathrm{A}^0 \mathrm{B}^{n+1-0}\\
&= \mathrm{A}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n+1-k} + \mathrm{B}^{n+1} && \textit{formule de }\textsc{Pascal}\\
&= \mathrm{A}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n+1-k} + \mathrm{B}^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

La plupart du temps, les matrices A, B précédentes ne seront pas données explicitement. Un premier enjeu sera donc de pouvoir décomposer une matrice donnée en une somme A + B avec A, B qui commutent. Le plus souvent, afin de simplifier les calculs, nous essaierons de choisir B nilpotente.

Méthode Binôme et calculs des puissances

- Si on arrive à écrire une matrice comme somme d'une matrice D diagonale et d'une matrice nilpotente N (c'est-à-dire telle que $\mathrm{N}^{k_0} = 0$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{N}$), qui **commutent**, on utilise la formule du binôme matricielle :
$$(\mathrm{D}+\mathrm{N})^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{D}^{p-k} \mathrm{N}^k.$$
Par ailleurs, les puissances N^k sont nulles dès que $k \geqslant k_0$.
- On peut toujours écrire une matrice B sous la forme suivante :
$$\begin{aligned}
\mathrm{B}^p = (\mathrm{B} - \mathrm{I}_n + \mathrm{I}_n)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\mathrm{B} - \mathrm{I}_n)^k\\
= (\mathrm{B} + \mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (\mathrm{B} + \mathrm{I}_n)^k.
\end{aligned}$$

Exemple 22 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A}^p = \begin{pmatrix} 1 & p & 2p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

✒

Exemple 23 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

✒

Exemple 24 Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2.3. Inversion

On a vu que la multiplication matricielle nous réserve certaines surprises, en particulier la simplification est impossible de manière systématique. Mais qu'entendait-on par simplification ?

Remarque 7 (Position du problème dans $\mathbb{R}$) Soient $(b,c) \in (\mathbb{R})^2$ et $a \in \mathbb{R}^*$ que l'on suppose donc **non nul**. Supposons que :

$ab = ac$, et on souhaite prouver que $b = c$.

Rigoureusement, vous savez depuis le collège que vous pouvez multiplier cette égalité par $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$:

$$(a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \iff b = c.$$

Pour des matrices, on ne peut bien entendu pas écrire $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, en revanche une propriété que vérifie a^{-1}, et parfaitement prolongeable aux matrices, est :

$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

On arrive alors directement à la notion de matrice inverse.

2.3.1. Généralités

Définition/Proposition 1 | Matrice inversible & Groupe linéaire

- Une matrice $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ telle que : $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.
- Dans ce cas, B est aussi inversible, on l'appelle la *matrice inverse de* A, et on la note $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.

On pourrait éventuellement considérer des matrices rectangulaires dans la définition précédente mais nous aurons très vite plus tard dans l'année des arguments pour prouver qu'il n'existe que des matrices carrées inversibles.

Note | *Un argument pourrait être donné dès maintenant si nous avions la trace d'une matrice au programme.*

Notation

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles, appelé *groupe linéaire de* $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Preuve *(Unicité de l'inverse)* Il nous faut prouver l'unicité de B : soient donc B, B' deux inverses de A. Alors : $\mathrm{B} = \mathrm{BI}_n = \mathrm{B}(\mathrm{AB}') = (\mathrm{BA})\mathrm{B}' = \mathrm{I}_n\mathrm{B}' = \mathrm{B}'$.

Puisque l'on multiplie tantôt à droite et tantôt à gauche, la notion d'inverse n'est valable que pour des matrices carrées.

La définition mentionne qu'il faut avoir $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n$, en pratique c'est un peu plus simple

Théorème 1 | Inverse à droite/gauche

- Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})^2$, alors : $AB = I_n \iff BA = I_n$.
- Par conséquent, pour $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \exists B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K}),\ AB = I_n, \quad \text{(inverse à droite)} \\ &\iff \exists B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K}),\ BA = I_n. \quad \text{(inverse à gauche)} \end{aligned}$$

Nous admettons ce résultat, dont la preuve dépasse très largement le programme de BCPST.

Exemple 25 Étudier l'inversibilité de la matrice nulle, de l'identité, puis des matrices homothétiques.

Exemple 26 **(Inverse donné)** Soient $C = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Alors C est inversible d'inverse D.

Exemple 27 **(Inverse non donné)** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles, en utilisant la définition.

Attention **Une somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible**

Les matrices A et B définies dans l'exemple précédent sont inversibles mais leur somme ne l'est pas, car égale à la matrice nulle qui n'est pas inversible.

Proposition 8 | Propriétés de l'inversion

- **[Inverse d'un produit]** Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversibles, alors $A \times B$ est inversible et :
$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$
- **[Inverse d'un inverse]** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible. Alors A^{-1} est inversible d'inverse elle-même :
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
- **[Transposition et inversion commutent]** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible. Alors $A^\top$ est inversible aussi et l'on a :
$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Attention **À la formule d'un produit**

L'inversion <u>**échange**</u> l'ordre d'un produit.

Note *Dans la formule, on échange donc l'ordre des matrices, comme pour la transposition.*

Preuve *(Point clef — **Vérifier la définition d'une matrice inverse**)*

-

-

-

Revenons à présent à la motivation initiale : celle de pouvoir simplifier des matrices dans des égalités.

Proposition 9 | Simplification par une matrice inversible

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice **inversible**. Alors :

- $\forall B, C \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad AB = AC \implies B = C.$
- $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0_{n,1} \implies X = 0_{n,1}.$

Attention à ne pas oublier d'analyser l'inversibilité. Nous avons déjà vu des contre-exemples dans le cas contraire.

Preuve

-

-

Inversibilité de matrices remarquables. Les inversibilités mentionnées ci-après pourront être utilisées sans justification supplémentaire. Nous admettons pour le moment celle concernant les matrices triangulaires.

Proposition 10 | Inversibilité de matrices diagonales & triangulaires

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

- **[Cas diagonal]** Soit $M = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors :
$$M \text{ est inversible} \iff \forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_i \neq 0.$$
Dans ce cas, nous avons :
$$M^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$
- **[Cas triangulaire]** Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors :
$$M \text{ est inversible} \iff \forall i \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_i \neq 0.$$

En revanche, dans le cas triangulaire, il n'y a pas d'expression simple de l'inverse.

Preuve Faisons pour simplifier la preuve dans le cas $n = 2$. Elle est identique dans le cas général.

-

- Admis provisoirement. On peut déduire le résultat pour les triangulaires inférieures à l'aide des supérieures en transposant.

Exemple 1 Une matrice nilpotente est-elle inversible ?

Identité moins une matrice nilpotente. L'objectif de ce paragraphe est de voir pourquoi $I_n - N$ est inversible si N est nilpotente. Nous commençons par généraliser la formule de Bernoulli vue dans le chapitre sur les nombres réels. Cependant, seule la preuve est à connaître, l'énoncé est hors-programme.

Proposition 11 | Formule de BERNOULLI [H.P]

Soit $A, B \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})^2$ deux matrices carrées qui **commutent**, c'est-à-dire telles que : $AB = BA$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors :

- $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}$.
- En particulier : $\forall p \in \mathbb{N}^\star, \quad I_n - A^{p+1} = (I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p} A^k$.

Remarque 8 Dans les deux dernières égalités, les factorisations par $A-B$ et $I_n - A$ respectivement peuvent se faire à droite.

Preuve *(Point clef — **Téléscopage**)*

Exemple 28 À l'aide de la formule de BERNOULLI, montrer que pour $N \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$: $\quad N$ nilpotente $\Longrightarrow I_n - N$ inversible.

Exemple 29 Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,4}(\mathbb{K})$. On peut décomposer $B = I_4 - aJ$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors la matrice B est inversible et on peut donner son inverse.

2.3.2. Premières techniques de calcul

On présente des techniques de calcul très proches de la définition dans cette section. La méthode principale, dite d'« échelonnement », sera vue dans le **??**.

AVEC LA DÉFINITION. Cette technique a été employée dans l'Exemple 27. On cherche l'inverse sous la forme $B = (B_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ et on injecte ces inconnues dans le problème $AB = BA = I_n$. En revanche, cette méthode est vite compliquée à mettre en oeuvre dès que les matrices sont de taille au moins 3×3.

CALCUL D'UN INVERSE À L'AIDE D'UN POLYNÔME ANNULATEUR. Cette méthode est basée sur l'existence d'une relation polynomiale en la matrice. Découvrons-là au travers d'un exemple.

Exemple 30 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice M vérifie la relation $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$.

- On déduit alors que M est inversible et on peut calculer son inverse.

  Indication : On montrera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

De manière générale, formalisons cela dans une méthode.

Méthode Inverse matriciel à l'aide d'un polynôme annulateur

Supposons qu'il existe $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{K}$, et soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée vérifiant :

$$a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_p A^p = 0_n. \quad (\star)$$

On dit que $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$ est *un polynôme annulateur de* A.

- Si $\boxed{a_0 = 0}$: alors on montre par l'absurde que A n'est **pas inversible**.
- Si $\boxed{a_0 \neq 0}$: alors on montre que **A est inversible**. En effet, $(\star)$ est équivalente à $a_1 A + \ldots + a_p A^p = -a_0 I_n$, puis étant donné que a_0 est non nul :

$$A\left(-\frac{a_1}{a_0} I_n + \ldots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}\right) = I_n.$$

La matrice A est alors inversible (on a montré l'existence d'un inverse à droite) d'inverse $-\frac{a_1}{a_0} I_n + \ldots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}$.

Attention

Il est fondamental que a_0, c'est-à-dire le coefficient devant l'identité, soit non nul.

Exemple 31

- Une matrice nilpotente vérifie une relation du type $A^p = 0$ avec p un entier, elle n'est pas inversible sauf si elle est nulle (déjà montré dans un exemple précédent). On le retrouve avec la méthode précédente puisque le coefficient devant l'identité est nul.
- Montrer que si $A^2 - A = 0$ et $A \neq I_n$ alors A n'est pas inversible.

CAS PARTICULIER DE LA DIMENSION DEUX. Passons à présent aux petites matrices de tailles 2×2.

Définition 18 | Déterminant d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de* A, noté det A, la quantité $\det A = ad - bc$.

Définition/Proposition 2 | Inversibilité d'une matrice 2×2 & Déterminant

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. Alors : A est inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

- En cas d'inversibilité, on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Calculons AB.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A) \times I_2.$$

- Supposons $\det(A) \neq 0$, alors $A \times \left(\dfrac{1}{\det(A)} B\right) = I_2$. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Supposons que $\det(A) = 0$. Si A était inversible, alors $AB = 0_{2,2}$ entraînerait $A^{-1}AB = 0_{2,2}$, c'est-à-dire $B = 0_{2,2}$ ce qui est clairement absurde. Ainsi A n'est pas inversible.

On déduit donc le résultat.

Exemple 32 Retrouver l'inversibilité des matrices de l'Exemple 27 à l'aide du déterminant, en précisant l'inverse.

Exemple 33 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quand est-ce que la matrice $A - \lambda I_2$ est inversible ?

Exemple 34 Soit $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Exprimer $\det\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $\det A$.

2.4. Matrices semblables

Définition 19 | Matrices semblables

- Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Alors A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que : $A = PBP^{-1}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, deux matrices sont dites *semblables sur* $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Notation

On notera $A \sim B$ lorsque deux matrices sont semblables.

Proposition 12 | Puissances et matrices semblables [H.P]

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, $A = PBP^{-1}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1}.$$

Ce résultat est indiqué comme [H.P] (vous ne pouvez pas l'utiliser tel quel), mais est extrêmement classique, il est donc important d'en connaître la preuve. L'idée intuitive est la suivante : il y a une simplification terme par terme.

$$\left(PBP^{-1}\right)^n = \left(PB\cancel{P^{-1}}\right) \times \left(\cancel{P}B\cancel{P^{-1}}\right) \times \cdots \times \left(\cancel{P}BP^{-1}\right) = PB^nP^{-1}.$$

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** n)*

Nous verrons dans de futurs chapitres une interprétation de la relation de similitude entre deux matrices. Nous nous intéressons seulement ici à une application calculatoire.

Définition 20 | Diagonalisable, Trigonalisable

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

- La matrice A est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $D \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ diagonale, et $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible de sorte que : $A = PDP^{-1}$. De manière équivalente :
$$A \text{ est diagonalisable } \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}AP \text{ est diagonale.}$$
Diagonaliser A c'est trouver un choix de D, P qui convient.
- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe $T \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, et $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible de sorte que : $A = PTP^{-1}$. De manière équivalente :
$$A \text{ est trigonalisable } \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}AP \text{ est triangulaire.}$$
Trigonaliser A c'est trouver un choix de T, P qui convient.

En première année, les matrices P et D seront toujours données, en seconde année vous aurez des méthodes pour savoir si une matrice est diagonalisable ou pas, et le cas échéant déterminer D, P. La trigonalisation ne sera quant à elle pas étudiée en BCPST de manière générale.

Exemple 35

1. Déterminer les matrices semblables à l'identité.

2. Justifier que la matrice nulle est diagonalisable, la matrice identité ainsi que toute matrice diagonale.

À quoi peut bien servir de diagonaliser une matrice ? Une application importante est la possibilité de pouvoir calculer les puissances facilement (cette application en induit beaucoup d'autres, notamment en analyse sur les suites, mais nous le verrons plus tard).

Méthode — Comment trouver les puissances d'une matrice diagonalisable ?

1. Diagonaliser la matrice A : vérifier la relation $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible. En première année les matrices D, P seront toujours données.
2. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $A^n = PD^nP^{-1}$, que l'on montre généralement par récurrence, on en déduit A^n.

Appliquons cette démarche sur un exemple.

Exemple 36 Considérons $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Montrer que J_2 est diagonalisable.

3. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad J_2^n = PD^nP^{-1}$.

4. En déduire J_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Constater que l'on retrouve bien l'expression établie dans un précédent exemple.

Exemple 37 Considérons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$: même preuve que précédemment.

4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Traitement matriciel d'une récurrence linéaire d'ordre 2 : exemple de Fibonacci.

Il est possible de reformuler une récurrence linéaire d'ordre deux ou plus à l'aide de matrices, mais pour simplifier nous ferons la présentation uniquement pour l'ordre deux.

Exemple 38 **(Suite de Fibonacci à l'aide de matrices)** On considère à nouveau la *suite de Fibonacci* est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Cette dernière égalité est équivalente à la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en définissant

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons la récurrence vectorielle ci-après :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n, \quad X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ revient donc à trouver X_n en fonction de n, puis à regarder la première coordonnée de X_n.

- On déduit alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$.

- On calcule ensuite A^n en diagonalisant la matrice A. *On montrera que* $A = PDP^{-1}$ *avec* $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1 & \sqrt{5}-1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

- On peut conclure.

Remarque 9 Les calculs précédents s'étendent naturellement aux récurrences d'ordre supérieur, le vecteur colonne X_n aura simplement une dimension plus grande que 2.

3. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir calculer avec les matrices (sommes, produits, transposés) . . . . ☐
2. Connaître définition et propriétés des matrices inversibles . . . . ☐
3. Savoir déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice :
   - par récurrence, en conjecturant l'expression générale . . . . ☐
   - par la formule du binôme de NEWTON . . . . ☐
   - par diagonalisation, lorsque celle-ci est donnée . . . . ☐

3.1. Généralités & opérations sur les matrices

Exercice 1 | Solution On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Calculer, lorsque cela est possible, $A+B$, AB, BA, A^2, AC, $B^\top A^\top$, CA, C^2, $(C-2I_3)^3$, XB et $B^\top X$.

Exercice 2 | Solution Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Représenter la matrice A dans les cas suivants :

1. $\forall (i,j) \in \{1,\dots n\}^2, \quad a_{ij} = \max(i,j)$,
2. $\forall (i,j) \in \{1,\dots n\}^2, \quad a_{ij} = 1$ si $\quad i \leq j, \quad a_{ij} = 0$ sinon,
3. $\forall (i,j) \in \{1,\dots n\}^2, \quad a_{ij} = |i-j|$.

On pourra, en cas de besoin, commencer par se placer dans le cas particulier $n = 2$ ou 3

Dans chaque cas, écrire une fonction d'en-tête `creer_matrice(n)` qui retourne un tableau numpy de format $n \times n$ correspondant à la matrice. Les faire afficher pour $n = 4$.

3.2. Puissances de matrice carrée

Exercice 3 | Solution Soient les deux matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?
2. Calculer les puissances n-ièmes de C.

Exercice 4 | **Puissance et application à un système de suites récurrentes** Solution On considère la matrice $\quad N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2. Donner une relation entre N^2, N et I_3. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^n = u_n N + v_n I.$$
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n. Puis donner l'expression de N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. **[Application]** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = -x_n + 2y_n. \end{cases}$$
Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 5 | **Puissance et relation de récurrence** Solution Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que A^n est de la forme : $\quad A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$.
2. Déterminer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 | **Puissance et relation de récurrence** Solution On considère la matrice : $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix} \quad$ avec $a \in \mathbb{R}^\star$.

1. Calculer A^2 et montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
3. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n vérifiant $A^n = a_n A + b_n I_3$. Que peut-on dire de la suite $(a_n - b_n)$?
4. Soit $c_n = (-1)^n b_n$, trouver une relation de récurrence entre c_{n+1} et c_n. En déduire A^n.

Exercice 7 | **Diagonalisation & Applications** Solution

1. **[Généralités]** Soit A une matrice carrée diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale.
   - 1.1) Exprimer A en fonction de D.
   - 1.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la formule du cours, établie par récurrence, reliant A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.
   - 1.3) Montrer que A inversible si et seulement si D est inversible et, qu'on a alors : $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
2. **[Application]** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   - 2.1) Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   - 2.2) Vérifier que M est diagonalisable et calculer la matrice diagonale associée.
   - 2.3) Étudier l'inversibilité de M.
   - 2.4) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3. Inversibilité de matrice carrée

Exercice 8 | Solution On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA. Conclusion ?
2. Calculer A^2 et CB. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?
3. La matrice C est-elle inversible ?

Exercice 9 | Solution Soit la matrice $\quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I_2$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et déterminer alors M^{-1}. On posera $\Delta = ad - bc$.

Exercice 10 | **Matrices de rotation** Solution Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathscr{R}$ est un élément de $\mathscr{R}$.

2. Montrer que deux matrices de $\mathscr{R}$ commutent.
3. Montrer que $I_2 \in \mathscr{R}$.
4. Montrer que tout élément de $\mathscr{R}$ est inversible et que son inverse est encore dans $\mathscr{R}$.

Pour tout $X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, le vecteur $M_\theta X$ correspond à la rotation (à montrer avec un peu de trigonométrie) du vecteur X d'angle θ. Ceci permet d'interpréter géométriquement les résultats précédents.

Exercice 11 | ♥ Solution Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et l'écrire en fonction de A et de I_3.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 12 | ♥ Solution Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 | ⚙ Solution Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.

1. $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^4 - 4M^2 + M - 5I_3 = 0_3$.
2. $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0_3$ et telle que $A^4 \neq I_3$.

Exercice 14 | ♥ Solution Soient a, b, c, d des réels non tous nuls. On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} a & -d & c & -b \\ d & a & -b & -c \\ -c & b & a & -d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel $M^\top \times M$.
2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, calculer M^{-1}.

3.4. Divers

Exercice 15 | ♥ **Commutant** Solution On cherche à déterminer le commutant de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA.$$

Cela revient à chercher les matrices A qui commutent avec toutes les autres matrices. Soit A une telle matrice.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre n d'éléments diagonaux distincts deux à deux. Expliciter AD et DA et en déduire que A est diagonale.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter MA et AM et en déduire que tous les coefficients de A sont égaux.
3. Décrire le commutant de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 | 🧠 **Application matricielle** Solution Soit f l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M}_3(\mathbb{R},) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

On rappelle que $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de format 3×3.

1. L'application f est-elle injective ?
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f(x)f(y)$ et montrer que $f(x)f(y) \in f(\mathbb{R})$.
3. En déduire :
   3.1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et
   3.2) que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donner son inverse. A-t-on $f(\mathbb{R}) = GL_3(\mathbb{R})$?

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) Énoncé On obtient :

- $A+B$ impossible : A et B pas de même taille.
- $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
- $BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
- A^2 impossible : A n'est pas carrée.
- AC impossible : $A \in \mathfrak{M}_{32}(\mathbb{R})$, $C \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
- $B^\top A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- $CA = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.
- $C^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(C-2I_3)^3 = 0_{33}$.
- XB impossible : $X \in \mathfrak{M}_{31}(\mathbb{R})$, $B \in \mathfrak{M}_{23}(\mathbb{R})$.
- $B^\top X$ impossible : $B^\top \in \mathfrak{M}_{32}(\mathbb{R})$, $X \in \mathfrak{M}_{31}(\mathbb{R})$.

Solution (exercice 2) Énoncé

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots n \\ 2 & 2 & 3 & 4 \dots n \\ 3 & 3 & 3 & 4 \dots n \\ 4 & 4 & 4 & 4 \dots n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ n & n & n & n \dots n \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \ddots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & \dots & & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Passons à présent à la création avec Python. L'idée est de : créer un tableau numpy de zéros de la bonne taille, puis de le compléter à l'aide d'une boucle `for` (consulter le TP d'Informatique associé pour plus de détails). Attention au décalage d'indice entre l'indicage Mathématique et l'indicage numpy.

```python
def creer_matrice1(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i, j] = max(i+1, j+1)
    return A

def creer_matrice2(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(i, n):
            A[i, j] = 1
    return A

def creer_matrice3(n):
    A = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i, j] = abs((i+1) - (j+1))
    return A
```

```
>>> creer_matrice1(4)
array([[1., 2., 3., 4.],
       [2., 2., 3., 4.],
       [3., 3., 3., 4.],
       [4., 4., 4., 4.]])
>>> creer_matrice2(4)
array([[1., 1., 1., 1.],
       [0., 1., 1., 1.],
       [0., 0., 1., 1.],
       [0., 0., 0., 1.]])
>>> creer_matrice3(4)
array([[0., 1., 2., 3.],
       [1., 0., 1., 2.],
       [2., 1., 0., 1.],
       [3., 2., 1., 0.]])
```

Solution (exercice 3) Énoncé

1. On obtient $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$ et ainsi : $\forall n \geq 3, \quad B^n = 0_3$. La matrice B est donc nilpotente.
   Mais B n'est pas inversible. En effet, supposons par l'absurde que B est inversible, alors B^{-1} existe donc et on peut multiplier de chaque côté à gauche de l'égalité $B^3 = 0_3$ par B^{-1}. On obtient alors en utilisant que $BB^{-1} = I_3$ que : $B^2 = 0_3$. Absurde car $B^2 \neq 0_3$. Contradiction. Donc $\boxed{\text{la matrice B n'est pas inversible.}}$
2. On remarque que : $C = 2I_3 + B$. Comme la matrice I_3 commute avec toutes les matrices carrées de taille 3, on a : $BI_3 = B = I_3B$ et on peut donc appliquer le binôme de NEWTON. Soit $n \in \mathbb{N}$, on obtient donc
   $$C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k.$$
   On utilise alors le fait que la matrice B est nilpotente et on obtient pour $n \geq 3$:
   $$C^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = 2^n I_3 + 2^{n-1} nB + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2$$
   $$= \boxed{\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-2}n(n+5) \\ 0 & 2^n & 2^n n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 4) Énoncé Par la méthode de récurrence et la méthode où l'on connaît une relation entre les puissances.

1. Le calcul donne : $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. En cherchant $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aN + bI_3 = N^2$, c'est-à-dire, en calculant $aN + bI_3$ et en identifiant les coefficients avec N^2, on obtient : $\boxed{N^2 = -2N + 3I_3}$.
   Comme on connaît une relation entre les puissances de N, on sait tout de suite si N est inversible ou pas. Ici, on a : $N\left(\frac{1}{3}(N + 2I_3)\right) = I_3$ et $\left(\frac{1}{3}(N + 2I_3)\right)N = I_3$. Ainsi, N est inversible et son inverse est :
   $$\boxed{N^{-1} = \frac{1}{3}(N + 2I_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}.$$
2. C'est la méthode classique pour calculer les puissances n-ièmes d'une matrice.
   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété
   $\mathscr{P}(n)$: «$\exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $N^n = u_n N + v_n I_3$».
   Initialisation. pour $n = 0$:
   D'un côté, on a : $N^0 = I_3$ et de l'autre côté, on a : $u_0 N + v_0 I_3$. Il suffit de prendre : $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a : $N^{n+1} = N \times N^n$. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe deux nombres u_n et v_n tels que : $N^n = u_n N + v_n I_3$. On obtient donc :
   $$N^{n+1} = N(u_n N + v_n I_3) = u_n N^2 + v_n N.$$
   Il suffit alors d'utiliser : $N^2 = -2N + 3I_3$ et on obtient :
   $$N^{n+1} = (-2u_n + v_n)N + 3u_n I_3.$$
   En posant $u_{n+1} = -2u_n + v_n \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = 3u_n \in \mathbb{R}$, on a bien l'existence de $u_{n+1} \in \mathbb{R}$ et de $v_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que : $N^{n+1} = u_{n+1} N + v_{n+1} I_3$.
   Conclusion : il résulte du principe de récurrence l'existence de deux suites (u_n) et (v_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N^{n+1} = u_n N + v_n I_3$.
   Cette démonstration par récurrence nous donne aussi la relation de récurrence vérifiée par les deux suites. On a en effet
   $$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} = -2u_n + v_n, \ v_{n+1} = 3u_n.$$
3. Différentes méthodes peuvent être utilisées là. La méthode classique est de se ramener à une suite récurrente linéaire d'ordre deux pour la suite (u_n). En effet, on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n.$$
   De plus, on peut calculer les deux conditions initiales et on a : $u_0 = 1$ et $u_1 = -2u_0 + v_0 = -2$. L'équation caractéristique est alors : $r^2 + 2r - 3 = 0$, le discriminant est $\Delta = 16$ et les solutions sont : $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. Ainsi, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha(-3)^n + \beta$.
   On calcule α et β grâce aux conditions initiales et on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_n = \frac{-1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}}.$$
   En utilisant alors le fait que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, v_n = 3u_{n-1}$, on obtient $\boxed{v_n = \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On vérifie de plus que la relation est toujours vraie pour $n = 0$.
   On peut alors calculer les puissances n-ièmes de N en utilisant $N^n = u_n N + v_n I_3$:
   $$N = \left(\frac{-1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}\right)N + \left(\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4}\right)I_3$$

$$= \frac{1}{4}(1-(-3)^n)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(3+(-3)^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-3)^n & 2(-3)^n-2 & 1-(-3)^n \\ 2-2(-3)^n & 4(-3)^n & 2-2(-3)^n \\ (-3)^n-1 & 2-2(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}}$$

4. On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, et on écrit la relation de récurrence sous forme matricielle : $X_{n+1} = NX_n$. On conjecture alors $X_n = N^n X_0$, et on démontre par récurrence cette relation (à faire). On obtient alors :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = N^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+(-3)^n \\ 2+2(-3)^n \\ 1-(-3)^n \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 5) Énoncé

1. Il s'agit là encore de démontrer l'existence de deux suites. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \text{« il existe deux nombres réels } a_n \text{ et } b_n \text{ tels que } A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \text{».}$$

Initialisation. pour $n = 0$:
D'un côté, on a : $A^0 = I_3$. Les deux nombres $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait donc qu'il existe $a_n \in \mathbb{R}$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

De plus, un calcul donne :

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} a_n-2b_n & -a_n & -a_n \\ -a_n & a_n-2b_n & -a_n \\ -a_n & -a_n & a_n-2b_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il suffit de poser : $a_{n+1} = a_n - 2b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : il résulte du principe de récurrence l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n. \end{pmatrix}$. On a de plus :

$$a_0 = 1, b_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n - 2b_n, \quad b_{n+1} = -a_n.$$

2. En utilisant la relation de récurrence des deux suites, on obtient : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est une suite récurrente d'ordre 2, l'équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$, le discriminant est $\Delta = 9$ et les solutions sont donc : -1 et 2. On obtient ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n.$$

On trouve avec les conditions initiales que $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$. Ainsi, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n}.$$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n = -a_{n-1}$, on en déduit que $\boxed{b_n = \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On vérifie que cette relation est aussi vraie pour $n = 0$. On obtient ainsi l'expression des puissances n-ièmes de A (à faire).

Solution (exercice 6) Énoncé

1. Par simple calcul, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 1/a^2 & 1/a^3 \\ a & 0 & 1/a & 1/a^2 \\ a^2 & a & 0 & 1/a \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a^2} & \frac{2}{a^3} \\ 2a & 3 & \frac{2}{a} & \frac{2}{a^2} \\ 2a^2 & 2a & 3 & \frac{2}{a} \\ 2a^3 & 2a^2 & 2a & 3 \end{pmatrix},$$

d'où l'on tire $\boxed{A^2 = 2A + 3I_3.}$

2. On obtient alors $A(A - 2I_3) = 3I_3$ soit

$$A\left(\frac{A}{3} - \frac{2I_3}{3}\right) = \left(\frac{A}{3} - \frac{2I_3}{3}\right)A = I_3.$$

Ainsi, A est inversible d'inverse $\frac{A}{3} - \frac{2I_3}{3}$ soit

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3.a} & \frac{1}{3.a^2} & \frac{1}{3.a^3} \\ \frac{a}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3.a} & \frac{1}{3.a^2} \\ \frac{a^2}{3} & \frac{a}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3.a} \\ \frac{a^3}{3} & \frac{a^2}{3} & \frac{a}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.}$$

3. Montrons l'existence par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on pose $\boxed{a_0 = 0, b_0 = 1}$ car $A^0 = I_3$.

Hérédité. Supposons l'existence de a_n, b_n en un certain rang n, ainsi

$$\mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_3, \Longrightarrow \mathrm{A}^{n+1} = a_n\mathrm{A}^2 + b_n\mathrm{A} = a_n(2\mathrm{A}+3\mathrm{I}_3) + b_n\mathrm{A},$$

soit en factorisant $\mathrm{A}^{n+1} = (2a_n + b_n)\mathrm{A} + 3a_n\mathrm{I}_3$. On pose alors

$$\boxed{a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 3a_n}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{il existe } a_n, b_n \text{ vérifiant } \mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_3.}$ Que peut-on dire de la suite $(a_n - b_n)$? Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + b_n - 3a_n = -(a_n - b_n),$$

donc la suite $\boxed{(b_n - a_n) \text{ est géométrique de raison } 1}$, avec $a_0 - b_0 = -1$, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = (-1)^{n+1}.$$

4. Soit $c_n = (-1)^n b_n$, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} c_{n+1} = (-1)^{n+1} b_{n+1} &= (-1)^{n+1}(3a_n) = 3(-1)^{n+1}(b_n - (-1)^{n+1}) \\ &= 3(-1)^{n+1} b_n - 3 = -3c_n - 3. \end{aligned}$$

Il s'agit alors d'une suite arithmético-géométrique. On cherche alors C de sorte que

$$\mathrm{C} = -3\mathrm{C} - 3 \iff \mathrm{C} = -\frac{3}{4}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, en faisant la différence des deux lignes du système

$$\begin{cases} c_{n+1} &= -3c_n - 3, \\ \quad \mathrm{C} &= -3\mathrm{C} - 3 \end{cases},$$

on trouve que $(c_n - \mathrm{C})$ est géométrique de raison -3. Donc

$$c_n - \mathrm{C} = (-3)^n (c_0 - \mathrm{C}),$$

soit

$$c_n = 3^n(-1)^n \frac{7}{4} - \frac{3}{4}.$$

D'où :

$$b_n = (-1)^n c_n = 3^n \frac{7}{4} - (-1)^n \frac{3}{4}, \quad a_n = \frac{1}{3} b_{n+1} = 3^n \frac{7}{4} - (-1)^{n+1} \frac{1}{4}.$$

En conclusion :

$$\mathrm{A}^n = \left(3^n \frac{7}{4} - (-1)^{n+1} \frac{1}{4}\right)\mathrm{A} + \left(3^n \frac{7}{4} - (-1)^n \frac{3}{4}\right)\mathrm{I}_3,$$

ce qui fournit après de longs calculs :

$$\boxed{\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{3.(-1)^n+3^n}{4} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4.a} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4.a^2} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4.a^3} \\ \frac{-(-1)^n.a+3^n.a}{4} & \frac{3.(-1)^n+3^n}{4} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4.a} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4.a^2} \\ \frac{-(-1)^n.a^2+3^n.a^2}{4} & \frac{-(-1)^n.a+3^n.a}{4} & \frac{3.(-1)^n+3^n}{4} & \frac{-(-1)^n+3^n}{4.a} \\ \frac{-(-1)^n.a^3+3^n.a^3}{4} & \frac{-(-1)^n.a^2+3^n.a^2}{4} & \frac{-(-1)^n.a+3^n.a}{4} & \frac{3.(-1)^n+3^n}{4} \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 7) Énoncé

1. **1.1)** On a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D} \Longrightarrow \mathrm{PP}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{PD} \Longrightarrow \mathrm{AP} = \mathrm{PD} \Longrightarrow \mathrm{APP}^{-1} = \mathrm{PDP}^{-1} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}}$.

1.2) Voir cours.

1.3) On peut procéder par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si A est inversible. Alors $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est aussi inversible en tant que produit de matrices inversibles.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si D est inversible, alors $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Donc : $\boxed{\text{A inversible} \iff \text{D inversible}}$. De plus, le cours livre :

$$\mathrm{A}^{-1} = (\mathrm{PDP}^{-1})^{-1} = (\mathrm{P}^{-1})^{-1}\mathrm{D}^{-1}\mathrm{P}^{-1} = \boxed{\mathrm{PD}^{-1}\mathrm{P}^{-1}}.$$

2. **2.1)** On a $\det(\mathrm{M}) = 3 \neq 0$ donc P est inversible et $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2.2) On calcule $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ et on vérifie qu'elle est bien diagonale. Le calcul donne : $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Ainsi $\boxed{\text{M est bien diagonalisable}}$ et on note $\boxed{\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$. On a : $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

2.3) On sait de plus tout de suite que M est inversible car D est inversible car elle est diagonale et qu'elle n'a aucun 0 sur sa diagonale. De plus, on sait alors que : $\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{PD}^{-1}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4) On a vu que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$. Or D est diagonale donc $\mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, on obtient pour les puissances n-ièmes de M :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\mathrm{M}^n = \begin{pmatrix} \frac{2+(-2)^n}{3} & \frac{1-(-2)^n}{3} & \frac{2(1-(-2)^n)}{3} & \frac{1+2(-2)^n}{3} \end{pmatrix}}.$$

Solution (exercice 8) Énoncé

1. Le calcul matriciel donne $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{BA} = 0_2$. Les matrices A et B ne sont pas commutatives.

2. Le calcul matriciel donne : $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et $\mathrm{CB} = \mathrm{B}$.

- Inversibilité de A : par l'absurde, si A est inversible, alors A^{-1} existe et on peut donc multiplier à gauche par A^{-1} l'égalité $\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_2) = 0_2$. Comme $\mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{A} = \mathrm{I}_2$ et $\mathrm{A}^{-1} \times 0_2 = 0_2$, on obtient : $\mathrm{A} - \mathrm{I}_2 = 0_3 \iff \mathrm{A} = \mathrm{I}_2$. Absurde car $\mathrm{A} \neq \mathrm{I}_2$. Ainsi par un raisonnement par l'absurde, on a montré que A n'est pas inversible.

- Inversibilité de B : on obtient : $CB - B = 0_2 \iff (C - I_2)B = 0_2$. Par l'absurde, si B est inversible, alors B^{-1} existe et on peut donc multiplier à droite par B^{-1} l'égalité $(C - I_2)B = 0_2$. Comme $BB^{-1} \times = I_2$ et $0_2 \times B^{-1} = 0_2$, on obtient : $C - I_2 = 0_3 \iff C = I_2$. Absurde car $C \neq I_2$. Ainsi par un raisonnement par l'absurde, on a montré que B n'est pas inversible.

3. C est une matrice triangulaire supérieure avec un 0 sur la diagonale donc $\boxed{\text{C n'est pas inversible}}$.

Solution (exercice 9) Énoncé

1. On calcule $(a+d)M - (ad - bc)I_2$ d'un côté et M^2 de l'autre et on obtient bien le résultat voulu.

2. On fait deux cas selon la valeur de Δ.

- On suppose que $\Delta \neq 0$. On a alors : $M^2 - (a+d)M = -(ad-bc)I_2$, à savoir, comme $\Delta \neq 0$:
$$M((a+d)I_2 - M) = (ad-bc)I_2 \iff M\left(\frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - M)\right) = I_2.$$
De même en effectuant le produit matriciel dans l'autre sens. Ainsi M est bien inversible et son inverse est : $M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - M) = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- On suppose que $\Delta = 0$. Montrons par l'absurde que M n'est pas inversible. On suppose que M est inversible. On a alors : $M^2 = (a+d)M$, à savoir : $M(M - (a+d)I_2) = 0_2$. Mais comme par hypothèse M est inversible, on peut multiplier à gauche de chaque côté par M^{-1}. On obtient alors : $M - (a+d)I_2 = 0_2$. On obtient alors en calculant coefficient par coefficient $a = b = c = d = 0$, contradiction, car la matrice nulle n'est pas inversible. On en déduit donc que si $\Delta = 0$, alors M n'est pas inversible.

On a donc bien démontré que : M inversible si et seulement si $\Delta \neq 0$. De plus, on a vu que si M est inversible, alors on a : $\boxed{M^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Solution (exercice 10) Énoncé

1. On prend donc deux éléments quelconques de $\mathscr{R}$. Soit donc M_θ et M_α éléments de $\mathscr{R}$ avec $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$M_\theta M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha & -(\cos\theta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\theta) \\ \cos\theta\sin\alpha + \cos\alpha\sin\theta & \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) & -\sin(\theta+\alpha) \\ \sin(\theta+\alpha) & \cos(\theta+\alpha) \end{pmatrix} = M_{\theta+\alpha}.$$

2. Soit $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, on calcule le produit $M_\theta M_\alpha$ et $M_\alpha M_\theta$. D'après le calcul fait précédemment et en utilisant le fait que $\alpha + \theta = \theta + \alpha$, on a
$$M_\theta M_\alpha = M_{\theta+\alpha} = M_\alpha M_\theta.$$

3. Il suffit de prendre $\theta = 0$ et on obtient bien que : $I_2 = M_0 \in \mathscr{R}$.

4. Soit un élément M_θ de $\mathscr{R}$. On cherche s'il existe une matrice M telle que $M_\theta M = I_2 = MM_\theta$. Or on sait que $I_2 = M_0$ et que : $M_\theta M_\alpha = M_{\theta+\alpha} = M_\alpha M_\theta$. On voit ainsi que pour que $M_{\theta+\alpha}$ soit égal à I_2, il suffit de prendre $\alpha = -\theta$. On obtient ainsi que M_θ est bien inversible et que $\boxed{(M_\theta)^{-1} = M_{-\theta}}$. Cet inverse est donc bien dans $\mathscr{R}$.

Solution (exercice 11) Énoncé

1. Un calcul donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque alors que : $A^2 = A + 2I_3$.

2. On connaît une relation entre les puissances de A, on sait donc tout de suite si A est inversible ou pas. Ici, on a $A\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = I_3$ **et** $\left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right)A = I_3$. Ainsi A est inversible d'inverse : $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - I_3) = \boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$.

Solution (exercice 12) Énoncé

1. On a : $A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. D'où, on a : $(A - I_3)^2 = 0_3$. Comme la matrice I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on a : $AI_3 = I_3A = A$ et on peut appliquer les identités remarquables. On obtient
$$(A - I_3)^2 = 0_3 \iff A^2 - 2A + I_3^2 = 0_3 \iff A^2 - 2A = -I_3 \iff A(2I_3 - A) = I_3.$$
Ainsi, $\boxed{\text{A est inversible et } A^{-1} = 2I_3 - A}$.

2. Comme on connaît une relation entre les puissances de A, on peut penser à la méthode par récurrence. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n) : \exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \exists b_n \in \mathbb{R}, \quad A^n = a_nA + b_nI_3$.

Initialisation. pour $n = 0$: on prend $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ qui conviennent. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Comme $A^{n+1} = A \times A^n$, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la relation sur les petites puissances, on obtient
$$A^{n+1} = A(a_nA + b_nI_3) \implies A^{n+1} = (2a_n + b_n)A - a_nI_3.$$
On pose alors $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{A}^n = a_n\mathrm{A}+b_n\mathrm{I}_3.}$
Les deux relations de récurrence permettent d'obtenir :

$$a_0=0,\qquad a_1=1,\qquad \forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n.$$

Cette suite vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre deux. L'équation caractéristique est :$r^2-2r+1=0$, le discriminant est $\Delta=0$ et la solution est 1. Ainsi, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=\alpha+n\beta.$$

On obtient avec les conditions initiales

$$\alpha=0 \text{ et } \beta=1.$$

Ainsi, on a : $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n=n$. On en déduit alors facilement b_n en fonction de n puis les puissances n-ièmes de A (à faire). Soit alors $n\in\mathbb{Z},\quad n\notin\mathbb{N}$. On a : $\mathrm{A}^n=(\mathrm{A}^{-1})^{-n}$ avec $-n\in\mathbb{N}$. De plus, on sait que $\mathrm{A}^{-1}=2\mathrm{I}_3-\mathrm{A}$. On obtient alors avec le binôme de NEWTON comme A et I_3 commutent et que $(-n)\in\mathbb{N}$:

$$\mathrm{A}^n=(2\mathrm{I}_3-\mathrm{A})^{-n}=\sum_{k=0}^{-n}\binom{-n}{k}(-\mathrm{A})^k(2\mathrm{I}_3)^{-n-k}=\sum_{k=0}^{-n}\binom{-n}{k}(-1)^k2^{-n-k}\mathrm{A}^k.$$

Comme on connaît déjà les puissances de A pour $k\in\mathbb{N}$, on trouve bien l'expression de A^n pour $n\in\mathbb{Z}$, $n<0$.

Solution (exercice 13) Énoncé

1. On a : $\mathrm{M}(\mathrm{M}^3-4\mathrm{M}+\mathrm{I}_3)=5\mathrm{I}_3 \iff \mathrm{M}\times\left[\frac{1}{5}(\mathrm{M}^3-4\mathrm{M}+\mathrm{I}_3)\right]=\mathrm{I}_3$ et de même : $\left[\frac{1}{5}(\mathrm{M}^3-4\mathrm{M}+\mathrm{I}_3)\right]\times\mathrm{M}=\mathrm{I}_3$. Ainsi on a trouvé une matrice $\mathrm{C}\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{M}\times\mathrm{C}=\mathrm{I}_3$. Donc par définition d'une matrice inversible, on sait que M est inversible et que $\boxed{\mathrm{M}^{-1}=\mathrm{C}=\frac{1}{5}(\mathrm{M}^3-4\mathrm{M}+\mathrm{I}_3)}$.
2. On a : $\mathrm{A}(\mathrm{A}^4-\mathrm{I}_3)=0_3$. Par l'absurde, si A est inversible, alors A^{-1} existe et on peut donc multiplier à gauche par A^{-1} l'égalité $\mathrm{A}(\mathrm{A}^4-\mathrm{I}_3)=0_3$. Comme $\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{A}=\mathrm{I}_3$ et $\mathrm{A}^{-1}\times 0_3=0_3$, on obtient : $\mathrm{A}^4-\mathrm{I}_3=0_3\iff\mathrm{A}^4=\mathrm{I}_3$. Absurde car par hypothèse, on sait que : $\mathrm{A}^4\neq\mathrm{I}_3$. Ainsi par un raisonnement par l'absurde, on a montré que $\boxed{\text{A n'est pas inversible}}$.

Solution (exercice 14) Énoncé

1. On obtient

$$\mathrm{M}^\top\mathrm{M}$$

$$=\begin{pmatrix}a^2+b^2+c^2+d^2&0&0&0\\0&a^2+b^2+c^2+d^2&0&0\\0&0&a^2+b^2+c^2+d^2&0\\0&0&0&a^2+b^2+c^2+d^2\end{pmatrix}$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)\mathrm{I}_4.$$

2. Comme les a,b,c,d sont non tous nuls, on a $a^2+b^2+c^2+d^2\neq0$. On en déduit $\frac{\mathrm{M}^\top}{a^2+b^2+c^2+d^2}\mathrm{M}=\mathrm{I}_4$ et de même $\mathrm{M}\frac{\mathrm{M}^\top}{a^2+b^2+c^2+d^2}=\mathrm{I}_4$. Donc M est inversible, et $\boxed{\mathrm{M}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}\mathrm{M}^\top}$.

Solution (exercice 15) Énoncé

1. Notons $\mathrm{D}=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ avec $\lambda_i\neq\lambda_j$ pour tout $i\neq j$, on a : AD = DA. Calculons alors AD et DA. On obtient

$$\mathrm{AD}=\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11}&\lambda_2a_{12}&\cdots&\lambda_na_{1n}\\\lambda_1a_{21}&\lambda_2a_{22}&\vdots&\lambda_na_{2n}\\\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\\lambda_1a_{n1}&\lambda_2a_{n2}&\vdots&\lambda_na_{nn}\end{pmatrix}\text{ et }\mathrm{DA}=\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11}&\lambda_1a_{12}&\vdots&\lambda_1a_{1n}\\\lambda_2a_{21}&\lambda_2a_{22}&\vdots&\lambda_2a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\lambda_na_{n1}&\lambda_na_{n2}&\therefore&\lambda_na_{nn}\end{pmatrix}.$$

L'égalité DA = AD entraine (en regardant les coefficients hors de la diagonale) :

$$\forall(i,j)\in[\![1\,,\,n]\!]^2, i\neq j\Longrightarrow\lambda_ia_{ij}=\lambda_ja_{ij}\iff a_{ij}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)=0.$$

Comme $\left(\lambda_i-\lambda_j\right)\neq0$ si $i\neq j$, on a alors :

$$\forall(i,j)\in[\![1\,,\,n]\!]^2, i\neq j\Longrightarrow a_{ij}=0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{A est diagonale.}}$

2. D'après ce qui précède, on sait que A est de type : $\mathrm{A}=\mathrm{Diag}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ (elle est diagonale). Soit $\mathrm{M}=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Comme par hypothèse, la matrice A commute avec toutes les matrices de taille n, on a : AM = MA. En refaisant le même type de calcul que dans la question précédente, on a

$$\mathrm{MA}=\begin{pmatrix}\beta_1m_{11}&\beta_2m_{12}&\vdots&\beta_nm_{1n}\\\beta_1m_{21}&\beta_2m_{22}&\vdots&\beta_nm_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\beta_1m_{n1}&\beta_2m_{n2}&\vdots&\beta_nm_{nn}\end{pmatrix}\text{ et }\mathrm{AM}=\begin{pmatrix}\beta_1m_{11}&\beta_1m_{12}&\vdots&\beta_1m_{1n}\\\beta_2m_{21}&\beta_2m_{22}&\vdots&\beta_2m_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\beta_nm_{n1}&\beta_nm_{n2}&\vdots&\beta_nm_{nn}\end{pmatrix}.$$

Mais cette fois-ci les coefficients de M peuvent être pris quelconques et en particulier on peut supposer qu'ils sont tous non nuls car A commute avec toutes les matrices de taille n. Ainsi, on doit avoir

$$\forall(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\quad\beta_im_{ij}=\beta_jm_{ij}\iff m_{ij}\left(\beta_i-\beta_j\right)=0.$$

Comme on peut supposer que tous les m_{ij} sont non nuls, on a

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, \quad \beta_i = \beta_j.$$

Ainsi, la matrice A est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont égaux. Ainsi, la matrice A est de type

$$\boxed{\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$$

3. On a montré que si A appartient au commutant de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si A commute avec toutes les matrices carrées d'ordre n, alors A est forcément de type : $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Inversement, il est très facile de montrer que les matrices de type $\lambda \mathrm{I}_n$ commutent bien avec toutes les matrices car on sait que I_n commute bien avec toutes les matrices carrées de taille n. Ainsi, on vient de prouver par double inclusion que le commutant de $\boxed{\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est exactement l'ensemble des matrices de type } \lambda \mathrm{I}_n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.}$

Solution (exercice 16) Énoncé

1. Oui. Soient $x, x' \in \mathbb{R}$, tels que $f(x) = f(x')$. Alors $-x = -x'$, $x = x'$ et $-\dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{x'^2}{2}$, ceci implique bien $x = x'$. Donc f $\boxed{\text{est injective.}}$

2. Soient x, y deux réels. Alors un simple produit matriciel prouve que $f(x)f(y) = f(x+y) \in f(\mathbb{R})$ car $x+y \in \mathbb{R}$. Donc $\boxed{f(x)f(y) \in f(\mathbb{R})}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

3. **3.1)** Par récurrence évidente : $\boxed{f(x)^n = f(nx) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nx \\ -nx & 1 & -\frac{n^2x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

3.2) Premier point : est-ce que toute matrice de la forme $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ est inversible? Oui, puisqu'en choisissant $y = -x$ dans la question précédente, on déduit $f(x)f(-x) = f(x-x) = f(0) = \mathrm{I}_3$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) \text{ est inversible et : } \quad f(x)^{-1} = f(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ +x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Deuxième point : est-ce que toute matrice inversible est de la forme $f(x)$? Non, considérer par exemple $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors T est inversible (triangulaire avec trois coefficients diagonaux non nuls) et n'est pas de la forme $f(x)$ puisque le coefficient $(1,2)$ est non nul. Donc $\boxed{f(\mathbb{R}^3) \neq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).}$