exercice 1 :

① $|x^2-2x| \leq 2x+5 \quad (E)$

• Pour $x \in]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$,

$(E) \iff x^2-2x \leq 2x+5$

$\iff x^2-4x-5 \leq 0$

$\Delta = 16+20 = 36$

2 sol. réelles : $x_1 = \frac{4-6}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{4+6}{2} = 5$

Donc $S_1 = [-1;5] \cap (]-\infty;0] \cup [2;+\infty[)$

$S_1 = [-1;0] \cup [2;5]$.

• Pour $x \in]0;2[$,

$(E) \iff 2x - x^2 \leq 2x+5$

$\iff x^2+5 \geq 0$ toujours vrai

Donc $S_2 = \mathbb{R} \cap]0;2[=]0;2[$

• Par disjonction des cas :

$S = S_1 \cup S_2 = [-1;5]$.

② $\frac{3x+x^3}{1+3x^2} \in]-1,1[\quad (E)$

$(E) \iff -1 < \frac{3x+x^3}{1+3x^2} < 1$

$\iff -1-3x^2 < 3x+x^3 < 1+3x^2$ (car $1+3x^2>0$)

$\iff -1-3x^2 < 3x+x^3$ et $3x+x^3 < 1+3x^2$

$\iff x^3+3x^2+3x+1 > 0$ et $x^3-3x^2+3x-1 < 0$

$\iff (x+1)^3 > 0$ et $(x-1)^3 < 0$

$\Longleftrightarrow \quad x+1>0 \quad$ et $\quad x-1<0$

car $x \longmapsto x^3$ strict. $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \quad x>-1 \quad$ et $\quad x<1$

$\Longleftrightarrow \quad x \in]-1;1[$.

Donc $S =]-1;1[$.

exercice 2 :

① $\cos(2x) - 2\cos(x) = -\frac{3}{2}$ $\quad (E)$

$(E) \Longleftrightarrow 2\cos^2(x) - 1 - 2\cos(x) = -\frac{3}{2}$

$\Longleftrightarrow 2\cos^2(x) - 2\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$

$\Longleftrightarrow \cos^2(x) - \cos(x) + \frac{1}{4} = 0$

$\Longleftrightarrow \left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

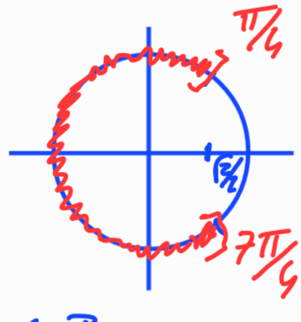
② $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) - \sqrt{2} \leq 0$ $\quad (E)$

$(E) \Longleftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)\right) \leq \sqrt{2}$

$\Longleftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Longleftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$.

$\Longleftrightarrow \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{23\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Donc $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{12} + 2k\pi ; \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \right]$

exercice 3 :

① $z = e^{i\pi/3} + e^{i\pi/6}$

$z = e^{i\pi/4}\left(e^{i\pi/12} + e^{-i\pi/12}\right) = e^{i\pi/4} \times \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0}$

donc $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\pi/4}$

② • $\sin^2(4x)\cos(3x) = \left(\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}\right)$

$= -\frac{1}{8}\left(e^{i8x} - 2 + e^{-i8x}\right)\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right)$

$= -\frac{1}{8}\left(e^{i11x} + e^{i5x} - 2e^{i3x} - 2e^{-i3x} + e^{-i5x} + e^{-i11x}\right)$

$= -\frac{1}{8}\left(2\cos(11x) + 2\cos(5x) - 4\cos(3x)\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(\cos(11x) + \cos(5x) - 2\cos(3x)\right)$

• Soit $f(x) = \sin^2(4x)\cos(3x)$

$f(x) = -\frac{1}{4}\left(\cos(11x) + \cos(5x) - 2\cos(3x)\right)$

une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est F définie par :

$F(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}\sin(11x) + \frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{2}{3}\sin(3x)\right)$

③ $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

$z = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}}\right)^{20} = \sqrt{2}^{20}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} = 2^{10} e^{i\frac{35\pi}{3}}$

$z = 2^{10} e^{i12\pi} e^{-i\pi/3} = 1024\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$z = \boxed{512 - i\,512\sqrt{3}}$

exercice 4 :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$$

① f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^{2}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strict $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

② f est dérivable et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$.

donc f^{-1} est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et

$$\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[,\quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

en particulier, $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))}$ avec $f^{-1}(0) = 0$, $f'(0) = 1$

Donc $(f^{-1})'(0) = 1$.

exercice 5 :

① Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x)=e^x-x$.

f' est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f''(x)=e^x-1$.

$f''(x)=0 \iff e^x=1 \iff x=0$

$f''(x)>0 \iff e^x>1 \iff x>0$

on a donc le tableau suivant:

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	
f	1	$\nearrow$	

1 est le minimum de f sur $[0;+\infty[$.

Donc, $\forall x \in [0;+\infty[$,

$f(x) \geq 1 \geq 0$

Donc, $\forall x \in [0;+\infty[$

$e^x-\frac{x^2}{2} \geq 0$

$e^x \geq \frac{x^2}{2}$

② . $\forall x \in]0;+\infty[$, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$

. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2}=+\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}=+\infty$.