Chapitre (NUM) 2 Suites numériques

1 Algorithmes sur les suites ......
2 Exercices ....
3 Solutions des exercices.........

Résumé & Plan

Le but de ce chapitre est de de savoir mettre en place les différents algorithmes rencontrés dans le chapitre de Mathématiques (savoir renvoyer le n-ième terme, la liste des termes, seuil d'atteinte d'une limite, *etc.*).

- Les chapitres d'Informatique sont composés de cours et d'exercices intégrés. Le cours sera projeté au tableau.
- Il n'est pas attendu que toute la classe aborde tous les exercices. Traitez donc en priorité les exercices présents dans la liste donnée à chaque début de séance.
- Exercices 💣 / **Pour aller plus loin** : exercices plus difficiles, ou plus techniques. À ne regarder que si les autres sont bien compris.

1. ALGORITHMES SUR LES SUITES

Résumé des attendus

Voici ce qu'il faut savoir faire en Python à propos des suites :
- Les fonctions permettant de calculer un terme donné d'une suite.
- Les fonctions permettant de calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois.
- Construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée.
- Tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

Nous illustrerons ces différents programmes sur les trois suites suivantes :

- **[Explicite]** La suite (u_n), définie explicitement, vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$
où $a \in \mathbb{R}$ est choisi par l'utilisateur. On peut prouver qu'elle converge vers e^a.
- **[Récurrence d'ordre 1]** La suite (v_n), définie par une relation de récurrence d'ordre 1, vérifiant :
$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + e^{v_n}. \end{cases}$$
On peut prouver qu'elle est croissante quel que soit $a \in \mathbb{R}$ et en déduire, par l'absurde, qu'elle tend vers $+\infty$.
- **[Récurrence d'ordre 2]** La suite (w_n), définie par une relation de récurrence d'ordre 2, vérifiant :
$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{5}{6} w_{n+1} - \frac{1}{6} w_n. \end{cases}$$
On peut prouver qu'elle converge vers zéro.

Remarque 1 (Nomage des variables) Dans tous nos programmes, on respectera les deux conventions suivantes : les variables `n`, `i`, `j` ... serviront à stocker des valeurs d'**indices**, les variables `u`, `v`, `w` ... serviront quant à elles à stocker des valeurs de **termes** des suites. Même si la suite s'appelle autrement que (u_n), on appelle `u` la variable stockant son terme.

1.1. Calcul du n-ième terme

SUITE EXPLICITE. C'est le cas le plus simple, il suffit de renvoyer l'expression correspondant au terme saisit par l'utilisateur. Voici par exemple le code de la fonction `terme_u(a,n)` qui renvoie le terme u_n avec a et n en paramètre de fonction :

■■ Terme n d'une suite définie explicitement

```
def terme_u(a, n):
```

```
    """
    renvoie la valeur de u_n
    """
    return (1+a/n)**n

>>> terme_u(2, 1)
3.0
>>> terme_u(0, 1)
1.0
```

Cas particuliers des sommes (séries) et produits. Des suites peuvent être définies à l'aide d'une somme ou d'un produit. On utilisera alors les méthodes vues dans le chapitre sommes/produits du cours de Mathématiques.

(Calcul de $\sum_{k=p}^{n} a_k$)

```
def somme_a(p, n):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += a_k # le terme a_k est à taper à la main en \
        ↪ fonction de la somme
    return S
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def somme_cos(p, n, x):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += ma.cos(k*x)
    return S

>>> somme_cos(0, 10, 1)
-0.4174477464559059
>>> somme_cos(0, 10, 0) # résultat attendu car on somme 1, onze \
↪ fois
11.0
```

(Calcul de $\prod_{k=p}^{n} a_k$)

```
def produit(p, n):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= a_k # à adapter en fonction de la somme
    return P
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\prod_{k=p}^{n} e^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def produit(p, n, x):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= ma.exp(k*x)
    return P

>>> produit(0, 10, 1)
7.694785265142015e+23
>>> produit(0, 10, 0) # résultat attendu
1.0
```

Suite récurrente d'ordre 1. Pour calculer v_n on procède ainsi.

1. On prévoit un test `if` pour la condition initiale, puis :
2. on initialise une variable `u` avec la valeur de v_0.
3. On parcourt à l'aide d'une boucle `for` tous les indices i de 1 à n (l'indice mathématique correspondant). Pour chaque valeur de i, on remplace `u` (qui contient v_{i-1}) par sa nouvelle valeur, v_i, à l'aide de la formule de récurrence.
4. En sortie de boucle, `u` contient la valeur de v_n ; il suffit donc de renvoyer `u`.

Voici par exemple le code de la fonction `terme_v(a, n)` qui renvoie le terme v_n avec $v_0 = a$ et n en paramètre de fonction :

Terme n d'une suite récurrente d'ordre 1

```
def terme_v(a, n):
    """
    renvoie la valeur de v_n lorsque v_0 = a
    """
    if n == 0:
        return a
    else:
        u = a
        for i in range(1, n+1):
            # u est ici la valeur précédente
```

```
        u = u + ma.exp(u)
        # u est ici la valeur suivante
    return u

>>> terme_v(0, 1)
1.0
>>> terme_v(0, 2)
3.718281828459045
```

Remarque 2 **(Version « universelle » sans `if`)** Le test `if` n'est ici pas obligatoire. En effet, si `n = 0` alors la boucle `for` ne s'exécutera pas (bornes dans le mauvais sens) et donc on renverra bien `v = a`.

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. Pour calculer w_n on procède ainsi :

1. On prévoit un test `if` pour les deux conditions initiales, puis :
2. on initialise **deux** variables, `u` et `v`, avec les valeurs de w_0 et de w_1.
3. On parcourt à l'aide d'une boucle `for` tous les indices i de 2 à n (l'indice mathématique correspondant). Pour chaque valeur de i, on calcule le terme suivant à l'aide de la relation de récurrence puis on remplace **simultanément** (donc au moyen d'une **double-affectation**) `u` et `v` par les nouvelles valeurs.
4. En sortie de boucle, `v` contient la valeur de w_n.

Voici par exemple le code de la fonction `terme_w(a, b, n)` qui renvoie le terme w_n avec $w_0 = a$, $w_1 = b$ et n en paramètre de fonction.

■■ Terme n d'une suite récurrente d'ordre 2

```
def terme_w(a, b, n):
    """
    renvoie la valeur de w_n lorsque w_0 = a et w_1 = b
    """
    if n == 0:
        return a
    elif n == 1:
        return b
    else:
        u, v = a, b
        for i in range(2, n+1):
            u, v = v, (5/6)*v-(1/6)*u
        return v
```

```
>>> terme_w(0, 1, 0)
0
>>> terme_w(0, 1, 1)
1
>>> terme_w(0, 1, 2)
0.8333333333333334
```

Remarque 3 **(Version « universelle » sans `if`)** Là encore, le test `if` n'est pas indispensable. Il est possible d'adapter la seconde partie de la fonction (changement de boucle `for` et dans la récurrence) afin qu'elle convienne également aux cas `n = 0` et `n = 1`.

```
def terme_w_bis(a, b, n):
    """
    renvoie la valeur de w_n lorsque w_0 = a et w_1 = b
    """
    u, v = a, b
    for i in range(1, n+1):
        u, v = v, (5/6)*v-(1/6)*u
    return u
>>> terme_w_bis(0, 1, 0)
0
>>> terme_w_bis(0, 1, 1)
1
>>> terme_w_bis(0, 1, 2)
0.8333333333333334
```

Elle renvoie bien également les bons termes.

1.2. Calcul du premier terme/indice vérifiant une condition

Pour réaliser ces fonctions, il va falloir calculer les termes successivement jusqu'à ce que la condition soit vérifiée. Pour cela on utilisera une boucle `while` : tant que la condition **n'est pas vérifiée**, on calcule le terme suivant; reste alors à renvoyer le dernier terme/indice. On parle en général *d'algorithme de seuil.*

Attention

Contrairement aux boucle `for`, une boucle `while` ne permet pas de parcourir automatiquement les différents indices. Il faudra donc dans nos programmes introduire une variable contenant la valeur de l'indice, l'initialiser correctement et l'augmenter de 1 à chaque passage dans la boucle.

Suite explicite. Par définition de la limite, on sait par exemple que comme la suite (u_n) converge vers e^a, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n - e^a| < \varepsilon.$$

Voici une fonction cherchant l'entier n_0 en question.

Algorithme de seuil pour une suite explicite

```
def seuil_u(a,eps):
    """
    renvoie le premier indice n pour lequel |u_n-exp(a)|<eps
    """
    n = 1
    u = (1+a/n)**n
    while abs(u-exp(a)) >= eps:
        n += 1
        u = (1+a/n)**n
    return n
```

Remarque 4 Il est parfois possible de calculer l'entier n_0 explicitement en résolvant une équation/inéquation, mais cela n'est pas possible sur cet exemple.

Suite récurrente d'ordre 1. Pour réaliser ces fonctions, il y a un unique changement à apporter aux fonctions précédentes : remplacer la boucle `for` par une boucle `while`.

On sait par exemple que la suite (v_n) tend en croissant vers $+\infty$, donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies v_n > A.$$

Voici la fonction qui renvoie l'indice n_0, a et A étant en paramètre de fonction.

Algorithme de seuil pour une suite récurrente d'ordre 1

```
def seuil_v(a, A):
    """
    renvoie le premier indice n pour lequel v_n >= A
    """
    n = 0
    v = a
    while not (v > A):
        n += 1
        v = v + ma.exp(v)
    return n
```

```
>>> n_0 = seuil_v(1, 10)
>>> n_0
2
>>> terme_v(1, n_0)
44.911837503175164
>>> terme_v(1, n_0-1)
3.718281828459045
```

Suite récurrente d'ordre 2. Pour réaliser ces fonctions, il y a un unique changement à apporter aux fonctions précédentes : remplacer la boucle `for` par une boucle `while`.

On sait par exemple que la suite (w_n) converge vers 0, donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |w_n| < \varepsilon.$$

Voici la fonction qui renvoie l'indice n_0, a, b et ϵ étant en paramètre de fonction.

Algorithme de seuil pour une suite récurrente d'ordre 2

```
def seuil_w(a, b, eps):
    """
    renvoie le premier indice n pour lequel |w_n|<eps
    """
    n = 0
    u, v = a, b
    while not(abs(u) < eps):
        n += 1
        u, v = v, (5/6)*v-(1/6)*u
    return n
```

```
>>> n_0 = seuil_w(1, 1, 10**(-3))
>>> n_0
12
>>> terme_w(0, 1, n_0)
0.0014535536914610499
>>> terme_w(0, 1, n_0-1)
0.002895817324383145
```

1.3. Construction de la liste des termes et tracé

On construit la liste de proche en proche à l'aide d'une boucle **for** ou **while** et de la méthode append sur les listes. Vous noterez que les versions avec seuil permettent de retrouver les algorithmes de seuil précédents (en renvoyant la longueur de la liste obtenue).

SUITE EXPLICITE. On donne à titre d'exemple les fonctions qui renvoient la liste des termes u_1 à u_n.

Liste de termes sous condition ou non – Suite explicite

```
def liste_terme_u(a, n):
    """
    renvoie la liste [u_1,...,u_n] (u_0 n'existe pas !)
    """
    L = []
    for i in range(1, n+1):
        L.append((1+a/i)**i)
    return L

>>> liste_terme_u(1, 10)
[2.0, 2.25, 2.37037037037037, 2.44140625, 2.4883199999999994, \
↪ 2.5216263717421135, 2.546499697040712, 2.565784513950348, \
↪ 2.5811747917131984, 2.5937424601000023]

def liste_seuil_u(a, eps):
    """
    renvoie la liste [u_1,...,u_n] où n est le premier indice n \
    ↪ pour lequel |u_n-exp(a)|<eps"""
    n = 1
    L = [(1+a/n)**n]
    while not abs(L[-1] - ma.exp(a)) < eps:
        n += 1
        L.append((1+a/n)**n)
    return L

>>> liste_seuil_u(1, 10**(-1))
[2.0, 2.25, 2.37037037037037, 2.44140625, 2.4883199999999994, \
↪ 2.5216263717421135, 2.546499697040712, 2.565784513950348, \
↪ 2.5811747917131984, 2.5937424601000023, 2.6041990118975287, \
↪ 2.613035290224676, 2.6206008878857308]
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 1. On construit une liste L telle que L[i] contienne la valeur de v_i. Il n'est alors plus nécessaire de conserver le terme précédent dans une variable : lors du calcul de v_i, on dispose de la valeur de v_{i-1}, c'est précisément L[-1], le dernier terme ajouté.

On donne à titre d'exemple une fonction qui renvoie la liste des termes v_0 à v_n et une autre qui renvoie la liste de tous les termes de (v_n) jusqu'à ce que $v_n > A$.

Liste de termes sous condition ou non – Suite d'ordre 1

```
def liste_terme_v(a, n):
    """
    renvoie la liste [u_0,...,u_n]
    """
    L = [a]
    for _ in range(1, n+1):
        L.append(L[-1] + ma.exp(L[-1]))
    return L

>>> liste_terme_v(1, 3)
[1, 3.718281828459045, 44.911837503175164, 3.1986240606431162e+19]

def liste_seuil_v(a, A):
    """
    renvoie la liste [v_0,...,v_n] où n est le premier indice n \
    ↪ pour lequel v_n>=M
    """
    L = [a]
    while L[-1] < A:
        L.append(L[-1] + ma.exp(L[-1]))
    return L

>>> liste_seuil_v(1, 3)
[1, 3.718281828459045]
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. On construit une liste L telle que L[i] contienne la valeur de w_i. Là encore, il n'est alors plus nécessaire de conserver les termes précédent dans des variables : lors du calcul de w_i, on dispose de la valeur de w_{i-1} dans L[i-1] et de w_{i-2} dans L[i-2]. On donne à titre d'exemple une fonction qui renvoie la liste des termes w_0 à w_n et une autre qui renvoie la liste de tous les termes de (w_n) jusqu'à ce que $|w_n| < \epsilon$. Notons que dans deux fonctions, et ce

afin d'éviter la gestion de cas particuliers, on suppose que la liste finale contient au moins w_0 et w_1.

Liste de termes sous condition ou non – Suite d'ordre 2

```
def liste_terme_w(a, b, n):
    """
    renvoie la liste [w_0,w_1,...,w_n] (n>=1)
    """
    if n == 0:
        return [a]
    elif n == 1:
        return [a, b]
    else:
        L = [a, b]
        for i in range(2, n+1):
                L.append((5/6)*L[-1]-(1/6)*L[-2])
        return L

>>> liste_terme_w(1, 1, 10)
[1, 1, 0.6666666666666667, 0.38888888888888906, \
↪ 0.21296296296296313, 0.11265432098765445, 0.05838477366255152, \
↪ 0.029878257887517197, 0.015167752629172412, \
↪ 0.007660084209724144, 0.0038554447365747183]

def liste_seuil_w(a, b, eps):
    """
    renvoie la liste [w_0,w_1,...,w_n] (n>=1) où n est le premier \
    ↪ indice pour lequel |w_n|<eps
    """
    L = [a, b]
    while abs(L[-2]) >= eps:
            L.append((5/6)*L[-1]-(1/6)*L[-2])
    return L

>>> liste_seuil_w(1, 1, 10**(-1))
[1, 1, 0.6666666666666667, 0.38888888888888906, \
↪ 0.21296296296296313, 0.11265432098765445, 0.05838477366255152, \
↪ 0.029878257887517197]
```

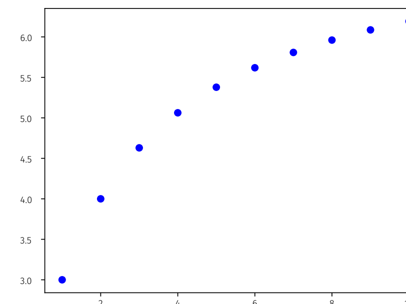
Remarque 5 **(Suites imbriquées)** Il faut savoir également en pratique adapter ces algorithmes à des suites récurrentes imbriquées.

1.4. Tracer une suite

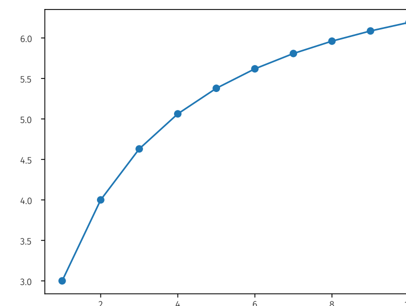
On s'y prend comme pour les fonctions, on a besoin donc de la liste des termes de ladite suite. Traçons par exemple (u_n).

Tracé de la suite (u_n) sur $[\![0, 10]\!]$

```
import matplotlib.pyplot as plt
n = 10
X = list(range(1, n+1)) # entiers entre 1 et n
Y = liste_terme_u(2, n)
plt.plot(X, Y, "bo") # o : style de marker, des points non reliés
```



```
plt.plot(X, Y, marker = 'o') # des points reliés cette fois, un \
↪ petit peu plus visuel
```



2. EXERCICES

Soient $\ell, u_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Rappelons que « $u_n \in \mathbb{R}$ est une valeur approchée de ℓ à ε près » signifie que : $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Vous l'aurez compris, avec ces notations, des suites convergentes vers ℓ fournissent une valeur approchée de la limite à ε près pour n assez grand. L'enjeux est parfois d'atteindre une certaine précision lorsqu'on ne connait pas la valeur de ℓ (des suites adjacentes peuvent alors être utiles).

2.1. Pour les suites

Exercice 1 | Récurrence d'ordre 1 [Solution] On considère la suite arithmético-géométrique définie par :

$$u_0 = 4, \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = 2 - \frac{u_n}{2}.$$

1. Écrire un programme itératif prenant en argument un entier n et qui calcule u_n.
2. Quelle est la limite ℓ de la suite (u_n) ? Écrire un programme prenant en argument $\varepsilon > 0$ et qui affiche le premier entier n tel que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Exercice 2 | Récurrence d'ordre 2 – Nombre d'or et FIBONACCI [Solution] On rappelle que la suite de FIBONACCI (F_n) est définie par :

$$\mathrm{F}_0 = 1, \quad \mathrm{F}_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

On appellera dans la suite *nombre d'or* le réel $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et on note $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Écrire un programme itératif, prenant en argument un entier n à l'utilisateur et renvoyant F_n.
2. Écrire un programme itératif, prenant en argument un entier n à l'utilisateur et renvoyant la liste des termes successifs $\mathrm{F}_0, \dots, \mathrm{F}_n$ de la suite de FIBONACCI. Tracer ces termes sur un graphique.
3. Avec le cours de Mathématiques, on peut établir l'expression suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\alpha^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\beta^n.$$
Montrer par le calcul que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n} = \alpha$.
4. En déduire à l'aide de Python une valeur approchée du nombre d'or.

Exercice 3 | Récurrences imbriquées [Solution] On considère deux suites (a_n) et (j_n) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} j_{n+1} &= j_n + 8a_n, \\ a_{n+1} &= 0,25 j_n, \end{cases} \quad a_0 = 0, \quad j_0 = 2.$$

La suite a_n décrit le nombre d'adultes au temps $n \in \mathbb{N}$ d'une population structurée en deux classes d'âge, et j_n le nombre de juvéniles (enfants).

1. Interpréter le système en terme de dynamique de la population.
2. Créer une fonction Python d'en-tête `population(n)` qui renvoie deux listes, l'une contenant $j_0, \dots, j_n$, l'autre $a_0, \dots, a_n$. Tracer alors les deux suites sur $[0, 40]$. Qu'en déduire sur notre population ? Une classe d'âge semble-t-elle devenir prédominante ?

Exercice 4 | Suites adjacentes et approximation de la limite [Solution] On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{2}{b_{n+1}}, \quad a_0 = 1, \; b_0 = 2.$$

On peut montrer que ces suites sont adjacentes, convergent vers $\sqrt{2}$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant b_n.$$

Proposer une fonction d'en-tête `approx_racine2(eps)` qui renvoie une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à `eps` près utilisant les suites $(a_n), (b_n)$.

Exercice 5 | Conjecturer un équivalent [Solution] Soit la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin(u_n), \quad u_1 \in]0, \pi[.$$

Conjecturer, en tracer les suites, la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}, \left(\sqrt{n}u_n\right)_{n\in\mathbb{N}*}$. Conjecturer alors un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 6 | Produit [Solution] On définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, le produit :

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

1. Écrire un script d'en-tête `p(n)` qui renvoie la valeur de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Conjecturer la valeur de la limite : $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^2$, à l'aide de la console.

2.2. Pour les séries

Les séries seront étudiées plus en détail en deuxième année, ce sont des suites de la forme $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_0}$ où :

- (u_n) est une suite réelle,
- n_0 est un entier généralement égal à 0.

L'objectif des exercices qui suivent est d'analyser leur convergence.

Attention **Trouver la nature d'une série n'est pas chose facile!**

Il n'y a aucun lien clair *a priori* entre la nature de $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geqslant n_0}$ et la nature de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Par exemple, nous avons vu en cours que :

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \infty$ alors que $\frac{1}{k} \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{} 0$,
- $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge alors que $\frac{1}{k^2} \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{} 0$.

Exercice 7 | Limite mystère [Solution] Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et n entier, on note :

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. Rappeler une fonction d'en-tête `factorielle(n)`, où `n` est un entier, qui renvoie la valeur de $n!$. *De manière itérative ou récursive selon votre préférence.*
2. Écrire une fonction d'en-tête `somme_1(n, x)` prenant en argument un réel x et un entier n, et renvoyant $\mathrm{S}_n(x)$.
3. Vers quoi semble converger la suite $(\mathrm{S}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Le constater avec Python en commençant par tester pour $x = 0; 1$. Puis, une fois le résultat conjecturé, confirmer la conjecture en traçant sur un même graphique (par exemple sur l'intervalle $[0, 10]$) :
   - le graphe d'une fonction judicieusement choisie,
   - et le graphe de $x \longrightarrow \mathrm{S}_5(x)$, $x \longrightarrow \mathrm{S}_{10}(x)$

Exercice 8 | Série inverse des carrés [Solution] On note ici $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On a montré en cours (en vérifiant que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante majorée) que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge. On souhaite ici conjecturer la valeur de sa limite $\mathrm{S} \in \mathbb{R}$. On admet l'inégalité suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad |\mathrm{S} - \mathrm{S}_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

1. Conjecturer à l'aide de Python l'existence et la valeur de $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt{6\mathrm{S}_n}$.
2. On souhaite écrire une fonction d'en-tête `approx_S(eps)` qui prend en argument un réel `eps` > 0, et affichant une valeur approchée de S à ε près, en utilisant l'inégalité admise.
   - **2.1)** **[Méthode 1 : calculer n]** Soit une précision $\varepsilon > 0$ fixée. Trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\mathrm{S} - \mathrm{S}_{n_0}\right| \leqslant \varepsilon$. En déduire une première version de `approx_S(eps)`.
   - **2.2)** **[Méthode 2 : un `while`]** Écrire une seconde version de `approx_S(eps)` à l'aide d'une boucle `while`.
3. En admettant le résultat de la première question, déduire une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-3} près.

2.3. Planche Agro-Véto

Cet exercice n'est à traiter que si tout le reste a été terminé.

Exercice 9 | Développement en série entière d'arctan – Extrait Agro—Véto [Solution] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on note

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

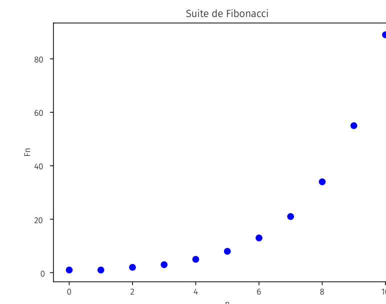
1. Écrire un script Python permettant de calculer $u_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on conjecturer sur le comportement asymptotique de la suite pour $|x| \leq 1$ et $|x| > 1$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$. On note $\mathrm{I}_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Quelle est la limite de $(\mathrm{I}_n(x))$ quand $n \to +\infty$?
3. **3.1)** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$. Montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \mathrm{I}_n(x)$$
   3.2) En déduire que pour $x \in [-1, 1]$, $(u_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers $\arctan(x)$, et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |4u_n(1) - \pi| \leq \frac{4}{2n+3}.$$
   3.3) Grâce au résultat de la question précédente, écrire un script Python qui, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, calcule une approximation de π à ε près.
   3.4) Montrer que les suites $(u_{2n}(1))$ et $(u_{2n+1}(1))$ sont adjacentes. En déduire que
4. Justifier que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$. *Indication : On pourra utiliser la formule* $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ *valable dès que tous les termes sont définis.*
5. En déduire une autre méthode d'approximation de π et comparer informatiquement leur efficacité.

3. SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1.
```
def suiteU_arithmgeo(n):
    if n == 0:
        return 4
    else:
        u = 4
        for _ in range(1, n+1):
            u = 2 - u/2
        return u
```
On peut aussi proposer une version récursive.
```
def suiteU_arithmgeo_rec(n):
    if n == 0:
        return 4
    else:
        return 2 - suiteU_arithmgeo_rec(n-1)/2
```
2. C'est une suite arithmético-géométrique, de raison $-1/2 \in]-1,1[$. Donc en explicitant la suite en fonction de n, nous avons : $u_n \xrightarrow[]{n\to\infty} \frac{4}{3}$, c'est le point fixe de la suite. On en déduit le script suivant :
```
def approx_lim_U_arithmgeo(eps):
    u = 4
    n = 0
    while abs(u - 4/3) > eps:
        u = 2 - u/2
        n += 1
    return n
```
```
>>> approx_lim_U_arithmgeo(10**(-2))
9
```

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1.
```
def fibo(n):
    if n <= 1:
        return 1
    else:
        u, v = 1, 1
        for i in range(2, n+1):
            u, v = v, u+v
        return v
```
```
>>> fibo(10)
89
```
2.
```
def termes_fibo(n):
    if n == 0:
        return [1]
    elif n == 1:
        return [1, 1]
    else:
        L = [1, 1]
        for i in range(2, n+1):
            L.append(L[-2]+L[-1])
        return L
```
On peut ensuite tracer les termes de la suite.
```
plt.plot(termes_fibo(10), "bo")
plt.title("Suite de Fibonacci")
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("Fn")
```


3. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\alpha^{n+1} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\beta^{n+1}}{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\alpha^{n} + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\beta^{n}}$$

$$= \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} \times \frac{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}}$$

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \alpha \times \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \boxed{\alpha}.$$

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$

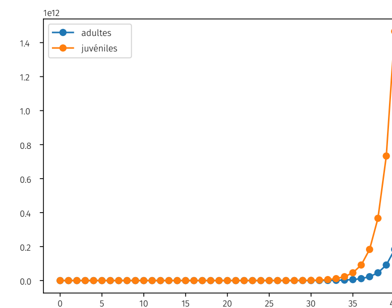
4. Pour obtenir une valeur approchée de α, on peut donc renvoyer $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ pour n assez grand.

```
>>> L = termes_fibo(100)
>>> L[-1]/L[-2] # valeur approchée du nombre d'or
1.618033988749895
>>> (1+5**(0.5))/2
1.618033988749895
```

Solution (exercice 3) [Énoncé]

- La seconde ligne du système signifie que seul 1/4 des juvéniles passent à l'âge adulte au temps suivant.
- La première ligne signifie qu'entre deux temps n et $n+1$, il y a un apport de juvéniles égal 8 par adulte de la génération précédente.

```
def population(n):
    a, j = 0, 2
    A = [a]
    J = [j]
    for _ in range(1, n+1):
        a, j = 0.25*j, j+8*a
        A.append(a)
        J.append(j)
    return A, J

A, J = population(40)
plt.plot(A, label="adultes", marker="o")
plt.plot(J, label="juvéniles",marker="o")
plt.legend()
```



La classe des juvéniles prend largement le dessus sur la population des adultes.

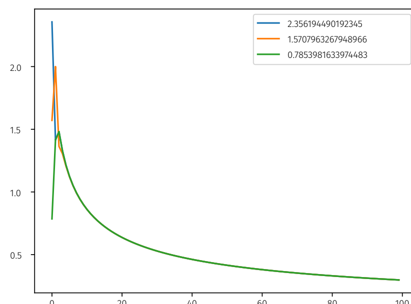
Solution (exercice 4) [Énoncé] L'idée est alors de calculer successivement les termes des deux suites, jusqu'à ce que l'écart entre elles soit inférieur à la précision fixée.

```
def approx_racine2(eps):
    a, b = 1, 2
    while b - a > eps:
        b = (a+b)/2
        a = 2/b
    return (a+b)/2

>>> approx_racine2(10**(-3))
1.4142135623746899
>>> ma.sqrt(2) # valeur exacte
1.4142135623730951
```

Solution (exercice 5) [Énoncé]

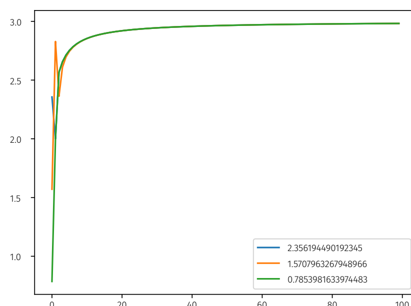
```
def liste_termes_U(n, u_1):
    """
    renvoie la liste des termes de la suite et de la racine x \
    ↪ la suite
    """
    U = [u_1]
    for k in range(2, n+1):
        U.append((1+1/(k-1))*ma.sin(U[-1]))
    return U

# testons avec plusieurs conditions initiales
cond_init = [3*ma.pi/4, ma.pi/2, ma.pi/4]
for u_1 in cond_init:
```

```python
    plt.plot(liste_termes_U(100, u_1), label=str(u_1))
plt.legend()
```



Dans tous les cas de condition initiale testés, on observe une convergence de la suite vers une limite finie. Traçons maintenant la suite multipliée par la racine.

```python
cond_init = [3*ma.pi/4, ma.pi/2, ma.pi/4]
for u_1 in cond_init:
    U = liste_termes_U(100, u_1)
    racU = [ma.sqrt(i)*U[i-1] for i in range(1, 101)]
    plt.plot(racU, label=str(u_1))
plt.legend()
```



On conjecture d'autre part que :

$$\sqrt{n}u_n \xrightarrow[]{n\longrightarrow\infty} 3 \Longrightarrow \boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{\sqrt{n}}}.$$

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1.
```python
def p(n):
    P = 1
    for k in range(1, n+1):
        P *= 1+k/n**2
    return P
```

```python
>>> p(1)
2.0
>>> p(2)
1.875
```

2.
```python
>>> p(10)**2
2.8961962061931783
>>> p(10*4)**2 # on ne reconnait rien ?
2.7633932648235526
>>> ma.exp(1) # si, bien sûr !
2.718281828459045
```

On conjecture : $\boxed{\lim_{n\longrightarrow\infty} p_n^2 = \mathrm{e}}$.

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1.
```python
def factorielle(n):
    P = 1
    for k in range(1, n+1):
        P *= k
    return P

def factorielle_rec(n):
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return n*factorielle_rec(n-1)
```

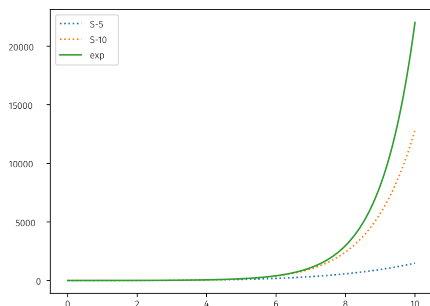
2.
```python
def somme1(n, x):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S += x**k / factorielle(k)
    return S
```

3.
```python
>>> somme1(10**3, 0) # proche de e^0
1.0
>>> somme1(10**3, 1) # proche du nombre e
2.7182818284590455
```

La suite semble converger vers l'exponentielle de x. Constatons-le par exemple avec un graphique.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
X = np.linspace(0, 10, 10**3)
Y = [ma.exp(x) for x in X]
```

```
Z = [somme1(5, x) for x in X]
Zbis = [somme1(10, x) for x in X]
plt.plot(X, Z, linestyle = ":", label="S-5")
plt.plot(X, Zbis, linestyle = ":", label="S-10")
plt.plot(X, Y, label="exp")
plt.legend()
```



Solution (exercice 8) [Énoncé]

1. On peut par exemple écrire une fonction renvoyant la valeur de S_n.

```
def S(n):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S += 1 / k**2
    return S
```

```
>>> (6*S(10))**(1/2)
3.04936163598207
>>> (6*S(100))**(1/2)
3.1320765318091053
>>> (6*S(1000))**(1/2)
3.1406380562059946
```

On conjecture alors : $\boxed{\sqrt{6S_n} \xrightarrow[]{n\to\infty} \pi.}$

2. Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité admise nous apprend que si on choisit n de sorte que $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$, alors S_n est une valeur approchée de S à ε près.

2.1) **[Méthode 1 : calculer n]** On résout $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Ceci est encore équivalent à : $\boxed{n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1}$. On renvoie donc la valeur de S_n pour cet entier n.

```
def approx_S(eps):
    n = ma.floor(1/eps)+1
    return S(n)
```

```
>>> eps = 10**(-3)
>>> S = approx_S(eps)
>>> S
1.6439355646845575
>>> ma.pi**2/6
1.6449340668482264
>>> abs(S-ma.pi**2/6) <= eps
True
```

2.2) **[Méthode 2 : un `while`]**

```
def approx_S(eps):
    S = 1
    n = 1
    while 1/n > eps:
        n += 1
        S += 1 / n**2
    return S
```

```
>>> S = approx_S(10**(-3))
>>> S
1.6439345666815615
>>> ma.pi**2/6
1.6449340668482264
>>> abs(S-ma.pi**2/6) <= 10**(-3)
True
```

3. Si on admet que $\sqrt{6S_n} \xrightarrow[]{n\to\infty} \pi$ alors $S_n \xrightarrow[]{n\to\infty} \frac{\pi^2}{6}$ par propriété sur les limites. L'appel

```
>>> approx_S(10**(-3))
1.6439345666815615
```

renvoie alors une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-3} près. *On peut alors en déduire une valeur approchée de π mais alors aucune garantie sur la précision.*

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1.

```
def u(n, x):
    """
    renvoie la valeur de u(n,x)
```

```python
    """
    S = 0
    for k in range(n):
        S += (-1)**k*x**(2*k+1)/(2*k+1)
    return S
```

Testons.

```
>>> u(10, 1.2)
-0.07289063746835467
>>> u(50, 1.2)
-407996.6991505616
>>> u(100, 1.2)
-16880754195420.87
>>> u(10, 0.9)
0.7298154560111498
>>> u(50, 0.9)
0.732814969864735
>>> u(100, 0.9)
0.7328151017847537
```

On constate que pour $x > 1$, la série ne semble pas converger, alors que pour $x \leqslant 1$ il semble y avoir convergence.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$. Rappelons que l'on ne peut pas permuter limite et intégrale. En revanche, on peut majorer :

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n+3}-0}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

puisque $x \in [-1,1]$ (si $|x| < 1$, on voit que le numérateur tend vers zéro en utilisant le résultat de convergence sur les suites géométriques, si $x = \pm 1$ ce sont des règles usuelles sur les limites). Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0.}$$

3. 3.1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$. Alors, par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k \mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{car } t^2 \neq -1 \\
&= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^{n+2}\mathrm{I}_n(x) \qquad \textit{car } n, n+2 \textit{ ont même parité} \\
&= \boxed{\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \mathrm{I}_n.}
\end{aligned}$$

3.2) Soit $x \in [-1,1]$, alors $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(x)$. Par ailleurs la suite $((-1)^n \mathrm{I}_n)$ est le produit d'une suite bornée multipliée par une suite qui tend vers zéro, elle converge donc vers zéro. Enfin, on peut calculer l'intégrale de gauche :

$$\int_0^x (-1)^k t^{2k}\,\mathrm{d}t = (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

en sommant on obtient donc $u_n(x)$. Donc, finalement : $\boxed{(u_n(x))_{n\geq 0} \text{ converge vers } \arctan(x).}$

3.3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Évaluons **3.1)** en $x = 1$. On obtient :

$$u_n(1) = \arctan 1 + (-1)^n \mathrm{I}_n(x) = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \mathrm{I}_n,$$

soit

$$|4u_n(1) - \pi| = |4(-1)^n \mathrm{I}_n(1)| \leqslant 4\int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{2n+3}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|4u_n(1) - \pi| \leq \frac{4}{2n+3}}.$$

3.4)

```python
def approx_pi(prec):
    n = 0
    S = 1
    while 4/(2*n+1) > prec:
        n += 1
        S += (-1)**n/(2*n+1)
    return 4*S
```

```
>>> approx_pi(10**(-3))
3.1420924036835256
```

3.5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Constatons déjà que :

$$u_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Alors, par téléscopages :

$$u_{2n+2}(1) - u_{2n}(1) = \frac{1}{2(2n+2)+1} - \frac{1}{2(2n)+1} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+1} \leqslant 0,$$

$$u_{2n+3}(1) - u_{2n+1}(1) = -\frac{1}{4n+7} + \frac{1}{4n+3} \geqslant 0,$$

$$u_{2n+1}(1) - u_{2n}(1) = \frac{-1}{2(2n+1)+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc : $\boxed{(u_{2n}(1)) \text{ et } (u_{2n+1}(1)) \text{ sont adjacentes}}$.

4. Puisque

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{2}, \; -\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2},$$

la somme $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc la tangente est bien définie. D'après la formule rappelée, on a :

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

On peut ensuite appliquer arctan de chaque côté, utiliser à nouveau que $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc on déduit en utilisant que $\arctan(\tan y) = y$ pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\boxed{\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}}.$$

5. On sait d'après les questions précédentes (3.1 évaluée en $1/2, 1/3$) qu'une bonne approximation de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ est

$$\boxed{4\left(u_n\left(\frac{1}{2}\right) + u_n\left(\frac{1}{3}\right)\right)}$$

avec n assez grand.

```
def approx_pi_bis():
    return 4*(u(10**3, 1/2)+u(10**3, 1/3))

>>> approx_pi_bis()
3.1415926535897922
```

Pour savoir qui est la plus efficace on peut comparer l'écart entre une valeur approchée et la vraie valeur, à nombre d'itérations égaux.

```
>>> import math as ma
>>> abs(4*(u(10**3, 1/2)+u(10**3, 1/2))) - ma.pi < \
↪ abs(4*u(10**3, 1)- ma.pi)
False
```

La première méthode apparaît donc comme meilleure.