# Séance 10 : équations différentielles

**Exercice 1 :** Résoudre les équations différentielles :

| | |
|---|---|
| **1.** $y' - 2y = 2\ sur\ \mathbb{R}$ | **4.** $y' + y = e^x + x^2 - \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$ |
| **2.** $(1 + e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$ sur $\mathbb{R}$ | **5.** $\sin^3(x)\, y' = 2\cos(x) y$ sur $]0; \pi[$ |
| **3.** $y' + \frac{1}{2t} y = t^4$ sur $\mathbb{R}_+^*$ | **6.** $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ |

**Exercice 2 :** On cherche à résoudre sur l'intervalle $I = ]-1; +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E): (x + 1)y' + xy = x^2 - x + 1$$

**1.** Déterminer une solution affine solution de $(E)$.
**2.** Résoudre $(E)$sur *I*.
**3.** Déterminer la solution de $(E)$ sur I qui vérifie $f(0) = -1$.

**Exercice 3 :** Dans ce problème, on se propose d'étudier l'évolution de la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce produit. Cette concentration, en grammes par litre de sang, est une fonction *f* de la variable *t* définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ qui est solution de l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = ae^{-t}\ (E)$$

Où *a* est une constante positive dépendant de la personne et de la quantité de médicament absorbée, avec la condition initiale : $f(0) = 0$.

On suppose que $a = 5$, l'équation s'écrit alors : $y'(t) + y(t) = 5e^{-t}$.

**1.** Résoudre sur $[0\,; +\infty[$ l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = 0$.
**2.** Soit *g* la fonction définie $[0; +\infty[$ sur par $g(t) = mte^{-t}$ où *m* désigne un réel donné.

**a)** Calculer $g'(t)$.

**b)** Déterminer le réel *m* de manière que *g* soit solution de l'équation $(E)$.

**3.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$.
**4.** Déterminer la solution *f* de l'équation $(E)$ telle que $f(0) = 0$.

**Exercice 4 :** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

**1.** $y'' + 4y' + 4y = 8$
**2.** $y'' - 2y' + 2y = 0$
**3.** $y'' + y' + y = \cos(2x)$ ( Solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)$)
**4.** $y'' - 2y' + y = e^x$ (Solution particulière de la forme $x \mapsto \lambda x^2 e^x$)

**Exercice 5 :** Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ avec les conditions initiales données.

1. $y'' - 4y' + 5y = 3\,, \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$
2. $y'' + 6y' + 9y = 0, \begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$
3. $y'' - y' - 2y = 4, \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

**Exercice 6 :** L'objectif de cet exercice est la recherche d'une solution particulière de l'équation différentielle :

$$(E)\; y'' + 4y' + 13y = 5\sin(2t)$$

qui représente l'intensité du courant dans un circuit RLC soumis à une tension sinusoïdale.

1. Déterminer la solution générale sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle homogène associée

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

2. Déterminer une solution particulière de $(E)$ de la forme $f(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$.
3. Donner la solution générale de l'équation différentielle $(E)$.
4. Déterminer la solution $f$ de $(E)$ telle que $f(0) = -\frac{8}{29}$ et $f'(0) = \frac{105}{29}$.