

Programme de colles

du 8 au 12/1/2024

- Cette semaine, du calcul intégral, des équations différentielles et des suites récurrentes usuelles (avec un peu de modélisation).

1. [MATHS] CALCULS DE PRIMITIVES & ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES



- **Calculs de primitives & d'intégrales.** Généralités, propriétés, structure de l'ensemble des primitives. Définition de $\int_a^b f(x) dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, à l'aide d'une primitive, propriétés utiles pour le calcul de primitives (linéarité, croissance, positivité, relation de CHASLES). Lien entre primitive et intégrale/relation fondamentale de l'analyse. Techniques de calculs d'intégrales : intégration par parties et changement de variable pour les intégrales sur un segment de fonctions continues, primitive du logarithme. Intégrales de fonctions paires/impaires/périodiques. Primitives usuelles. Cas des fractions rationnelles.

⊗ Attention

Ce premier chapitre d'intégration est encore partiel : uniquement des calculs d'intégrales. Ne sont **pas** encore au programme des exercices :

- ◇ les intégrales à deux bornes variables,
- ◇ les sommes de RIEMANN,
- ◇ tout ce qui est majoration / minoration d'intégrales,
- ◇ l'étude de monotonie d'intégrales à paramètre.

J'ai effectué divers exemples de primitivations de fractions rationnelles, mais les élèves doivent être guidés sur ce type de fonctions (notamment sur la décomposition en éléments simples).

- **Équations différentielles.** Définition générale $y^{(n)} = f(t, y', \dots, y^{(n-1)})$, puis définition d'une équation différentielle linéaire. Cas des équations différentielles linéaires d'ordre n : définition de l'homogène associée, l'ensemble des solutions de l'homogène est stable par combinaison linéaire, toute solution de l'équation générale s'exprime sous la forme d'une solution de l'homogène et d'une solution particulière. Cas de l'ordre 1 : résolution de l'homogène et variation de la constante pour trouver une solution particulière. Cas de l'ordre 2 : résolution de

l'homogène et solution particulière dans le cas d'un second membre constant (en fonction du fait que 0 est racine simple, double ou pas racine de l'équation caractéristique). Problèmes de CAUCHY d'ordre 1 et 2. Technique du changement de fonction inconnue pour transformer une équation différentielle que l'on ne sait pas résoudre en une équation différentielle que l'on sait résoudre.

⊗ Attention

Pour l'ordre 2, une résolution faisant intervenir un second membre plus général qu'une constante doit être guidée.

2. [MATHS] SUITES RÉCURRENTES USUELLES & MODÉLISATION



- **Suites récurrentes usuelles.** Définition d'une suite. Suites récurrentes usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
- **Modélisation de dynamiques continues.** Taux d'évolution comme $\frac{y'}{y}$. Mise en équation de diverses situations en faisant un bilan de quantité entre t et $t + h$. Dynamique des populations : éléments sur le modèle de MALTHUS et ceux à capacité de milieu (logistique et GOMPERTZ) dans le cas continu. Remarques sur le modèle de LOKTA-VOLTERRA.
- **Modélisation de dynamiques discrètes.** Taux d'évolution comme $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$. Mise en équation de diverses situations en faisant un bilan de quantité entre n et $n + 1$. Dynamique des populations : adaptation des modèles précédents au cas discret.

⊗ Attention

- Les deux dernières sections précédentes « Modélisation de dynamiques continues et discrètes » ont pour but de présenter le vocabulaire des sujets de modélisation, et divers contextes à décrire avec des suites ou équations différentielles. *Pour les élèves : pas de cours à apprendre dans ces deux sections.*
- Rien d'autre sur les suites pour le moment (que les récurrences usuelles), la notion de limite n'a pas encore été revue. En particulier, nous n'avons pas encore vu les algorithmes classiques sur les suites en Python.
- L'idée de ce chapitre : en plus des suites récurrentes usuelles, des exercices sur les équations différentielles et suites récurrentes avec contexte et/ou mo-



délisation.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner l'expression intégrale de l'unique primitive d'une fonction continue f s'annulant en a qui appartient au domaine de continuité de f . En déduire l'unique primitive sur \mathbb{R} qui s'annule en 0 de $x \mapsto 2^x$.
2. Citer la formule d'intégration par parties, puis calculer l'unique primitive de \ln qui s'annule en 1.

3. Citer la formule de changement de variable, puis calculer $\int_1^4 \frac{e^{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ en posant

$$u = \sqrt{t}.$$

4. Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$.
5. Citer le théorème donnant la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Résolution complète de $y' + 3x^2 y = e^{x-x^3}$.
6. Résolutions de $y'' - \omega^2 y = 0$ et $y'' + \omega^2 y = 0$ (où ω est un réel non nul).

7. Donner la définition (récurrente) d'une suite arithmético-géométrique. Soit une suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2$. Déterminer une expression explicite en fonction de n de (u_n) , puis calculer : $\sum_{k=0}^n u_k$.

8. Déterminer (w_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $w_0 = 1, w_1 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 2w_{n+1} - 4w_n.$$

9. « On considère une réaction chimique notée $A \rightarrow B$, on suppose que le réactif A disparaît entre deux instants très proches $t, t+h$ de manière proportionnelle au temps écoulé et à la concentration $[A]$ en réactif A présent au début de l'intervalle de temps. »

Modéliser la situation, et résoudre.

10. « La pyrale est une chenille invasive qui s'attaque aux buis. Selon un relevé statistique, chaque année, le nuisible fait disparaître 15% des buis du massif. Alors que l'on compte en 2017, 75000 pieds de buis, l'ONF préconise de replanter 3000 plants chaque année pour compenser les dégâts de la pyrale. »

Modéliser la situation dans les 2 cas (en suivant la préconisation de l'ONF ou pas), résoudre puis interpréter.

À venir : les équations différentielles, puis le calcul matriciel.