Programme de colles
du 15 au 19/1/2024

- Cette semaine, encore un peu d'équations différentielles et des suites récurrentes usuelles (avec un peu de modélisation).
- Le calcul matriciel : des exercices simples sur le sujet pour le moment, c'est assez frais.

1. [MATHS] MATRICES

Attention

- Au sujet des matrices inversibles : la technique d'échelonnement par pivot de GAUß (et par résolution d'un système linéaire) n'a pas encore été vue, elle le sera dans un futur chapitre. Seules les techniques listées ci-dessous sont au programme : définition, polynôme annulateur, à l'aide d'une forme diagonalisée. Ainsi, « déterminer l'inverse de P » où P est une matrice 3×3 quelconque sans autre indication, est pour le moment hors-programme.
- Le déterminant est au programme uniquement en dimension 2.
- Les exercices abstraits faisant appel à la formule explicite du produit matriciel (à l'aide d'une somme) ne sont pas vraiment dans l'esprit du programme, à garder pour la fin de la colle si le reste est réussi. En revanche, elle est apparue en question de cours au concours Agro-Véto, d'où sa présence dans les questions du programme de colle.
- Bien sûr, en ce qui concerne les matrices diagonalisables, les élèves ne savent pas encore comme trouver la matrice P associée. L'idée est pour le moment uniquement de mettre en place le vocabulaire. La seule application de la diagonalisation vue pour le moment est le calcul des puissances.

- **Matrices & Opérations.** Généralités, égalité matricielle, matrices usuelles (nulle, identique, homothétique, ATTILA, élémentaires). Opérations sur les matrices (somme, multiplication externe, multiplication interne). Transposition notée $A^\top$ et propriétés. Codage d'une matrice en Python.
- **Matrices carrées.** Puissances, règles, matrice nilpotente. Cas d'une matrice diagonale. Formule du binôme matriciel. Inversibilité matricielle : définition, propriétés, équivalence d'un inverse à droite ou à gauche (admise), simplification matricielle par une matrice inversible, équation-produit où l'une des matrices est inversible. Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires. Identité de BERNOULLI (non exigible, connaitre la preuve), application à l'inversibilité de $I_n - N$ où N est nilpotente. Premières techniques de calcul d'inverses : existence d'un polynôme annulateur de coefficient constant non nul, cas d'une matrice 2×2 et définition du déterminant dans ce cas-là. Matrices semblables, diagonalisables et trigonalisables. Application au calcul de puissances.

2. [MATHS] CALCULS DE PRIMITIVES & ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

- **Calculs de primitives & d'intégrales.** Généralités, propriétés, structure de l'ensemble des primitives. Définition de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $a, b \in \mathbb{R}$, à l'aide d'une primitive, propriétés utiles pour le calcul de primitives (linéarité, croissance, positivité, relation de CHASLES). Lien entre primitive et intégrale/relation fondamentale de l'analyse. Techniques de calculs d'intégrales : intégration par parties et changement de variable pour les intégrales sur un segment de fonctions continues, primitive du logarithme. Intégrales de fonctions paires/impaires/périodiques. Primitives usuelles. Cas des fractions rationnelles.

Attention

Ce premier chapitre d'intégration est encore partiel : uniquement des calculs d'intégrales. Ne sont <u>**pas**</u> encore au programme des exercices :
- les intégrales à deux bornes variables,
- les sommes de RIEMMANN,
- tout ce qui est majoration / minoration d'intégrales,
- l'étude de monotonie d'intégrales à paramètre.

J'ai effectué divers exemples de primitivations de fractions rationnelles, mais les élèves doivent être guidés sur ce type de fonctions (notamment sur la décomposition en éléments simples).

- **Équations différentielles.** Définition générale $y^{(n)} = f(t, y', \dots, y^{(n-1)})$, puis définition d'une équation différentielle linéaire. Cas des équations différentielles linéaires d'ordre n : définition de l'homogène associée, l'ensemble des solutions de l'homogène est stable par combinaison linéaire, toute solution de l'équation générale s'exprime sous la forme d'une solution de l'homogène et d'une solution particulière. Cas de l'ordre 1 : résolution de l'homogène et variation de la constante pour trouver une solution particulière. Cas de l'ordre 2 : résolution de l'homogène et solution particulière dans le cas d'un second membre constant (en fonction du fait que 0 est racine simple, double ou pas racine de l'équation caractéristique). Problèmes de CAUCHY d'ordre 1 et 2. Technique du changement de fonction inconnue pour transformer une équation différentielle que l'on ne sait pas résoudre en une équation différentielle que l'on sait résoudre.

Attention

Pour l'ordre 2, une résolution faisant intervenir un second membre plus général qu'une constante doit être guidée.

3. [MATHS] SUITES RÉCURRENTES USUELLES & MODÉLISATION

- **Suites récurrentes usuelles.** Définition d'une suite. Suites récurrentes usuelles : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
- **Modélisation de dynamiques continues.** Taux d'évolution comme $\dfrac{y'}{y}$. Mise en équation de diverses situations en faisant un bilan de quantité entre t et $t+h$. Dynamique des populations : éléments sur le modèle de MALTHUS et ceux à capacité de milieu (logistique et GOMPERTZ) dans le cas continu. Remarques sur le modèle de LOKTA-VOLTERRA.
- **Modélisation de dynamiques discrètes.** Taux d'évolution comme $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$. Mise en équation de diverses situations en faisant un bilan de quantité entre n et $n+1$. Dynamique des populations : adaptation des modèles précédents au cas discret.

Attention

- Les deux dernières sections précédentes « Modélisation de dynamiques continues et discrètes » ont pour but de présenter le vocabulaire des sujets de modélisation, et divers contextes à décrire avec des suites ou équations différentielles. *Pour les élèves : pas de cours à apprendre dans ces deux sections.*
- Rien d'autre sur les suites pour le moment (que les récurrences usuelles), la notion de limite n'a pas encore été revue. En particulier, nous n'avons pas encore vu les algorithmes classiques sur les suites en Python.
- L'idée de ce chapitre : en plus des suites récurrentes usuelles, des exercices sur les équations différentielles et suites récurrentes avec contexte et/ou modélisation.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner l'expression en somme du coefficient $(AB)_{i,j}$ d'une matrice produit, définir les matrices I_n, J_n. Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, calculer J_2AJ_2. *(Pour les élèves : en ce qui concerne le produit matriciel, on indique clairement quels sont les formats des matrices* A *et* B*, puis le format de* AB*, avant d'énoncer la formule.)*
2. Énoncé de la formule du binôme matriciel. Application au calcul des puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Définir la notion de matrice inversible et nilpotente. Montrer qu'une matrice nilpotente ne peut être inversible.
4. Définir la notion de matrice inversible, et calculer l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en commençant par montrer que $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$.
5. Donner la définition de matrices semblables. Lorsque $A \sim B$, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^n \sim B^n$.
6. Donner la définition de matrice diagonalisable. En utilisant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
7. Donner la définition (récurrente) d'une suite arithmético-géométrique. Soit une suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 2$. Déterminer une expression explicite en fonction de n de (u_n), puis calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
8. Déterminer (w_n) en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque $w_0 = 1$, $w_1 = 1$, et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = 2w_{n+1} - 4w_n.$$
9. *« On considère une réaction chimique notée* $A \longrightarrow B$*, on suppose que le réactif* A *disparait entre deux instants très proches* $t, t+h$ *de manière proportionnelle au temps écoulé et à la concentration* $[A]$ *en réactif* A *présent au début de l'intervalle de temps. »*
Modéliser la situation, et résoudre.
10. *« La pyrale est une chenille invasive qui s'attaque aux buis. Selon un relevé statistique, chaque année, le nuisible fait disparaitre 15% des buis du massif. Alors que l'on compte en 2017, 75000 pieds de buis, l'ONF préconise de replanter 3000 plants chaque année pour compenser les dégâts de la pyrale. »*

Modéliser la situation dans les 2 cas (en suivant la préconisation de l'ONF ou pas), résoudre puis interpréter.

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : les suites.