Séance 11 (matrices)

Exercice 1 :

1) Soit A la matrice carrée d'ordre 3 dont chaque élément a_{ij} est égal à$2i + 3j$. Donner la matrice A.
2) A est une matrice carrée d'ordre 4, pour tous i, j compris entre 1 et 4, le coefficient a_{ij} est donné par $a_{ij} = i - j$. Ecrire la matrice A.

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui commutent avec A.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$,déterminer deux matrices carrées d'ordre 2 non nulles telles que $AB = 0_2$.

Exercice 4 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Trouver une relation de la forme $A^3 = aA^2 + bA + cI_3$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
2) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 5 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) P est-elle inversible ? Si oui, calculer P^{-1}.
2) Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire une expression de A en fonction de $P, P^{-1}, N\ et\ I_3$.
3) Déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 \\ 0 & a & 2a(1-a) \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $D(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.
2) Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $M(a) = PD(a)P^{-1}$.
3) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $D(a)D(b) = D(ab)$ et que $M(a)M(b) = M(ab)$.
4) Montrer que pour tout $a \in R^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $M(a)^n = M(a^n)$.
5) Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ a-t-on $M(a) = I_3$?
6) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $M(a)$ est inversible et donner son inverse.
7) $M(0)$ est-elle inversible ?