Programme de colles
du 29 au 2/2/2024

- Cette semaine, toutes les suites et encore un peu de matrices.
- Pas de questions d'info sur les suites encore, je n'ai pas encore traité le TP associé.

1. [MATHS] MATRICES

Attention

- Au sujet des matrices inversibles : la technique d'échelonnement par pivot de Gauß (et par résolution d'un système linéaire) n'a pas encore été vue, elle le sera dans un futur chapitre. Seules les techniques listées ci-dessous sont au programme : définition, polynôme annulateur, à l'aide d'une forme diagonalisée. Ainsi, « déterminer l'inverse de P » où P est une matrice 3×3 quelconque sans autre indication, est pour le moment hors-programme.
- Le déterminant est au programme uniquement en dimension 2.
- Les exercices abstraits faisant appel à la formule explicite du produit matriciel (à l'aide d'une somme) ne sont pas vraiment dans l'esprit du programme, à garder pour la fin de la colle si le reste est réussi. En revanche, elle est apparue en question de cours au concours Agro-Véto, d'où sa présence dans les questions du programme de colle.
- Bien sûr, en ce qui concerne les matrices diagonalisables, les élèves ne savent pas encore comme trouver la matrice P associée. L'idée est pour le moment uniquement de mettre en place le vocabulaire. La seule application de la diagonalisation vue pour le moment est le calcul des puissances.

- **Matrices & Opérations.** Généralités, égalité matricielle, matrices usuelles (nulle, identique, homothétique, Attila, élémentaires). Opérations sur les matrices (somme, multiplication externe, multiplication interne). Transposition notée $A^\top$ et propriétés. Codage d'une matrice en Python.
- **Matrices carrées.** Puissances, règles, matrice nilpotente. Cas d'une matrice diagonale. Formule du binôme matriciel. Inversibilité matricielle : définition, propriétés, équivalence d'un inverse à droite ou à gauche (admise), simplification matricielle par une matrice inversible, équation-produit où l'une des matrices est inversible. Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires. Identité de Bernoulli (non exigible, connaitre la preuve), application à l'inversibilité de $I_n - N$ où N est nilpotente. Premières techniques de calcul d'inverses : existence d'un polynôme annulateur de coefficient constant non nul, cas d'une matrice 2 × 2 et définition du déterminant dans ce cas-là. Matrices semblables, diagonalisables et trigonalisables. Application au calcul de puissances.

2. [MATHS] SUITES NUMÉRIQUES

- **Généralités.** Définition, opérations, représentation graphique. Suite monotone, stationnaire. Propriétés vraies APCR.
- **Limite d'une suite.** Définitions. Unicité de la limite. Convergente implique bornée. Limite et encadrement, passage à la limite dans les inégalités. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de divergence vers ±∞ par majoration/-minoration. Suites extraites des termes pairs/impairs. Croissances comparées. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes, application à une série alternée et à la constante d'Euler. Équivalents : définition, équivalents usuels à l'aide d'un taux d'accroissement, liens entre équivalent et limite éventuelle. Propriétés sur les équivalents. Suites remarquables : implicite et récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.

Attention

- La notion générale de suite extraite n'est pas au programme, uniquement les extraites des termes pairs et impairs.
- Au sujet des suites implicites : je rappelle que l'algorithme de dichotomie sera vu dans un prochain chapitre. Aucune question donc pour l'instant sur la façon de trouver une valeur approchée des termes d'une suite implicite.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :
$$\forall (i,j) \in \{1,\dots n\}^2, \quad a_{ij} = (i+j)^2.$$
Écrire une fonction d'en-tête `creer_matriceA(n)` qui retourne A représentée en tableau `numpy`.
2. Énoncé de la formule du binôme matriciel. Application au calcul des puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Citer le théorème d'encadrement. Application à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Citer le théorème de divergence par minoration/majoration. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$, justifier que : $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \infty$.

5. Citer le théorème de la limite monotone. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, puis en déduire que $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \infty$, en **admettant** que $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

6. Suites adjacentes : définition, propriété de convergence. Application à la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en montrant que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

7. Rappeler l'équivalent de $\cos u_n - 1$, $(1+u_n)^\alpha - 1$ sous une hypothèse à rappeler portant sur (u_n). Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = nx + \ln(x)$. Montrer l'existence d'une unique suite (x_n) vérifiant $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) est décroissante. *(Rappel aux élèves : il s'agit d'étudier le signe $f_n(x_{n+1})$ (version du cours) ou de $f_{n+1}(x_n)$...)*

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : l'informatique pour les suites, et les systèmes.