Chapitre (ALG) 8 — Échelonnement matriciel & Systèmes linéaires

La façade du plus célèbre monument espagnol, la basilique Sagrada Família, comporte différentes sculptures dont un carré magique d'ordre 4 : la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale vaut 33 (l'âge de Jésus à la fin de sa vie).

— Le saviez-vous ?

Résumé & Plan

Ce chapitre développe dans un premier temps la notion de forme échelonnée d'une matrice, nous verrons en quoi cette forme peut nous être utile pour trouver l'inverse d'une matrice inversible, ou encore résoudre des systèmes linéaires d'équations. Nous utiliserons assez largement les résultats et techniques vues dans le Chapitre (ALG) 7.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 1.

1. ÉCHELONNEMENT MATRICIEL

Les objectifs de l'algorithme d'échelonnement d'une matrice, présenté ci-dessous, sont multiples :

- l'analyse de l'inversibilité d'une matrice carrée, et le calcul de son inverse,
- la résolution de systèmes linéaires.
- Nous verrons également d'autres applications (par exemple, trouver des relations linéaires entre plusieurs vecteurs) dans de futurs chapitres.

1.1. Opérations élémentaires

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES LIGNES. L'algorithme d'échelonnement consistera à transformer une matrice initiale en une matrice plus simple dite « échelonnée », en faisant intervenir trois types d'opération sur les lignes que nous définissons dès à présent.

Définition 1 | Opérations élémentaires

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice écrite en lignes $A = \begin{pmatrix} L_1(A) \\ \hline \vdots \\ \hline L_n(A) \end{pmatrix}$. On appelle *opération élémentaire sur les lignes de* A l'une des opérations suivantes pour $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$:

- $L_i(A) \longleftrightarrow L_j(A)$ appelée *permutation des lignes i, j*,
- $L_i(A) \longleftarrow \lambda L_i(A)$ avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,
- $L_i(A) \longleftarrow L_i(A) + \mu L_j(A)$ avec $\mu \in \mathbb{K}$,
- $L_i(A) \longleftarrow \lambda L_i(A) + \mu L_j(A)$ avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

On définit les *opérations élémentaires sur les colonnes de* A de manière analogue.

On utilise assez peu la terminologie transvection, dilatation *etc.*, on notera simplement les opérations à l'aide de flèches, c'est plus visuel.

Attention λ **doit être non nul!**

Retenez que si l'on autorisait $\lambda = 0$ dans l'un des cas encadrés :
- pour les dilatations, alors on supprimerait une ligne, aïe... 🥺
- Pour une combinaison dilatation/transvection, on « écraserait » une ligne par une autre, re-aïe... 🥺

Peu de chances que ces deux opérations servent à quelque chose dans la suite.

Définition 2 | Équivalence en ligne/colonne

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices. On dit que A, B sont :
- *équivalentes en lignes* et l'on note $A \overset{L}{\sim} B$, si A peut être transformée en B *via* une suite d'opérations élémentaires sur les lignes,
- *équivalentes en colonnes* et l'on note $A \overset{C}{\sim} B$, si A peut être transformée en B *via* une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes.

Exemple 1 On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Effectuer les opérations suivantes sur A et C, puis écrire le résultat.

1. $L_1 \leftrightarrow L_2$

2. $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

3. $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$

Lien matrice de départ et matrice modifiée par une opération. Commençons par un exemple dans le cas d'une matrice carrée simple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ci-dessous on a calculé $PA, AP^\top, TA, AT^\top$, on a précisé dans la colonne centrale le lien avec la matrice de départ.

$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$L_1 \longleftrightarrow L_2$	action sur les lignes
$AP^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$C_1 \longleftrightarrow C_2$	action sur les colonnes
$DA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftarrow 2L_1$	action sur les lignes
$AD^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	$C_1 \leftarrow 2C_1$	action sur les colonnes
$TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$	action sur les lignes
$AT^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$	$C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2$	action sur les colonnes

Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 1 | Caractérisation de l'équivalence en ligne et colonne

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices. Alors :
- $A \overset{L}{\sim} B \iff \exists E \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ inversible, $E \times A = B$.
- $A \overset{C}{\sim} B \iff \exists E \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ inversible, $A \times E = B$.

Preuve *(partielle)* Par exemple, pour les lignes (pour les colonnes, la preuve est identique).
$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $A \overset{L}{\sim} B$ alors il existe $E_1, \dots, E_N \in \mathbb{N}$ des matrices inversibles (de permutation, dilatation ou transvection) avec N un entier, de sorte que $(E_1 \times \cdots \times E_N)A = B$.
Or un produit de matrices inversibles est inversible, on déduit alors le résultat en posant $E = E_1 \times \cdots \times E_N$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Admis : il faudrait montrer que toute matrice inversible est produit de matrices de permutation, dilatation et transvection.

Remarque 1 (Expression de E) La matrice E précédente est même connue (leur connaissance n'est pas exigible).

- on appelle *matrice de permutation* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme :

$$P_{i,j} = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc} &&&\uparrow&&&&\uparrow&&& \\ &&& i &&&& j &&& \end{array} &
\end{array}$$

- On appelle *matrice de dilatation* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme :

$$D_i(\lambda) = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& \lambda &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} &&&\uparrow&&& \\ &&& i &&& \end{array} &
\end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{K}\boxed{\setminus\{0\}},\ i \in [\![1\,,\,n]\!].$$

- On appelle *matrice de transvection* de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme :

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& 0 && 1 & \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} &&&\uparrow&&\uparrow& \\ &&& i && j & \end{array} &
\end{array}, \quad \lambda \in \mathbb{K},\ (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2 \text{ et } i \neq j.$$

Multiplier à droite ou à gauche par l'une de ces matrices exerce les opérations élémentaires ci-dessous.

O	**Multiplier à gauche par** O	**Multiplier à droite par** $O^\top$
$P_{i,j}$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$C_i \leftrightarrow C_j$
$D_i(\lambda)$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$C_i \leftarrow \lambda C_i$
$T_{i,j}(\lambda)$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES ET CONSÉQUENCE SUR A

Opération élémentaire sur les LIGNES de A	=	Multiplier à GAUCHE par une certaine matrice inversible *(A est donc changée en* $E \times A$ *avec* E *inversible)*
Opération élémentaire sur les COLONNES	=	Multiplier à DROITE par une certain matrice inversible *(A est donc changée en* $A \times E$ *avec* E *inversible)*

1.2. Algorithme d'échelonnement de GAUß

Voyons maintenant le type de matrice auquel on veut arriver après opérations élémentaires : les « échelonnées en ligne ».

Définition 3 | Matrice échelonnée et échelonnée réduite

- Une matrice est dite *échelonnée par lignes* lorsque :
  - si une ligne est nulle, alors toutes les lignes suivantes sont nulles,
  - à partir de la deuxième ligne le premier coefficient non nul de chaque ligne est strictement à droite de celui de la ligne précédente.
- On appelle :
  - *pivot* tout premier coefficient non nul sur une ligne,
  - *colonne pivot* toute colonne possédant un pivot.
- Une matrice est dite *échelonnée réduite par lignes* si :
  - elle est nulle,
  - **ou** elle est échelonnée par lignes, a tous ses pivots égaux à 1, et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Forme typique d'une matrice échelonnée, les pivots étant indiqués par le symbole $\oplus$, les $\star$ désignant des coefficients quelconques	$\begin{pmatrix} \oplus & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \oplus & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Forme typique d'une matrice échelonnée **réduite**, les pivots étant indiqués par le symbole $\oplus$, les $\star$ désignant des coefficients quelconques	$\begin{pmatrix} 1 & \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 2 Les matrices suivantes sont-elles échelonnées par ligne? Le cas échéant, entourer les pivots, et surligner les colonnes pivot.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
- $D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 3 La matrice A ci-dessus n'est pas échelonnée réduite par lignes, mais la matrice suivante l'est : $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 1 | Algorithme de Gauß-Jordan

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors :

- il **existe** une matrice $B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ échelonnée en lignes telle que : $A \overset{L}{\sim} B$.
  - Une telle matrice B est appelée une *forme échelonnée en ligne de* A.
  - Toutes les formes échelonnées en ligne de A ont le même nombre de pivots, et les mêmes colonnes pivot.
- Il **existe** une **unique** matrice $C \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ échelonnée en lignes **réduite** telle que : $A \overset{L}{\sim} C$.

Définition 4 | Rang

On appelle *rang* de la matrice A le nombre de pivots d'une forme échelonnée en lignes, ou encore le nombre de pivots de l'échelonnée réduite de A.

Notation

Si A est une matrice échelonnée en ligne, on note son rang $\mathrm{Rg}\,A$.

Prouver ce théorème revient à exposer un algorithme permettant d'arriver à une forme échelonnée. La preuve ci-dessous esquisse un tel algorithme de manière générale, nous admettons toute la partie unicité du théorème (c'est-à-dire le fait que le nombre de pivots est toujours le même, ou encore que l'échelonnée réduite est unique).

Preuve *(Point clef — **Si un coefficient est non nul sur une colonne, on peut éliminer tous les autres sur la même colonne à l'aide d'opérations élémentaires**)*

1. **[Placement correct d'un pivot]** Si la matrice A est nulle, alors il n'y a rien à faire et l'algorithme est terminé. Sinon, soit j_1 l'indice de la première colonne non nulle. On choisit un coefficient non nul dans cette colonne, que l'on note α et apparaissant à la ligne disons i_1, on le place en première ligne par échange $L_1 \longleftrightarrow L_{i_1}$. On a ainsi :
$$A \overset{L}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & j_1 & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{\alpha} & \star \dots \star \\ 0 & \dots & 0 & \star & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & B \\ 0 & \dots & 0 & \star & \end{pmatrix} \end{array}.$$
2. **[Élimination]** On annule les autres coefficients A_{i,j_1} de la colonne j_1 par les transvections $L_i \longleftarrow L_i - \frac{A_{i,j_1}}{\alpha} L_1$ — on voit bien ici l'importance du choix $\alpha \neq 0$. On a donc après cette étape :
$$A \overset{L}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & j_1 & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{\alpha} & \star \dots \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & B \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \end{pmatrix} \end{array}.$$
3. On recommence avec le bloc B s'il n'est pas déjà nul ; dans la suite on effectue que des opérations sur $L_2, \dots, L_n$. Et ainsi le reste de la matrice n'est plus modifié.

Pour obtenir l'échelonnée réduite, on élimine de droite à gauche, colonne par colonne, tous les coefficients au-dessus de la diagonale à l'aide de transvections, donc d'opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ avec $i > j$ *(afin de ne pas ajouter des termes non nuls dans les colonnes à gauche du pivot de la ligne i)* et $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 4 Calculer l'échelonnée réduite de $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, préciser $\mathrm{Rg}\,A$. *On montrera que l'échelonnée-réduite est* I_3

- **[Calcul d'une forme échelonnée]**

- **[Passage à l'échelonnée réduite]**

Exemple 5 Déterminer l'échelonnée réduite de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, en déduire son rang. *On montrera que l'échelonnée-réduite est :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 6 Déterminer l'échelonnée réduite de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, calculer son rang. *On montrera que l'échelonnée-réduite est :* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. SYSTÈMES LINÉAIRES

2.1. Généralités

Définition 5 | Système linéaire d'équations

- Un *système linéaire de taille* $n \times p$, est un système de n équations et p inconnues de la forme :
$$\left\{\begin{array}{rcl} A_{1,1}\mathbf{x_1} + A_{1,2}\mathbf{x_2} + \cdots + A_{1,p}\mathbf{x_p} & = & B_1 \\ A_{2,1}\mathbf{x_1} + A_{2,2}\mathbf{x_2} + \cdots + A_{2,p}\mathbf{x_p} & = & B_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ A_{n,1}\mathbf{x_1} + A_{n,2}\mathbf{x_2} + \cdots + A_{n,p}\mathbf{x_p} & = & B_n \end{array}\right. \qquad (S)$$
où $A_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $B_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
- Si $n = p$ (on a autant d'inconnues que d'équations), on dit que le système (S) est *carré d'ordre* n.
- *Résoudre* (S) signifie trouver l'ensemble des $(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_p}) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S). *Les inconnues sont en gras dans le précédent système.* On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions.
- Le système (S) est dit *incompatible* s'il ne possède aucune solution (c'est-à-dire $\mathscr{S} = \emptyset$), *compatible* s'il en admet (c'est-à-dire $\mathscr{S} \neq \emptyset$).
- On dit qu'un système est *homogène* si : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_i = 0$. Le *système homogène associé à* (S) est défini comme :
$$\left\{\begin{array}{rcl} A_{1,1}\mathbf{x_1} + A_{1,2}\mathbf{x_2} + \cdots + A_{1,p}\mathbf{x_p} & = & 0 \\ A_{2,1}\mathbf{x_1} + A_{2,2}\mathbf{x_2} + \cdots + A_{2,p}\mathbf{x_p} & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ A_{n,1}\mathbf{x_1} + A_{n,2}\mathbf{x_2} + \cdots + A_{n,p}\mathbf{x_p} & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_0)$$
On note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions.

Notation

- Dans la pratique, lorsque $p = 2, 3, 4$, on note plutôt x, y, z, t les inconnues en lieu et place de la notation avec indices.
- Parfois les solutions sont notées sous forme de matrice colonne $\begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \vdots \\ \mathbf{x_p} \end{pmatrix}$.

Cadre

Dans toute la suite, même si cela n'est pas précisé, les notations (S) et (S_0) feront référence aux systèmes précédents.

Exemple 7

- $\begin{cases} x - 3y = -3 \\ x - \ \ y = 1 \end{cases}$ est un système linéaire à $n = 2$ équations, et $p = 2$ inconnues.
Son système homogène associé est :
- $\begin{cases} 2x + y - \ \ z + t = 1 \\ -x + y + 2z + t = -1 \\ \quad\ \ y + \ \ z \qquad = -1 \end{cases}$ est un système linéaire à $n = 3$ équations, et $p = 4$ inconnues. Son système homogène associé est :
- $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - z + t & = & 1 \\ -x + y + 2z + t & = & -1 \\ y + xz & = & -1 \end{array}\right.$ n'est pas un système linéaire. De manière générale, les systèmes faisant apparaitre des produits, puissances *etc.* ne sont pas des systèmes linéaires.

Remarque 2 (Alignement des inconnues) Comme dans l'exemple précédent, je vous conseille toujours d'aligner correctement les inconnues quand vous écrivez des systèmes linéaires, cela permettra de savoir où est-ce qu'on en est dans l'algorithme d'échelonnement qui va suivre.

REPRÉSENTATION MATRICIELLE D'UN SYSTÈME. Suite à la première définition d'un système, il apparait clairement deux matrices : celle des coefficients du système, et les celle du membre de droite.

Définition 6 | Matrice d'un système linéaire d'équations, Rang

- On appelle *matrice* du système (S) la matrice :
$$A = \left(A_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \cdots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \cdots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} \cdots & A_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$
- On appelle *second membre* la matrice colonne : $\quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

- On appelle *rang* du système (S) le rang de la matrice A.

- Le nombre de lignes de A correspond au nombre d'équations du système.
- Le nombre de colonnes de A correspond au nombre d'inconnues du système.

Exemple 8 Préciser la matrice des systèmes linéaires de l'Exemple 7, le second membre, et calculer le rang des systèmes.

-

-

Proposition 2 | Formulation d'un système avec des matrices

Soit (S) un système linéaire de matrice associée A, et second membre $B \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors : $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution de (S) $\iff A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = B$.

Preuve Par définition même du produit matriciel, nous avons avec les notations précédentes que pour tout $(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \dots + A_{1,p}x_p \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \dots + A_{2,p}x_p \\ \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \dots + A_{n,p}x_p \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = B \iff \begin{pmatrix} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \dots + A_{1,p}x_p \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \dots + A_{2,p}x_p \\ \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \dots + A_{n,p}x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,p}x_p &= B_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,p}x_p &= B_2 \\ \vdots &= \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,p}x_p &= B_n \end{cases}$$

deux matrices sont égales si et seulement si elles sont les mêmes coefficients

$$\iff (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S).}$$

Rappelons que si A est carrée inversible, alors :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

En d'autres termes, si la matrice d'un système est inversible (en particulier carrée), alors ce système admet une unique solution. On parle alors de « système de CRAMER ».

Définition/Proposition 1 | Système de CRAMER

Supposons que $n = p$ et que A est inversible.

- Alors le système (S) possède pour unique solution $X = A^{-1}B$. Dans ce cas, le système est dit *de CRAMER*.
- En particulier, si (S) est de plus homogène, alors l'unique solution est $0_{1,n}$. Ainsi, tout système homogène de CRAMER admet pour unique solution le vecteur nul.

Exemple 9 Montrer que $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ est un système de CRAMER, déterminer son unique solution.

2.2. Résolution par substitution

La méthode de substitution est la première que vous ayez apprise. Elle est simple à réaliser à la main lorsque les systèmes sont petits. Elle a l'avantage de pouvoir être également utilisée pour les systèmes non linéaires.

Exemple 10 Résoudre le système suivant par substitution :

$$(S)\quad \begin{cases} x-3y=-3 \\ x-\ \ y=1. \end{cases}$$

Pour un système légèrement plus grand, on s'en sort encore.

Exemple 11 Résoudre le système suivant par substitution :

$$(S)\quad \begin{cases} x+\ \ y+z=1 \\ x-2y+z=2 \\ x+\ \ y-z=3 \end{cases}.$$

On peut formaliser ainsi la méthode :

Méthode (ALG) 8.1 **(Résolution d'un système par substitution)** Pour un système à n équations et p inconnues,

1. on utilise une équation pour exprimer une des inconnues en fonction des autres (qui jouent le rôle de paramètres),
2. dans les $n-1$ équations restantes, on remplace l'inconnue par l'expression obtenue précédemment qui est fonction des $p-1$ autres inconnues. Il reste donc $n-1$ équations à $p-1$ inconnues.
3. On réitère le processus avec les $n-1$ équations et $p-1$ inconnues restantes.
4. Arrivé à la dernière étape,
   - soit il ne reste plus qu'une équation et on obtient donc une relation entre les $p-n+1$ inconnues restantes. On exprime ensuite les autres inconnues à partir de celles-ci.
   - Soit il ne reste plus qu'une inconnue pour plusieurs équations. Si les équations sont indépendantes non triviales, alors il n'y a pas de solutions.

Attention

Cette méthode est dans la pratique à oublier pour les systèmes linéaires de taille supérieure à trois inconnues, car assez peu efficace. On peut éventuellement garder le principe à l'esprit pour les systèmes non linéaires (qui ne sont pas l'objet de ce chapitre).

2.3. Résolution par échelonnement

Notation **Matrice augmentée**

Soit le système linéaire de taille $n\times p$ ci-après :

$$(S)\quad \begin{cases} A_{1,1}x_1+A_{1,2}x_2+\cdots+A_{1,p}x_p &= B_1 \\ A_{2,1}x_1+A_{2,2}x_2+\cdots+A_{2,p}x_p &= B_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \vdots &= \ \vdots \\ A_{n,1}x_1+A_{n,2}x_2+\cdots+A_{n,p}x_p &= B_n. \end{cases}$$

Alors on visualise ce système sous forme de *matrice augmentée de* (S) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & A_{1,2}\cdots & A_{1,p} & B_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2}\cdots & A_{2,p} & B_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2}\cdots & A_{n,p} & B_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right).$$

On met donc bout à bout la matrice A du système avec le second membre B, séparés par une barre verticale.

Une matrice augmentée n'est pas à proprement parler une matrice, mais plutôt un moyen commode de visualiser un système. Nous l'utiliserons dans la suite du cours pour présenter l'algorithme d'échelonnement.

Remarque 3 **(Visualiser une incompatibilité sur la matrice augmentée)** Si $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{array}\right)$ contient une ligne de la forme $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & b \end{array}\right)$ avec $b \neq 0$, alors le système est incompatible. En effet, l'équation associée est alors $0 = b$ avec $b \neq 0$.

Opérations élémentaires sur les lignes & Système équivalent.

On définit pour un système les mêmes opérations élémentaires que pour les matrices.

Définition 7 | Opérations élémentaires

On appelle *opération élémentaire* sur (S) l'une des opérations suivantes pour $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]^2$:

- $\mathrm{L}_i \longleftrightarrow \mathrm{L}_j$ appelée *permutation des lignes i, j*,
- $\mathrm{L}_i \longleftarrow \lambda \mathrm{L}_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,
- $\mathrm{L}_i \longleftarrow \mathrm{L}_i + \mu \mathrm{L}_j$ avec $\mu \in \mathbb{K}$,
- $\mathrm{L}_i \longleftarrow \lambda \mathrm{L}_i + \mu \mathrm{L}_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Exemple 12 Effectuer, sur le système ci-dessous, les opérations élémentaires précisées.

$$(\mathrm{S}) \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x + y - z \phantom{{}+{}} = 3. \end{cases}$$

1. $\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2$

2. $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_2$

3. $\mathrm{L}_2 \leftarrow 3\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$

Puisque lorsque l'on réalise une opération sur un système, on l'effectue aussi dans le second membre, on peut présenter cela avec une matrice augmenter.

Opération sur A $+$ Même opération B $=$ Opération sur $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{array}\right)$

Exemple 13 Réécrire les opérations précédentes à l'aide d'une matrice augmentée.

1. $\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2$

2. $\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_2$

3. $\mathrm{L}_2 \leftarrow 3\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$

Ainsi, effectuer des opérations élémentaires sur un système revient à faire ces mêmes opérations sur la matrice augmentée (vue comme une « grosse » matrice d'un bloc).

Définition 8 | Systèmes équivalents

Deux systèmes sont dits *équivalents* si on passe de l'un à l'autre par une série d'opérations élémentaires sur les lignes.

On voit qu'après avoir fait des opérations élémentaires sur (S), on obtient un nouveau système équivalent au premier. La matrice de ce nouveau système est obtenue en faisant subir les mêmes opérations sur A que sur (S). Ce nouveau système a-t-il les mêmes solutions que celui de départ ? La réponse est oui.

Proposition 3 | Équivalence et ensemble de solutions

Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

Preuve

- Notons sous forme matricielle les deux systèmes : $AX = B$ (ensemble des solutions $\mathscr{S}$) et $A'X = B'$ (ensemble des solutions $\mathscr{S}'$), avec $A, A' \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
- Lorsqu'on exerce des opérations élémentaires sur un système, on les fait sur la matrice d'une part et sur le second membre d'autre part. Il existe donc E inversible telle que $A' = EA$ et $B' = EB$.
- On a a alors :

$$\left.\begin{aligned} X \in \mathscr{S}' &\iff A'X = B' \iff \cancel{E}AX = \cancel{E}B \\ &\iff AX = B \iff X \in \mathscr{S}. \end{aligned}\right\} E \textit{ est inversible}$$

La proposition précédente est le coeur de cette méthode de résolution par échelonnement : on va donc chercher à effectuer des opérations élémentaires intelligentes afin de transformer le système initial en un système que l'on sait résoudre. De plus, ce nouveau système aura le même ensemble de solutions.

Attention — Ne pas faire trop d'opérations d'un coup

Il est **<u>très important</u>** de ne pas faire plusieurs opérations d'un coup qui mélangent les mêmes lignes. Par exemple, considérons le système

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}.$$

- On ne fera surtout pas les opérations élémentaires $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ qui mèneraient au système :

$$\begin{cases} -y = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{non équivalent à} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

- En revanche, on pourra faire les opérations deux temps :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\overset{L}{\sim}} \begin{cases} - y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\overset{L}{\sim}} \begin{cases} - y = -1 \\ x + 3y = 4. \end{cases}$$

SYSTÈMES ÉCHELONNÉS. Les systèmes que l'on sait bien résoudre sont ceux dits « échelonnés ».

Définition 9 | Système triangulaire/échelonné

- Un *système linéaire de taille $n \times p$*, est un système *échelonné* (*resp. échelonné réduit*) si sa matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ associée l'est. Les systèmes échelonnés sont de la forme :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \dots + \dots + A_{1p}x_p = B_1 \\ \phantom{A_{11}x_1 +{}} A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \dots + \dots + A_{2p}x_p = B_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad A_{nn}x_n + \dots + A_{np}x_p = B_n \end{cases}$$

où $A_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!]$, $B_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$.
- Les *pivots* d'un système échelonné sont les pivots de A.
- Si $n = p$ (système carré), on a alors le système suivant :

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \dots + \dots + A_{1n}x_n = B_1 \\ \phantom{A_{11}x_1 +{}} A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \dots + \dots + A_{2n}x_n = B_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A_{nn}x_n = B_n \end{cases}$$

Les pivots sont dans ce cas les coefficients diagonaux non nuls $A_{11}, \dots, A_{nn}$.

Exemple 14

- Le système $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \phantom{x+{}} 3y = 2 \end{cases}$ est échelonné. On peut le résoudre facilement en remontant les égalités : $y = \dfrac{2}{3}$, puis $x = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$.
- Résoudre : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ - 2y + z = 2 \\ \phantom{x - 2y +{}} z = 3. \end{cases}$
- Le système $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ n'est pas échelonné.

Définition 10 | Inconnues principales et secondaires

Dans un système échelonné de matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

- les inconnues devant les pivots de A sont les *inconnues principales* du système, il y a donc $\mathrm{Rg}(A)$ inconnues principales.
- Les autres inconnues sont les *inconnues secondaires* ou *inconnues auxiliaires*

ou *paramètres du système*, il y a donc $p - \mathrm{Rg}(A)$ inconnues secondaires.

Exemple 15 Pour chaque système échelonné ci-dessous, préciser le rang, entourer les inconnues principales d'une couleur et secondaires d'une autre.

1. $(S_1)\quad \begin{cases} x + \ \ y + z = 1 \\ \quad -2y + z = 2 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$ **2.** $(S_2)\quad \begin{cases} x + \ \ y + z - t = 1 \\ \quad -2y + z + t = 2 \\ \qquad\quad z - t = 3. \end{cases}$

Échelonnement. D'après l'algorithme d'échelonnement vu pour les matrices, on sait que tout système est équivalent à un système échelonné. On commence donc par échelonner le système de départ, trois cas de figure peuvent se présenter ensuite :

- **[1er cas : Cramer, unique solution]** Si le système est carré de taille n, et de rang n (ce que l'on a trouvé à la fin de l'échelonnement), alors on trouve une unique solution en remontant les égalités. Dans ce cas $\mathscr{S} = \{X\}$ avec $X \in \mathbb{K}^n$.
- **[2ème cas : incompatibilité]** À la fin de l'échelonnement, une incompatibilité peut apparaitre sur une ou plusieurs lignes. Dans ce cas $\mathscr{S} = \varnothing$.
- **[3ème cas : infinité de solutions]** On est dans aucun des deux cas précédents, et il y a donc des inconnues secondaires. Alors l'ensemble des solutions peut être obtenu en exprimant les inconnues principales en fonction des secondaires, qui jouent alors le rôle de *paramètres*. Dans ce cas, en notant r le rang du système, $\mathscr{S}$ sera de la forme :
$$\mathscr{S} = \left\{(\mathrm{princ}_1, \dots, \mathrm{princ}_r) \,\middle|\, (\mathrm{sec}_1, \dots, \mathrm{sec}_{p-r}) \in \mathbb{K}^{p-r}\right\}.$$

Tout ceci peut être plus formalisé, mais nous ne le ferons pas conformément au programme. Vous devez en revanche savoir vous débrouiller sur des exemples, et garder à l'esprit ces trois cas de figure.

Exemple 16 **(1er cas : Cramer, unique solution (1))** Résoudre :
$$\begin{cases} x - \ \ y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + \ \ z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10. \end{cases}$$
On considère la matrice augmentée que l'on échelonne :

Matrice augmentée	Système	Opération(s) réalisée(s)
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right)$	$\begin{cases} x - \ \ y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + \ \ z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$	$\begin{cases} x - \ \ y + 2z = 5 \\ \quad 5y - 5z = -5 \\ \quad -\ y - 6z = -20 \end{cases}$	$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right)$	$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ \quad y - \ z = -1 \\ \ -y - 6z = -20 \end{cases}$	$L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right)$	$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ \quad y - \ z = -1 \\ \qquad -7z = -21 \end{cases}$	$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$	$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ \quad y - \ z = -1 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$	$L_3 \leftarrow -\frac{1}{7}L_3$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$	$\begin{cases} x \qquad + z = 4 \\ \quad y - z = -1 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$	$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$	$\begin{cases} x \qquad\quad = 1 \\ \quad y \qquad = 2 \\ \qquad\quad z = 3 \end{cases}$	$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

On aboutit ainsi à une unique solution : $\boxed{\{(1,2,3)\}}$.

Remarque 4 **(Matrice ou système ?)** Lorsque le système de départ contient beaucoup de zéros, il peut être judicieux de présenter les calculs sans matrice augmentée (cela évitera de devoir recopier, ligne par ligne, tous les zéros). Dans le cas contraire, j'utiliserai le plus souvent la présentation sous forme de matrice.

Exemple 17 **(1er cas : Cramer, unique solution (2))** Résoudre :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - 2z = -3 \\ 2x + y - 2z = -2. \end{cases}$$

Exemple 18 **(2ème cas : incompatibilité (1))** Résoudre : $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = 4 \\ x - y = 1. \end{cases}$

Exemple 19 **(2ème cas : incompatibilité (2))** Résoudre :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1. \end{cases}$$

Exemple 20 **(3ème cas : infinité de solutions (2))** Résoudre :

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ -x + y + 2z + t = -1 \\ \phantom{-x+{}} y + z \phantom{{}+t} = -1. \end{cases}$$

On considère la matrice augmentée, que l'on peut ensuite échelonner.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 1 \times L_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{3/2} L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 1/2 \times L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1 \times L_2}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1/3 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{(-1)} L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 1 \times L_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$$

On obtient alors $t = \dfrac{1}{3}, y = -1 + z, x = \dfrac{1}{3} + z$, *la variable* z *étant une inconnue secondaire. L'ensemble des solutions est donc* $\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \left(\dfrac{1}{3} + z, z - 1, z, \dfrac{1}{3} \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}}$.

Exemple 21 **(Avec un paramètre)** Résoudre :
$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

Méthode (ALG) 8.2 **(Résolution d'un système par échelonnement)** Pour un système à n équations et p inconnues,

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{rcl} A_{1,1}x_1+A_{1,2}x_2+\cdots+A_{1,p}x_p &=& B_1\\ A_{2,1}x_1+A_{2,2}x_2+\cdots+A_{2,p}x_p &=& B_2\\ \vdots &=& \vdots\\ A_{n,1}x_1+A_{n,2}x_2+\cdots+A_{n,p}x_p &=& B_n.\end{array}\right.$$

1. Commencer par écrire la matrice augmentée du système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} & B_1\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p} & B_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p} & B_n\end{array}\right),$$

ou simplement $A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p}\\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,p}\end{pmatrix}$ si le système est homogène. *(c'est-à-dire si la dernière colonne de la matrice augmentée ne contient que des zéros)*

2. Échelonner la matrice augmentée (ou simplement A.
3. Conclure sur l'ensemble des solutions.

2.4. Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite est décrite par une équation cartésienne du type $ax+by=c$. Alors, un système de la forme :

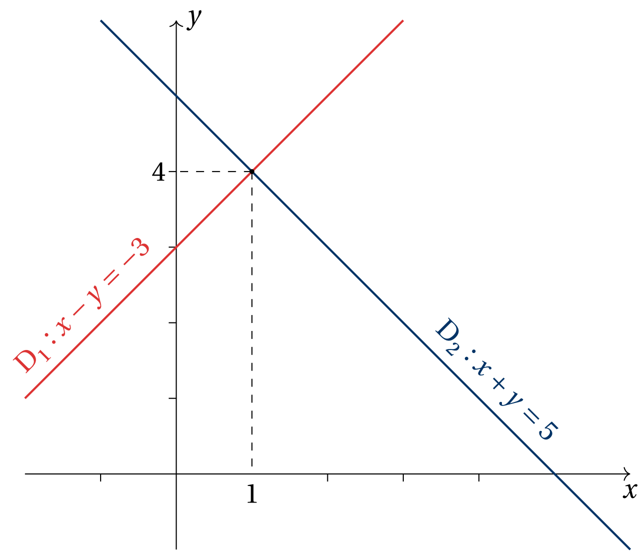
$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by &=& c\\ a'x+b'y &=& c'\end{array}\right.$$

décrit, s'il est compatible, l'intersection de deux droites. Les solutions représentent alors **un point** ou éventuellement **une droite** si les deux droites sont confondues. Si le système est incompatible alors les deux droites décrites par ces équations sont **parallèles**.

Exemple 22 **(Interprétations géométriques)**

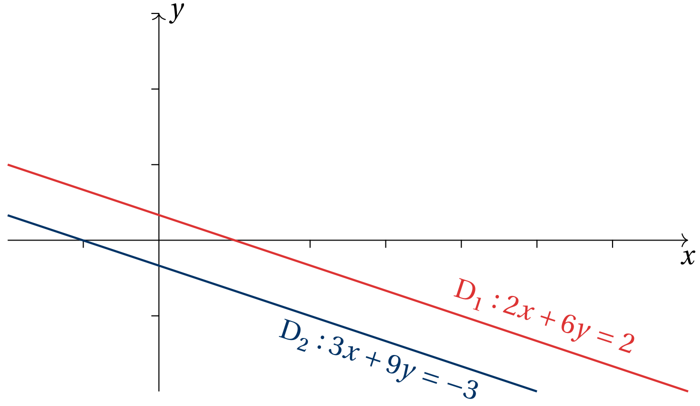
1. **[Une unique solution]** On considère : $(S)\ \begin{cases} x-y=-3\\ x+y=5.\end{cases}$

[Interprétation géométrique] les droites $D_1 : x-y=-3$ et $D_2 : x+y=5$ sont sécantes en un point dont les coordonnées sont l'unique solution.



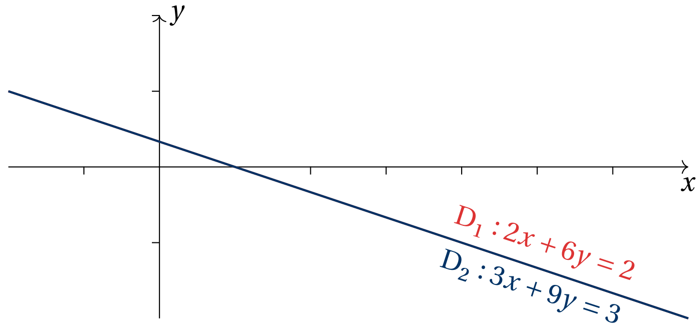
2. **[Cas incompatible]** On considère : $(S)\ \begin{cases} 2x+6y=2\\ 3x+9y=-3.\end{cases}$

[Interprétation géométrique] les droites $D_1 : 2x + 6y = 2$ et $D_2 : 3x + 9y = -3$ sont parallèles : elles n'ont aucun point commun.



3. **[Une infinité de solutions]** On considère : $(S)\ \begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ 3x + 9y = 3. \end{cases}$

[Interprétation géométrique] les droites $D_1 : 2x+6y = 2$ et $D_2 : 3x+9y = 3$ sont confondues. Tous les points de D_1 ont des coordonnées vérifiant les deux équations à la fois. Il y en a une infinité.



3. ÉCHELONNEMENT & INVERSIBILITÉ

3.1. Généralités

Nous allons voir dans cette section comment une forme échelonnée d'une matrice permet de savoir si une matrice est inversible : il s'agira essentiellement de compter le nombre de pivots (donc de calculer son rang) et de le comparer à la taille de cette matrice (bien sûr on rappelle qu'une matrice inversible est forcément carrée, voir le Chapitre (ALG) 7)). Petit bonus : l'algorithme d'échelonnement nous permettra, en plus, de trouver son inverse.

Commençons par une propriété de caractérisation de l'inversibilité.

Proposition 4 | Lien entre inversibilité et système de CRAMER

- Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors :

  (i) A est inversible $\iff$ **(ii)** $\forall B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = B$ est de CRAMER d'unique solution $X = A^{-1}B$,
  $\iff$ **(iii)** $\operatorname{Rg} A = n$
  $\iff$ **(iv)** l'échelonnée réduite de A est I_n.

- Si l'une des conditions précédente est vérifiée et si pour tout $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'unique solution de $AX = B$ notée $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vérifie :

$$\begin{cases} x_1 &= A'_{1,1}b_1 + \cdots + A'_{1,n}b_n \\ & \vdots \\ x_n &= A'_{n,1}b_1 + \cdots + A'_{n,n}b_n \end{cases}$$

alors $A' = \left(A'_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est l'inverse de A, c'est-à-dire $A' = A^{-1}$.

Le deuxième point légitimera une méthode de calcul de l'inverse (par résolution d'un système linéaire) qui arrivera plus tard dans le chapitre.

Preuve

- Commençons par **(i)** $\iff$ **(ii)**.
  $\boxed{\Longrightarrow}$ Cette implication a déjà été montrée : l'unique solution est $X = A^{-1}B$ donc le système est bien de Cramer.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que AX = B est de Cramer pour tout second membre. Alors choisissons plusieurs vecteurs pour B :
  $$\forall i \in [\![1\,,\,n]\!],\quad \exists ! X_i \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\quad AX_i = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\ \vdots\end{pmatrix} \leftarrow i \underset{\textbf{(défi.)}}{=} B_i.$$
  Alors posons $A' = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & \dots & X_n\end{array}\right)$, et montrons que $AA' = I_n$ ce qui prouvera l'inversibilité à droite de A, et donc l'inversibilité. On a :
  $$AA' = A\times\left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & \dots & X_n\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} AX_1 & \dots & AX_n\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & \dots & B_n\end{array}\right) = I_n.$$
  Donc A est inversible et $A^{-1} = A'$.
- Montrons une partie de **(i)** $\iff$ **(iv)**.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ Si l'échelonnée réduite de A est I_n, alors on est passée de A à I_n par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Il existe donc une matrice E inversible telle que $EA = I_n$ (on rappelle qu'exercer une opération élémentaire sur les lignes revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible). Donc A possède un inverse à gauche, donc A est inversible (les deux sont équivalents d'après un résultat du Chapitre (ALG) 7).
  $\boxed{\Longrightarrow}$ Admis.
- Montrons **(iii)** $\iff$ **(iv)**.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ Si l'échelonnée réduite de A est I_n alors par définition du rang on a bien $\operatorname{Rg} A = n$: la matrice I_n possède bien n pivots.
  $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\operatorname{Rg} A = n$, alors A est équivalente en lignes à une matrice possédant n pivots, mais comme elle est carrée de format $n\times n$, les pivots sont les coefficients diagonaux. En résumé : $A \overset{L}{\sim} \begin{pmatrix}\lambda_1 & \star & \cdots & \star\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \star\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i\in[\![1\,,\,n]\!]$. En éliminant les coefficients au-dessus des pivots, et en divisant les lignes par les pivots (fin de l'algorithme d'échelonnement), on trouve bien $A \overset{L}{\sim} I_n$.
- Puisque A est inversible, $X = A^{-1}B$ est l'unique solution, mais aussi $A'\times B$ par hypothèse. Donc par unicité, on a finalement :
  $$\forall B\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\quad A^{-1}B = A'B.$$
  On ne peut simplifier directement par B, puisque B est un vecteur colonne. En revanche, on peut choisir pour B des vecteurs particuliers : choisissons à nouveau les B_i, $i\in[\![1\,,\,n]\!]$ du début de la preuve, qui donne après calcul du produit matriciel :
  $$\forall i\in[\![1\,,\,n]\!],\quad C_i(A^{-1}) = C_i(A').$$
  Donc colonne par colonne les deux matrices A^{-1}, A' sont égales, elles sont donc égales tout court.

3.2. Méthodes de calcul

Soit $A\in\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice donnée, dont on cherche la matrice inverse. On se fixe une telle matrice dans toute cette section.

Méthode du miroir. Rappelons que la méthode du pivot conduit à une matrice $E\times A$ avec $E = E_1\times\cdots\times E_N$ inversible qui est un produit de matrices d'opérations élémentaires, N un entier. Rappelons l'inégalité (très profonde !) $A = I_n\times A$. Or,

$$\begin{array}{ccc} & A = I_n A & \\ \underbrace{(E_1\times\cdots\times E_n)A}_{\text{échelonnée réduite de A}} & = & \underbrace{(E_1\times\cdots\times E_n)I_n}_{I_n \text{ après opérations élémentaires}} \quad A \\ & I_n = (EI_n)\times A. & \end{array}$$

après méthode du pivot

si l'échelonnée réduite est I_n

La dernière assertion prouve exactement que A est inversible d'inverse EI_n ! Mais quelle est donc cette matrice EI_n ? C'est simplement la matrice identité à laquelle on a fait subir les mêmes opérations élémentaires qu'à A jusqu'à obtenir l'identité. On peut donc conserver une présentation par matrices augmentées.

Échelonner A + Faire subir les mêmes opérations à I_n = Échelonner $\left(\begin{array}{c|c} A & I_n\end{array}\right)$

Cela nous conduit à la méthode ci-après appelée communément « méthode du miroir » puisqu'on réplique sur I_n les opérations faites sur les lignes de A.

Méthode (ALG) 8.3 **(Inverse par « échelonnement miroir » sur l'identité)** Pour savoir si A est inversible et calculer son inverse.

1. Commencer par écrire la matrice augmentée de l'identité de même taille.
$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n\end{array}\right).$$
2. Déterminer l'échelonnée réduite de la matrice augmentée en appliquant l'algorithme du pivot matriciel. *On fait donc subir au bloc I_n les mêmes opérations qu'à A.*
3. Si l'échelonnée réduite du bloc de gauche est I_n, la matrice A est alors inver-

sible, et l'inverse se lit dans le bloc de droite.

Remarque 5 **(Les colonnes, c'est possible aussi)** En partant de $A = AI_n$ puis en effectuant que des opérations sur les colonnes, on peut aussi déduire un inverse à droite (donc un inverse) de A, cela fonctionne aussi. Mais mieux vaut peut-être oublier cette remarque et garder en tête que l'on ne peut faire que des opérations sur les lignes, afin de ne pas se mélanger avec les systèmes, où là, seules les opérations sur les lignes sont autorisées.

Exemple 23 Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrice augmentée	Opérations
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$	$L_2 \leftarrow -L_2$ $L_3 \leftarrow -L_3/2$
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$	$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$\left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$	$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$ $L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3$

On a donc : $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -3/2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}$.

Exemple 24 Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ par la même méthode.

On montrera que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -17 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \\ 2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Exemple 25 **(Matrice croix)** Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

MÉTHODE PAR RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME. Cette méthode est légèrement plus rapide à rédiger lorsqu'une matrice contient beaucoup de zéros. L'idée est la suivante, et basée sur la Proposition 4.

Méthode (ALG) 8.4 **(Inverse par résolution d'un système)** Pour savoir si A est inversible et calculer son inverse.

1. Résoudre le système $AX = B$ en $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ pour $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. S'il admet une unique solution **quelque soit** B, alors A est inversible. Et de plus, on détermine les coefficients de A^{-1} en identifiant dans l'égalité $X = A^{-1}B$.

Exemple 26 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, préciser son inverse. *On montrera que :* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. MATRICE $A - \lambda I_n$

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Dans cette dernière section, on souhaite trouver les $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lesquels $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Nous ne nous poserons pas la question de l'intérêt d'un tel objectif : cela sera expliqué en 2ème année, dans le chapitre dédié à la diagonalisation.

4.1. Calculs pratiques

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Il s'agit donc donc d'appliquer l'algorithme du pivot à la matrice $A - \lambda I_n$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$. Du fait de la présence d'un paramètre λ, il est nécessaire d'être précautionneux sur les opérations réalisées.

CALCULS POUR LE FORMAT 2×2.

Méthode (ALG) 8.5 **(Échelonnement de $A - \lambda I_2$ (format 2×2))**

- Si le coefficient $(2,1)$ est nul : la matrice $A - \lambda I_2$ est triangulaire, donc c'est terminé.
- Sinon, on fait la permutation $\boxed{L_1 \longleftrightarrow L_2}$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci le coefficient $(2,1)$. La matrice $A - \lambda I_2$ est alors elle aussi échelonnée.

Exemple 27

1. Trouver, avec une technique d'échelonnement, les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I_2$ non inversible, lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Retrouver le résultat précédent en utilisant le déterminant.

CALCULS POUR LE FORMAT 3×3.

Méthode (ALG) 8.6 **(Opérations pour la recherche d'éléments propres (format 3×3))**

- Si le coefficient $(3,1)$ n'est pas nul :
  1. l'opération optimale à effectuer en premier pour des matrices de taille 3×3 est la permutation $\boxed{L_1 \longleftrightarrow L_3}$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci les coefficients $(2,1),(3,1)$.
  2. Ensuite, en position $(2,2)$, nous avons un coefficient affine en λ et que l'on souhaite utiliser en nouveau pivot afin d'éliminer le coefficient $(3,2)$. Pour éliminer λ en $(2,2)$, on peut faire une opération simple en fonction de L_3.
  3. Un pivot indépendant de λ est alors obtenu en $(2,2)$, on peut alors éliminer le coefficient $(3,2)$.
- Si le coefficient $(3,1)$ est nul :
  1. on fait la permutation $\boxed{L_1 \longleftrightarrow L_2}$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci le coefficient $(3,1)$.
  2. En positions $(2,2)$, nous avons un coefficient indépendant de λ qui sert à éliminer le coefficient $(3,2)$.

Exemple 28 Trouver les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $A - \lambda I_3$ non inversible lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$ *Réponse :* $\{-3,3\}$.

Exemple 29 Même question avec $B = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. *Réponse :* $\{0,1,16\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on cherche λ de sorte que $A - \lambda I_3$ soit non inversible.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3-\lambda \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 11-\lambda & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda \\ 0 & -3\lambda+8 & -\lambda^2+14\lambda-8 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1, \\ L_3 \leftarrow 5L_3 - (11-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -8 & \lambda^2-17\lambda+8 \\ 0 & -3\lambda+8 & -\lambda^2+14\lambda-8 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -8 & \lambda^2-17\lambda+8 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad L_3 \leftarrow -8L_3 - (-3\lambda+8)L_2$$

avec $P(\lambda) = -8(-\lambda^2+14\lambda-8) - (-3\lambda+8)(\lambda^2-17\lambda+8)$. En développant, on trouve : $P(\lambda) = 3\lambda^3 - 51\lambda^2 + 48\lambda = 3\lambda(\lambda^2 - 17\lambda + 16)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On constate (puisque la réponse est donnée) que $\lambda = 1$ et $\lambda = 16$ sont bien les solutions de $\lambda^2 - 17\lambda + 16 = 0$, donc :

$$A - \lambda I_3 \text{ non inversible} \iff P(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \boxed{\{0, 1, 16\}}.$$

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (ALG) 8.1 (Résolution d'un système par substitution) Pour un système à n équations et p inconnues,

1. on utilise une équation pour exprimer une des inconnues en fonction des autres (qui jouent le rôle de paramètres),
2. dans les $n-1$ équations restantes, on remplace l'inconnue par l'expression obtenue précédemment qui est fonction des $p-1$ autres inconnues. Il reste donc $n-1$ équations à $p-1$ inconnues.
3. On réitère le processus avec les $n-1$ équations et $p-1$ inconnues restantes.
4. Arrivé à la dernière étape,
   - soit il ne reste plus qu'une équation et on obtient donc une relation entre les $p-n+1$ inconnues restantes. On exprime ensuite les autres inconnues à partir de celles-ci.
   - Soit il ne reste plus qu'une inconnue pour plusieurs équations. Si les équations sont indépendantes non triviales, alors il n'y a pas de solutions.

Méthode (ALG) 8.2 (Résolution d'un système par échelonnement) Pour un système à n équations et p inconnues,

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,p}x_p &=& B_1 \\ A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \cdots + A_{2,p}x_p &=& B_2 \\ \vdots &=& \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,p}x_p &=& B_n. \end{array} \right.$$

1. Commencer par écrire la matrice augmentée du système :
$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,p} & B_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,p} & B_2 \\ & & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,p} & B_n \end{pmatrix}$$
ou simplement $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,p} \\ & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,p} \end{pmatrix}$ si le système est homogène. *(c'est-à-dire si la dernière colonne de la matrice augmentée ne contient que des zéros)*
2. Échelonner la matrice augmentée (ou simplement A.
3. Conclure sur l'ensemble des solutions.

Méthode (ALG) 8.3 **(Inverse par « échelonnement miroir » sur l'identité)** Pour savoir si A est inversible et calculer son inverse.

1. Commencer par écrire la matrice augmentée de l'identité de même taille.
$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{I}_n \end{array}\right).$$
2. Déterminer l'échelonnée réduite de la matrice augmentée en appliquant l'algorithme du pivot matriciel. *On fait donc subir au bloc* I_n *les mêmes opérations qu'à* A.
3. Si l'échelonnée réduite du bloc de gauche est I_n, la matrice A est alors inversible, et l'inverse se lit dans le bloc de droite.

Méthode (ALG) 8.4 **(Inverse par résolution d'un système)** Pour savoir si A est inversible et calculer son inverse.

1. Résoudre le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ en $\mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ pour $\mathrm{B} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. S'il admet une unique solution **quelque soit** B, alors A est inversible. Et de plus, on détermine les coefficients de A^{-1} en identifiant dans l'égalité $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$.

Méthode (ALG) 8.5 **(Échelonnement de $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2$ (format 2×2))**

- Si le coefficient $(2,1)$ est nul : la matrice $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_2$ est triangulaire, donc c'est terminé.
- Sinon, on fait la permutation $\boxed{\mathrm{L}_1 \longleftrightarrow \mathrm{L}_2}$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci le coefficient $(2,1)$. La matrice $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}_2$ est alors elle aussi échelonnée.

Méthode (ALG) 8.6 **(Opérations pour la recherche d'éléments propres (format 3×3))**

- Si le coefficient $(3,1)$ n'est pas nul :
  1. l'opération optimale à effectuer en premier pour des matrices de taille 3×3 est la permutation $\boxed{\mathrm{L}_1 \longleftrightarrow \mathrm{L}_3}$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci les coefficients $(2,1), (3,1)$.
  2. Ensuite, en position $(2,2)$, nous avons un coefficient affine en λ et que l'on souhaite utiliser en nouveau pivot afin d'éliminer le coefficient $(3,2)$. Pour éliminer λ en $(2,2)$, on peut faire une opération simple en fonction de L_3.
  3. Un pivot indépendant de λ est alors obtenu en $(2,2)$, on peut alors éliminer le coefficient $(3,2)$.
- Si le coefficient $(3,1)$ est nul :
  1. on fait la permutation $\boxed{\mathrm{L}_1 \longleftrightarrow \mathrm{L}_2}$ qui permettra d'obtenir un coefficient indépendant de λ en position $(1,1)$. On élimine alors avec celui-ci le coefficient $(3,1)$.
  2. En positions $(2,2)$, nous avons un coefficient indépendant de λ qui sert à éliminer le coefficient $(3,2)$.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Pas de question de cours dans ce chapitre

5. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant l'échelonnemment de matrices :
   - savoir quelles sont les opérations élémentaires autorisées . . . . ☐
   - savoir qu'une opération élémentaire se traduit en la multiplication à droite par une matrice inversible . . . . ☐
   - savoir échelonner une matrice, et aller jusqu'à l'échelonnée réduite . . . . . ☐
   - savoir déterminer le rang d'une matrice . . . . ☐
2. Concernant les systèmes :
   - savoir résoudre un système simple (uniquement!) par substitution . . . . . ☐
   - savoir faire le lien entre système et matrice augmentée associée . . . . . ☐
   - savoir échelonner une matrice augmentée, ou échelonnée le système directement ☐
   - Résoudre un système ayant une infinité de solutions avec un (ou plusieurs) paramètres . . . . ☐
   - savoir déterminer le rang d'un système . . . . ☐
   - savoir résoudre un système ayant un paramètre (en particulier ceux pour les valeurs propres) . . . . ☐

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

5.1. Échelonnement matriciel & Inversbilité

Exercice 1 | Inversibilité Étudier l'inversibilité des matrices suivantes et lorsqu'elles sont inversibles, donner leur inverse :

1. 👁 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. 👁 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3. 👁 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution (exercice 1) Je ne donne pas tous les détails des calculs.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Ici on peut appliquer la formule pour les matrices de taille 2.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ici il faut appliquer l'algorithme d'échelonnement de GAUß.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. La matrice A n'est pas inversible car elle est triangulaire supérieure avec un 0 sur la diagonale.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Ici il faut appliquer l'algorithme d'échelonnement de GAUß.
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Ici il faut appliquer l'algorithme d'échelonnement de GAUß.
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 | Inversibilité avec paramètre Soit $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Étudier l'inversibilité de A selon les valeurs prises par le paramètre $a \in \mathbb{R}$. Lorsque A est inversible, calculer son inverse en fonction de a.

Solution (exercice 2) Puisque l'on doit aussi trouver l'inverse, commençons par effectuer la méthode du miroir. Par exemple, en commençant par inverser la première et la dernière ligne et en faisant la méthode usuelle du pivot de GAUß pour trouver l'inverse, on arrive à :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Sous la forme échelonnée (partie gauche), on peut donc savoir si elle est inversible : A inversible $\iff a+2 \neq 0 \iff \boxed{a \neq -2}$.
Dans ce cas, on obtient en se ramenant à l'identité à gauche la matrice :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(a+2)} & -\frac{1}{3} \times \frac{(4-a)}{(a+2)} & -\frac{1}{3} \times \frac{(a+8)}{(a+2)} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{(a+2)} & -\frac{1}{(a+2)} & -\frac{1}{(a+2)} \end{pmatrix}}.$$

Exercice 3 | Rang avec paramètre Soit $A = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5-\lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, le rang de A.

Solution (exercice 3) Pour calculer le rang de A, on utilise la méthode du pivot de GAUß. Il s'agit en fait d'une recherche de valeurs propres sans le dire. On obtient que :

$$A = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & -4 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 1 & 7 & -5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 4-\lambda & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 12-\lambda & -8-\lambda \\ 0 & 7\lambda-24 & -\lambda^2-\lambda+16 \end{pmatrix}. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (4-\lambda)L_1 \end{array}$$

Il faut maintenant éliminer λ dans le coefficient $(2,2)$ afin de pouvoir s'en servir de pivot.

$$A \overset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 12-\lambda & -8-\lambda \\ 0 & 7\lambda-24 & -\lambda^2-\lambda+16 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 7L_2 + L_3$

$$\overset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 60 & -\left(\lambda^2+8\lambda+40\right) \\ 0 & 7\lambda-24 & -\lambda^2-\lambda+16 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow 60L_3 - (7\lambda-24)L_2$

$$\overset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5-\lambda \\ 0 & 60 & -\left(\lambda^2+8\lambda+40\right) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= 60\left(-\lambda^2-\lambda+16\right)+(7\lambda-24)\left(\lambda^2+8\lambda+40\right) \\ &= 28\lambda-28\lambda^2+7\lambda^3 = \lambda\left(28-28\lambda+7\lambda^2\right). \end{aligned}$$

Après calculs on constate que $P(\lambda)=0$ si et seulement si $\lambda \in \{0,2\}$. Donc :

$$\boxed{\operatorname{Rg}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{0,2\}, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Exercice 4 | Calcul d'un inverse et révisions de calcul matriciel Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.
On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières. Ainsi, les trois méthodes sont totalement indépendantes les unes des autres et aucun résultat d'une méthode précédente ne peux être utilisé dans une autre méthode.

1. **[Diagonalisation]** On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   - **1.1)** Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   - **1.2)** Calculer $D = P^{-1}AP$ puis exprimer A en fonction de P, D et P^{-1}.
   - **1.3)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner et démontrer l'expression de A^n en fonction de P, D^n et P^{-1}. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **1.4)** Étudier l'inversibilité de A et calculer A^{-1} si A est inversible.
2. **[Binôme]**
   - **2.1)** On pose $B = A - 2I_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer B^n en fonction de B, en conjecturant une formule que l'on démontrera en suivant.
   - **2.2)** En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n, A et I_3. Vérifier que l'on retrouve bien le même résultat que dans la méthode précédente.
3. **[Application]** On définit les trois suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 7y_n + 3z_n \\ z_{n+1} &= 6x_n - 6y_n + 2z_n. \end{cases}$
   - **3.1)** Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
   $$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$
   - **3.2)** En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n et des réels x_0, y_0 et z_0.
   - **3.3)** Si $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 2$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Préciser les limites lorsqu'elles existent.

Solution (exercice 4)

1. **1.1)** La méthode du pivot de Gauß donne que $\boxed{\text{P est inversible}}$ et que
$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}.$$

1.2) Le calcul donne $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$. De plus, comme P est inversible, on a : $P^{-1}AP = D \iff AP = PD \iff \boxed{A = PDP^{-1}}$ en utilisant le fait que $PP^{-1} = I_3$.

1.3) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation. Pour $n=0$. D'un côté, on a : $A^0 = I_3$ et de l'autre côté, on a : $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a : $A^{n+1} = A \times A^n$. Par hypothèse de récurrence, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$ et on sait que : $A = PDP^{-1}$. On obtient ainsi : $A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

1.4) Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.}$ La matrice D étant diagonale, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix}.$$

En calculant alors les deux produits, on trouve :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+(-4)^n & (-4)^n-2^n & 2^n-(-4)^n \\ 2^n-(-4)^n & 3(-4)^n-2^n & 2^n-(-4)^n \\ 2(2^n-(-4)^n) & 2((-4)^n-2^n) & 2^{n+1}\end{pmatrix}}.$$

1.5) Comme la matrice D est une matrice diagonale et qu'elle n'a pas de zéro sur la diagonale, on sait tout de suite qu'elle est inversible et que son inverse est $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$. Comme $A = PDP^{-1}$ et que D, P et P^{-1} sont toutes inversibles, alors A est inversible comme produits de matrices toutes inversibles. De plus, par propriété sur le produit de matrices inversibles, on sait que :
$A^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Le calcul donne :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}}.$$

2. 2.1) Le calcul de B donne $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix}$. On obtient alors :

$B^2 = \begin{pmatrix} 18 & 18 & -18 \\ -18 & 54 & -18 \\ -36 & 36 & 0\end{pmatrix} = -6B$. Puis en itérant, on trouve : $B^3 = 6^2B$. On peut conjecturer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, B^n = (-6)^{n-1}B.$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ la propriété : $\mathscr{P}(n)$: $B^n = (-6)^{n-1}B$.

Initialisation. pour $n = 1$: d'un côté, on a B et de l'autre côté, on a : $(-6)^0B = B$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. On suppose la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on a donc : $B^n = (-6)^{n-1}B$. De plus, on a : $B^{n+1} = B\times B^n$, ainsi, on obtient

$$B^{n+1} = B\times(-6)^{n-1}B = (-6)^{n-1}B^2 = (-6)^{n-1}(-6)B = (-6)^nB.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad B^n = (-6)^{n-1}B.}$

2.2) On remarque que : $A = B + 2I_3$. Comme B et $2I_3$ commutent car I_3 commute avec toutes les matrices de taille 3, on peut appliquer le binôme de Newton et on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (B+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k(2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k2^{n-k}.$$

En utilisant alors la formule démontrée pour B^k vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on obtient

$$\begin{aligned} A^n &= 2^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}B^k2^{n-k} \\ &= 2^nI_3 + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-6)^{k-1}2^{n-k}\right)B \\ &= 2^nI_3 - \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-6)^{k}2^{n-k}\right)\frac{B}{6} \\ &= 2^nI_3 - \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-6)^{k}2^{n-k} - 2^n\right)\frac{B}{6} \\ &= 2^nI_3 - ((-4)^n - 2^n)\frac{A-2I_3}{6} \\ &= \frac{(-4)^n+2^{n+1}}{3}I_3 + \frac{2^n-(-4)^n}{6}A. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+(-4)^n & (-4)^n-2^n & 2^n-(-4)^n \\ 2^n-(-4)^n & 3(-4)^n-2^n & 2^n-(-4)^n \\ 2(2^n-(-4)^n) & 2((-4)^n-2^n) & 2^{n+1}\end{pmatrix}}.$$

On retrouve bien le même résultat qu'avec la méthode 1.

3. 3.1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n\end{pmatrix}$. D'après la relation de récurrence vérifiée par les suites, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n.}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $X_n = A^nX_0$.

Initialisation. pour $n = 0$: $A^0X_0 = X_0$ car $A^0 = I_3$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par définition des suites, on sait que : $X_{n+1} = AX_n$. Or par hypothèse de récurrence, on sait que : $X_n = A^nX_0$. Ainsi, on a : $X_{n+1} = A\times A^nX_0 = A^{n+1}X_0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^nX_0.}$

3.2) Comme on connaît l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} x_n &= \frac{1}{2}\left[(2^n + (-4)^n)x_0 + ((-4)^n - 2^n)y_0 + (2^n - (-4)^n)z_0\right] \\ y_n &= \frac{1}{2}\left[(2^n - (-4)^n)x_0 + (3(-4)^n - 2^n)y_0 + (2^n - (-4)^n)z_0\right] \\ z_n &= (2^n - (-4)^n)x_0 + ((-4)^n - 2^n)y_0 + 2^n z_0. \end{cases}}$$

3.3) Si $x_0 = y_0 = 1$ et $z_0 = 2$, les expressions ci-dessus deviennent

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad x_n = y_n = 2^n,\quad z_n = 2^{n+1}.$$

Comme $2 > 1$, on déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty}.$$

5.2. Systèmes

Exercice 5 | **Sans paramètres** Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \\ 2y + 3z + t = 0. \end{cases}$

Solution (exercice 5) On présente par exemple la résolution directement avec des systèmes, sans matrice augmentée.

1. On a :

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 5y + z = 4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 7y - 3z = 10 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 5y + z = 4 \\ 22y = 22 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ z = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\mathscr{S} = \{(2, 1, -1)\}}$.

2. On a :

$$\begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 3y - 3z + 4t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y + 3z + t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2y + 3z + t = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 3y - 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2y + 3z + t = 0 \\ 5y + 5t = 0 & L_3 \to L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ 3z = t \\ y = -t \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{t}{3} \\ z = \frac{t}{3} \\ y = -t \end{cases}$$

Donc : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{t}{3}, -t, \frac{t}{3}, t\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}}$

Exercice 6 | Un troupeau constitué de dromadaires et de chameaux comporte 60 animaux et 95 bosses. Quel est le nombre de dromadaires ? De chameaux ?

Solution (exercice 6) Un dromadaire a une bosse, un chameau deux. Soit x le nombre de dromadaires et y le nombre de chameaux. Il s'agit de résoudre le système $(S)\quad \begin{cases} x + y = 60 & L_1 \\ x + 2y = 95. & L_2 \end{cases}$ On a :

$$(S) \iff \begin{cases} x + y = 60 \\ y = 95 - 60 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 60 - 35 \\ y = 35 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 25 \\ y = 35 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Le troupeau comporte donc 25 dromadaires et 35 chameaux}}$

Exercice 7 | **Avec paramètres** Discuter les solutions dans $\mathbb{R}$ des systèmes suivants en fonction des paramètres $m \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

1. $\begin{cases} mx + y + z = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y+mz=1\\ 3x+4y+\ 2z=m\\ 2x+3y-\ \ z=1\end{cases}$

Solution (exercice 7)

1. Soit $m\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & a\\ 1 & m & 1 & b\\ 1 & 1 & m & c\end{array}\right)\underset{}{\overset{L_1\leftrightarrow L_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & c\\ 1 & m & 1 & b\\ m & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-mL_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & c\\ 0 & m-1 & 1-m & b-c\\ 0 & 1-m & 1-m^2 & a-mc\end{array}\right)$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & c\\ 0 & m-1 & 1-m & b-c\\ 0 & 0 & 2-m^2-m & a+b-(m+1)c\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & c\\ 0 & m-1 & 1-m & b-c\\ 0 & 0 & -(m-1)(m+2) & a+b-(m+1)c\end{array}\right)$$

- Si $m=1$: alors la matrice devient
  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & c\\ 0 & 0 & 0 & b-c\\ 0 & 0 & 0 & a+b-2c\end{array}\right)$$
  - ◇ Le système associé est alors incompatible si $a+b-2c\neq 0$ ou $b-c\neq 0$.
  - ◇ Si $b-c=0$ et $a+b-2c=0$, c'est-à-dire $a=b=c$, alors le système devient :
    $$x+y+z=c \iff x=c-y-z \iff (x,y,z)=(c-y-z,y,z).$$
    L'ensemble des solutions est alors
    $$\boxed{\mathscr{S}=\left\{(c-y-z,y,z)\,\middle|\,(y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}}.$$
- Si $m=-2$, on obtient : alors la matrice devient
  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c\\ 0 & -3 & 3 & b-c\\ 0 & 0 & 0 & a+b+c\end{array}\right).$$
  Le système est de rang 2 , et on a une équation de compatibilité : $0=a+b+c$.
  - ◇ Si $a+b+c=0$, alors on a :
    $$\mathscr{S}=\left\{\left(z+\frac{b+2c}{3},z+\frac{c-b}{3},z\right)\,\middle|\,z\in\mathbb{R}\right\}.$$
  - ◇ Si $a+b+c\neq 0$, le système est vide.
- Si $m\neq 1$ et $m\neq -2$, alors le système associé est de rang 3, et on obtient, en remontant les équations :
  $$\boxed{\left\{\left(\frac{c+b-(1+m)a}{(1-m)(2+m)},\frac{c-(1+m)b+a}{(1-m)(2+m)},\frac{a+b-(m+1)c}{(1-m)(2+m)}\right)\right\}}.$$

2. On résout ce système linéaire de deux équations à deux inconnues. Ici, tous les coefficients dépendent de m : on est obligés de faire des cas sur m dès le départ.
- Si $m\neq -1$, on peut prendre la première ligne comme pivot. On obtient :
  $$\left(\begin{array}{cc|c} m+1 & m & 2m\\ m & m+1 & 1\end{array}\right)\overset{L_2\leftrightarrow(m+1)L_2-mL_1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|c} m+1 & m & 2m\\ 0 & -(2m+1) & 2m^2-1\end{array}\right)$$
  Le système est échelonné. On refait des cas sur m pour que les pivots soient non nuls.
  - ◇ Si $m\neq -\frac{1}{2}$: on obtient alors le système suivant, en remarquant que $2m^2-m-1=(m-1)(2m+1)$:
    $$\left(\begin{array}{cc|c} m+1 & m & 2m\\ 0 & 1 & 1-m\end{array}\right)$$
    Ainsi, si $m\neq -1$ et si $m\neq -\frac{1}{2}$, le système est de rang 2 et est donc un système de Cramer, avec :
    $$\mathscr{S}=\{(m,1-m)\}$$
  - ◇ Si $m=-\frac{1}{2}$, on obtient alors :
    $$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$
    On obtient un système échelonné de deux inconnues et dont le rang est 1. Il admet ainsi une infinité de solutions. On choisit x comme inconnue principale et y comme inconnue secondaire et on obtient
    $$\boxed{\mathscr{S}=\{(-2+y,y)\mid y\in\mathbb{R}\}.}$$
  - ◇ Si $m=-1$, on obtient alors :
    $$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -y & -2\\ -x & 0 & 1\end{array}\right)$$
    Ainsi, on a : $\boxed{\mathscr{S}=\{(-1,2)\}}$.

3. *Pour varier, on rédige cette solution avec des systèmes directement* Notons (S) le système à résoudre. On a :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2y & + & mz & = & 1\\ & & -2y & + & (2-3m)z & = & m-3 \quad L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ & & -y & - & (1+2m)z & = & -1 \quad L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x &+& 2y &+& mz &=& 1 \\ & & -y &-& (1+2m)z &=& -1 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ & & -2y &+& (2-3m)z &=& m-3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x &+& 2y &+& mz &=& 1 \\ & & y &+& (1+2m)z &=& 1 \quad L_2 \leftarrow (-1)\times L_2 \\ & & -2y &+& (2-3m)z &=& m-3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x &+& 2y &+& mz &=& 1 \\ & & y &+& (1+2m)z &=& 1 \\ & & & & (4+m)z &=& m-1 \quad L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \end{array}\right.$$

On en déduit que :

- si $4+m=0$, *i.e.* si $m=-4$, alors la troisième ligne donne $0=-5$, ce qui est absurde. Ainsi, le système est incompatible et ne possède donc pas de solution.
- si $4+m\neq 0$, *i.e.* si $m\neq -4$, alors le système est de CRAMER (il est triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls).

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le système possède au moins une solution si et seulement si } m\neq -4}$$

Exercice 8 | **Avec paramètres** Pour quelles valeurs de $m\in\mathbb{R}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x+\quad my+2mz=0 \\ 2x-\quad my+\quad z=0 \\ x+(m+1)y-\quad mz=0 \end{array}\right. \quad \text{admet-il } (0,0,0) \text{ comme unique solution ?}$$

Solution (exercice 8) Notons (S) le système à résoudre. On a :

$$(S)\iff \left\{\begin{array}{ll} x+\ my+\quad 2mz=0 & \\ \quad -3my+(1-4m)z=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ \quad y-\quad 3mz=0 & L_3\leftarrow L_3-L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x+\ my+\quad 2mz=0 & \\ \quad y-\quad 3mz=0 & L_2\leftrightarrow L_3 \\ \quad -3my+(1-4m)z=0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x+my+\quad 2mz=0 & \\ \quad y-\quad 3mz=0 & \\ \quad (1-4m-9m^2)z=0 & L_3\leftarrow L_3+3mL_2 \end{array}\right.$$

On distingue alors deux cas.

- si $1-4m-9m^2\neq 0$, *i.e.* si $m\in\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{-2-\sqrt{13}}{9},\frac{-2+\sqrt{13}}{9}\right\}$, alors le système est de CRAMER et possède comme unique solution $(0,0,0)$ car on peut diviser par $1-4m-9m^2$ dans la troisième ligne du système pour obtenir $z=0$, puis en remontant le systète, on obtient successivement $y=0$ puis $x=0$.
- si $1-4m-9m^2=0$, *i.e.* si $m\in\left\{\frac{-2-\sqrt{13}}{9},\frac{-2+\sqrt{13}}{9}\right\}$, alors le système n'est pas de CRAMER.

Ainsi (S) possède $(0,0,0)$ comme unique solution si et seulement si :

$$\boxed{m\in\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{-2-\sqrt{13}}{9},\frac{-2+\sqrt{13}}{9}\right\}.}$$

Exercice 9 | Soit f l'application définie par :

$$f\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x+2y,5x+3y). \end{array}\right.$$

Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

Solution (exercice 9) Soit $Y=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, un élément de l'espace d'arrivée. Pour montrer que f est bijection, et trouver sa réciproque, il s'agit de résoudre l'équation $Y=f(X)$ en $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On résout alors le système :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} 3x+2y=a \\ 5x+3y=b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} 3x+2y=a & \\ \quad y=5a-3b & L_2\leftarrow 5L_2-3L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=-3a+2b \\ y=\ 5a-3b. \end{array}\right.$$

Ainsi, on a montré que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ il existe un unique $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(a,b)=f(x,y)$: f est donc bijective. De plus, on a $f(x,y)=(a,b)\iff(x,y)=(-3a+2b,5a-3b)$ donc la bijection réciproque est donnée par :

$$\boxed{f^{-1}\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (-3a+2b,5a-3b). \end{array}\right.}$$

II

Deuxième partie

Analyse