Chapitre (AN) 4 — Suites : généralités et comportement asymptotique

Résumé & Plan

Ce chapitre vise à renforcer l'étude des suites amorcée au lycée. Nous verrons notamment les définitions de convergence/divergence d'une suite, ainsi que les théorèmes généraux permettant d'étudier la nature d'une suite. On poursuit par l'étude de certaines suites particulières : les suites implicites et les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. On introduit enfin la notion de suites équivalentes, qui permettra notamment de lever certaines formes indéterminées dans des calculs de limites.

Si l'on considère les suites récurrentes de moyenne arihmétique et géométrique, i.e.

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n + y_n},$$

alors :

$$x_n \left(et\, y_n\right) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \frac{\pi}{4}(x_0+y_0)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\left(\frac{x_0-y_0}{x_0+y_0}\right)^2\sin^2(\theta)\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta.$$

— Le saviez-vous ?

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions

Définition 1 | Suite réelle

Une *suite réelle* est une application de $[\![n_0\,,+\infty[\![$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$:

$$u \left| \begin{array}{ccc} [\![n_0\,,+\infty[\![& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}\right.$$

- La suite $u : [\![n_0\,,+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
- la valeur u_{n_0} est appelé le *premier terme de la suite.*
- Pour tout entier $n \geqslant n_0$, u_n est *le terme de rang n* de la suite.

La plupart du temps, nous aurons $n_0 = 0$ ou éventuellement 1.

Notation **Abus de ...**

Parfois on notera seulement (u_n) au lieu de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Cela signifiera donc implicitement que l'on considère le plus petit entier n_0 telle que l'expression u_n soit définie pour tout $n \geqslant n_0$.

Notation

- L'ensemble des suites définies à partir de n_0 est $\mathbb{R}^{[\![n_0\,,+\infty[\![}$, notation déjà rencontrée pour les applications.
- Dans le cas $n_0 = 0$, on notera $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$.

Attention

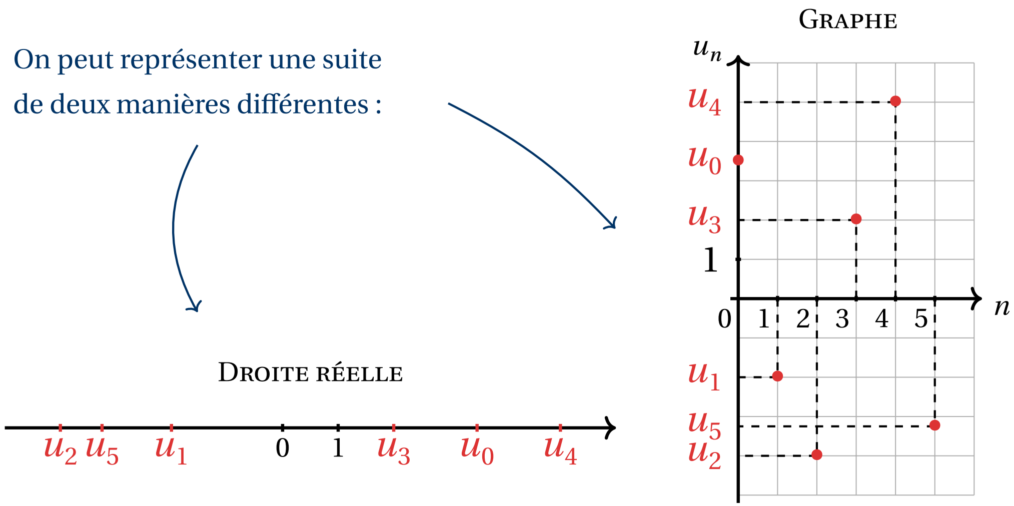
De-même qu'il ne faut pas confondre une fonction f et l'image $f(x)$ de x par f, on prendra garde de bien distinguer la suite (u_n) de son terme général d'ordre n noté lui u_n sans parenthèse.

Puisqu'une suite est une application (et même une application à valeurs dans $\mathbb{R}$), toutes les notions définies dans le Chapitre (ALG) 6 existent pour les suites. Pour y voir plus clair, on les reformule explicitement dans ce chapitre.

Définition 2 | Graphe

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite, on appelle *graphe de* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ou *nuage de points de* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ le sous ensemble noté $\mathscr{C}_u$ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\mathscr{C}_u = \{(n, u_n) \mid n \geqslant n_0\}.$$



Cadre

Dans la suite, afin de simplifier la présentation dans les définitions et les propositions, nous considérons (sauf exceptions), si cela n'est pas précisé, que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$. Les définitions s'étendent en général sans problème pour des suites définies seulement à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle également de manière informelle qu'une suite peut être définie selon des modes différents :

- de façon *explicite, i.e.* on connaît le terme général de la suite en fonction de n, par exemple $u_n = 2^n - n^3$ pour tout entier naturel n (le calcul de u_n pour tout entier naturel n est « facile », il suffit de remplacer n par la valeur souhaitée),
- par *récurrence, i.e.* le terme u_{n+1} est défini en fonction des termes précédents, par exemple $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout entier naturel n (l'étude de la suite est alors plus délicate). Nous avons déjà étudié certaines de ces suites dans le Chapitre (AN) 3.

Exemple 1

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$. Alors :
$$u_0 = \frac{1}{2\times 0+1} = 1, u_1 = \frac{1}{2\times 1+1} = \frac{1}{3}, u_2 = \frac{1}{5}, \ldots$$
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2u_n+1}$, $u_0 = 1$. Alors calculer u_1, u_2, u_3.

Définition 3 | Opérations

Pour tout $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit alors :

- **[Somme]** la suite $u+v$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)_n = u_n + v_n$.
- **[Multiplication scalaire]** La suite λu par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda u)_n = \lambda u_n$.
- **[Produit]** La suite $u \times v$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u\times v)_n = u_n \times v_n$
- **[Quotient]** La suite $\dfrac{u}{v}$, si la suite v ne s'annule pas (c'est-à-dire $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\dfrac{u}{v}\right)_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

1.2. Suites bornées

Définition 4 | Borne

- Soient $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite (u_n) est :
  - *majorée par* M si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \mathrm{M}$,
  - *minorée par* m si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$.
- On dit qu'une suite (u_n) est :
  - *majorée* si : $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \mathrm{M}$,
  - *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m$.
- Elle est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.

Attention
Les minorants m et majorants M sont des quantités **indépendantes** de n.

Proposition 1 | Borne et valeur absolue
Soit (u_n) une suite. Alors :

$$(u_n) \text{ est bornée } \iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$
$$\iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad -M \leqslant u_n \leqslant M.$$

Dans la pratique, on utilise plutôt cette proposition pour montrer qu'une suite est bornée. La rédaction est souvent plus simple en exploitant les propriétés de la valeur absolue.

Preuve On se contente de la première équivalence, la seconde étant une propriété classique de la valeur absolue (voir Chapitre (ALG) 2).
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons la suite (u_n) bornée. Alors il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M$. Alors on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \max(-m, M)$. En effet, si $|u_n| = u_n$ alors $|u_n| \leqslant M$ et si $|u_n| = -u_n$ alors $|u_n| \leqslant -m$. Donc en tout généralité $|u_n| \leqslant \max(-m, M)$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Puisque l'égalité $|u_n| \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^+$, est équivalente à $-M \leqslant u_n \leqslant M$ on en déduit que (u_n) est bornée.

Exemple 2

1. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est minorée par 0 et majorée par 1 (en effet, si $n \geqslant 1$ alors $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$). Elle est donc bornée.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est bornée car :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| = \frac{1}{n} \leqslant 1.$$
3. Les suites $\left(\dfrac{1}{n^2+2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont bornées.
   -
   -
4. La suite (e^n) est minorée par 0 mais non majorée. En effet, supposons par l'absurde qu'elle le soit.

Corollaire 1 | Somme et produit de suites bornées
Soient (u_n) et (v_n) deux suites bornées. Alors, les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n \times v_n)$ sont bornées.

Preuve
-

Remarque 1 Si (u_n) et (v_n) sont majorées, a-t-on $(u_n + v_n)$ et $(u_n \times v_n)$ majorées ?
- OUI pour la somme :

- NON pour le produit :

Définition 5 | à partir d'un certain rang

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}_n$ une propriété. On dit qu'elle est *vraie à partir d'un certain rang* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
- On notera aussi : « $\mathscr{P}_n$ est vraie APCR ».

Exemple 3

1. Montrer que $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par cinq APCR. Expliciter un tel rang.

2. La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \ln(n+1) + 10\cos n$ est à termes strictement positifs APCR. Expliciter un tel rang.

3. Montrer qu'une suite majorée APCR est majorée. Commençons par faire un dessin.

Cet exemple se généralise en la proposition qui suit.

Proposition 2 | Enlever des APCR

- Toute suite majorée APCR est majorée.
- Toute suite minorée APCR est majorée.
- Toute suite bornée APCR est bornée.

1.3. Suites monotones

Définition 6 | Monotonie, Constance

Soit (u_n) une suite.

- On dit que (u_n) est *croissante* (*resp. strictement croissante*) si :
$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad \left(\textit{resp.} \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_n < u_{n+1}\right).$$
- On dit que (u_n) est *décroissante* (*resp. strictement décroissante*) si :
$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant u_{n+1} \quad \left(\textit{resp.} \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_n > u_{n+1}\right).$$
- On dit que (u_n) est *monotone* (*resp. strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (*resp.* strictement croissante ou strictement décroissante).
- On dit qu'une suite (u_n) est *constante* si :
$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = u_n.$$
En d'autres termes : $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = u_0.$

- On dit qu'une suite (u_n) est *stationnaire* si elle est constante APCR, *i.e.* si :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} = u_n.$$
En d'autres termes : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n = u_{n_0}$.
- De manière équivalente, une suite (u_n) est *stationnaire* si elle est constante APCR.

Exemple 4

- La suite $\left((n-15)^2\right)$ est croissante APCR.
- La suite $\left(3 + \left\lfloor \dfrac{4}{2^n} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Expliciter l'entier n_0 de la définition précédente.

Méthode (AN) 4.1 (Trouver la monotonie d'une suite)

- **[Cas 1 : fonction dérivable]** Si $u_n = f(n)$ avec f dérivable, on étudie la fonction. Les monotonies coïncident.
- **[Cas 2 : expression avec des sommes/différences principalement]** Pour étudier la monotonie d'une suite, la méthode la plus fréquente est de calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe.
  - si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante,
  - si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

  En outre, lorsque la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ (*i.e.* de façon explicite), le sens de variation de (u_n) est le même que celui de f sur $[0;+\infty[$.
- **[Cas 3 : expression avec des puissances/produits/quotients principalement]** Si une suite (u_n) est à termes **strictement positifs**, elle est :
  - croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$,
  - décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

  Ce critère est utile seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ donne une expression simple (notamment en cas de présence de factorielles, de puissances...).

Exemple 5 (Suite explicite) Déterminer la monotonie de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)\mathrm{e}^{-n}$.

Exemple 6 (Suite explicite) Étudier, avec les deux méthodes, la monotonie de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$.

-
-

Exemple 7 (Suite récurrente) La suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-n} + 1$ est monotone.

Exemple 8 **(Somme de Riemann)** Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

- La suite (u_n) est strictement croissante.

- La suite (u_n) est majorée.
  - **[Échec]**
  - **[Succès]** Constatons tout d'abord que pour tout $k \geqslant 2$,
    $$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Exemple 9 **(Généralisation : somme partielle)** Soit (u_n) une suite. Alors (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{est appelée la } \textit{somme partielle} \text{ de la suite } (u_n).$$

Montrer que : $\quad (u_n)$ est positive $\implies (\mathrm{S}_n)$ est croissante .

(Dans l'exemple précédent, la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ était positive.)

Par définition de suite croissante, on obtient directement la proposition suivante.

Proposition 3 | Monotonie et majoration / minoration

- Une suite croissante est minorée (par son premier terme).
- Une suite décroissante est majorée (par son premier terme).

2. LIMITE D'UNE SUITE

2.1. Généralités

Comme pour les fonctions, on aimerait définir une notion de limite pour les suites. Puisque qu'une suite est une application définie sur des entiers, il n'y aura pas de limite en un point (qui revient simplement à faire prendre à n une valeur particulière). De-même, il n'y aura pas de limite en $-\infty$ car nos suites sont ici définies sur des entiers positifs.

Définition 7 | Convergence

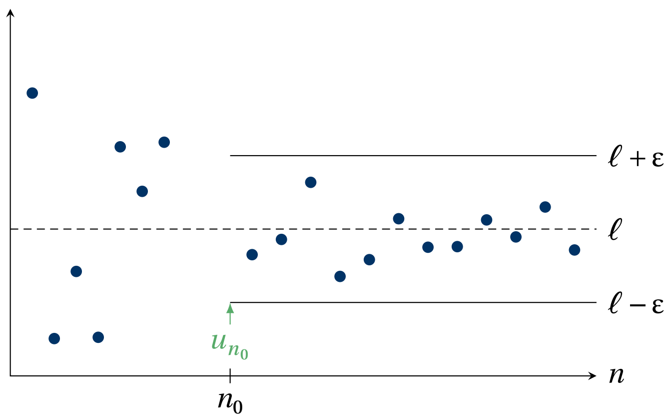
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite.

- On dit que (u_n) est *convergente de limite* ℓ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon,$$
c'est-à-dire « aussi petit que soit $\varepsilon > 0$, u_n est aussi proche que l'on veut de ℓ, APCR ».

Note — *Rappelons que :*
$|u_n - \ell| < \varepsilon \iff -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon \iff u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$

Note — *Il est possible de remplacer « $<\varepsilon$ » par « $\leqslant \varepsilon$ » dans la définition. Les deux sont équivalentes.*

- Le réel ℓ est appelé la *limite* de la suite (u_n). On note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, ou encore $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.
- On dit que (u_n) est *convergente* s'il existe un réel ℓ tel que $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.



Attention

- Ne pas parler de la limite d'une suite sans avoir justifié son existence.
- Une limite **ne** dépend **pas** de n.

Par définition de la limite, on a la propriété suivante.

Proposition 4 | Convergence et convergence vers zéro

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite. Alors :
$$u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell \iff u_n - \ell \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Preuve

$$u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ |u_n - \ell| < \varepsilon$$
$$u_n - \ell \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ |(u_n - \ell) - 0| < \varepsilon.$$

D'où l'équivalence.

Méthode (AN) 4.2 (Montrer que $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$ avec la définition de la limite)

1. Se donner $\varepsilon > 0$.
2. Résoudre l'inéquation $|u_n - \ell| < \varepsilon$ en $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des solutions contient un ensemble de la forme $[\![n_0, \infty[\![$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On a alors prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$.
3. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré que : $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

Exemple 10 Montrons, avec la définition, que : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$

Proposition 5 | Encadrement d'une suite convergente vers $\ell \neq 0$

- Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \frac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3\ell}{2}.$$
En particulier, u_n est strictement positive APCR.

- Si (u_n) converge vers $\ell < 0$, alors :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \frac{3\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{\ell}{2}.$$
En particulier, u_n est strictement négative APCR.

Preuve

Par hypothèse,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$
Prenons ensuite $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ (car $\ell > 0$). Alors :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}.$$
Or, pour tout n, $\quad |u_n - \ell| < \frac{\ell}{2} \iff -\frac{\ell}{2} < u_n - \ell < \frac{\ell}{2}$, ce qui fournit l'inégalité cherchée. Le cas négatif s'obtient en utilisant le cas positif appliqué à la suite $(-u_n)$.

Exemple 11

- Notons : $\quad u_n = 1 - \frac{n^4}{e^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Nous serons capable de montrer que : $\quad \lim_{n \to \infty} u_n = 1$, donc u est strictement positive APCR. Le montrer par le calcul en trouvant un tel rang n'est en revanche pas du tout évident! Des calculs de limites peuvent donc rendre de précieux services.

Attention

On ne peut rien dire pour une suite convergeant vers zéro, par exemple $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 *(nous serons capable de le montrer plus tard)* et change pourtant alternativement de signe.

Définition 8 | Divergence vers $\pm\infty$, Divergence

- Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) *diverge vers* $+\infty$ et on note $u_n \xrightarrow[]{n \to \infty} +\infty$ si : $\quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > A$.
C'est-à-dire : « u_n est aussi grand que l'on veut, APCR ».

Note: *Il est possible de remplacer « $A \in \mathbb{R}$ » par « $A \in \mathbb{R}^+$ » dans la définition. Les deux sont équivalentes.*

- Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) *diverge vers* $-\infty$ et on note $u_n \xrightarrow[]{n \to \infty} -\infty$ si : $\quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n < A$.
C'est-à-dire : « u_n est aussi petit que l'on veut, APCR ».

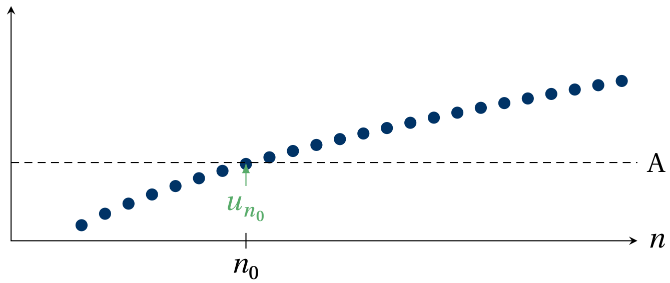
Note: *Il est possible de remplacer « $A \in \mathbb{R}$ » par « $A \in \mathbb{R}^-$ » dans la définition. Les deux sont équivalentes.*

- Une suite est dite *divergente* si elle n'est pas convergente.

Attention — Diverger ne signifie pas tendre vers $\pm\infty$

Il existe des suites qui ne convergent pas et qui ne divergent pas vers $\pm\infty$: ce sont celles n'ayant pas de limite. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *(Nous pourrons le montrer plus tard)*

Illustrons par exemple le cas d'une divergence vers $+\infty$.



Méthode (AN) 4.3 (Montrer que $u_n \xrightarrow[]{n \to \infty} +\infty$ avec la définition de la limite)

1. Se donner $A \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'inéquation $\quad u_n > A$ en $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des solutions contient un ensemble de la forme $[\![n_0, \infty [\![$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On a alors prouvé que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > A$.
3. Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a montré que : $\quad u_n \xrightarrow[]{n \to \infty} +\infty$.

Exemple 12 Montrons, avec la définition, que : $\quad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = \infty$.

Définition 9 | Nature

Déterminer la nature d'une suite c'est déterminer si elle converge ou diverge.

2.2. Propriétés des limites

Théorème 1 | Unicité de la limite
La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Intuitivement, converger vers $\ell \neq \ell'$ signifie se retrouver pour n assez grand dans des intervalles arbitrairement petits autour de ℓ et ℓ' — ce qui n'est bien sûr pas possible (il suffit de les choisir suffisamment petits pour être d'intersection vide). Cette intuition est formalisée dans la preuve qui suit.

Preuve Faisons la preuve dans le cas d'une limite finie. Raisonnons par l'absurde et supposons que $u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ell$, $u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ell'$ et par exemple $\ell < \ell'$. Posons $\varepsilon = \dfrac{\ell'-\ell}{3} > 0$. Alors par définition de la limite, il existe deux entiers n_1, n_2 tels que :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad u_n \in \,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[, \qquad \forall n \geqslant n_2, \quad u_n \in \,]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[.$$

donc en posant $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in \,]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\,\cap\,]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[.$$

Or $\ell+\varepsilon < \ell'-\varepsilon$ puisque :

$$\ell+\varepsilon < \ell'-\varepsilon \iff \frac{\ell'+2\ell}{3} < \frac{2\ell'+\ell}{3} \iff \ell < \ell'.$$

Donc : $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\,\cap\,]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[\, = \varnothing$ — contradiction, car cette intersection devrait contenir u_{n_0}.

Théorème 2 | Limite et bornes
- Les suites qui divergent vers $+\infty$ sont minorées.
- Les suites qui divergent vers $-\infty$ sont majorées.
- Les suites qui convergent sont bornées.

Preuve
- Soit (u_n) telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = +\infty$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$. Elle est donc minorée APCR, et donc minorée d'après la Proposition 2.
- Soit (u_n) telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = -\infty$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant 1$. Elle est donc majorée APCR, et donc majorée d'après la Proposition 2.
- Soit (u_n) telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant 1$. Par l'inégalité triangulaire pour tout $n \geqslant n_0, |u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|$. Posons alors $\mathrm{M} = \max\left(|u_0|, |u_1|, \dots, \left|u_{n_0-1}\right|, 1+|\ell|\right)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant \mathrm{M}$ donc (u_n) est bornée.

Intuitivement, pour n assez grand la suite est confinée dans un intervalle autour de la limite ℓ donc bornée. Mais avant, nous n'avons qu'un nombre fini de valeurs donc elle sera globalement bornée.

Attention
La réciproque est fausse : considérer par exemple la suite $((-1)^n)$. Nous justifierons plus tard qu'elle n'a même pas de limite.

Théorème 3 | Passage à la limite dans les inégalités larges
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. Alors :
- $u_n \leqslant v_n$ (au moins APCR) $\Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n$,
- $u_n < v_n$ (au moins APCR) $\not\Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n < \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n$ en règle générale,
- $u_n < v_n$ (au moins APCR) $\Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n$ en revanche.

Preuve
- Notons $\ell = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n$. Procédons par l'absurde et supposons que $\ell > \ell'$. Alors $u_n - v_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ell - \ell' > 0$, et par Proposition 5, $u_n - v_n > 0$ APCR. C'est absurde.
- En effet, si $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ par exemple, alors on a bien $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pourtant $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0 = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n$.

Opérations sur les limites. Soient (u_n) et, (v_n) deux suites admettant toutes les deux une limite en $+\infty$. Dans toute la suite, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. « FI » désigne une indétermination du résultat de la limite indiqué dans le tableau (à traiter au cas par cas). Chaque résultat présent dans chaque case du tableau peut être démontré en vérifiant la définition de la limite, nous l'admettrons.

Limite de (u_n+v_n)			
$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ'	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

Limite de $(u_n \times v_n)$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0$	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$

Limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	FI	0	0	FI
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' = 0^+$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$
$+\infty$	FI	0	0	FI

Attention **Pour retenir, mais sans l'écrire**

- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que :
$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$
- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que les formes indéterminées « FI » sont les suivantes :
$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Tout cela avec des gros guillemets donc.

La plupart des techniques vues pour les fonctions sont utilisables pour les suites, dont celle de l'expression conjuguée. Voici quelques exemples.

Exemple 13 Calculer la limite des suites de terme général donné par :

- $u_n = n^2 + 2n - 3$
- $v_n = -n^2 + 2n - 3$
- $w_n = (3 - 5n)\left(n^3 - 4\right)$
- $x_n = \dfrac{2n+4}{\frac{1}{n} - 5}$
- $y_n = \dfrac{2 - 5n}{4n + 7}$
- $z_n = \dfrac{-3n^3 - 10n + 4}{2n^2 + 3n + 1}$

- Déterminer la limite de la suite $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *On a ici une forme indéterminée avec une différence de racines. L'idée est, comme pour les fonctions, d'utiliser la quantité conjuguée :*

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Par quotient de limites, on obtient donc : $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0$.

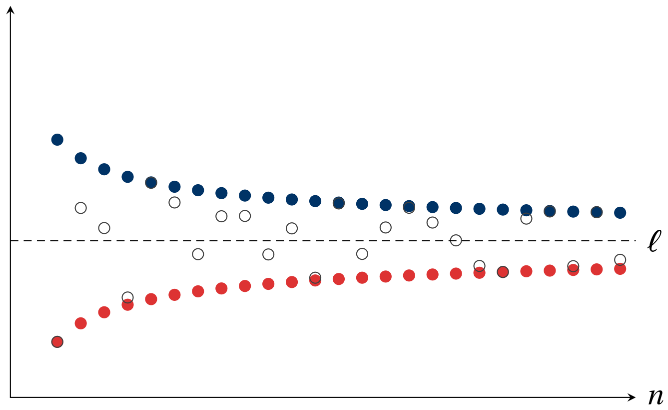
2.3. Nature par majoration, minoration et encadrement

Théorème 4 | Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

On considère (u_n), (v_n) et (w_n) telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad \text{(au moins APCR)} \\ \textbf{(ii)} & \text{les deux suites } (u_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers une même limite } \ell \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors : $v_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.



Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur (u_n) et (w_n), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant n_1 \implies \ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell+\varepsilon \quad \text{et} \quad n \geqslant n_2 \implies \ell-\varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell+\varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_3$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Ainsi, en posant $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, on a pour tout $n \geqslant n_0$: $\ell-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell+\varepsilon$. Ainsi, (v_n) converge vers ℓ.

Remarque 2 Pour pouvoir appliquer le théorème des gendarmes, on utilise le plus souvent :

- un encadrement de cos, de sin. En effet, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1.$$

- Ou un encadrement de la partie entière. En effet, on a (voir Chapitre (ALG) 2) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x-1 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

On rappelle que cela est une conséquence de la définition de la partie entière, qui est quant à elle *(moins utile dans les problèmes de limites)* :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemple 14 Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 15 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer : $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

Remarque 3 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) On a obtenu : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$, tout nombre réel est donc limite d'une suite de nombres rationnels, on dit que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est parfois utile pour généraliser sur $\mathbb{R}$ une propriété valable sur $\mathbb{Q}$.

Exemple 16 Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$1 \leqslant k \leqslant n \iff \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Puis en sommant, on obtient
$$\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \geqslant u_n \geqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$
En mettant en facteur n^2 dans la racine carrée, on obtient :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$.

Corollaire 2 | Version valeur absolue & Bornée « × → 0 »

- On considère (u_n), (v_n) telles que :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & |u_n| \leqslant v_n \quad \text{(au moins APCR)} \\ \textbf{(ii)} & v_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0, \end{cases} \implies u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0.$$
- Le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers zéro est une suite convergeant vers zéro.

Preuve

- L'hypothèse donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-v_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ (en effet, (v_n) est positive par hypothèse, au moins APCR). Donc puisque $v_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$, $-v_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$ donc par théorème d'encadrement $u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$.
- Soit (u_n) une suite bornée disons par $M \in \mathbb{R}^+$, et (v_n) convergeant vers zéro. Alors pour tout n, $0 \leqslant |u_n v_n| \leqslant M|v_n|$. Comme $|v_n| \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$, on conclut à l'aide de la première partie de la preuve.

Exemple 17 Montrer que : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Exemple 18 Étudier la nature de la suite $\left(\dfrac{\cos\left(n^2\right)+2+(-1)^n\arctan(4n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème 5 | Théorème de divergence par minoration ou majoration

Soient deux suites (u_n) et (v_n) réelles.

- **[Divergence par minoration]** Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \leqslant v_n \quad \text{(au moins APCR)} \\ \textbf{(ii)} & u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} +\infty \end{cases} \implies v_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} +\infty.$$
- **[Divergence par majoration]** Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \leqslant v_n \quad \text{(au moins APCR)} \\ \textbf{(ii)} & v_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} -\infty \end{cases} \implies u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} -\infty.$$

Preuve

- Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors $u_n \geqslant A$ APCR n_1. Comme $u_n \leqslant v_n$ APCR n_2, alors $A \leqslant v_n$ à partir du rang $\max\{n_1, n_2\}$, d'où la conclusion.
- Appliquer le théorème de divergence par minoration aux suites $(-v_n)$ et $(-u_n)$.

Exemple 19 (Divergence de la série harmonique (1)) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on note :
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$.

3. En déduire que $H_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \infty$.

Définition 10 | Extraites des termes pairs et impairs

Soit (u_n) une suite.

- La suite (u_{2n}) est appelée *suite extraite des termes pairs.*
- La suite (u_{2n+1}) est appelée *suite extraite des termes impairs.*

Théorème 6 | Convergence des suites extraites

Soit (u_n) une suite.

- Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :

$$u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ell \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & u_{2n} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ell \\ \textbf{(ii)} & u_{2n+1} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ell. \end{cases}$$

- Par conséquent, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne tendent pas vers une même limite dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors (u_n) n'a pas de limite.

Remarque 4

- Il existe des résultats faisant intervenir des suites autres que celles des termes impairs/paris ($(2n)$ et $(2n+1)$), mais qui ne sont pas à notre programme.
- Plus généralement, on appelle *suite extraite (ou sous-suite)* de la suite (u_n) toute suite (v_n) telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (par exemple, pour la suite de rangs pairs, la fonction φ est définie sur $\mathbb{N}$ par $\varphi(n) = 2n$).

Preuve

- $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que (u_n) tend vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Soit alors $n \geqslant n_0$. On a $2n \geqslant n_0$ et $2n+1 \geqslant n_0$ ce qui entraîne que $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ.
  $\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$ et que $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_1$. On pose $\mathrm{N} = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$. On a alors $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$. Ainsi (u_n) tend vers ℓ.
- Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $\ell \neq \ell'$ et $u_{2n} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ell$, $u_{2n+1} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \ell'$. Alors (u_n) n'a pas de limite ; en effet, dans le cas contraire, si $u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \mathrm{L} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors on aurait $u_{2n} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \mathrm{L}$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} \mathrm{L}$, ce qui est bien sûr contradictoire par unicité de la limite.

Exemple 20

- Les suites $(u_n) = ((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n) = \left(n^2(-1)^n\right)_{n\geqslant 0}$ n'ont pas de limite.
- Retrouver que : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

Exemple 21 La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ n'admet pas de limite en $+\infty$. *De la définition de u_n, on en déduit :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ *et* $u_{2n+1} = 0$. *Donc* $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_{2n} = 1 \neq 0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_{2n+1}$ *donc* (u_n) *ne possède pas de limite en* $+\infty$. *De la définition de u_n, on en déduit :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ *et* $u_{2n+1} = 0$. *Donc* $\lim_{n\longrightarrow\infty} u_{2n} = 1 \neq 0 = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_{2n+1}$ *donc* (u_n) *ne possède pas de limite en* $+\infty$.

Exemple 22 Si une suite (u_n) vérifie :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^\star, \quad 0 \leqslant u_{n+p} \leqslant \frac{n+p}{np},$$

alors elle converge vers zéro.

2.5. Croissances comparées et limites géométriques

Proposition 6 | Limite d'une suite géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante égale à 1.
- Si $-1 < q < 1$ (c'est-à-dire $|q| < 1$) alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} q^n = 0$.
- Si $q = -1$, (q^n) est donc bornée mais n'admet pas de limite.
- Si $q < -1$ alors la suite (q^n) n'est pas bornée et n'admet pas de limite.

Enfin, le résultat de croissances comparées reste encore valable pour des suites. Bien entendu, on ne conserve que les résultats au voisinage de $+\infty$, puisque $q^n = e^{n\ln q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q > 1$, les exponentielles des croissances comparées des fonctions deviennent des puissances, à cela s'ajoute une autre suite : la factorielle, qui diverge vers $+\infty$ plus vite que toutes les autres.

Théorème 7 | Croissances comparées

Soient a, et b des réels **strictement positifs**, et $q > 1$.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(\ln(n))^a}{n^b} = 0, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n^b}{q^n} = 0, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(\ln(n))^a}{q^n} = 0, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{q^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n^b}{(\ln(n))^a} = \infty, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{q^n}{n^b} = \infty, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{q^n}{(\ln(n))^a} = \infty, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n!}{q^n} = \infty.$$

'

Résumé Idée des croissances comparées

On se souviendra que la factorielle diverge beaucoup plus vite que l'exponentielle en $+\infty$, qui elle-même diverge beaucoup plus vite en $+\infty$ que toute puissance de n, qui elle-même diverge plus vite que toute puissance de logarithme. Ce que l'on peut noter :

$$(\ln n)^a \underset{+\infty}{\ll} n^b \underset{+\infty}{\ll} q^n \underset{+\infty}{\ll} n!.$$

Preuve La seconde ligne se déduit de la première en passant à l'inverse. Nous admettons le reste sauf $\frac{q^n}{n!} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 0$ que nous allons démontrer.
L'idée est la suivante : il y a autant de facteurs au numérateur qu'au dénominateur, mais les facteurs du dénominateur ne cessent de grandir alors que ceux du numérateur sont toujours « des x ». Cela nous incite donc à découper le dénominateur en « deux morceaux », dont le second sera composé de facteurs strictement supérieurs à x.

$$0 \leqslant \frac{q^n}{n!} = \frac{q^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!} \times \frac{q^{n-\lfloor x\rfloor}}{(\lfloor x\rfloor+1)\times\ldots\times n} \leqslant \frac{q^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor!}\left(\frac{x}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{n-\lfloor x\rfloor}.$$

Puisque $\left|\frac{x}{\lfloor x\rfloor+1}\right| < 1$, le majorant converge vers zéro — c'est le terme général d'une suite géométrique. Donc : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ par théorème d'encadrement.

Exemple 23 Déterminer les limites ci-après.

1. $u_n = \dfrac{4^n}{n!}$, $n \geqslant 0$,
2. $u_n = \dfrac{2^n e^{\sqrt{\ln(n)}}}{n^3}$, $n \geqslant 1$.

Remarque 5 Il arrive parfois que certaines convergences restent en vigueur pour d'autres valeurs de q. Par exemple : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{q^n}{n^b} = 0$ même si $q = -1$.

2.6. Nature par monotonie

Le théorème qui suit est vrai aussi pour les fonctions, mais nous le verrons plus tard. C'est le plus important du chapitre.

Théorème 8 | Théorème de la limite monotone

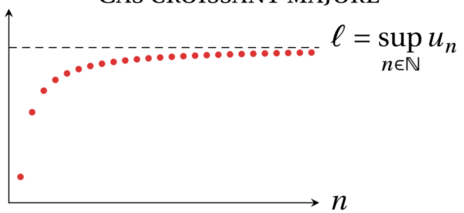
- Toute suite monotone possède une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
- Plus précisément,
  - toute suite réelle croissante et majorée (ou décroissante minorée) converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.
  - Toute suite réelle croissante non majorée (*resp.* décroissante non minorée) diverge vers $\ell = +\infty$ (*resp.* $\ell = -\infty$).

Preuve On le prouve par exemple dans le cas d'une suite croissante. Soit (u_n) une suite croissante.

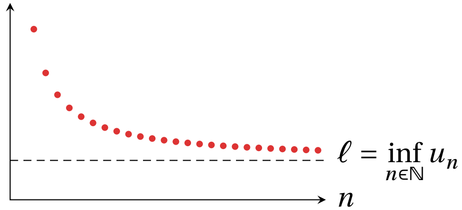
- Si (u_n) est majorée, alors l'ensemble $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non vide majoré donc possède une borne supérieure. Notons $\ell = \sup U$ et montrons que $u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell$.
- Soit ε un réel strictement positif, $\ell - \varepsilon$ n'est donc pas un majorant de U par définition de

ℓ et il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \varepsilon < u_{n_0}$. On en déduit alors par croissance de (u_n) et par définition de ℓ que $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant \ell < \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$, soit que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. C'est exactement la définition de $u_n \xrightarrow{n \to \infty} \ell$.

Cas croissant majoré



Cas décroissant minoré



Remarque 6

- On peut préciser l'énoncé : une suite croissante (u_n) converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (la limite étant finie ou non, selon que (u_n) est majorée ou non), *i.e.* vers le plus petit $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M$.
- Noter que la convergence de la suite est dans la conclusion du théorème. Il existe bien entendu des suites qui convergent et n'était pas monotones.
- Cet énoncé permet de conclure quant à la convergence des suites croissantes, même si on a aucune idée de la limite !

Attention **Ne pas confondre hypothèse est conclusion**

Une suite décroissance minorée par $m \in \mathbb{R}$ ne converge pas nécessairement vers m. Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est minorée par -1 et pourtant ne converge pas vers -1.

Exemple 24 **(Divergence de la série harmonique (2))** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on note à nouveau : $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. En déduire par l'absurde que $\mathrm{H}_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$.

Adjacence de suites. La notion, qui exploite la monotonie, va nous permettre de montrer que des couples de suites convergent vers une même limite.

Définition 11 | Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) dont dites *adjacentes* si :

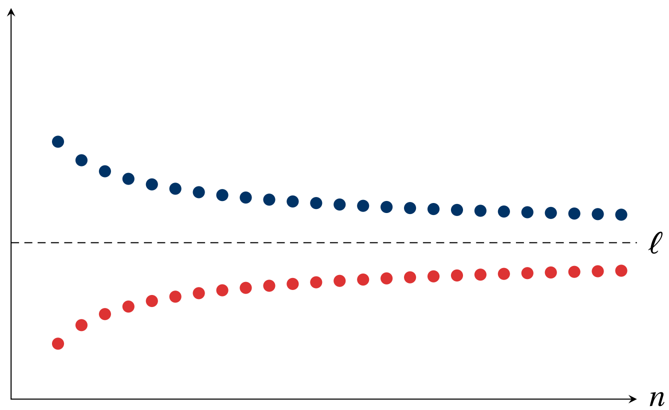
$$\text{elles sont monotones de sens contraires} \quad \underline{\textbf{et}} \quad u_n - v_n \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Théorème 9 | Convergence des suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite finie.

Attention **Ne pas confondre hypothèse et conclusion**

La convergence est dans **<u>la conclusion</u>**, et non dans la définition de l'adjacence.



Preuve On peut supposer sans perte de généralité que c'est (u_n) qui est croissante et (v_n) décroissante.

- Ainsi, $(v_n - u_n)$ est décroissante et converge vers 0 : on a donc nécessairement $v_n - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n_0} > v_{n_0}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = v_n - u_n$. Alors, par hypothèse, on sait que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et on a $x_{n_0} < 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leqslant 0$ car (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Donc (x_n) est décroissante. Alors pour tout $n \geqslant n_0$,
$$x_n \leqslant x_{n_0} \implies \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{n_0} \implies x_{n_0} \geqslant 0.$$
Ceci est absurde puisque, par hypothèse, $x_{n_0} < 0$. Finalement, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n \leqslant v_n$.

- On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, elle converge donc vers un réel u d'après le théorème de la limite monotone. De-même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0 : elle converge vers un réel v. Enfin, $(v_n - u_n)$ converge vers 0 par hypothèse et vers $v - u$ par les théorèmes généraux. Par unicité de la limite, on a donc $u = v$.

Exemple 25 **(Convergence d'une série alternée)** Soit la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$. Montrons que cette suite converge, en étudiant $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$.

- **[Nature de v]**

- **[Nature de w]**

- **[Différence $v - w$]**

Conclusion :

Et, puisque jamais deux sans trois, voici une dernière méthode pour montrer que (H_n) diverge vers $+\infty$.

Exemple 26 **(Constante d'Euler — [Divergence de la série harmonique (3)])** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on note

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad v_n = \mathrm{H}_{n-1} - \ln n, \quad w_n = \mathrm{H}_n - \ln n.$$

1. Justifier l'inégalité $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0,1]$.

2. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

3. Montrer que que $(v_n), (w_n)$ sont adjacentes. On appelle alors *constante d'* Euler notée γ, qui vaut $0,577$ à 10^{-3} près, la limite commune de ces deux suites.

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS. Les équivalents forment un cas particulier d'un outil beaucoup plus général pour lever des formes indéterminées : les développements limités. Nous parlerons de cette notion en fin d'année.

Définition 12 | Suites équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, tel que (v_n) **ne s'annule pas APCR**.

- On dit que (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* si : $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
- On note alors : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.

Remarque 7 (Sur la condition « ne s'annule pas APCR »)

Attention

Avec notre définition, une suite ne peut être équivalente à la suite nulle.

La condition peut être relâchée facilement, en considérant la définition : « il existe une suite (ε_n) convergeant vers zéro, telle que :

$u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$ « APCR ».

Cette nouvelle définition a le mérite d'être plus générale (ne nécessite aucune condition sur (v_n)) mais la première suffira amplement pour notre propos.

Cadre

Pour notre définition, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ implique implicitement que $(u_n),(v_n)$ ne s'annulent pas pour n assez grand. Nous ne le préciserons donc pas à chaque fois dans les énoncés.

Exemple 27

1. $n \underset{n\to\infty}{\sim} n+1$.

2. $\frac{2n+1}{n^2-3} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Méthode (AN) 4.4 (Déterminer des équivalents à l'aide d'un encadrement) Supposons que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ au moins pour n assez grand. Alors si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n, w_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$ où (a_n) est une suite strictement positive, on montre que $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$ en :

1. divisant par a_n tout l'encadrement : $\frac{u_n}{a_n} \leqslant \frac{v_n}{a_n} \leqslant \frac{w_n}{a_n}$.
2. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement en faisant $n \longrightarrow \infty$.

La même méthode s'applique pour les suites strictement négatives bien sûr, en inversant l'encadrement.

Exemple 28 Soit (u_n) une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leqslant u_n \leqslant n+1$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$.

Proposition 7 | Limite vers équivalent

- Soit (u_n) une suite. Alors :
$$u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell \neq 0 \implies u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ell.$$
- Soient $(u_n),(v_n)$ deux suites et $\ell \neq 0$. Alors :
$$\begin{cases} u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell \\ v_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell \end{cases} \implies u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n.$$

Attention

La condition $\ell \neq 0$ est très importante : dire qu'une suite est équivalente à la suite n'ayant pas de sens. Un contre exemple simple pour le deuxième item est le suivant : les suites $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}, (v_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ tendent bien vers zéro, et pourtant ne sont pas équivalentes.

Preuve Conséquence directe des règles opératoires sur les limites.

Proposition 8 | Équivalent vers limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. telles que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Alors :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \\ \textbf{(ii)} & u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \end{cases} \implies v_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell.$$

Dans la pratique, cette proposition s'utilisera ainsi : une suite compliquée (u_n) sera à étudier (pour laquelle on ne connait pas la limite), on cherchera alors un équivalent (v_n) plus simple (dont on connait la limite), et la proposition fera le reste.

Preuve On a pour n, $v_n = u_n \dfrac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell$, car $u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell$ et $\dfrac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 1$.

EQUIVALENCE ET OPÉRATIONS. Maintenant que la notion est présentée, on aimerait avoir des règles opératoires sur les équivalents. Malheureusement, vous allez constater que le symbole équivalent est beaucoup moins flexible que le symbole limite. Puisque un équivalent est un quotient,

- le symbole $\underset{n\to\infty}{\sim}$ va très bien se comporter avec les opérations multiplicatives : valeur absolue, puissances, produit, quotient, ...,
- en revanche, il va très mal se comporter avec l'addition, le logarithme, l'exponentielle *etc.*.

Proposition 9 | Équivalence et opérations usuelles

Soient (u_n), (v_n), (w_n), (a_n) et (b_n) des suites.

- **[Réflexivité]** $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.
- **[Symétrie]** $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.
- **[Transitivité]** $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n, v_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n \implies u_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$.
- **[Valeur absolue]** $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \implies |u_n| \underset{n\to\infty}{\sim} |v_n|$.
- **[Multiplication]** $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n, v_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \implies u_n.v_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n.b_n$.
- **[Quotient]** $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n, v_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \implies \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{b_n}$. En particulier :
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff \frac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}.$$
- **[Exposant]**
  - Si $k \in \mathbb{Z}$: $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \implies u_n^k \underset{n\to\infty}{\sim} v_n^k$.
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si les suites sont > 0 APCR :
  $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \implies u_n^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Preuve

- **[Réflexivité]** Immédiat par définition.
- **[Symétrie]** Immédiat car si une suite tend vers 1 et ne s'annule pas, son inverse aussi.
- **[Transitivité]** On sait que $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 1$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 1$ donc par produit : $\dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{w_n} \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} 1$.
- **[Valeur absolue]** Provisoirement admis : conséquence de la continuité de la fonction valeur absolue (voir le Chapitre (AN) 6).
- **[Multiplication]**
- **[Quotient]**
- Pour un exposant entier : conséquence du fait que l'on peut multiplier des équivalents. Pour un exposant quelconque : provisoirement admis, conséquence de la continuité de la fonction puissance α.

Attention On ne peut pas ...

- passer un terme d'un côté de l'autre côté par exemple.
- sommer des équivalents,
- composer des équivalents par une fonction, même continue en dehors de celles mentionnées dans la proposition précédente (inverse, valeur absolue, puissance). En particulier, on ne compose pas par l'exponentielle, le logarithme *etc.*.

En ce sens, ce symbole diffère de l'égalité. Pour quelques contre-exemples, voir les exemples qui suivent.

Exemple 29 (Pas de somme)

1. $n+1 \underset{n\to\infty}{\sim} n-1$ et $-n \underset{n\to\infty}{\sim} -n$ alors que :
$$(n+1)+(-n) = 1 \underset{n\to\infty}{\nsim} -1 = (n-1)+(-n).$$
2. Soient trois suites définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = -\frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad w_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}.$$
Alors $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} w_n$ mais $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\nsim} u_n + w_n$.

Exemple 30 **(Pas de composition (exponentielle ici))** Soient deux suites définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = n^2 + n, \quad v_n = n^2.$$

Alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, mais : $e^{u_n} \underset{n\to\infty}{\not\sim} e^{v_n}$.

Mais alors, comment fait-on pour les sommes et les composées ? Commençons déjà par discuter des sommes.

Méthode (AN) 4.5 **(Déterminer un équivalent d'une somme)** Se ramener à une limite usuelle à l'aide d'une factorisation.

Exemple 31 Donner un équivalent simple de $v_n = e^n + \ln(n)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

EQUIVALENTS USUELS. Comment obtenir des équivalents ? Nous allons essentiellement utiliser la définition du nombre dérivé, réecrite sous forme d'un lemme. Mais avant cela, commençons par les polynômes où la technique est déjà connue mais sans jamais avoir parlé d'équivalents.

Proposition 10 | Polynômes et fractions rationnelles

- **[Polynômes]** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\left(a_p, a_{p-1}, \ldots, a_0\right) \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $a_p \neq 0$, on a :
$$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \underset{n\to\infty}{\sim} a_p n^p$$
- **[Fractions rationnelles]** Soient $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \left(a_p, a_{p-1}, \ldots, a_0\right) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $\left(b_q, b_{q-1}, \ldots, b_0\right) \in \mathbb{R}^{q+1}$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, on a :
$$\frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}.$$

En résumé : en l'infini, on retrouve qu'un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré et qu'une fraction rationnelle se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré.

Preuve On fait la démonstration pour les polynômes, le cas des fractions rationnelles en est une conséquence par quotient d'équivalents.

Exemple 32 Déterminer un équivalent simple, puis la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^7 - n^3 + 2}{5n^9 + 7n^2 + 1}$ pour tout entier naturel n.

Exemple 33 Reprendre l'Exemple 13 à l'aide d'équivalents.

Attention

La condition $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$ est indispensable. Par exemple, $\sin(n) \underset{n\to\infty}{\not\sim} n$ puisque $\dfrac{\sin n}{n} \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$ par théorème d'encadrement.

Preuve

- Mis à part l'équivalent $\cos u_n - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$, tous ces équivalents s'obtiennent facilement grâce à la proposition précédente. Par exemple pour $(1+u_n)^\alpha - 1$:

- Pour le cosinus, on ne peut conclure directement avec la proposition précédente puisque $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$. Mais connaissant les autres équivalents usuels, si (u_n) converge vers 0, on a : $\cos(u_n) \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 1 > 0$, on peut donc écrire APCR, $\cos(u_n) = \sqrt{1-\sin^2(u_n)}$ et on a, par transitivité de l'équivalence et grâce aux formules précédentes,

$$\cos u_n - 1 = \sqrt{1-\sin^2(u_n)} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sin^2 u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}.$$

Proposition 11 | Equivalent de $f(u_n) - f(0)$

Soient f une fonction définie sur un voisinage de zéro et (u_n) une suite ne s'annulant pas APCR. Alors :

$$\begin{cases} \text{(i)} & f \text{ dérivable en zéro } \underline{\textbf{et}}\ f'(0) \neq 0, \\ \text{(ii)} & u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0 \end{cases} \quad \text{alors :} \quad f(u_n) - f(0) \underset{n\to\infty}{\sim} f'(0)u_n.$$

Preuve On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$. Donc, par composition de limites (*voir Chapitre (AN) 6*) : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{f(u_n)-f(0)}{u_n} = f'(0)$. Comme par hypothèse $f'(0) \neq 0$, on a encore $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{f(u_n)-f(0)}{f'(0)u_n} = 1$, soit, par définition : $f(u_n) - f(0) \underset{n\to\infty}{\sim} f'(0)u_n$.

On déduit alors tout un tas d'équivalents avec plusieurs choix de fonction f.

Proposition 12 | Equivalents usuels

Soit (u_n) une suite telle que : $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$. Alors :

- $\sin u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$
- $\cos u_n - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$
- $\tan u_n \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$
- $e^{u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$
- $\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$
- $\arctan(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.
- Pour tout $\alpha \neq 0$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha u_n$. En particulier :

$$\sqrt{1+u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}, \quad \frac{1}{1+u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} -u_n, \quad \frac{1}{1-u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n.$$

Faisons un exemple pour terminer de recherche d'équivalent d'une composée.

Exemple 34 Donner un équivalent de $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Méthode (AN) 4.6 **(Déterminer un équivalent d'une composée)** Il faut utiliser la transitivité de l'équivalence et donc, contrairement à d'habitude, travailler « de l'extérieur vers l'intérieur ».

Attention à la rédeaction

Dans l'exemple précédent, on écrit **surtout pas**

$$\text{« } \sin\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{car} \quad \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \text{ ».}$$

Car, rappelons-le, on ne peut pas composer les équivalents.

Autrement dit, on ne peut pas partir « de l'intérieur » (équivalent de la parenthèse puis composer) mais on peut partir « de l'extérieur ».

Exemple 35 Pour chaque suite $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n)$, déterminer un équivalent simple de la suite, ainsi que sa limite éventuelle.

- $a_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- $b_n = \ln\left(\frac{n+3}{n-5}\right)$
- $b'_n = \ln\left(\frac{2n+3}{n-5}\right)$
- $c_n = \sqrt{n^4+3n^3-1} - n^2$
- $d_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{2}{n}}-1}$.

Exemple 36 **((très) grand classique)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Exemple 37 **(Formule de Stirling & Application)** En admettant que :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{(formule de Stirling)}$$

retrouver que pour tout $q \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{q^n}{n!} = 0.$

Remarque 8 **(Équivalent et signe/nature)** Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Alors (u_n) et (v_n) :

- sont de « même nature » : c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux divergentes (éventuellement vers $\pm\infty$) ou toutes les deux convergentes vers la même limite,
- elles sont de même signe APCR.

3. SUITES REMARQUABLES

3.1. Suites récurrentes générales d'ordre 1

Cette fois-ci on ne suppose plus linéaire la relation de récurrence, mais seulement d'ordre 1 (*i.e.* elle fait un intervenir un terme et le suivant).

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathscr{D}_f$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathscr{D}_f, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Exemple 38 Précisons les récurrences obtenues dans quelques cas particuliers.

- $f(x) = x + a$, où $a \in \mathbb{R}$: la suite (u_n) associée est alors arithmétique.
- $f(x) = qx$, où $q \in \mathbb{R}$: la suite (u_n) associée est alors géométrique.
- $f(x) = qx + a$, où $(q, a) \in \mathbb{R}^2$: la suite (u_n) associée est alors arithmético-arithmétique.

Dans les exercices, on peut être amenés à se poser les questions suivantes.

Problématiques classiques sur les suites récurrentes

1. « La suite est-elle bien définie ? » Ceci n'est pas une évidence, voir par exemple si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ (une racine, un logarithme, *etc.*). En général l'exercice vous guidera sur la recherche d'« intervalles stables », *i.e.* des intervalles I tels que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. Dans ce cas, si $u_0 \in \mathrm{I}$ une récurrence montrera que $u_n \in \mathbb{N}$ est bien définie et qu'en plus $u_n \in \mathrm{I}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. « Est-elle monotone ? » C'est un problème là encore non trivial. Retenez qu'il n'y a aucun lien évident entre la monotonie de f et celle de (u_n).
3. « Converge-t-elle ? » On aura recours pour cela aux théorèmes d'existence (notamment au théorème de la limite monotone), difficile de faire autrement sans expression explicite.
4. « Si la suite converge, vers quelle limite ? » Pour cela, un seul résultat au programme, il s'agit de la proposition qui suit.

Définition 13 | Point fixe
On appelle *point fixe* de $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tout réel $x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) = x$.

Théorème 10 | Limite et point fixe
Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$, où $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$, et (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell \\ \textbf{(ii)} & f \text{ est } \underline{\textbf{continue}} \text{ en } \ell \end{cases} \quad \text{alors : } \Longrightarrow \ell = f(\ell),$$

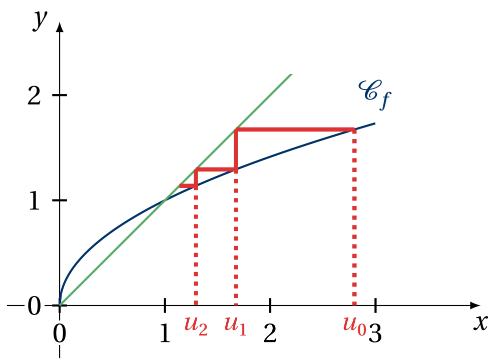
c'est-à-dire : ℓ est un point fixe de f.

Autrement dit, les limites finies possibles sont à chercher parmi les points fixes de f.

Preuve Provisoirement admis : découle de la caractérisation séquentielle de la limite, que nous verrons dans le Chapitre (AN) 6.

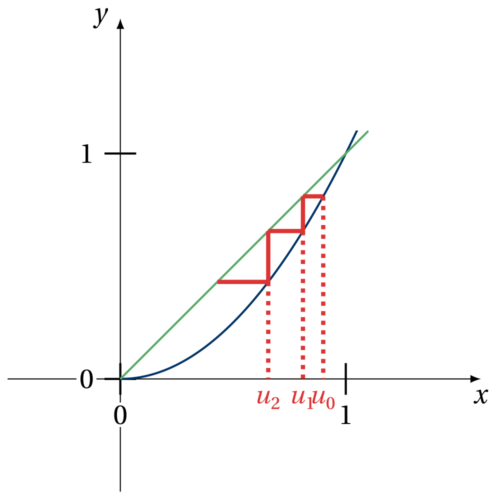
Exemple 39 Étudions les suites récurrentes suivantes :

- $u_0 \geqslant 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.



La suite semble converger vers 1 dans ce cas

- $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = u_n^2$.



La suite semble converger vers 0 dans ce cas

Exemple 40 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2}.$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. En déduire la nature de la suite.

Les résultats ci-dessous n'étant pas au programme, ils ont le statut de simple remarque mais sont classiques.

Remarque 9 (Quelques généralités) Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathscr{D}_f, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On considère de plus $g : x \in \mathscr{D}_f \longmapsto f(x) - x$.

- ◇ Si $f(\mathscr{D}_f) \subset \mathscr{D}_f$, alors la suite est bien définie (récurrence immédiate).
  ◇ Plus généralement, si $u_0 \in \mathrm{D}$ un sous-ensemble de $\mathscr{D}_f$ et si $f(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$, alors la suite est bien définie. On dit que D est un *ensemble stable par* f.
- Faire le lien entre le signe de g et la monotonie de u.

3.2. Suites implicites

Définition 14 | Suite implicite
On appelle *suite implicite* toute suite (x_n) dont le terme général x_n est donné comme solution (en général unique) d'une équation dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$, *i.e.* vérifiant une égalité du type :

$$f_n(x_n) = 0 \quad \text{avec } f_n \text{ qui est une fonction, pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

Il n'y a pas de résultat général au programme, mais leur étude s'appuie souvent sur un schéma proche de l'exemple ci-après. La difficulté est qu'*a priori* on ne connait pas l'expression générale d'une suite implicite, on utilisera le théorème de convergence monotone pour établir la convergence.

Remarque 10 (On ne sait, en général, pas résoudre l'équation)

- Une suite implicite ... peut être une suite définie explicitement. Par exemple, si on considère l'équation : $nx^3 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, c'est-à-dire $f_n(x) = 0$ avec $f_n(x) = nx^3 - 1$, alors elle admet pour unique solution $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$. C'est une suite explicite en n ! On obtient alors directement la monotonie, la limite *etc.*
- Hélas, le plus souvent, on ne saura pas résoudre ladite équation. On étudiera donc la nature par des moyens détournés (théorème de la limite monotone, comme pour les suites récurrentes).

Exemple 41 (Étude d'une suite implicite) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation : $f_n(x) = 0 \quad (\mathrm{E}_n)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, où : $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On la note désormais x_n. *La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$. De plus, en calculant la dérivée, on constate facilement que la fonction est même strictement croissante. Donc d'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ vers $f\left(\mathbb{R}^{+\star}\right) = \mathbb{R}$ (d'après le calcul de limites et la monotonie de f). Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+\star}$ comme prétendu dans l'énoncé. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$, et $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$. De plus, en calculant la dérivée, on constate facilement que la fonction est même strictement croissante. Donc d'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+\star}$ vers $f\left(\mathbb{R}^{+\star}\right) = \mathbb{R}$ (d'après le calcul de limites et la monotonie de f). Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+\star}$ comme prétendu dans l'énoncé.*
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in]0,1]$. *Comme $f_n(1) = n > 0$, on peut même affirmer que $x_n \in]0,1]$. Comme $f_n(1) = n > 0$, on peut même affirmer que $x_n \in]0,1]$.*
3. La suite (x_n) décroît. *<u>Indication :</u> On cherchera le signe de $f_{n+1}(x_n)$*
   - *Nous avons $f_{n+1}(x_n) = (n+1)x_n + \ln(x_n) = \underbrace{nx_n + \ln(x_n)}_{=0} + x_n = x_n$, puisque l'on reconnait $f_n(x_n) = 0$. Or $x_n \geqslant 0$, donc $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$.*
   - *$0 = f_{n+1}(x_{n+1})$, donc : $f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$, mais f_{n+1} est croissante, d'où l'on tire : $x_{n+1} \leqslant x_n$. La suite est décroissante.*
4. La suite (x_n) converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ que l'on peut déterminer. *La suite est d'après ce qui précède décroissante minorée par zéro, donc converge vers une limite finie.*
   Supposons que $\ell \in]0,1]$. Alors puisque $nx_n = -\ln(x_n)$, nous aurions en passant à la limite : $-\ln(\ell) = \infty$ ce qui est clairement une contradiction. La suite est d'après ce qui précède décroissante minorée par zéro, donc converge vers une limite finie.
   Supposons que $\ell \in]0,1]$. Alors puisque $nx_n = -\ln(x_n)$, nous aurions en passant à la limite : $-\ln(\ell) = \infty$ ce qui est clairement une contradiction.

Méthode (AN) 4.7 (Plan d'étude d'une suite implicite)

1. Établir l'existence et l'unicité de la suite grâce au théorème de la bijection.
2. Chercher la monotonie en cherchant le signe de $f_{n+1}(x_n)$. Par exemple, si $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$, on exploite ensuite la monotonie de f_{n+1} pour comparer x_n et x_{n+1}.
3. Trouver la valeur de la limite : en général on raisonne par l'absurde dans l'identité $f_n(x_n) = 0$.

4. INFORMATIQUE

Résumé des attendus

Voici ce qu'il faut savoir faire en Python à propos des suites :
- Les fonctions permettant de calculer un terme donné d'une suite.
- Les fonctions permettant de calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois.
- Construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée.
- Tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

Nous illustrerons ces différents programmes sur les trois suites suivantes :

- **[Explicite]** La suite (u_n), définie explicitement, vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$
où $a \in \mathbb{R}$ est choisi par l'utilisateur. On peut prouver qu'elle converge vers e^a.
- **[Récurrence d'ordre 1]** La suite (v_n), définie par une relation de récurrence d'ordre 1, vérifiant :
$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + \mathrm{e}^{v_n}. \end{cases}$$
On peut prouver qu'elle est croissante quel que soit $a \in \mathbb{R}$ et en déduire, par l'absurde, qu'elle tend vers $+\infty$.

- **[Récurrence d'ordre 2]** La suite (w_n), définie par une relation de récurrence d'ordre 2, vérifiant :

$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{\cos(w_n + w_{n+1})}{n+2}. \end{cases}$$

On peut prouver par encadrement qu'elle tend vers 0 puis en déduire que :

$$w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

> **Remarque 11 (Nommage des variables)** Dans tous nos programmes, on respectera les deux conventions suivantes : les variables `n`, `i`, `j` ... serviront à stocker des valeurs d'**indices**, les variables `u`, `v`, `w` ... serviront quant à elles à stocker des valeurs de **termes** des suites. Même si la suite s'appelle autrement que (u_n), on appelle `u` la variable stockant son terme.

4.1. Calcul du n-ième terme

SUITE EXPLICITE. C'est le cas le plus simple, il suffit de renvoyer l'expression correspondant au terme saisit par l'utilisateur. Voici par exemple le code de la fonction `terme_u(a,n)` qui renvoie le terme u_n avec a et n en paramètre de fonction :

Terme n d'une suite définie explicitement

```
def terme_u(a, n):
    """
    renvoie la valeur de u_n lorsque u_1=a
    """
    u = (1+a/n)**n
    return u

>>> terme_u(2, 1)
3.0
>>> terme_u(0, 1)
1.0
```

CAS PARTICULIERS DES SOMMES (SÉRIES) ET PRODUITS. Des suites peuvent être définies à l'aide d'une somme ou d'un produit. On utilisera alors les méthodes vues dans le chapitre sommes/produits du cours de Mathématiques.

(Calcul de $\sum_{k=p}^{n} a_k$)

```
def somme_a(p, n):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += a_k # le terme a_k est à taper à la main en \
        ↪ fonction de la somme
    return S
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def somme_cos(p, n, x):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += ma.cos(k*x)
    return S

>>> somme_cos(0, 10, 1)
-0.4174477464559059
>>> somme_cos(0, 10, 0) # résultat attendu car on somme 1, onze \
↪ fois
11.0
```

(Calcul de $\prod_{k=p}^{n} a_k$)

```
def produit(p, n):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= a_k # à adapter en fonction de la somme
    return P
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\prod_{k=p}^{n} e^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def produit(p, n, x):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= ma.exp(k*x)
    return P

>>> produit(0, 10, 1)
7.694785265142015e+23
>>> produit(0, 10, 0) # résultat attendu
```

```
1.0
```

Suite récurrente d'ordre 1. Pour calculer v_n on procède ainsi.

1. On prévoit un test `if` pour la condition initiale, puis :
2. on initialise une variable `u` avec la valeur de v_0.
3. On parcourt à l'aide d'une boucle `for` tous les indices i de 1 à n (l'indice mathématique correspondant). Pour chaque valeur de i, on remplace `u` (qui contient v_{i-1}) par sa nouvelle valeur, v_i, à l'aide de la formule de récurrence.
4. En sortie de boucle, `u` contient la valeur de v_n ; il suffit donc de renvoyer `u`.

Voici par exemple le code de la fonction `terme_v(a, n)` qui renvoie le terme v_n avec $v_0 = a$ et n en paramètre de fonction :

■■ Terme n d'une suite récurrente d'ordre 1

```python
def terme_v(a, n):
    """
    renvoie la valeur de v_n lorsque v_0 = a
    """
    if n == 0:
        return a
    else:
        u = a
        for i in range(1, n+1):
            # u est ici la valeur précédente
            u = u + ma.exp(u)
            # v est ici la valeur suivante
        return u
```

```
>>> terme_v(0, 1)
1.0
>>> terme_v(0, 2)
3.718281828459045
```

Remarque 12 (Version « universelle » sans `if`) Le test `if` n'est ici pas obligatoire. En effet, si `n = 0` alors la boucle `for` ne s'exécutera pas (bornes dans le mauvais sens) et donc on renverra bien `v = a`.

Suite récurrente d'ordre 2. Pour calculer w_n on procède ainsi :

1. On prévoit un test `if` pour les deux conditions initiales, puis :
2. on initialise **deux** variables, `u` et `v`, avec les valeurs de w_0 et de w_1.
3. On parcourt à l'aide d'une boucle `for` tous les indices i de 2 à n (l'indice mathématique correspondant). Pour chaque valeur de i, on calcule le terme suivant noté **w** à l'aide de la relation de récurrence puis on remplace **simultanément** (donc au moyen d'une **double-affectation**)`u` et `v` (qui contiennent respectivement les valeurs de w_{i-1} et de w_i) par les nouvelles valeurs (qui contiennent alors respectivement les valeurs de w_i et w_{i+1}).
4. En sortie de boucle, `v` contient la valeur de w_n ; il suffit donc de renvoyer `w`.

Voici par exemple le code de la fonction `terme_w(a, b, n)` qui renvoie le terme w_n avec $w_0 = a$, $w_1 = b$ et n en paramètre de fonction.

■■ Terme n d'une suite récurrente d'ordre 2

```python
def terme_w(a, b, n):
    """
    renvoie la valeur de w_n lorsque w_0 = a et w_1 = b
    """
    if n == 0:
        return a
    elif n == 1:
        return b
    else:
        u, v = a, b
        for i in range(2, n+1):
                                          u contient w_{i-1} et v contient w_i
            u, v = v, ma.cos(u+v)/i
                                          u contient désormais w_i et v contient w_{i+1}
        return v
```

```
>>> terme_w(0, 1, 0)
0
>>> terme_w(0, 1, 1)
1
>>> terme_w(0, 1, 2)
0.2701511529340699
```

Remarque 13 (Version « universelle » sans `if`) Là encore, le test `if` n'est pas indispensable. Il est possible d'adapter la seconde partie de la fonction (changement de boucle `for` et dans la récurrence) afin qu'elle convienne également aux cas `n = 0` et `n = 1`.

```
def terme_w_bis(a, b, n):
    """
    renvoie la valeur de w_n lorsque w_0 = a et w_1 = b
    """
    u, v = a, b
    for i in range(1, n+1):
        u, v = v, ma.cos(u+v)/(i+1)
    return u
```

```
>>> terme_w_bis(0, 1, 0)
0
>>> terme_w_bis(0, 1, 1)
1
>>> terme_w_bis(0, 1, 2)
0.2701511529340699
```

Elle renvoie bien également les bons termes.

4.2. Calcul du premier terme/indice vérifiant une condition

Pour réaliser ces fonctions, il va falloir calculer les termes successivement jusqu'à ce que la condition soit vérifiée. Pour cela on utilisera une boucle `while` : tant que la condition **n'est pas vérifiée**, on calcule le terme suivant; reste alors à renvoyer le dernier terme/indice. On parle en général *d'algorithme de seuil.*

Attention

Contrairement aux boucle `for`, une boucle `while` ne permet pas de parcourir automatiquement les différents indices. Il faudra donc dans nos programmes introduire une variable contenant la valeur de l'indice, l'initialiser correctement et l'augmenter de 1 à chaque passage dans la boucle.

SUITE EXPLICITE. Par définition de la limite, on sait par exemple que comme la suite (u_n) converge vers e^a, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - e^a| < \varepsilon.$$

Voici une fonction cherchant l'entier n_0 en question.

■■ Algorithme de seuil pour une suite explicite

```
def seuil_u(a,eps):
    """
    renvoie le premier indice n pour lequel |u_n-exp(a)|<eps
    """
    n = 1
    u = (1+a/n)**n
    while abs(u-exp(a)) >= eps:
        n += 1
        u = (1+a/n)**n
    return n
```

Remarque 14 Il est parfois possible de calculer l'entier n_0 explicitement en résolvant une équation/inéquation, mais cela n'est pas possible sur cet exemple (même chose pour les suivants).

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 1. Pour réaliser ces fonctions, il y a un unique changement à apporter aux fonctions précédentes : remplacer la boucle `for` par une boucle `while`.

On sait par exemple que la suite (v_n) tend en croissant vers $+\infty$, donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow v_n \geqslant A.$$

Voici la fonction qui renvoie l'indice n_0, a et A étant en paramètre de fonction.

■■ Algorithme de seuil pour une suite récurrente d'ordre 1

```
def seuil_v(a, A):
    """
    renvoie le premier indice n pour lequel v_n >= A
    """
    n = 0
    v = a
    while v < A:
        n += 1
        v = v + ma.exp(v)
    return n
```

```
>>> n_0 = seuil_v(1, 10)
>>> n_0
2
>>> terme_v(1, n_0)
44.911837503175164
>>> terme_v(1, n_0-1)
3.718281828459045
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. Pour réaliser ces fonctions, il y a un unique changement à apporter aux fonctions précédentes : remplacer la boucle `for` par une boucle `while`.

On sait par exemple que la suite (w_n) converge vers 0, donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow |w_n| < \varepsilon.$$

Voici la fonction qui renvoie l'indice n_0, a, b et ε étant en paramètre de fonction.

■■ Algorithme de seuil pour une suite récurrente d'ordre 2

```python
def seuil_w(a, b, eps):
    """
    renvoie le premier indice n pour lequel |w_n|<eps
    """
    n = 0
    u, v = a, b
    while abs(u) >= eps:
            n += 1
            u, v = v, ma.cos(u+v)/n
    return n

>>> n_0 = seuil_w(1, 1, 10**(-3))
>>> n_0
1001
>>> terme_w(0, 1, n_0)
0.000998998999007198
>>> terme_w(0, 1, n_0-1)
0.00099999799399421
```

4.3. Construction de la liste des termes et tracé

On construit la liste de proche en proche à l'aide d'une boucle `for` ou `while` et de la méthode `append` sur les listes. Vous noterez que les versions avec seuil permettent de retrouver les algorithmes de seuil précédents (en renvoyant la longueur de la liste obtenue).

SUITE EXPLICITE. On donne à titre d'exemple les fonctions qui renvoient la liste des termes u_1 à u_n.

■■ Liste de termes sous condition ou non – Suite explicite

```python
def liste_terme_u(a, n):
    """
    renvoie la liste [u_1,...,u_n] (u_0 n'existe pas !)
    """
    L = []
    for i in range(1, n+1):
        L.append((1+a/i)**i)
    return L

>>> liste_terme_u(1, 10)
[2.0, 2.25, 2.37037037037037, 2.44140625, 2.4883199999999994, \
↪ 2.5216263717421135, 2.546499697040712, 2.565784513950348, \
↪ 2.5811747917131984, 2.5937424601000023]

def liste_seuil_u(a, eps):
    """
    renvoie la liste [u_1,...,u_n] où n est le premier indice n \
    ↪ pour lequel |u_n-exp(a)|<eps"""
    n = 1
    L = [(1+a/n)**n]
    while abs(L[-1] - ma.exp(a)) >= eps:
        n += 1
        L.append((1+a/n)**n)
    return L

>>> liste_seuil_u(1, 10**(-1))
[2.0, 2.25, 2.37037037037037, 2.44140625, 2.4883199999999994, \
↪ 2.5216263717421135, 2.546499697040712, 2.565784513950348, \
↪ 2.5811747917131984, 2.5937424601000023, 2.6041990118975287, \
↪ 2.613035290224676, 2.6206008878857308]
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 1. On construit une liste `L` telle que `L[i]` contienne la valeur de v_i. Il n'est alors plus nécessaire de conserver le terme précédent dans une variable : lors du calcul de v_i, on dispose de la valeur de v_{i-1}, c'est précisément `L[-1]`, le dernier terme ajouté.

On donne à titre d'exemple une fonction qui renvoie la liste des termes v_0 à v_n et une autre qui renvoie la liste de tous les termes de (v_n) jusqu'à ce que $v_n \geqslant \mathrm{A}$.

Liste de termes sous condition ou non – Suite d'ordre 1

```
def liste_terme_v(a, n):
    """
    renvoie la liste [u_0,...,u_n]
    """
    L = [a]
    for _ in range(1, n+1):
        L.append(L[-1] + ma.exp(L[-1]))
    return L

>>> liste_terme_v(1, 3)
[1, 3.718281828459045, 44.911837503175164, 3.1986240606431162e+19]

def liste_seuil_v(a, A):
    """
    renvoie la liste [v_0,...,v_n] où n est le premier indice n \
    ↪ pour lequel v_n>=M
    """
    n = 0
    L = [a]
    while L[-1] < A:
        n += 1
```

ici cet entier n ne sert finalement pas car la récurrence a des coefficients indépendants de n

```
        L.append(L[-1] + ma.exp(L[-1]))
    return L

>>> liste_seuil_v(1, 3)
[1, 3.718281828459045]
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. On construit une liste L telle que L[i] contienne la valeur de w_i. Là encore, il n'est plus nécessaire de conserver les termes précédent dans des variables : lors du calcul de w_i, on dispose de la valeur de w_{i-1} dans L[i-1] et de w_{i-2} dans L[i-2]. On donne à titre d'exemple une fonction qui renvoie la liste des termes w_0 à w_n et une autre qui renvoie la liste de tous les termes de (w_n) jusqu'à ce que $|w_n| < \epsilon$. Notons que dans deux fonctions, et ce afin d'éviter la gestion de cas particuliers, on suppose que la liste finale contient au moins w_0 et w_1.

Liste de termes sous condition ou non – Suite d'ordre 2

```
def liste_terme_w(a, b, n):
    """
    renvoie la liste [w_0,w_1,...,w_n] (n>=1)
    """
    if n == 0:
        return [a]
    elif n == 1:
        return [a, b]
    else:
        L = [a, b]
        for i in range(2, n+1):
                L.append(ma.cos(L[-2]+L[-1])/i)
        return L

>>> liste_terme_w(1, 1, 10)
[1, 1, -0.2080734182735712, 0.23415848554264707, \
↪ 0.24991495098085725, 0.1770213081859069, 0.15170644429544455, \
↪ 0.13520769153107332, 0.11989021517204179, 0.10751539939271154, \
↪ 0.09742545791160233]

def liste_seuil_w(a, b, eps):
    """
    renvoie la liste [w_0,w_1,...,w_n] (n>=1) où n est le premier \
    ↪ indice pour lequel |w_n|<eps
    """
    n = 0
    L = [a, b]
    while abs(L[n]) >= eps:
            n += 1
```

ici cet entier n sert

```
            L.append(ma.cos(L[-2]+L[-1])/n)
    return L
```

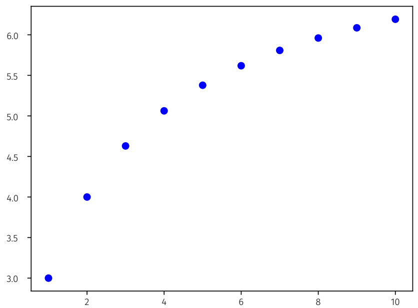
Remarque 15 (Suites imbriquées) Il faut savoir également en pratique adapter ces algorithmes à des suites récurrentes imbriquées.

4.4. Tracer une suite

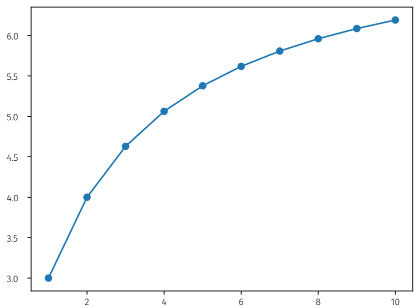
On s'y prend comme pour les fonctions, on a besoin donc de la liste des termes de ladite suite. Traçons par exemple (u_n).

■■ Tracé de la suite (u_n) sur $[\![0, 10]\!]$

```python
import matplotlib.pyplot as plt
n = 10
X = list(range(1, n+1)) # entiers entre 1 et n
Y = liste_terme_u(2, n)
plt.plot(X, Y, "bo") # o : style de marker, des points non reliés
```




```python
plt.plot(X, Y, marker = 'o') # des points reliés cette fois, un \
↪ petit peu plus visuel
```



FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (AN) 4.1 (Trouver la monotonie d'une suite)

- **[Cas 1 : fonction dérivable]** Si $u_n = f(n)$ avec f dérivable, on étudie la fonction. Les monotonies coïncident.
- **[Cas 2 : expression avec des sommes/différences principalement]** Pour étudier la monotonie d'une suite, la méthode la plus fréquente est de calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe.
  - si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante,
  - si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

  En outre, lorsque la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ (*i.e.* de façon explicite), le sens de variation de (u_n) est le même que celui de f sur $[0; +\infty[$.
- **[Cas 3 : expression avec des puissances/produits/quotients principalement]** Si une suite (u_n) est à termes **strictement positifs**, elle est :
  - croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$,
  - décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

  Ce critère est utile seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ donne une expression simple (notamment en cas de présence de factorielles, de puissances...).

Méthode (AN) 4.2 (Montrer que $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$ avec la définition de la limite)

1. Se donner $\varepsilon > 0$.
2. Résoudre l'inéquation $|u_n - \ell| < \varepsilon$ en $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des solutions contient un ensemble de la forme $[\![n_0, \infty[\![$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On a alors prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$.
3. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré que : $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$.

Méthode (AN) 4.3 (Montrer que $u_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ avec la définition de la limite)

1. Se donner $A \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'inéquation $u_n > A$ en $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des solutions contient un ensemble de la forme $[\![n_0, \infty[\![$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On a alors prouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies u_n > A$.
3. Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a montré que : $u_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

Méthode (AN) 4.4 (Déterminer des équivalents à l'aide d'un encadrement) Supposons que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ au moins pour n assez grand. Alors si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$, $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$ où (a_n) est une suite strictement positive, on montre que $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_n$ en :

1. divisant par a_n tout l'encadrement : $\dfrac{u_n}{a_n} \leqslant \dfrac{v_n}{a_n} \leqslant \dfrac{w_n}{a_n}$.
2. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement en faisant $n \longrightarrow \infty$.

La même méthode s'applique pour les suites strictement négatives bien sûr, en inversant l'encadrement.

Méthode (AN) 4.5 (Déterminer un équivalent d'une somme) Se ramener à une limite usuelle à l'aide d'une factorisation.

Méthode (AN) 4.6 (Déterminer un équivalent d'une composée) Il faut utiliser la transitivité de l'équivalence et donc, contrairement à d'habitude, travailler « de l'extérieur vers l'intérieur ».

Méthode (AN) 4.7 (Plan d'étude d'une suite implicite)

1. Établir l'existence et l'unicité de la suite grâce au théorème de la bijection.
2. Chercher la monotonie en cherchant le signe de $f_{n+1}(x_n)$. Par exemple, si $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$, on exploite ensuite la monotonie de f_{n+1} pour comparer x_n et x_{n+1}.
3. Trouver la valeur de la limite : en général on raisonne par l'absurde dans l'identité $f_n(x_n) = 0$.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Donner la définition de $u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} \ell$	$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \lvert u_n - \ell\rvert < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \lvert u_n - \ell\rvert < \varepsilon$	*Attention aux quantificateurs*
Donner la définition de $u_n \xrightarrow{n\longrightarrow\infty} +\infty$	$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, u_n > M$ $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, u_n > M$	*Attention aux quantificateurs*
Énoncer la définition et le théorème des suites adjacentes	*Définition : deux suites de monotonie différente dont la différence tend vers zéro. Théorème : les deux suites convergent vers la même limite Définition : deux suites de monotonie différente dont la différence tend vers zéro. Théorème : les deux suites convergent vers la même limite*	*Attention au mélange entre les deux !*

5. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les limites :
   - Connaître l'idée intuitive de la définition mathématique des limites . . . . ☐
   - savoir déterminer des limites en utilisant les théorèmes (somme, produit, quotient) . . . . ☐
   - savoir utiliser le théorème d'encadrement et les théorèmes de comparaison . . ☐
   - Connaître les croissances comparées et savoir les détecter . . . . ☐
   - savoir appliquer le théorème de la limite monotone . . . . ☐
2. Savoir reconnaître les suites adjacentes mutuelle, et ne pas mélanger hypothèses (monotonie et différence) et conclusion (convergence) . . . . ☐
3. Savoir démontrer que deux suites sont équivalentes . . . . ☐

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

Exercice 1 | Propositions sur les suites Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis les nier :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $m\in\mathbb{R}$.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.
7. La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
8. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution (exercice 1) Étude de chaque propriété :

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n$
   Négation : $\exists n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}<u_n$.
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}<u_n$
   Négation : $\exists n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}\geqslant u_n$.
3. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0$
   Négation : $\exists n\in\mathbb{N},\ u_n\neq u_0$
4. $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leqslant M$
   Négation : $\forall M\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{N},\ u_n>M$.
5. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant m$
   Négation : $\exists n\in\mathbb{N},\ u_n<m$.
6. $\exists m\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant m$
   Négation : $\forall m\in\mathbb{R}, \exists n\in\mathbb{N},\ u_n<m$.
7. $\forall A\in\mathbb{R}, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0 \Longrightarrow u_n\geqslant A$
   Négation : $\exists A\in\mathbb{R}, \forall n_0\in\mathbb{N}, \exists n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0$ **et** $u_n<A$.
8. $\exists \ell\in\mathbb{R}, \forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n-\ell|<\varepsilon$.
   Négation : $\forall \ell\in\mathbb{R}, \exists\varepsilon\in\mathbb{R}^+, \forall n_0\in\mathbb{N}, \exists n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0$ **et** $|u_n-\ell|\geqslant\varepsilon$.

5.1. Suites explicites

Exercice 2 | Études de monotonies Étudier la monotonie (ou éventuellement APCR) des suites définies par :

1. $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\right)-n$
2. $\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad u_n=\frac{\ln(n)}{n}$
3. $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$
4. $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=n+2(-1)^n$
5. $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}$,
6. $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{n^n}{n!}$.

Solution (exercice 2)

1. La suite (u_n) est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}-(n+1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+n=\frac{1}{2^{n+1}}-1.$$
   Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2^{n+1}}<1$. Ainsi la suite $\boxed{(u_n)\text{ est décroissante}}$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite définie explicitement et $u_n=f(n)$ avec
$$f: x\longmapsto f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$
   L'étude de la monotonie de la fonction f sur $[1,+\infty[$ permet d'en déduire directement la monotonie de la suite.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. On obtient
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$
   Étudions le signe de $1-\ln x$ ($x^2\geqslant 0$ donc le signe de la dérivée est bien le signe de $1-\ln x$) : $1-\ln x>0 \iff \ln x<1 \iff x<e$ car la fonction exponentielle est strictement croissante.

Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Ainsi, à partir du rang 3, la suite $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante}}$.

3. La suite (u_n) est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &\leqslant 0 \quad \text{puisque } \sqrt{2n+3} \geqslant \sqrt{2n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

4. On remarque que

$u_{n+1}-u_n = n+1+2(-1)^{n+1}-n-2(-1)^n = 1+2(-1)^{n+1}+2(-1)^{n+1} = 1+4(-1)^{n+1}$.

Ainsi, si $n=2p$ pair, on obtient : $u_{2p+1}-u_{2p} = 5 > 0$ et si $n=2p+1$ impair, on obtient : $u_{2p+2}-u_{2p+1} = -3 < 0$. Ainsi la suite $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas monotone}}$.

5. La suite (u_n) est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k\ln k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} > 0.$$

Ainsi, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

6. La suite u est bien entendu strictement positive. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)}n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

Exercice 3 | Limites de suites définies explicitement Étudier le comportement en $+\infty$ des suites ci-dessous, éventuellement au moyen d'équivalents.

1. $u_n = \dfrac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
2. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
3. $u_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{2^n+n}{2^n}$
5. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
7. $u_n = \dfrac{3^n-4^n}{3^n+4^n}$
8. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$
9. $u_n = n^2 - n\cos n + 2$
10. $u_n = \dfrac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$
11. $u_n = \ln(2^n+n)$
12. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
13. $u_n = (\ln n)^n$
14. $u_n = \dfrac{n^3+2^n}{3^n}$
15. $u_n = (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}}$
16. $u_n = n^2\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-1\right)$.

Solution (exercice 3) Je ne donne ici que les réponses et quelques indications pour trouver les limites demandées. Une telle rédaction dans une copie serait très insuffisante.

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = +\infty$ par composée et produit de limite car $\cos(0)=1$.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln(n+1)-\ln(n^2) = -\infty$ en utilisant $\ln\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ et le théorème des monômes de plus haut degré.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$ en utilisant le fait que $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ (limite très classique fait en cours).
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{2^n} = 1$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme dominant, à savoir 2^n et en utilisant une croissance comparée car $2^n = e^{n\ln 2}$.
5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)} = 1$ en mettant en facteur en haut et en bas n et en remarquant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^3)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée.
6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}$ en écrivant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et d'après le théorème sur les monômes de plus haut degré.
7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n-4^n}{3^n+4^n} = -1$ en mettant en facteur en haut et en bas 4^n le terme dominant et appliquant le théorème sur les suites géométriques.
8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} = 0$ en utilisant le théorème des gendarmes car : $0 \leqslant \dfrac{1+(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{2}{n}$.
9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 - n\cos n + 2 = +\infty$ en mettant en facteur le terme dominant n^2 et en utilisant le théorème des gendarmes avec $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$.
10. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!} = 0$ en utilisant la définition des factorielles.
11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln(2^n+n) = +\infty$ par propriété sur les somme et composée de limites.

12. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ car $n^{1/n} = e^{1/n \ln n}$ puis par croissance comparée, on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

13. $\lim_{n\to\infty} (\ln n)^n = +\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée ici, il suffit d'écrire que $(\ln n)^n = e^{n\ln(\ln n)}$.

14. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2^n}{3^n} = 0$ en mettant 2^n en facteur au numérateur et en utilisant ensuite le théorème sur la convergence des suites géométriques et les croissances comparées car $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{e^{n\ln 2}} = 0$.

15. $\lim_{n\to\infty} (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$ en transformant l'expression en mettant le terme dominant n^2 en facteur :

$$(n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{1/n\ln(n^2+n+1)}.$$

Le terme en exposant dans l'exponentielle est alors

$$\frac{\ln\left(n^2+n+1\right)}{n} = \frac{\ln\left(n^2\right)}{n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n}.$$

On obtient alors la limite voulue en utilisant les croissances comparées.

16. $\lim_{n\to\infty} n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right)$: on utilise ici les équivalents usuels. On a : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^2 \times \left(-\frac{1}{2n^2}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\lim_n +\infty u_n = -\frac{1}{2}$.

Exercice 4 | Étude de la suite de Poisson On considère dans cet exercice la suite (u_n) définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\lambda^n}{n!}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

1. Étudier la monotonie de (u_n) dans les cas $\lambda = 1, \lambda = 2$.
2. En cherchant une relation de récurrence sur les termes de (u_n), écrire une fonction d'en-tête `trace_poisson(lamba)` sans argument qui trace la suite (u_n) sur $[\![0\,,\,10]\!]$ pour $\lambda \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$. Que conjecturer quant à la monotonie ? la nature ?
`lamba` correspond donc ici bien sûr à λ.
3. Démontrer ces conjectures.

Solution (exercice 4)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\lambda}{n+1} - 1\right) = \frac{\lambda^n}{n!}\,\frac{\lambda-n-1}{n+1}.$$

Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ si et seulement si $\lambda - n - 1 \leqslant 0$ donc si et seulement si $n \geqslant \lambda - 1$.

- Lorsque $\lambda = 1$, on constate que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.
- Lorsque $\lambda = 2$, on constate que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 1}$, et croissante entre $n = 0$ et $n = 1$.

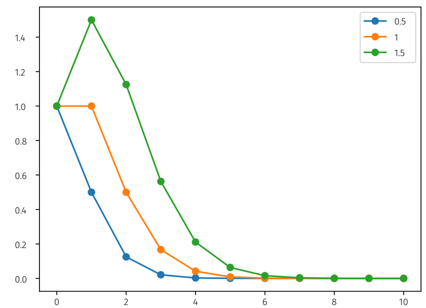
2. On a la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} \times \frac{\lambda}{n!} = \frac{\lambda}{n+1} \times u_n.$$

Avec en terme initial $u_0 = 1$. D'où le programme ci-après pour construire la liste des $n+1$ premiers termes.

```
def trace_poisson(lamba):
    """
    Renvoie la liste [u_0,...,u_n]
    """
    L = [1]
    u = 1
    for i in range(1, n+1):
        u = u*(lamba/i)
        L.append(u)
    return L

for lamba in [1/2, 1, 3/2]:
    plt.plot(trace_poisson(lamba), label=str(lamba),marker = \
    ↪ 'o')
    plt.legend()
```



On conjecture alors que la suite semble tendre vers zéro et pour tous les λ testés. Pour la monotonie, on constate qu'elle semble décroissante globalement si $\lambda \in [0,1]$ et décroissante à partir d'un certain rang si $\lambda > 1$. C'est ce que nous allons établir.

3. Par croissances comparées, on a $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$.
Pour la monotonie, on reprend les calculs précédents, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ si et seulement si
$$n \geqslant \lambda - 1 \iff n \geqslant \lfloor \lambda - 1 \rfloor + 1.$$
On rappelle que $n_\lambda = \lfloor \lambda - 1 \rfloor + 1$ est le plus petit entier supérieur à $\lambda - 1$. Deux cas se présentent alors :
   - Si $\lambda > 1$ alors $\lambda - 1 > 0$ et (u_n) est décroissante à partir du rang n_λ.
   - Si $\lambda \in [0,1]$, alors $\lambda - 1 \leqslant 0$ et donc (u_n) est décroissante.

5.2. Suites définies par des sommes ou des produits

Exercice 5 | En encadrant les termes généraux, étudier la convergence des suites suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}.$

Solution (exercice 5) Comme souvent lorsque l'on doit étudier des suites définies par des sommes, on essaye d'encadrer le terme général de la suite en utilisant que k est compris entre, par exemple, 1 et n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:
$$1 \leqslant k \leqslant n \iff n^2+1 \leqslant n^2+k \leqslant n^2+n \iff \frac{1}{1+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+n}.$$
Comme la dernière inégalité est vraie pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on somme cette inégalité pour k allant de 1 à n et on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \iff \frac{n}{1+n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n(1+n)}.$$
Or le théorème sur les monôme de plus haut degré pour les limites donne
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n^2} = 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n}.$$
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Le même raisonnement donne :
$$1 \leqslant k \leqslant n \iff \frac{n}{1+n^2} \geqslant \frac{n}{n^2+k} \geqslant \frac{n}{n^2+n}.$$
Puis, en sommant, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} \geqslant u_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \iff \frac{n^2}{1+n^2} \geqslant u_n \geqslant \frac{n}{1+n}.$$
Or le théorème sur les monômes de plus haut degré pour les limites donne
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n}.$$
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
3. Le même type de raisonnement donne :
$$1 \leqslant k \leqslant n \iff \frac{k}{1+n} \geqslant \frac{k}{n+k} \geqslant \frac{k}{2n}.$$
Puis, en sommant, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} \geqslant u_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n} \iff \frac{n(n+1)}{2(n+1)} \geqslant u_n \geqslant \frac{n(n+1)}{4n} \iff \frac{n}{2} \geqslant u_n \geqslant \frac{n+1}{4}.$$
Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{4} = +\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant \frac{n+1}{4}$, le théorème de minoration assure que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 6 |

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right).$$
2. En déduire les limites quand n tend vers $+\infty$ des deux suites (u_n) et (v_n) dont le terme général est pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$. En déduire un équivalent simple de u_n.

Solution (exercice 6)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Quand une expression comporte des racines carrées, une idée est d'utiliser la quantité conjuguée. On obtient alors :
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$
On obtient alors :
$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \iff \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n}.$$
Or la dernière inégalité est toujours vérifiée car $n+1 \geqslant n$ et que la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Un raisonnement analogue permet de montrer l'autre sens de l'inégalité.

2. • Pour tout $k \geqslant 1$, on a donc démontré que

$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

On somme alors cette inégalité pour k allant de 1 à n et on obtient

$$2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leqslant u_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right).$$

Les deux sommes de chaque côté sont télescopiques et se calculent donc grâce à un changement de variable. Faisons le par exemple pour la première :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \sum_{k=2}^{n+1}\sqrt{k}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-1.$$

Un calcul similaire donne pour la deuxième somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) = \sqrt{n}.$$

Ainsi, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n}.$$

• On peut alors en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ en utilisant le théorème de minoration : en effet, on a

$$u_n \geqslant 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \lim_{n\longrightarrow+\infty} 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty.$$

• En divisant l'inégalité trouvée ci-dessus par $\sqrt{n}>0$, on obtient que

$$2\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant v_n \leqslant 2.$$

Or, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} 2\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$$

et ainsi le théorème des gendarmes assure que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 2.$$

Conséquence immédiate : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}$.

Exercice 7 | Montrer que les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1},\quad T_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}.$$

sont adjacentes. Qu'en conclure ?

Solution (exercice 7)

• Soit $n \geqslant 1$, on a :

$$S_{n+1}-S_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

en utilisant la quantité conjuguée. On a de plus :

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} \geqslant 2\sqrt{n+1} \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Longrightarrow S_{n+1}-S_n \geqslant 0.$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$

• Soit $n \geqslant 1$, on a :

$$T_{n+1}-T_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

en utilisant la quantité conjuguée. On a de plus :

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant 2\sqrt{n+1} \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Longrightarrow T_{n+1}-T_n \leqslant 0.$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$

• Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $T_n - S_n = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. Afin de lever l'indétermination, on utilise la quantité conjuguée et on obtient que : $T_n - S_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Ainsi par propriété sur les composée, somme et quotient de limites, on a : $\boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty} T_n - S_n = 0.}$

Ainsi on vient de montrer que $\boxed{\text{les suites } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (T_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes.}}$
D'après le théorème sur les suites adjacentes,
$\boxed{\text{les suites } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (T_n)_{n\geqslant 1} \text{ convergent vers la même limite.}}$

Exercice 8 | Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor$.

Solution (exercice 8) La seule chose que l'on puisse faire avec une partie entière est d'utiliser l'inégalité qui la détermine, à savoir que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$$

avec $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$. On sait donc que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\lfloor kx \rfloor \leqslant kx < \lfloor kx \rfloor + 1 \iff kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx.$$

On somme alors cette inégalité pour k allant de 1 à n et on obtient que

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx \iff \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$$

car $\dfrac{1}{n^2} > 0$. Calculons séparément chaque somme :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{n}{n^2} = \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n}.$$

Un calcul similaire donne pour l'autre somme

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx = \frac{xn(n+1)}{2n^2}.$$

On obtient alors que

$$\frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{x(n+1)}{2n}.$$

Or, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{x}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(n+1)}{2n},$$

ainsi, le théorème des gendarmes assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}}.$$

Exercice 9 |

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) < x$.
2. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Solution (exercice 9)

1. Il s'agit ici d'étudier les variations des deux fonctions suivantes : $f : x \longmapsto x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ et $g : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ et d'en déduire leur signe. à faire.
2. Une idée classique lorsque l'on doit étudier un produit est de le transformer en somme en passant au logarithme népérien. C'est ce que l'on va faire ici.
   - On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = \ln(p_n)$. Par propriété sur le logarithme d'un produit, on obtient que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$
   - On encadre S_n en encadrant le terme à l'intérieur grâce à l'inégalité démontrée à la question précédente puis on somme. On obtient donc en posant $x = \dfrac{k}{n^2} > 0$ car $k \geqslant 1$:
   $$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leqslant \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}.$$
   On somme alors cette inégalité pour k allant de 1 à n et on obtient, en utilisant la linéarité de la somme, que :
   $$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$
   $$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant S_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.$$
   - En utilisant le théorème sur les monômes de plus haut degré, on remarque que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = 0.$$
   Ainsi en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.
   - Par définition de S_n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $p_n = e^{S_n}$. Puis par propriété sur la composition de limite, on obtient que : $\lim_{n\to+\infty} p_n = e^{\frac{1}{2}}$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ converge vers } e^{\frac{1}{2}}.}$

5.3. Suites récurrentes

Exercice 10 | Calcul de termes explicites (1) Pour ces suites définies par récurrence, calculer le terme général en fonction de n :

1. $u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = \dfrac{3(n+1)}{2n} u_n.$ *__Indication :__ On cherchera à conjecturer une formule, que l'on démontrera par récurrence*
2. $u_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n^3.$ *__Indication :__ On pourra procéder comme précédemment, ou en introduisant la suite $(\ln(u_n))_n$ après avoir justifié son existence.*

Solution (exercice 10) Pour toutes ces suites, on conjecture le résultat en itérant la relation de récurrence puis on le démontre rigoureusement par récurrence. Je ne fais pas ici la récurrence mais elle doit être présente dans toute copie. Je ne donne ici que le résultat, à savoir u_n en fonction de n.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}} n u_1 = \boxed{\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}} n}$. Puis on prouve cette formule avec une récurrence.
2. - Méthode 1 : on conjecture que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times 2^3 \times 2^{3^2} \times \cdots \times 2^{3^{n-1}} u_0^{3^n} = 2^{\sum_{k=0}^{n} 3^k} = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}},$$
   puis on fait une récurrence.
   - Méthode 2 : par récurrence immédiate, la suite (u_n) est bien strictement positive, et donc (v_n) existe. En passant au logarithme dans la relation définissant (u_n), on déduit :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \ln 2 + 3v_n.$$
   On en déduit que (v_n) est une suite arithmético-géométrique. La méthode habituelle donne ensuite v_n en fonction de n, puis $u_n = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2}$, soit $\boxed{u_n = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}}$.

Exercice 11 | Calcul de termes explicites (2) Soit une suite (u_n) qui vérifie la relation de récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$.

1. Calculer $1 - u_{n+1}$ en fonction de $1 - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n), si elle existe, en fonction du premier terme u_0.

Solution (exercice 11)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = 1 + u_n^2 - 2u_n = (1 - u_n)^2$.
   On pose $v_n = 1 - u_n$. On a alors $v_{n+1} = v_n^2$. Essayons de calculer v_n : on a $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_0^4$, $v_3 = v_0^8$. On conjecture donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0^{2^n}$.
   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}$.

   Initialisation. pour $n = 0$ on a $v_0^{2^0} = v_0$. La propriété est vérifiée au rang zéro.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a vu que : $v_{n+1} = v_n^2$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence et on obtient
   $$v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}.$$
   Conclusion : il résulte du principe de récurrence que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}.$$
   On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - (1 - u_0)^{2^n}$.
   - Si $1 - u_0 > 1 \iff u_0 < 0$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - u_0)^{2^n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
   - Si $u_0 = 0$, alors $1 - u_0 = 1$ et ainsi : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
   - Si $-1 < 1 - u_0 < 1 \iff 0 < u_0 < 2$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
   - Si $u_0 = 2$, alors $1 - u_0 = -1$ et $(1 - u_0)^{2^n} = 1$, et ainsi : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
   - Si $1 - u_0 < -1 \iff u_0 > 2$, alors $(1 - u_0)^2 > 1$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - u_0)^{2^n} = +\infty$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 12 | 👁 $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f polynomiale On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \dfrac{3}{4} u_n^2 - 2u_n + 3$.

1. Étudier la fonction f associée.
2. Étudier le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$.
3. Calculer les limites finies éventuelles de la suite (u_n).
4. On suppose que $u_0 > 2$.
   - **4.1)** Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n > 2$.
   - **4.2)** Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   - **4.3)** Étudier la limite de la suite (u_n).
5. On suppose que $u_0 \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$.
   - **5.1)** Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \in \left]\dfrac{2}{3}, 2\right[$.
   - **5.2)** Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   - **5.3)** Étudier la limite de la suite (u_n).

Solution (exercice 12)

1. - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = \dfrac{3}{2} x - 2$.
   - On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   - Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent avec le théorème du monôme de plus haut degré.

2. Le discriminant vaut $\Delta = 0$ et l'unique racine est 2. Ainsi : $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en } 2.}$

3. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et par ailleurs la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en ℓ. Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. De plus on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_{n+1} = \ell$. On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient que : $\ell = f(\ell)$. On a donc : $\ell = f(\ell) \iff g(\ell) = 0 \iff \ell = 2$. $\boxed{\text{La seule limite finie éventuelle est donc } 2.}$

4. **4.1)** On peut commencer par montrer que l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f.
On a f strictement croissante sur $[2,+\infty[$, et $f(2) = 2$. Donc pour tout $x \in [2,+\infty[, f(x) > 2$ et l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : u_n existe et $u_n > 2$.

Initialisation. pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 > 2$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 2$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f. Donc $f(u_n) > 2$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 2$. La propriété est bien héréditaire.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 2.}$

4.2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

4.3)
- La suite (u_n) est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge ou elle diverge vers $+\infty$.
- On suppose par l'absurde que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. On a alors puisque la suite (u_n) est croissante, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant u_0$.
  D'après le théorème de passage à la limite, on obtient donc que : $\ell \geqslant u_0$. Or par hypothèse, on sait que $u_0 > 2$. Ainsi on obtient que : $\ell > 2$. Absurde car la seule limite éventuelle de la suite (u_n) est 2. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$

5. **5.1)** On peut commencer par montrer que l'intervalle $\left]\frac{2}{3},2\right[$ est stable par f. Attention, ici f n'est pas monotone sur $\left]\frac{2}{3},2\right[$, il faut donc traiter les deux intervalles $\left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$ et $\left]\frac{4}{3},2\right]$ séparemment.

Sur $\left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, f est strictement décroissante et $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, $f(x) \in \left]\frac{5}{3},2\right]$, donc $f(x) \in \left]\frac{2}{3},2\right[$.

Sur $\left]\frac{4}{3},2\right]$, f est strictement croissante et $f(2) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \left]\frac{4}{3},2\right]$, $f(x) \in \left]\frac{5}{3},2\right]$, donc $f(x) \in \left]\frac{2}{3},2\right[$.

En en déduit que pour tout $x \in \left]\frac{2}{3},2\right[$, on a bien $f(x) \in \left]\frac{2}{3},2\right[$: l'intervalle $\left]\frac{2}{3},2\right[$ est stable par f.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété « u_n existe et $u_n \in \left]\frac{2}{3},2\right[$. »

Initialisation. pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 \in \left]\frac{2}{3},2\right[$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons là au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in \left]\frac{2}{3},2\right[$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, $u_n \in \left]\frac{2}{3},2\right[$. Or l'intervalle $\left]\frac{2}{3},2\right[$ est stable par f. Donc $f(u_n) \in \left]\frac{2}{3},2\right[$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in \left]\frac{2}{3},2\right[$.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left]\frac{2}{3},2\right[.}$

5.2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

5.3)
- La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.
- Comme la seule limite éventuelle est 2, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 2.}$

5.4. Couples de suites récurrentes

Exercice 13 | Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 3a_n$.

1. Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer b_n en fonction de n.

Solution (exercice 13)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_n + b_n + 3a_n = a_n + b_n$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 1 - a_n$. Ainsi on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \iff a_{n+1} = 1 - 3a_n.$$
On reconnaît une suite arithmético-géométrique. En appliquant la méthode du cours, on obtient :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).}$$
3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+1} = 3a_n$, on a : $b_n = 3a_{n-1}$. Puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{3}{4}\left(1 - (-3)^{n-1}\right).}$

Exercice 14 | 👁 On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :
$$u_1 = 1 \quad v_1 = 12, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = v_n - u_n$. Donner l'expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Donner l'expression de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
4. On souhaite retrouver les résultats précédents à l'aide d'un calcul matriciel.

4.1) On note $P = \begin{pmatrix} \frac{-8}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

4.2) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Chercher une matrice $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$, puis rappeler sans justifier une expression de X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4.3) Calculer $P^{-1}AP$, puis en déduire que A est semblable à une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Donner sans justification une expression de A^n en fonction de D^n.

4.4) Déterminer une expression de (u_n) en fonction de n, puis retrouver la limite de (u_n). *La même démarche pourrait être appliquée à* (v_n).

Solution (exercice 14)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$w_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12}w_n.$$
Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = 11$. On en déduit donc l'expression explicite de w_n :
$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ w_n = w_1\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$
2.
- Étude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$: soit $n \geqslant 1$, on a :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2(v_n - u_n)}{3} = \frac{2}{3}w_n.$$
Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \times 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \geqslant 0.$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
- Étude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
Soit $n \geqslant 1$, on a :
$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-1}{4}w_n.$$
Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{-11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \leqslant 0.$$
Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
- Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$:
On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n - u_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$. Comme : $-1 < \frac{1}{12} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Ainsi, on a donc montré que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent donc vers la même limite.}}$

3.
- Expression de t_n pour tout $n \geqslant 1$:
Soit $n \geqslant 1$, on a : $t_{n+1} = 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est constante égale à } t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99.}$
- Calcul de la valeur de la limite ℓ :
Comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $3u_n + 8v_n = 99$. De plus on a démontré à la question 2 que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

convergent vers la même limite ℓ et ainsi par propriété sur les produits et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(3u_n+8v_n)=11\ell$. Par passage à la limite dans l'égalité : $3u_n+8v_n=99$, on obtient donc que

$$11\ell=99 \iff \boxed{\ell=9.}$$

4. 4.1) À l'aide de la formule du cours, on a $\boxed{\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{11} & \frac{3}{11}\\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11}\end{pmatrix}}$ et P est inversible car de déterminant $11\neq 0$.

4.2) On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}v_n\\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n+\frac{3}{4}v_n\end{cases} \iff \mathrm{X}_{n+1}=\mathrm{AX}_n,\quad \text{avec : } \mathrm{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

On a : $\boxed{\mathrm{X}_n=\mathrm{A}^{n-1}\mathrm{X}_1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

4.3) Après calculs, on trouve $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. On a de plus : $\boxed{\mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}}$.

4.4) On a $\mathrm{X}_1=\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned} u_n &= (\mathrm{X}_n)_{1,1}\\ &= \left(\mathrm{P}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}_1\right)_{1,1}\\ &= \left(\begin{pmatrix}\frac{-8}{3} & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-3}{11} & \frac{3}{11}\\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}\right)_{1,1}\\ &= \frac{3}{11}+\frac{1}{11}2^{5-2n}3^{1-n}+12\times\left(\frac{8}{11}-\frac{1}{11}2^{5-2n}3^{1-n}\right)\\ &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \frac{3+12\times 8}{11}=\frac{99}{11}=\boxed{9}. \end{aligned}$$

5.5. Suites d'intégrales

Exercice 15 | On définit la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\geqslant 0,\quad \mathrm{I}_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, puis calculer $\mathrm{I}_0,\mathrm{I}_1$ et I_2.
2. **2.1)** Démontrer que : $\forall n\geqslant 0,\quad \mathrm{I}_n\geqslant 0.$
   2.2) En déduire que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution (exercice 15)

1. La fonction $\tan^n$ est bien continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc I_n est bien définie. De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}t=\boxed{\frac{\pi}{4}},\\ \mathrm{I}_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(t)\,\mathrm{d}t=\left[-\ln|\cos t|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= 0-\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\boxed{\frac{1}{2}\ln 2}\\ \mathrm{I}_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \end{aligned}$$

2. **2.1)** Soit $n\in\mathbb{N}$, alors $\tan\geqslant 0$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\quad \tan^n(t)\geqslant 0 \implies \boxed{\mathrm{I}_n\geqslant 0.}$$

2.2) La suite (I_n) est donc positive, analysons à présent sa monotonie. Soit $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{n+1}-\mathrm{I}_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\times(\tan(t)-1)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

$\tan-1\leqslant 0$ *sur* $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

La suite (I_n) est donc décroissante, et minorée vers 0 donc $\boxed{\text{converge}}$.

Exercice 16 | 👁 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\geqslant 0,\quad u_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}.$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Solution (exercice 16)

1. On a $u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\arctan(1)-\arctan(0)=\boxed{\frac{\pi}{4}}$. De-même, par calcul direct, $u_1=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\ln|1+t^2|\right]_0^1=\boxed{\frac{\ln 2}{2}}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors

$$\forall t\in[0,1],\quad 0\leqslant\frac{t^n}{1+t^2}\leqslant\frac{t^n}{1+0}.$$

Donc en intégrant entre 0 et 1, on déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant u_n\leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+0}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \boxed{0\leqslant u_n\leqslant \frac{1}{n+1}}.$$

3. Par théorème des gendarmes, comme $\frac{1}{n+1}\xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0$, on obtient $\boxed{u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0}$.

Exercice 17 | On définit la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\geqslant 0,\quad \mathrm{I}_n=\int_1^{\mathrm{e}} x^2(\ln(x))^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que : $\forall x\in[1,\mathrm{e}],\quad 0\leqslant \ln(x)\leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}$. En déduire la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{I}_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\frac{n+1}{3}\mathrm{I}_n$.

Solution (exercice 17)

1. On a :

$$\mathrm{I}_0=\int_1^{\mathrm{e}} x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\mathrm{e}}=\boxed{\frac{\mathrm{e}^3}{3}},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1&=\int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{x^2}_{:=v'(x)}\underbrace{\ln(x)}_{:=u(x)}\mathrm{d}x\\&=-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x+\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}\\&=-\frac{1}{9}\left[x^2\right]_1^{\mathrm{e}}+\frac{\mathrm{e}^3}{3}\end{aligned}$$

intégration par parties, car $\ln, x\longrightarrow \frac{x^3}{3}$ *sont* $\mathscr{C}^1$

2. Sur $[1,\mathrm{e}]$, on a $\ln(x)\in[0,1]$ pour tout $x\in[1,\mathrm{e}]$, donc :

$$\forall x\in[1,\mathrm{e}],\quad 0\leqslant \ln^{n+1}(x)\leqslant \ln^n(x)\leqslant 1.$$

Donc en multipliant par x^2 qui est bien positif, on déduit :

$$\forall x\in[1,\mathrm{e}],\quad 0\leqslant x^2\ln^{n+1}(x)\leqslant x^2\ln^n(x)\leqslant 1.$$

Puis en intégrant : $0\leqslant \mathrm{I}_{n+1}\leqslant \mathrm{I}_n$. Ainsi la suite (I_n) décroît et est minorée par zéro donc $\boxed{\text{converge}}$.

3. Notons $f: x\in[1,\mathrm{e}]\longrightarrow \ln(x)-\frac{x}{\mathrm{e}}$. Alors f est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\geqslant 0$ puisque $x\leqslant \mathrm{e}$ sur le domaine considéré. Ainsi, f est décroissante, donc pour tout $x\in[1,\mathrm{e}]$, $f(x)\leqslant f(\mathrm{e})=0$. Ainsi, f est négative, on a donc bien établi :

$$\boxed{\forall x\in[1,\mathrm{e}],\quad 0\leqslant \ln(x)\leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}}.$$

On intègre alors la relation précédente, après l'avoir élevée à la puissance n (encadrement positif), puis multipliée par x^2 (qui est positif), on obtient :

$$0\leqslant \mathrm{I}_n\leqslant \int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n x^2\,\mathrm{d}x.$$

Mais,

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n x^2\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{\mathrm{e}^n}\int_1^{\mathrm{e}} x^{n+2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\mathrm{e}^n}\left(\frac{\mathrm{e}^{n+3}}{n+3}-\frac{1}{n+3}\right)\\&=\frac{\mathrm{e}^3}{n+3}-\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n+3}\xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 0.\end{aligned}$$

On a donc par théorème d'encadrement, que $\boxed{\lim_{n\longrightarrow\infty}\mathrm{I}_n=0.}$

4. Faisons une intégration par parties, comme nous l'avons faite pour I_1.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+1}&=\int_1^{\mathrm{e}}\underbrace{x^2}_{:=v'(x)}\underbrace{\ln^{n+1}(x)}_{:=u(x)}\mathrm{d}x\\&=-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}(n+1)\ln^n(x)\,\mathrm{d}x+\left[\frac{x^3}{3}\ln^{n+1}(x)\right]_1^{\mathrm{e}}\\&=-\frac{n+1}{3}\mathrm{I}_n+\frac{\mathrm{e}^3}{3}.\end{aligned}$$

intégration par parties, car $\ln^{n+1}, x\longrightarrow\frac{x^3}{3}$ *sont* $\mathscr{C}^1$

Donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{I}_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^3}{3}-\frac{n+1}{3}\mathrm{I}_n}.$$

5.6. Suites implicites

Exercice 18 |

1. Soit $n\geqslant 1$. Montrer que l'équation $x^n+x-1=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par 0.

3. Étudier la monotonie de la suite.
4. Étudier la convergence de la suite.
5. Montrer qu'il est impossible que la suite converge vers une limite $\ell < 1$.
6. Conclure que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = 1$.

Solution (exercice 18)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto f_n(x) = x^n + x - 1$. Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme fonction polynôme. De plus, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n'(x) = nx^{n-1} + 1.$$
Ainsi, sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f_n' est toujours positive comme somme de deux nombres positifs et la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On applique alors le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}^+$. En effet, on a
   - f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$
   - f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   - $f_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

   Ainsi, d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(1) = 1 > 0$. En réappliquant alors le théorème de la bijection sur $[0,1]$, on obtient que : $x_n \in]0,1[$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est majorée par } 1.}$
3. Pour étudier la monotonie de la suite, on doit trouver le signe de $f_n(x_{n+1})$. Soit donc $n \geqslant 1$:
$$\begin{aligned} f_n(x_{n+1}) &= x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 \\ &\geqslant x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 \quad \text{car } x_n \in [0,1] \\ &= f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n). \end{aligned}$$
Or, la fonction f_n est strictement croissante et $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \geqslant x_n$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est croissante}}$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et majorée par 1, ainsi elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ d'après le théorème sur les suites monotones. De plus, un passage à la limite dans l'inégalité : $x_n \in]0,1[$ donne que ℓ vérifie, comme la suite converge vers ℓ : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. On suppose par l'absurde que $\ell < 1$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et majorée, le théorème des suites monotones nous dit aussi que la suite vérifie :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad x_n \leqslant \ell.$$
Ainsi, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ que : $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n$. Or, par hypothèse, on a : $\ell < 1$, ainsi, on sait que : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \ell^n = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on sait que la suite $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0. De plus, par définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on sait que
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad x_n^n + x_n - 1 = 0.$$
Les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont convergentes, on peut donc passer à la limite en faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité ci-dessus. On obtient en utilisant l'unicité de la limite : $0 + \ell - 1 = 0$. Ainsi, on obtient $\ell = 1$. Contradiction car on a supposé que $\ell < 1$.
5. Finalement, on obtient bien que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1. En effet, on sait que $\ell \in [0,1]$ et on a vu que $\ell < 1$ est impossible. Donc $\boxed{\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x_n = 1}$.

Exercice 19 | Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera a_n cette solution.
2. Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante.
3. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution (exercice 19)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$. Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. De plus, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = 3nx^2 + n^2.$$
Ainsi, sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n' est toujours positive comme somme de deux nombres positifs et la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}$. On applique alors le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}^+$. En effet, on a :
   - f_n est continue sur $\mathbb{R}$,
   - f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
   - $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Ainsi, d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f_n(0) = -2 < 0$. Ainsi, en réappliquant le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}^+$, on obtient que : $a_n > 0$.
3. Pour étudier la monotonie de la suite, on doit trouver par exemple le signe de $f_{n+1}(a_{n+1})$.
$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_n) &= (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 \quad \textit{développement} \\ &= f_n(a_n) + \left(a_n^3 + (2n+1)a_n\right) \\ &= 0 + a_n^3 + (2n+1)a_n \quad a_n > 0 \\ &\geqslant 0 = f_{n+1}(a_{n+1}). \end{aligned}$$

Or, f_{n+1} est strictement croissante, donc $a_n \geqslant a_{n+1}$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc $\boxed{\text{décroissante}}$.

4. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ d'après le théorème sur les suites monotones. Et un passage à la limite donne : $\ell \geqslant 0$.
Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$na_n^3 + n^2 a_n - 2 = 0 \iff na_n^3 + n^2 a_n = 2.$$

Si $\ell > 0$, alors le terme de droite de l'égalité ci-dessus tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. Contradiction car il est constant égal à 2. Ainsi, on vient de montrer que : $\ell = 0$. Donc la suite $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ converge vers } 0}$.

Troisième partie

Aléatoire & Statistiques