Programme de colles

du 5 au 9/2/2024

- Cette semaine, toutes les suites encore, en incluant l'informatique.
- Le TP associé a été commencé mercredi dernier, donc ça risque d'être encore un peu hésitant en début de semaine.

1. [MATHS] SUITES NUMÉRIQUES

- **Généralités.** Définition, opérations, représentation graphique. Suite monotone, stationnaire. Propriétés vraies APCR.
- **Limite d'une suite.** Définitions. Unicité de la limite. Convergente implique bornée. Limite et encadrement, passage à la limite dans les inégalités. Opérations sur les limites. Théorèmes d'encadrement, de divergence vers $\pm\infty$ par majoration/-minoration. Suites extraites des termes pairs/impairs. Croissances comparées. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes, application à une série alternée et à la constante d'EULER. Équivalents : définition, équivalents usuels à l'aide d'un taux d'accroissement, liens entre équivalent et limite éventuelle. Propriétés sur les équivalents. Suites remarquables : implicite et récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.
- **Informatique.** Fonctions permettant de :
  - calculer un terme donné d'une suite,
  - calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois,
  - de construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée,
  - tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

Attention

- La notion générale de suite extraite n'est pas au programme, uniquement les extraites des termes pairs et impairs.
- Au sujet des suites implicites : je rappelle que l'algorithme de dichotomie sera vu dans un prochain chapitre. Aucune question donc pour l'instant sur la façon de trouver une valeur approchée des termes d'une suite implicite.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Citer le théorème d'encadrement. Application à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
2. Citer le théorème de divergence par minoration/majoration. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En admettant que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$, justifier que : $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
3. Citer le théorème de la limite monotone. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que : $(\mathrm{H}_n)_{n\geq 1}$ est croissante, puis en déduire que $\mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, en <u>**admettant**</u> que $\mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
4. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$. Montrer que (S_n) converge en montrant que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
5. Rappeler l'équivalent de $\cos u_n - 1$, $(1+u_n)^\alpha - 1$ et $\ln(1+u_n)$ sous une hypothèse à rappeler portant sur (u_n). Déterminer : $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = nx + \ln(x)$. Montrer l'existence d'une unique suite (x_n) vérifiant $f_n(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (x_n) est décroissante. *(Rappel aux élèves : il s'agit d'étudier le signe $f_n(x_{n+1})$ (version du cours) ou de $f_{n+1}(x_n)$...)*
7. On considère la suite (v_n), définie par :
$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + \mathrm{e}^{v_n}. \end{cases}$$
Écrire une fonction d'en-tête `terme_v(a, n)` qui retourne la valeur de v_n.
8. On considère la suite (w_n), définie par :
$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{\cos(w_n + w_{n+1})}{n+2}. \end{cases}$$
Écrire une fonction d'en-tête `terme_w(a, b, n)` qui retourne la valeur de w_n.

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades!).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos

camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : systèmes, échelonnement, et le début des probabilités.