Programme de colles
du 22 au 26/1/2024

- Cette semaine, du calcul matriciel et des questions de cours sur les suites.
- Ne pas hésiter à poser des questions Python sur les matrices. Par exemple, construire une matrice à l'aide d'une double boucle `for`, calculer la puissance k-ième, sommer certains coefficients *etc.*.

1. [MATHS] MATRICES

Attention

- Au sujet des matrices inversibles : la technique d'échelonnement par pivot de GAUß (et par résolution d'un système linéaire) n'a pas encore été vue, elle le sera dans un futur chapitre. Seules les techniques listées ci-dessous sont au programme : définition, polynôme annulateur, à l'aide d'une forme diagonalisée. Ainsi, « déterminer l'inverse de P » où P est une matrice 3×3 quelconque sans autre indication, est pour le moment hors-programme.
- Le déterminant est au programme uniquement en dimension 2.
- Les exercices abstraits faisant appel à la formule explicite du produit matriciel (à l'aide d'une somme) ne sont pas vraiment dans l'esprit du programme, à garder pour la fin de la colle si le reste est réussi. En revanche, elle est apparue en question de cours au concours Agro-Véto, d'où sa présence dans les questions du programme de colle.
- Bien sûr, en ce qui concerne les matrices diagonalisables, les élèves ne savent pas encore comme trouver la matrice P associée. L'idée est pour le moment uniquement de mettre en place le vocabulaire. La seule application de la diagonalisation vue pour le moment est le calcul des puissances.

- **Matrices & Opérations.** Généralités, égalité matricielle, matrices usuelles (nulle, identique, homothétique, ATTILA, élémentaires). Opérations sur les matrices (somme, multiplication externe, multiplication interne). Transposition notée $A^\top$ et propriétés. Codage d'une matrice en Python.
- **Matrices carrées.** Puissances, règles, matrice nilpotente. Cas d'une matrice diagonale. Formule du binôme matriciel. Inversibilité matricielle : définition, propriétés, équivalence d'un inverse à droite ou à gauche (admise), simplification matricielle par une matrice inversible, équation-produit où l'une des matrices est inversible. Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires. Identité de BERNOULLI (non exigible, connaitre la preuve), application à l'inversibilité de $I_n - N$ où N est nilpotente. Premières techniques de calcul d'inverses : existence d'un polynôme annulateur de coefficient constant non nul, cas d'une matrice 2×2 et définition du déterminant dans ce cas-là. Matrices semblables, diagonalisables et trigonalisables. Application au calcul de puissances.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner l'expression en somme du coefficient $(AB)_{i,j}$ d'une matrice produit, définir les matrices I_n, J_n. Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, calculer J_2AJ_2. *(Pour les élèves : en ce qui concerne le produit matriciel, on indique clairement quels sont les formats des matrices* A *et* B*, puis le format de* AB*, avant d'énoncer la formule.)*
2. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :
$$\forall (i,j)\in\{1,\dots n\}^2,\quad a_{ij} = (i+j)^2.$$
Écrire une fonction d'en-tête `creer_matriceA(n)` qui retourne A représentée en tableau `numpy`.
3. Énoncé de la formule du binôme matriciel. Application au calcul des puissances de $A = \begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
4. Définir la notion de matrice inversible, et rappeler les formules :
$$(A\times B)^{-1} = \dots, (A^\top)^{-1} = \dots.$$
5. Définir la notion de matrice inversible et nilpotente. Montrer qu'une matrice nilpotente ne peut être inversible.
6. Définir la notion de matrice inversible, et calculer l'inverse de $M = \begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$ en commençant par montrer que $M^2+2M-3I_3 = 0_3$.
7. Donner la définition de matrices semblables. Lorsque $A\sim B$, montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $A^n \sim B^n$.
8. Donner la définition de matrice diagonalisable. En utilisant $P = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$, montrer que $J_2 = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ est diagonalisable.
9. Citer le théorème d'encadrement. Application à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

10. Citer le théorème de divergence par minoration/majoration. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$, justifier que : $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

11. Suites adjacentes : définition, propriété de convergence. Application à la suite $(\mathrm{S}_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ en montrant que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : toutes les suites.