Chapitre (PS) 1 Espaces probabilisés

1 Introduction .....
2 Axiomatique des probabilités ..
3 Conditionnement & Indépendance d'évènements .....
4 Formules probabilistes .....
5 Exercices .....

Quels que soient les progrès des connaissances humaines, il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité.

— **Emile Borel**

Résumé & Plan

Notre objectif est ici de formaliser le concept de probabilité. En revanche, en 1ère année, nous imposerons une limitation assez importante : les univers (*i.e.* l'ensemble contenant les issues d'une expérience aléatoire) seront supposés être des ensembles finis. Il faudra attendre le cours de 2ème année avant de pouvoir par exemple lancer un dé jusqu'à obtention d'un 6.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ❤.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST1, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1 INTRODUCTION

1.1 Probabilités ou Statistiques ?

C'est le premier chapitre de Probabilités & Statistiques de l'année, précisions brièvement de quoi on parle au travers d'un exemple.

Supposons qu'un joueur parie sur le résultat du lancer d'un dé à 6 faces. S'il annonce le bon résultat, il gagne la valeur de la face en euros, s'il perd il ne gagne rien du tout.

- Les *probabilités* permettent de répondre à la question suivante : quelle stratégie le joueur doit-il adopter pour maximiser ses gains ? *Il s'agit de faire la remarque suivante : quelle que soit la face qu'il annonce, il a toujours une chance sur six de gagner. Par contre, les gains en cas de bonne réponse dépendent de la face : s'il annonce 1 il a une chance sur six de gagner 1 euros, s'il annonce 2 il a une chance sur six de gagner 2 euros etc....On devine ainsi que le joueur a tout intérêt à parier sur le 6 : il gagnera aussi souvent qu'avec une autre face mais gagnera plus. Mathématiquement cela s'écrit en terme de gain moyen, c'est-à-dire les chances de gagner multipliées par le gain, cela représente ce que le joueur gagne en moyenne par partie. On voit alors que le gain moyen en pariant sur le 6 est de* $\frac{1}{6} \times 6 = 1$ *euro tandis que les gains moyens sur les autres faces sont plus faibles : on vient de prouver que jouer le 6 est la meilleure stratégie. Le joueur vient de faire des probabilités.*
- En revanche, tout le raisonnement précédent est basé sur le caractère non pipé du dé. Les *statistiques* permettent de répondre à la question suivante : en se basant sur un grand nombre d'observations, peut-on en conclure, avec forte probabilité, que le dé est non pipé ? *Pour le vérifier, le joueur peut lancer (avant de commencer à parier) 100 fois le dé et observer les fréquences d'apparition de chaque numéro. Si elles sont toutes proches de* $\frac{1}{6}$*, le dé de grandes chances d'être équilibrés. Si par exemple le 6 ne sort pas une seule fois et que le 4 sort une fois sur deux... il se dit donc naturellement que le dé n'est pas équilibré et que le 4 a une chance sur deux de sortir. Le joueur vient de faire des statistiques, et cela change donc la stratégie à adopter. Le raisonnement précédent s'inscrit dans le domaine des Statistiques inférientielles et qui seront vues en 2ème année.*

1.2 De l'aléatoire, pourquoi ?

L'aléatoire est présent dans toute expérience scientifique. On peut classer la plupart des aléatoires en deux catégories :

- d'une part l'aléatoire « intrinsèque » lié à la complexité des individus et des phénomènes étudiés et au manque d'information dans le domaine. *Exemple : vous observez une particule, qui se balade de manière anarchique sur la droite réelle, on essaye d'observer et de trouver une loi de déplacement, l'aléatoire est donc dû au manque d'informations sur cette loi a priori inconnue.*
- D'autre part, de l'aléatoire peut intervenir « expérimentalement », par mesures entachées d'erreur, ou encore lorsque les moyens pour relever sont limités. *Exemple 1 : un relevé expérimental en physique, il y a une erreur/incertitude due à la machine elle-même. Exemple 2 : vous voulez savoir si un vaccin contre la COVID–19 est efficace, vous pouvez le tester sur un échantillon de la population, mais aussi grand soit-il un aléatoire sur son efficacité sera toujours présent pour le reste de la population.*

La première source d'aléatoire est donc le manque d'informations, ou l'ignorance, la seconde est matérielle et peut donc être contrôlée et donnée elle-même lieu à une étude plus poussée. Il n'y a pas de raison de penser qu'une source d'aléatoire peut complètement être supprimée. En Biologie (ainsi qu'en Médecine), étant donné l'extrême complexité des systèmes étudiés, l'aléatoire est finalement très présent.

2 AXIOMATIQUE DES PROBABILITÉS

Les premières formalisations de la notion de hasard, au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, répondaient pour l'essentiel à diverses questions issues de la théorie des jeux. Depuis la publication en 1933 des fondements de la théorie des probabilités d'Andreï KOLMOGOROV, les probabilités sont solidement ancrées sur cette formalisation.

2.1 Univers

Définition 1 | Expérience aléatoire & Univers Ω

- On appelle *expérience aléatoire* une expérience renouvelable, et qui, renouvelée dans des conditions identiques – pour autant que l'observateur puisse s'en assurer – ne donne pas forcément le même résultat à chaque renouvellement.
- On appelle *univers* un ensemble contenant l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire, on le notera en général Ω dans la suite. Les éléments de Ω sont appelés les *résultats* (ou *issues*, ou *éventualités*), notés généralement ω.

Cadre

Même si cela n'est pas explicité, dans toute la suite les univers seront supposés non vides.

Définition 2 | Univers fini

Un univers Ω est dit *fini* si Ω est un ensemble fini.

Exemple 1 (Exemples de référence) *Les deux expériences décrites ci-dessous seront utilisées dans la suite du cours.*

1. **[Expérience 1]** L'expérience d'un lancer de dé à 6 faces peut conduire à 6 résultats selon la face obtenue. L'univers est ici **fini** :

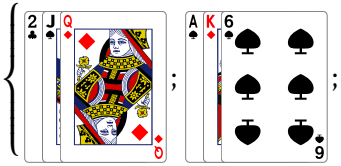
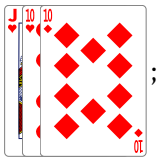
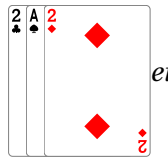
2. **[Expérience 2]** L'expérience d'un nombre infini de lancers d'une pièce amenant à pile « P » ou face « F ». L'univers est ici **infini**, on peut choisir l'ensemble des suites à valeurs dans $\{P, F\}$:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = (\underbrace{u_1}_{\text{lancer 1}}, \ldots, \underbrace{u_i}_{\text{lancer } i} \ldots), \quad \forall i \in \mathbb{N}^\star, \quad u_i \in \{P, F\}.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, u_i désigne alors le résultat du lancer i.

Exemple 2 Le résultat d'une expérience aléatoire peut prendre des formes variées :

1. le tirage de trois cartes dans un jeu de 32.

$\Omega = \Big\{$  ; ;  ;  $etc. \ldots \Big\}$.

Que vaut $\operatorname{Card}\Omega$? *Ici, le cardinal est le nombre de façons de choisir 3 éléments distincts dans l'ensemble des cartes,* $\operatorname{Card}\Omega = \binom{32}{3} = 4960$.

2. On lance deux dés à 6 faces et on s'intéresse à la somme des résultats obtenus. Précisez Ω. Que vaut $\operatorname{Card}\Omega$? $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $\operatorname{Card}\Omega = 11$.
3. Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On pioche **successivement**

et sans remise deux boules de l'urne, $\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,2),(1,3),(1,4), \\ (2,1),(2,3),(2,4), \\ (3,1),(3,2),(3,4), \\ (4,1),(4,2),(4,3) \end{array} \right\}$, $\operatorname{Card}\Omega = 12$, Ω est l'ensemble des :

Note | *« successivement » signifie qu'ici on a bien deux informations distinctes, le résultat du 1er puis le résultat du 2ème tirage ; on utilise donc plutôt des listes pour écrire les issues, car il y'a un ordre de tirage*

4. Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On pioche **simultanément** deux boules de l'urne, $\Omega = \left\{ \begin{array}{r} \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}, \\ \{2,3\},\{2,4\}, \\ \{3,4\} \end{array} \right\}$, $\operatorname{Card}\Omega = 6$, Ω est l'ensemble des :

Note | *« simultanément » signifie qu'on pioche d'un coup les deux boules ; on utilise donc plutôt des ensembles pour écrire les issues, car il n'y a pas d'ordre*

5. Un enfant naît d'un père Aa et d'une mère Aa. L'enfant héritera d'un des trois génotypes possibles AA, Aa ou aa. On prendra donc $\Omega = \{\mathrm{AA}, \mathrm{A}a, aa\}$.
6. Lancer d'une pièce jusqu'à obtenir pile (non fini) :
$$\Omega = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\,\mathrm{P}, \mathrm{FF}\,\mathrm{P}, \mathrm{FFF}\,\mathrm{P}, \ldots\}$$
7. Durée de vie d'une ampoule : $\Omega = \mathbb{R}^{+\star}$ (non fini).
8. Instant de mort du prof de maths $\Omega = [t, +\infty[$ où $t > 0$ est l'instant présent, ce n'est pas un ensemble fini.
9. Jeu de fléchettes : l'ensemble des positions géométriques possibles est donné par $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqslant \mathrm{R}^2\right\}$ (non fini), avec $\mathrm{R} \in \mathbb{R}^\star$. C'est le disque de rayon R et de centre O.

ÉVÈNEMENTS ET PROBABILITÉ – INTRODUCTION Nous venons donc de préciser la notion d'univers. Précisons à partir de l'Exemple 1 les deux autres objets que nous allons définir dans la suite.

- **[Évènements]** que l'on prend généralement (en 1ère année) égal à $\mathscr{P}(\Omega)$ (ensemble des parties de Ω). *Par exemple dans l'expérience 1 :*
$$\{2,4,6\} \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \{1,3,5\} \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \{4,6\} \in \mathscr{P}(\Omega),$$
qui correspondent dans l'expérience à faire un entier pair, faire un entier impair, faire un entier pair différent de 2. Ce sont bien des parties de Ω, donc des éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$.
- **[Probabilité]** Une application qui donne un indicateur dans $[0,1]$ de la *vraisemblance* d'un évènement (*i.e.* « caractère de ce qui semble vrai, juste, aux yeux du sens commun »). *Dans l'expérience 1, puisque le dé est supposé non truqué, l'application*
$$\mathbb{P} : \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\Omega) \longmapsto \frac{\operatorname{Card}\mathrm{A}}{6}$$
décriera bien la situation.
Par exemple, $\mathbb{P}(\{4,6\}) = \frac{2}{6}$: on a deux chances sur six d'obtenir 4 ou 6 en lançant un dé à six faces.
Dans l'expérience 2, l'existence d'une probabilité est beaucoup moins évidente.

2.2 Évènements

Définition 3 | Ensemble des évènements associé à un univers Ω
Soit Ω un univers. On appelle *ensemble des évènements associés à Ω* les parties de Ω *i.e.* les éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$. Les éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ sont appelés les *évènements*, et :
- l'ensemble $\emptyset$ est appelé *évènement impossible* et Ω *évènement certain.*
- Les évènements de la forme $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ sont appelés *évènements élémentaires.*

Définition 4 | Espace probabilisable
Le couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est alors appelé *espace probabilisable.*

Exemple 3 Dans l'Exemple 1,
- pour l'expérience 1 : $\mathscr{P}$ « faire un pair » est un évènement puisque $\mathscr{P} = \{2,4,6\}$ est bien une partie de Ω. Les évènements élémentaires sont :
$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}.$$
- Pour l'expérience 2, PP : « commencer les lancers par 2 P » est un évènement.

Exemple 4 **(Lancer de 2 dés)** On lance deux fois un dé à 6 faces, on a :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array} \right\}, \quad \operatorname{Card}\Omega = 36.$$

On introduit les évènements suivants :

- A : la somme des deux dés vaut 5,
- B : le résultat du premier dé est strictement inférieur à celui du second.

On a alors :

⋆ $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ et $\operatorname{Card} A = 4$.

⋆ $B = \left\{ \begin{array}{r} (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,5),(4,6),\\ (5,6) \end{array} \right\}$ et $\operatorname{Card} B = 15$.

⋆ $A \cap B = \{(1,4),(2,3)\}$ et $\operatorname{Card}(A \cap B) = 2$.

⋆ $A \cup B = \left\{ \begin{array}{r} (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,2),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,5),(4,6),\\ (5,6) \end{array} \right\}$ et $\operatorname{Card}(A \cup B) = 17$.

⋆ Faire de-même sur les ensembles ci-après.

◇ C : « les deux scores sont égaux ».

◇ D : « on obtient un double 6 ».

◇ E : « on obtient au moins un 6 ».

◇ F : « les deux scores sont inférieurs ou égaux à 4 ».

Exemple 5 Soit Ω un univers et $(A,B,C) \in \mathscr{P}(\Omega)^3$. Traduire par une écriture ensembliste les événements suivants :

- A (uniquement) se produit.
- Les trois se produisent simultanément.
- Au moins l'un des évènements se produit.
- Deux au plus se produisent.
- Un seul se produit.
- Aucun des trois ne se produit.

Voyons quelques propriétés sur l'ensemble des évènements.

Proposition 1 | Propriété de l'ensemble des évènements $\mathscr{P}(\Omega)$

Soit Ω un univers. Alors :

- $\emptyset \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \Omega \in \mathscr{P}(\Omega)$.
- $A \in \mathscr{P}(\Omega) \Longrightarrow \overline{A} \in \mathscr{P}(\Omega)$.
- **[Stabilité par réunion/intersection]** Si I un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{P}(\Omega)$, on a : $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathscr{P}(\Omega)$, où :
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in I, \quad \omega_i \in \Omega\}, \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in I, \quad \omega_i \in \Omega\}.$$
- **[Stabilité par différence]** Si $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, alors :
$$A \smallsetminus B = A \cap \overline{B} \in \mathscr{P}(\Omega).$$

On rappelle également la définition d'ensembles disjoints rencontrées dans le Chapitre (ALG) 9, mais adaptée au vocabulaire de ce chapitre.

Définition 5 | Deux à deux disjoints

- Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements d'un univers Ω. On dit que les évènements A_i, $i \in I$, sont *deux à deux disjoints* si :
$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$
- En particulier, deux évènements A et B sont dit *incompatibles* ou *disjoints* si :
$$A \cap B = \emptyset.$$

Lorsque deux évènements sont incompatibles, il est alors impossible que ces évènements se réalisent simultanément.

Exemple 6 Dans l'Exemple 4,

- les évènements C, D, E, F sont-ils deux à deux disjoints ?

- Donner deux évènements incompatibles.

Puisque les évènements sont des ensembles, le vocabulaire idoine s'utilise, en revanche des mots spécifiques sont aussi parfois utilisés pour les évènements.

Résumé Vocabulaire ensembliste et probabiliste

En fonction du chapitre Chapitre (ALG) 9 et de celui-ci, nous avons rencontré des mots différents mais qui désigneront la même chose, que l'on résume dans le tableau ci-dessous.

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
$\emptyset$	ensemble vide	évènement impossible
Ω	ensemble plein	évènement certain
ω	élément de Ω	évènement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	évènement
$\omega \in A$	ω appartient à A	le résultat ω est une des réalisations possibles de A
$A \subset B$	A est inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω	évènement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles
$\bigcup_{i\in I} A_i$	partition	système complet d'évènements[1]

Exemple 7 On lance deux dés à 6 faces et on regarde les résultats obtenus. On considère les événements suivants :

1. E_1 : « aucun dé ne donne 3 »
2. E_2 : « la somme fait moins de 13 »
3. E_3 : « la somme fait 3 »
4. E_4 : « l'un des dés donne 5 ou 6 »
5. E_5 : « la somme fait 5 ou plus »
6. E_6 : « la somme fait 4 ou moins »
7. E_7 : « l'un des dés donne 4 »
8. E_8 : « la somme fait 1 »

- Donner un événement certain :

a. sera défini plus tard
1. sera défini plus tard
1. sera défini plus tard
1. sera défini plus tard

- Donner un événement impossible :

- Donner deux événements contraires :

- Donner deux événements incompatibles :

- Donner un événement en impliquant un autre :

2.3 Probabilité

Cadre

À partir de maintenant, tous les univers seront supposés FINIS.

2.3.1 Généralités

Définition 6 | Probabilité

Soit Ω un univers **fini**. On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ une application

$$\mathbb{P} \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array} \right. \quad \text{telle que :}$$

- **[Additivité]** pour toute famille finie d'évènements **deux à deux disjoints** $(A_i)_{i=1}^n$, on a : $\mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

Note — *En particulier, si* A *et* B ***sont deux évènements disjoints****, on a :* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

- **[Probabilité de l'univers]** $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Définition 7 | Espace probabilisé

On appelle *espace probabilisé* un triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. On dit que $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé fini* si Ω est un univers fini.

Définition 8 | Évènement certains, quasi-négligeables

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Un évènement A tel que $\mathbb{P}(A) = 1$ est dit $\mathbb{P}$-*certain*, ou simplement *quasi-certain* ou encore *presque-sûr* si le contexte est clair.
- Un évènement A vérifiant $\mathbb{P}(A) = 0$ est dit $\mathbb{P}-$*négligeable*, ou simplement *négligeable* si le contexte est clair.

Remarque 1 (Être de probabilité 1 ≠ être Ω)

- L'évènement Ω est de probabilité 1, il est donc en particulier quasi-certain.
- La réciproque est fausse ; il existe en général des évènements de probabilité 1, différents de Ω.

Proposition 2 | Autres propriétés du cardinal

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et soit $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. Alors :

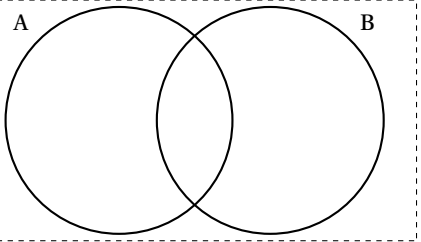
1. **[Différence]**
   - $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
   - En particulier, si $A \subset B$: $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
2. **[Inclusion/exclusion]**
   $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. **[Vide et complémentaire]** $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
4. **[Monotonie pour $\subset$]** $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Preuve

1.

DÉCOUPAGE DE B EN UNION DISJOINTE

L'idée de la preuve qui suit est de se « ramener » à une réunion disjointe. Commençons par un dessin : colorez les éléments d'une partition de B sur le diagramme ci-contre.



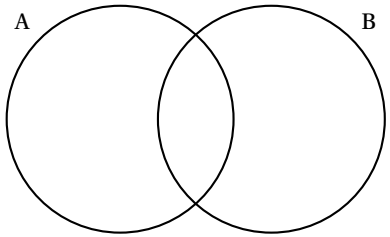
-

-

2.

DÉCOUPAGE DE $A \cup B$ EN UNION DISJOINTE

L'idée de la preuve qui suit est de se « ramener » à une réunion disjointe. Commençons par un dessin : colorez les éléments d'une partition de $A \cup B$ sur le diagramme ci-contre.



3.

4.

Remarque 2 (Généralisation de la formule d'inclusion-exclusion)

- Comme pour le symbole cardinal en dénombrement (voir le Chapitre (ALG) 9), on peut généraliser la formule de probabilité d'une réunion de deux évènements, à trois évènements. On peut établir que si A, B, C sont trois évènements, alors :
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$
- On peut généraliser encore à une union quelconque d'évènements, cette formule est appelée « formule du crible » [H.P]

Hormis la formule du crible mentionnée ci-dessus, on a en règle générale une majoration de la probabilité d'une réunion quelconque.

Proposition 3 | Sous-additivité

Soit un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors pour toute famille finie d'évènements $(A_i)_{i=1}^n$, on a : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

Preuve *(Point clef — **Récurrence**)*

Initialisation.

Hérédité.

Exemple 8

- Si l'on lance 1 fois une pièce non truquée donnant « face » (noté `"F"`) et « pile » (noté `"P"`), alors un affichage peut être réalisé comme ci-dessous :

```
def simule():
    if rd.random() < 1/2:
        return "F"
    else:
        return "P"
```

```
>>> simule()
'P'
```

On peut facilement adapter au cas truqué :

```
def simule(p):
    if rd.random() < p:
        return "F"
    else:
        return "P"
```

```
>>> simule(0.9)
'F'
>>> simule(0.9) # forte proba de faire F
'F'
>>> simule(0.1)
'P'
>>> simule(0.1) # forte proba de faire P
'P'
```

- Si on lance 7 fois un dé à 6 faces, le code ci-dessous permet de simuler la liste des résultats.

```
def simule():
    L = []
    for _ in range(7):
        L.append(rd.randint(1, 6))
    return L
```

```
>>> simule()
[6, 2, 2, 6, 1, 6, 1]
```

(Simuler un évènement de probabilité p)

- La fonction `random()` du module random permet de générer un nombre aléatoire dans $[0,1[$. On l'importera avec le préfixe suivant :
  `import random as rd`
- Le test `rd.random () < p` permet donc de *simuler un événement de probabilité p*.
  En effet, lorsque l'on se donne un nombre x au hasard entre 0 et 1, il a une probabilité p de situer entre 0 et p puisque l'intervalle $[0,p[$ est de longueur p.
- L'exécution de `rd.randint(p, n)` du module random permet de générer un entier au hasard de $[\![p,n]\!]$, où $(p,n) \in \mathbb{N}^2, p < n$.

2.3.2 Probabilité uniforme, contexte d'équiprobabilité

Souvent, les issues d'une expérience aléatoire auront toute la même probabilité de survenir (penser par exemple au lancer d'un dé non pipé à 6 faces). Quelle peut être la valeur de probabilité de chaque issue ?

Exemple 9 Considérons l'expérience 1 : on a $\Omega = [\![1\,,6]\!]$, chaque issue a la même probabilité de survenir si le dé n'est pas truqué, notons $\lambda \in [0,1]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1\,,6]\!], \quad \mathbb{P}(\{i\}) = \lambda.$$

- Calculer la valeur de λ.

- Que vaut alors $\mathbb{P}(A)$ lorsque $A = \{1,2\}$? $A = \{1,2,3\}$?

De manière générale, on a la définition ci-après.

Définition/Proposition 1 | Probabilité uniforme

Soit Ω un univers fini.

- Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, posons : $\boxed{\mathbb{P}^{u}(A) = \dfrac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}}$. On appelle cette probabilité la *probabilité uniforme sur* Ω, alors $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P}^{u})$ est un espace probabilisé.
- Pour tout évènement élémentaire $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$, on a : $\mathbb{P}^{u}(\{\omega\}) = \frac{1}{\operatorname{Card} \Omega}$.

Ainsi, dans les situations d'équiprobabilités, les problèmes de probabilité se ramènent à des problèmes de dénombrement. C'est toujours l'énoncé (correctement interprété) qui indique si l'on est ou non dans une situation d'équiprobabilité.

Preuve Vérifions qu'il s'agit bien d'une probabilité.

- Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $0 \leqslant \operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} \Omega$ puisque $A \subset \Omega$. Donc $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. De plus : $\mathbb{P}^{u}(\Omega) = \frac{\operatorname{Card} \Omega}{\operatorname{Card} \Omega} = 1$.
- Reste la propriété d'additivité. Soit une famille fine $(A_i)_{i=1}^{n}$ d'évènements deux à deux disjoints, alors :

Remarque 3

- La probabilité uniforme intervient dans des situations dites d'équiprobabilité, *i.e.* toutes les issues ont la même probabilité.
- On fera attention au vocabulaire utilisé : choisir au hasard ne signifie rien tant que l'on n'a pas précisé la loi du tirage. Pour désigner l'acception courante de « tirer au hasard » où toutes les issues sont équiprobables, on dira plutôt « tirer de manière équiprobable ». *(les concepteurs de sujets sont généralement attentifs à ce point mais s'il est juste écrit « tirer au hasard » il faudra le plus souvent comprendre « tirer de manière équiprobable »)*

Exemple 10 (Expérience 1)

- Dans l'expérience 1, la probabilité $\mathbb{P}^{u}$ vérifie : $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in \Omega = [\![1\,,6]\!]$.
- Si l'on décide de considérer plutôt l'univers $\Omega = [\![0\,,6]\!]$, alors on ne prendrait pas la probabilité uniforme pour décrire l'expérience puisque 0 ne peut apparaitre. On choisirait une probabilité $\mathbb{P}$ telle que :

$$\mathbb{P}(\{0\}) = 0, \quad \text{et :} \quad \forall i \in \Omega = [\![1\,,6]\!], \quad \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}.$$

  Nous verrons plus tard (voir Définition/Proposition 2) qu'il existe une telle probabilité, dès que la somme des quantités vaut 1 : ici, c'est bien le cas car $0 + 6 \times \frac{1}{6} = 1$.
- Dans l'expérience 1, déterminer la probabilité des évènements ci-dessous.
  - A « obtenir un nombre pair et impair »
  - B « obtenir un nombre supérieur à 3 »

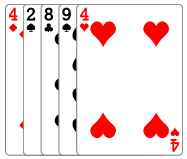
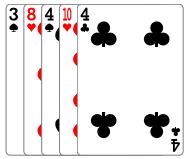
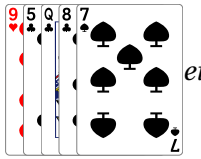
- C « obtenir un nombre pair ou supérieur à 3 »

Exemple 11 **(Pile ou face fini non truqué)**

- Le pile ou face en une étape est décrit par l'espace $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec $\Omega = \{P, F\} = \{P\} \cup \{F\}$. Il est possible ici de lister l'ensemble des parties :
$$\mathscr{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}.$$
- Puisque la pièce est ici non truquée, on considère que $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω.
$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\operatorname{Card} A}{2}.$$
- Si l'on veut tenir compte d'une succession de N jeux, on prend plutôt $\Omega = \{P, F\}^N$, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω.
$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\operatorname{Card} A}{2^N}.$$

Exemple 12 **(Main de Poker – Tirage de 5 cartes)** La sélection d'une main au poker peut être décrite par l'espace $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ avec Ω l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des cartes :

$$\Omega = \mathscr{P}_5(\{\text{cartes}\})$$

$$= \left\{ \text{  } ; \text{  } ; \text{  } \textit{etc.} \ldots \right\}.$$

Là encore on choisit pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme (sur Ω) donnée par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\operatorname{Card} A}{\binom{52}{5}} = \frac{\operatorname{Card} A}{2598960}.$$

Déterminer la probabilité d'obtenir :

- Exactement une dame.
- Au moins une dame.
- Au moins deux valets.

Exemple 13 On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules rouges, toutes discernables. On tire simultanément trois boules dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ? une

boule de chaque couleur ?

2.3.3 Définir une probabilité sur les issues élémentaires

Théoriquement pour définir une probabilité, il faut préciser $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, mais cela peut être fastidieux. Nous allons voir qu'il suffit de préciser la valeur de la probabilité sur les issues élémentaires dans le cas d'un univers fini.

En effet, reprenons un exemple déjà traité, celui du lancer d'un dé non pipé. On a $\Omega = [\![1\,,\,6]\!]$, alors on peut définir $\mathbb{P}$ de deux manières :

- on pose : $\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega} = \frac{\operatorname{Card} A}{6}$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
- On avait vu également que $\mathbb{P}$ vérifiait :

$$\forall i \in [\![1\,,\,6]\!], \quad \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6} \quad \text{(issues équiprobables).}$$

On avait alors établi l'expression de $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ en écrivant que :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{\omega \in A} 1 = \frac{\operatorname{Card} A}{6}.$$

Cette technique se généralise-t-elle à d'autres probabilités que l'uniforme ? La réponse est oui. Plus généralement, on peut indiquer n'importe quelle famille de valeurs positives dont la somme vaut 1 ; c'est ce que précise la proposition qui suit.

Définition/Proposition 2 | Distribution de probabilité $\Longrightarrow$ Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé **fini** avec $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ (avec $N = \operatorname{Card} \Omega$). Alors :

- toute suite $(p_i)_{i=1,\dots,N}$ telle que :

$$\forall i \in [\![1\,,\,N]\!], \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1, \quad \textbf{et} \quad p_i \geqslant 0$$

  est appelée *distribution de probabilité sur* Ω.
- Soit $(p_i)_{i=1,\dots,N}$ une telle suite. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que :
  - $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,N]\!]$.
  - Cette probabilité est définie par : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tq. } \omega_i \in A} p_i$.

Preuve

Unicité. Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω telle que pour tout $i \in [\![1\,,\,N]\!]$ on ait $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, alors, si $A \in \Omega$, on a en utilisant la propriété d'additivité d'une probabilité :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{i \text{ tq. } \omega_i \in A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \text{ tq. } \omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

On obtient la formule du théorème qui définit $\mathbb{P}$, donc si $\mathbb{P}$ existe, elle est forcément définie par cette formule.

Existence. Définissons alors $\mathbb{P}$ par : $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tq. } \omega_i \in A} p_i$. Vérifions que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

- Puisque les p_i sont positifs pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, on a :

$$0 \leqslant \sum_{i \text{ tq. } \omega_i \in A} p_i.$$

  Mais d'après la relation de CHASLES pour les sommes :

$$\sum_{i \text{ tq. } \omega_i \in A} p_i + \underbrace{\sum_{i \text{ tq. } \omega_i \notin A} p_i}_{\geqslant 0} = \sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

  Donc : $0 \leqslant \sum_{i \text{ tq. } \omega_i \in A} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. On a bien montré que $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
- On a également :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i \text{ tq. } \omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

- Soit une famille finie d'évènements deux à deux disjoints $(A_i)_{i=1}^n$, alors :

$$\mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j \text{ tq. } \omega_j \in \biguplus_{i=1}^n A_i} p_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \text{ tq. } \omega_j \in A_i} p_j = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Exemple 14 On lance un dé truqué. On suppose que la probabilité d'obtenir $k \in [\![1;6]\!]$ est proportionnelle à k.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir chaque événement élémentaire.

- **[Calcul de la somme]**

- **[Positivité]**

2. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

2.4 Système complet et quasi-complet d'évènements

La notion de système complet d'évènements est une notion centrale dans les calculs probabilistes. Elle était cachée au lycée lorsque vous utilisiez des arbres de probabilité pour répondre à certaines questions.

Définition 9 | Système complet d'évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé **fini**, et soit une famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$, I sous-ensemble **fini** non vide de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $(A_i)_{i\in I}$ est un *système complet d'évènements* si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω, *i.e.* si :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega, \text{ et : } \quad \forall i,j \in I, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

- $(A_i)_{i\in I}$ est un *système quasi-complet d'évènements* si :

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1, \text{ et : } \quad \forall i,j \in I, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Note | *On a donc simplement remplacé la réunion par sa version « passée aux probabilités »*

Proposition 4 | SCE $\implies$ SQCE

Tout système complet d'évènements est un système quasi-complet d'évènements.

Preuve Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. Alors :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega, \quad \forall i,j \in I, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

En passant aux probabilités dans la réunion, disjointe, on déduit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \forall i,j \in I, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

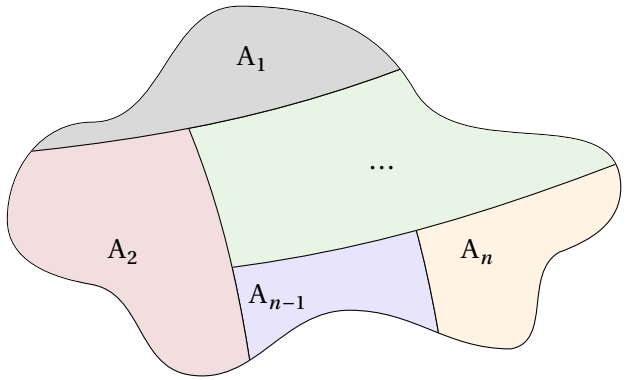
Donc $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'évènements.

La notion de système complet d'évènements est en fait une notion purement ensembliste (appelée « partition » dans le Chapitre (ALG) 9). Dans un contexte plutôt probabiliste (*i.e.* lorsque l'on partitionne un univers Ω provenant d'une expérience aléatoire), on parle plutôt de système complet d'évènements. C'est juste une question de vocabulaire.

Autrement dit, la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements Ω si pour tout $\omega \in \Omega$, il existe un et un seul $i \in I$ tel que $\omega \in A_i$.

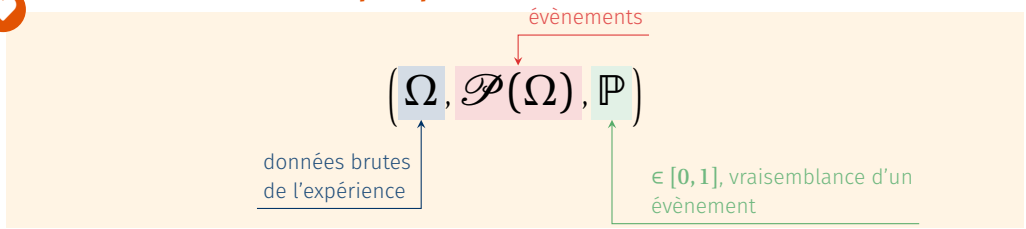
Exemple 15

- Pour tout $A \subset \Omega$, l'ensemble $\left\{A, \overline{A}\right\}$ est un système complet d'évènements.
- Si $\Omega = \{1,2,\dots,6\}$, alors $(\mathscr{P}, \mathscr{I})$ où $\mathscr{P}$ = « faire pair » = $\{2,4,6\}$, $\mathscr{I}$ = « faire impair » = $\{1,3,5\}$ est un système complet d'évènements.
- Si $\Omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\}, (\{\omega_1\},\dots,\{\omega_n\})$ est une partition de Ω, appelée « partition en événements élémentaires ».



REPRÉSENTATION D'UN SYSTÈME COMPLET D'ÉVÈNEMENTS

Résumé **Éléments d'un espace probabilisé**



3 CONDITIONNEMENT & INDÉPENDANCE D'ÉVÈNEMENTS

3.1 Conditionnement

Un énoncé de probabilité est souvent un énoncé comportant des phrases du type : « si B se produit alors la probabilité que A se produise est p ». On souhaite donc définir une nouvelle notion probabiliste qui tienne compte de cet apport d'information (la réalisation de B).

- Par exemple, considérons les évènements « il neige » et « le bus est en retard ». Si je sais qu'il neige, la probabilité que le bus soit en retard devrait être augmentée.
- Autre exemple, si l'on considère le jeu ci-après : trois portes, derrière l'une des trois se cache un trésor. J'ai le droit de regarder successivement derrière chacune des portes et d'en choisir une à chaque tour. Sachant que j'ai déjà regardé une porte (et donc qu'il n'y avait pas de trésor derrière), j'ai plus de chance au tour suivant de tomber sur la bonne.

Mathématiquement, nous allons considérer la définition suivante.

Définition 10 | Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on pose :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Cette quantité est appelée *probabilité de* A *sachant* B ou *probabilité conditionnellement à* B.

Remarque 4

- On rencontre parfois la notation $\mathbb{P}(A \mid B)$ pour $\mathbb{P}_B(A)$.
- On aurait pu penser à introduire l'application

  $$A \in \mathscr{P}(\Omega) \longmapsto \mathbb{P}(A \cap B)$$

  pour décrire l'apport d'information. Seulement cette application n'est pas une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, puisque $\mathbb{P}(\Omega \cap B) = \mathbb{P}(B) \neq 1$ *a priori*. Il faut donc diviser par $\mathbb{P}(B)$ pour former une probabilité.

Théorème 1 | $\mathbb{P}_B$ est une probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
Alors : $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Preuve

-
-
-

Remarque 5 Ce théorème est important en pratique, car il nous dit que toutes les propriétés connues d'une probabilité peuvent être utilisées avec $\mathbb{P}_B$: probabilité d'un complémentaire, d'une union *etc.*.

Exemple 16 On lance un dé à 6 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 sachant que le résultat est pair ? *(Dans cet exemple, pour calculer des probabilités nous sommes obligés de formaliser Ω et d'indiquer une hypothèse d'équiprobabilité)*

- **[Réponse intuitive]**

- **[Réponse]**

Exemple 17 Une famille a deux enfants. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons conditionnellement au fait qu'au moins l'un des deux est un garçon, que les deux soient des garçons ? *(Même remarque que dans l'exemple précédent : là aussi, il faut formaliser Ω)*

Exemple 18 Un laboratoire météorologique annonce que le temps sera nuageux avec une probabilité de $1/3$. On sait de plus que quand le temps est nuageux, il pleut avec une probabilité de $4/5$. Quelle est la probabilité que le temps soit nuageux et pluvieux ? *(Dans cet exemple, inutile de formaliser Ω puisque l'énoncé donne directement deux probabilités)*

Contrairement aux trois exemples précédents, la plupart du temps :

Un énoncé de probabilité vous donne (presque) toujours des probabilités conditionnelles ! (et **pas** des probabilités d'intersections),

…mais on peut ensuite souvent calculer en cas de besoin des probabilités d'intersection à l'aide des formules (dites de Bayes, voir plus bas) :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B), \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A).$$

3.2 Indépendance

Passons à présent à la notion d'indépendance. De façon intuitive, on dit que A est indépendant de B si savoir B ne change pas la probabilité de A. C'est-à-dire si

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A).$$

Pour que cette formule ait un sens on est obligé de supposer que $\mathbb{P}(B) > 0$, on préfèrera donc l'égalité précédente mais multipliée par $\mathbb{P}(B)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

C'est cette définition que nous allons utiliser.

Définition 11 | Indépendance de deux évènements

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A, B deux évènements. Alors A, B sont dits *indépendants*, on note cela $A \perp\!\!\!\perp B$, si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Exemple 19 On tire une carte dans un paquet de 52. L'évènement $\mathscr{R}$: « tirer un roi » est indépendant de l'évènement $\mathscr{P}$: « tirer un pique ». Pourquoi ?

Attention Incompatible ≠ Indépendant !

Attention à ne pas confondre *indépendance* avec *incompatibilité* ! Par exemple les évènements $\mathscr{P}, \mathscr{R}$ précédents sont indépendants mais pas du tout incompatibles puisque $\mathscr{P} \cap \mathscr{R}$ est non vide *(tirer le roi de pique est dans l'intersection)*

Exemple 20 On lance deux dés. on définit les événements suivants :

- A : « Le premier dé donne un numéro pair »
- B : « Le second dé donne 6 ».

Montrer que les événements A et B ne sont pas incompatibles (c'est-à-dire que $A \cap B$ est non vide) mais qu'ils sont indépendants.

Plus généralement, on a la définition ci-après.

Définition 12 | Indépendance d'une famille

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements, I sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- **[Indépendance]** On dit que la famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$, sont *mutuellement indépendants* (on dit parfois seulement *indépendants*) si :

$$\forall J \text{ (fini)} \subset I, \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

- **[Indépendance deux à deux]** On dit que les $(A_i)_{i\in I}$ sont *indépendants deux à deux* si pour tous $(i,j) \in I^2$, $i \neq j$, $A_i \perp\!\!\!\perp A_j$, c'est-à-dire :

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}\left(A_i \cap A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_i\right) \times \mathbb{P}\left(A_j\right).$$

Exemple 21

- Deux évènements A et B sont donc *indépendants* si : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
- Trois évènements A, B et C sont donc *indépendants* si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),$$

$$\text{et :} \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

La propriété qui suit a déjà été constatée en introduction.

Proposition 5 | Indépendance & Conditionnement

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors : $A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Proposition 6 | Indépendance $\Longrightarrow$ indépendance 2 à 2

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements. Alors : $(A_i)_{i\in I}$ indépendants $\Longrightarrow$ $(A_i)_{i\in I}$ indépendants **2 à 2**.

Preuve Soit $(i,j) \in I^2$ avec $i \neq j$. En choisissant $J = \{i,j\}$ dans la définition d'indépendance mutuelle, on obtient directement que $A_i \perp\!\!\!\perp A_j$.

En revanche, la réciproque de la proposition précédente est fausse.

Exemple 22 **(L'indépendance 2 à 2 n'entraîne pas l'indépendance)** On jette deux pièces. Les évènements P_1 « la première pièce tombe sur pile », P_2 « la deuxième pièce tombe sur pile » et E « les deux pièces donnent le même résultat » sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Proposition 7 | Propriétés de l'indépendance

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. Alors :

1. $A \perp\!\!\!\perp A \iff \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. *(Autrement dit, un évènement indépendant de lui-même est soit quasi-certain, soit négligeable)*
2. $A \perp\!\!\!\perp B \iff \overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.
3. $A \perp\!\!\!\perp B \implies A \perp\!\!\!\perp \overline{B}, \quad B \perp\!\!\!\perp \overline{A}$.

Preuve

1.

2.

3. Montrons par exemple $A \perp\!\!\!\perp B \implies A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Lemme 1 | Lemme des coalitions
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements indépendants, I sous-ensemble **fini** non vide de $\mathbb{R}$.
Soient alors I_1 et I_2 deux parties disjointes de I, alors tout évènement formé à partir de $(A_i)_{i\in I_1}$ est indépendant de tout évènement formé à partir de $(A_i)_{i\in I_2}$.

Exemple 23 Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A_1, A_2, A_3, A_4 des évènements. Alors le lemme des coalitions permet de justifier par exemple que :

$$A_1 \cap A_2 \perp\!\!\!\perp A_3 \cup A_4, \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \perp\!\!\!\perp A_4, \dots$$

Exemple 24 Une urne contient 4 boules blanches et 6 boules noires. On pioche successivement et avec remise 100 boules de l'urne. Pour tout $i \in [\![1, 100]\!]$ on pose B_i : « la $i^{\text{ème}}$ boule piochée est blanche ».

1. Écrire à l'aide des évènements B_i les évènements suivants :
- A : « la $1^{\text{ère}}$ boule est blanche et la $6^{\text{ème}}$ ou la $15^{\text{ème}}$ est noire ».
- B : « la $3^{\text{ème}}$ boule ou la $5^{\text{ème}}$ est blanche, et la $12^{\text{ème}}$ ou la $80^{\text{ème}}$ est blanche ».

2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

4 FORMULES PROBABILISTES

Au lycée, la plupart des raisonnements probabilistes s'appuyaient sur des arbres. En CPGE, un arbre ne sera plus suffisant, et il faudra rédiger à l'aide des formules probabilistes détaillées dans cette section. *(vous pouvez bien sûr commencer par construire des arbres au brouillon si cela aide la compréhension)*

4.1 Formule des probabilités totales

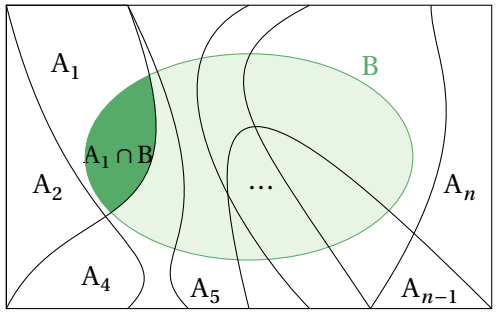
Théorème 2 | Formule des probabilités totales
Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $(A_i)_{i=1}^n$ $(n \geqslant 1)$ un système complet d'évènements d'évènements ou plus généralement un système quasi-complet d'évènements. Alors :

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i) \quad \text{(si pour tout } i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(A_i) \neq 0)$$

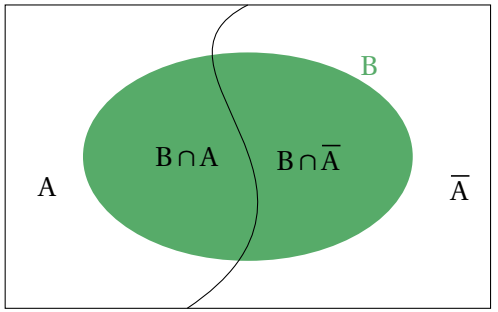
Attention
On évite l'horrible formule suivante, souvent écrite dans les copies avec précipitation : $\mathbb{P}(B) \neq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)$.

Remarque 6 (Convention) Parfois, les énoncés ne font pas figurer la condition « pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ » mais décrètent que **par convention** :
$\mathbb{P}_{A_i}(B)\,\mathbb{P}(A_i) = 0$ si $\mathbb{P}(A_i) = 0$.

Rappelons les deux schémas à avoir en tête concernant les partitions, et la partition triviale qui est très courante.



Avec le système complet d'évènements (A_n)



Avec le système complet d'évènements $(A, \overline{A})$

Preuve
- **[1er cas : $(A_i)_{i=1}^n$ est un système complet d'évènements]**

- **[2ème cas : $(A_i)_{i=1}^n$ est un système quasi-complet d'évènements]** Nous avons donc ici

$$\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

De manière équivalente, c'est supposer que

$$\forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{n} A_i\right) = 1.$$

Notons dans la suite $A = \biguplus_{i=1}^{n} A_i$. On a :

$$B = (B \cap A) \uplus \left(B \cap \overline{A}\right) = \left(\biguplus_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) \uplus \left(B \cap \overline{A}\right),$$

en passant aux proba

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) + \mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right).$$

Or, par hypothèse $\mathbb{P}(A) = 1$, donc $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 0$. Mais comme $B \cap \overline{A} \subset \overline{A}$, on obtient :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 0,$$

donc $\mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right) = 0$ et la formule est établie.

Puisqu'un système complet d'évènements est un système quasi-complet d'évènements nous aurions pu nous contenter du second cas dans la démonstration. Le cas du système complet d'évènements $(A, \overline{A})$ donne directement le corollaire qui suit, très classique en pratique.

Corollaire 1 | Cas de la partition $(A, \overline{A})$

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, et $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right) \\ &= \mathbb{P}_A(B)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\,\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\end{aligned}$$

Remarque 7 (Interprétation ensembliste du corollaire)

- La formule de passage au complémentaire « dans Ω » donne :

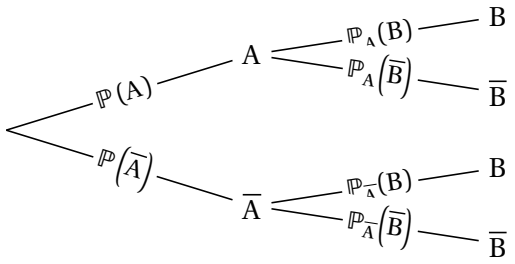
$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A).$$

- La formule des probabilités totales donne en fait une généralisation ; on peut passer au complémentaire « dans un ensemble B » :

$$\mathbb{P}\left(B \cap \overline{A}\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A).$$

On retrouve bien sûr la première formule en choisissant $B = \Omega$.

Remarque 8 (Lien avec les arbres) Considérons A, B deux évènements.



Les règles de calculs sur les arbres que vous utilisiez au lycée correspondent donc exactement aux probabilités totales, sur l'arbre ci-dessus relativement au système complet d'évènements $(A, \overline{A})$.

Remarque 9 (Quand utiliser la formule des probabilités totales ?) Dès que l'on a besoin de faire une disjonction de cas « aléatoire », on introduit alors le système complet d'évènements associé à cette disjonction.

Exemple 25 (Avec un système complet de 2 évènements)

Une urne contient n boules noires et b blanches et on en tire 2 boules successivement sans remise. Avec quelle probabilité la deuxième boule tirée est-elle blanche ? *Ici, puisque les tirages ont lieu sans remise, on a besoin de distinguer deux cas en fonction de la couleur de la 1ère boule.*

Exemple 26 (Avec un système complet de 3 évènements) Trois machines produisent respectivement 50%, 30% et 20% de composants donnés. 2% des composants produits par la première machine sont défectueux, 3% pour la deuxième et 5% pour la troisième. On considère un composant à la sortie de l'usine. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?

Exemple 27 Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune fleurit une fois par an. Pour chaque plante, la probabilité de donner une fleur rose la première année est $\frac{3}{4}$ et celle de donner une fleur blanche est $\frac{1}{4}$. Puis les années suivantes :

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, elle donnera une fleur rose l'année $n+1$,
- si l'année n, la plante a donné une fleur blanche, elle donnera de manière équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche l'année $n+1$.

On note p_n la probabilité de l'événement « la plante donne une fleur rose l'année n ».

1. >_ On peut écrire une fonction qui simule l'expérience et renvoie le résultat sous forme de liste entre les jours 1 et n :

```
def simu_fleurs(n):
    if rd.random() < 3/4:
        L = ["R"]
    else:
        L = ["B"]
    for _ in range(2, n+1):
        # simu entre les jours 2 et n
        if L[-1] == "R":
            L.append("R")
        else:
            if rd.random() < 1/2:
                L.append("B")
            else:
                L.append("R")
    return L
```

```
>>> simu_fleurs(5)
['B', 'B', 'R', 'R', 'R']
>>> simu_fleurs(10)
['R', 'R', 'R', 'R', 'R', 'R', 'R', 'R', 'R', 'R']
```

Interpréter le résultat.

2. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- Conséquence immédiate de la formule des probabilités totales.

Exemple 28 (Test et faux positifs) Une maladie affecte une personne sur 1000. Le test de dépistage n'est pas parfait : le résultat est toujours positif pour une personne malade et pour une personne saine il est positif (donc erroné) 2 fois sur 100. Quelle est la probabilité qu'une personne ayant un résultat positif au test soit effectivement malade ? Celle d'avoir un « faux-positif » ?
Soit T *l'évènement « le test est positif »* *et* M *l'évènement « la personne est malade ».*
On cherche $\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{M})$. *On écrit*

$$\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \mathbb{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})\,\frac{\mathbb{P}(\mathrm{M})}{\mathbb{P}(\mathrm{T})}.$$

D'après les données du problème $\mathbb{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 1$ *et* $\mathbb{P}(\mathrm{M}) = 0,001$. *De plus :*

$$\mathbb{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \mathbb{P}(\mathrm{T})\,\mathbb{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{M}) + \mathbb{P}(\mathrm{T})\,\mathbb{P}(\overline{\mathrm{M}}) = 1 \times 0,001 + 0,02 \times 0,999.$$

On trouve que $\boxed{\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \approx 0.047}$, donc de l'ordre de $\boxed{5\%}$. Par passage au complémentaire, on a : $\boxed{\mathbb{P}_{\mathrm{T}}\left(\overline{\mathrm{M}}\right) \approx 0.953}$, la probabilité de faux positif est donc très élevée.
De façon générale, dans le cas d'une probabilité faible de la maladie recherchée (terme $\mathbb{P}(\mathrm{M})$ précédent très petit), le risque d'être déclaré positif à tort est très élevé ce qui rend le test assez inefficace.

4.2 Formule de BAYES

La formule de BAYES possède une utilité bien différente de la formule des probabilités totales. Elle sert à permuter des conditionnements.

Proposition 8 | Formule de BAYES ou de « réciprocité conditionnelle »

- Soient A et B des évènements non négligeables, alors

$$\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\,\frac{\mathbb{P}(\mathrm{A})}{\mathbb{P}(\mathrm{B})}.$$

- Soit $(\mathrm{A}_i)_{i=1}^{n}, n \geqslant 1$, un système complet d'évènements non négligeables. Alors : $\mathbb{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})\,\frac{\mathbb{P}(\mathrm{A})}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}_{\mathrm{A}_i}(\mathrm{B})\mathbb{P}(\mathrm{A}_i)}$.

Preuve

-

Exemple 29 (Intérêt des QCM pour les examens) Considérons des questions où m réponses possibles sont proposées et supposons qu'un candidat a une probabilité p de connaître la réponse à une question prise au hasard parmi un ensemble fini de questions. Sachant que le candidat a répondu correctement à la question, quelle est la probabilité qu'il connaisse effectivement la réponse ? On suppose qu'un candidat ne connaissant pas la réponse répond « au hasard », et donc que chacune des m réponses possibles sont équiprobables.
On notera RC l'évènement « le candidat répond correctement » et Co l'évènement « le candidat connaît la réponse ». Appliquons la règle de BAYES,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathrm{RC}}(\mathrm{C}o) &= \frac{\mathbb{P}_{\mathrm{C}o}(\mathrm{RC})\,\mathbb{P}(\mathrm{C}o)}{\mathbb{P}(\mathrm{RC})} \\
&= \frac{\mathbb{P}_{\mathrm{C}o}(\mathrm{RC})\,\mathbb{P}(\mathrm{C}o)}{\mathbb{P}(\mathrm{RC}\cap\mathrm{C}o) + \mathbb{P}\left(\mathrm{RC}\cap\overline{\mathrm{C}o}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_{\mathrm{C}o}(\mathrm{RC})\,\mathbb{P}(\mathrm{C}o)}{\mathbb{P}_{\mathrm{C}o}(\mathrm{RC})\,\mathbb{P}(\mathrm{C}o) + \mathbb{P}_{\mathrm{C}o}(\mathrm{RC})\,\mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{C}o}\right)} = \frac{p}{p + \frac{1}{m}(1-p)} \\
&= \frac{mp}{mp + 1 - p}.
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{mp}{mp+1-p} = 1$, *lorsque* m *est grand,* $\mathbb{P}_{RC}(Co)$ *s'approche de 1. C'est assez intuitif car il est probable que le candidat connaisse la réponse s'il a donné une bonne réponse parmi de nombreuses proposées.* Remarquons que pour $m = 3$ et $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_{RC}(Co) = \frac{3}{4}$. Ce qui est somme toute déjà assez grand. On conçoit donc qu'un questionnaire d'une trentaine de questions, chacune à trois ou quatre réponses possibles, soit à même de rendre compte du savoir d'un(e) étudiant(e).

4.3 Formule des probabilités composées

Nous avons par définition, que pour tout couple d'évènements $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, tels que B ne soit pas négligeable :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A)\,\mathbb{P}(B).$$

On peut généraliser sans trop de difficulté à une intersection de n évènements.

Théorème 3 | Formule des probabilités composées

Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $n \geqslant 2$, $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ des évènements tels que : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Remarque 10 (Cas de l'indépendance) Lorsque les évènements sont indépendants, la formule se simplifie en :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n).$$

Attention

L'hypothèse $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ garantit que toutes les probabilités conditionnelles existent. C'est un point clef de la démonstration ci-dessous. Ne surtout pas l'oublier quand vous citez cette formule.

Preuve

- Commençons par prouver la formule pour $n = 2$, puis $n = 3$.

- Montrons tout d'abord que :

  $$\forall k \in [\![1\,,\, n-1]\!],\quad \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) \neq 0.$$

  Ceci garantira que toutes les probabilités conditionnelles seront bien définies. Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in [\![1\,,\, n-1]\!]$ tel que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = 0$. Or,

  $$A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} = A_1 \cap \dots \cap A_k \cap (A_{k+1} \cap \dots A_{n-1}) \subset A_1 \cap \dots \cap A_k,$$

  donc : $0 \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \leqslant \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) = 0$ et on déduit $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = 0$ — contradiction.
- De manière générale, on raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

  Initialisation. La formule est vraie pour $n = 2$, d'après ce que nous avons fait précédemment.

  Hérédité. Supposons-la vraie pour un entier $n \geqslant 2$ donné. Soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des évènements tels que : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$. Alors on a :

  $$\begin{aligned}
  &\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) \\
  &= \mathbb{P}((A_1 \cap \dots \cap A_n) \cap A_{n+1}) \\
  &= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)\,\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_n}(A_{n+1}) \\
  &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_n}(A_{n+1}).
  \end{aligned}$$

  La formule est donc vraie au rang $n+1$, et la formule est prouvée pour tout $n \geqslant 2$.

Remarque 11 (Quand utiliser la formule des probabilités composées ?) Pour calculer la probabilité d'un évènement qui est une intersection d'évènements non indépendants. C'est en particulier le cas lors d'un enchaînement d'expériences aléatoires impliquant un ordre/une chronologie.

Exemple 30 Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire pour la première fois au 3ème tirage ?

Exemple 31 Une urne contient $2n$ boules dont n noires et n blanches, et on en tire 3 boules successivement. Avec quelle probabilité les tire-t-on dans l'ordre noire/blanche/noire si les tirages se font avec remise (*resp.*. sans remise) ? Commentez le comportement lorsque $n \longrightarrow \infty$.

- **[Cas avec remise]**

- **[Cas sans remise]**

- **[Comparatif]**

MÉTHODOLOGIE DES EXERCICES DE PROBABILITÉS

En probabilité, la connaissance du cours est un incontournable mais n'est pas toujours suffisante pour réussir en pratique, tant les techniques mises en jeu sont diverses. On tente ici de développer des conseils systématiques. Notez que la méthode ci-dessous anticipe un peu déjà le futur chapitre de variables aléatoires.

Méthode (PS) 1.1 (Comment s'y prendre dans un exercice de probabilités ?)

1. **[Démarrage]**
   - Prendre le temps de comprendre le fonctionnement de l'expérience décrite dans le sujet. Dans le cas où elle se décompose en plusieurs expériences successives, ces dernières ont-elles une influence les unes sur les autres ? Si non elles sont mutuellement indépendantes.
   - Identifier, s'il y en a, les situations d'équiprobabilité, d'indépendance et les lois usuelles.
   - Si ce n'est pas déjà fait dans le sujet, introduire/nommer les différents évènements/variables aléatoires puis traduire les données numériques du sujet dans le langage des probabilités.
2. **[Calculer la probabilité d'un évènement** E**]** Mis à part les cas les plus triviaux, on ne commence jamais par un calcul de probabilité. Plusieurs possibilités en fonction de l'énoncé s'offrent à nous.
   - OPTION 1 : DÉNOMBRER
     Lorsque le contexte est un contexte d'équiprobabilité, et que $\mathrm{Card}\,\Omega$ ainsi que $\mathrm{Card}\,\mathrm{E}$ vous semblent simples, vous pouvez calculer le rapport $\frac{\mathrm{Card}\,\mathrm{E}}{\mathrm{Card}\,\Omega}$. Si vous passez plus de 3 minutes réfléchir sur comment modéliser Ω, c'est qu'il faut passer à l'option suivante (le calcul de la probant ne pouvant alors se faire par dénombrement direct, voire que Ω n'est même pas un ensemble fini). Les techniques mises en jeu dans l'option 2 peuvent être utilisées ici aussi.
   - OPTION 2 : TRAVAILLER SUR L'ÉCRITURE ENSEMBLISTE
     Soit écrire l'évènement concerné à l'aide d'union/intersection/complémentaire d'évènements plus simple puis passer ensuite au calculs des probabilités à l'aide des règles usuelles :
     - ◇ Calculer la probabilité d'une union : se fait en sommant les probabilités quand les évènements sont 2 à 2 incompatibles ou, plus rarement, on utilisant la formule d'inclusion/exclusion dans le cas de deux évènements non-incompatibles.
     - ◇ Calculer la probabilité d'une intersection : se fait à l'aide de la formule des probabilités composées ou de sa version « simplifiée » dans le cas d'évènement indépendants.
     - ◇ *Remarque : si ça coince, regarder si* $\overline{\mathrm{E}}$ *ne s'écrit pas plus simplement.*
   - OPTION 3 : UTILISER LA FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES
     Elle s'utilise lorsqu'il nous manque des informations pour calculer directement la probabilité de E. On applique alors la formule des probabilités totales à E en utilisant le SCE donnant l'information manquante (généra-

lement ce qu'il s'est passé avant).

3. **[Calculer une probabilité conditionnelle]**
   - Dans l'immense majorité des cas, elle se calcule directement sans passer par la définition, mais en **interprétant le texte**. D'où la nécessité d'une lecture attentive de l'énoncé.
   - Dans les rares cas ou elle ne se calcule pas directement, c'est généralement qu'elle est écrite « dans le mauvais sens ». On utilise alors la définition (appelée pompeusement la « formule de Bayes »), pour la remettre « dans le bon sens ».

Essayons de parcourir chaque méthode au travers d'un même exemple.

Exemple 32 Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Calculer la probabilité des évènements ci-dessous.

Note | *Ici l'univers est simple, et chaque issue est équiprobable, on peut donc partir sur un calcul de cardinal.*

1. Obtenir au moins une fois le chiffre 6 ? *Réponse :* $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

   Note | *À la lecture d'un « au moins », « au plus », pensez systématiquement au complémentaire.*

2. Obtenir au moins deux fois le chiffre 6 ? *Réponse :* $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\times\frac{5+n}{6}$.

3. Obtenir que des 6.

   Note | *Ici une hypothèse d'indépendance peut être posée : on lance le dé un nombre prédéfini de fois et les résultats de chaque lancer n'ont pas d'influence sur les autres*

Exemple 33

1. Le matin :
   - une personne de la classe tirée au hasard lance 2 fois un dé à 6 faces,
   - il y a une chance sur deux pour qu'Antoine ait un réveil en état de marche et arrive à l'heure. Si c'est le cas, il lance 3 (de plus) fois le même dé.

   Calculer la probabilité d'avoir au moins une fois le chiffre 6.

   Note | *Cette fois, le nombre de lancers dépend d'un paramètre extérieur : la ponctualité d'Antoine ! Pour faire des calculs, il est donc indispensable de conditionner suivant qu'Antoine était en retard ou pas.*

2. Cette fois-ci on suppose que si Antoine est en retard un jour donné, il sera à l'heure le lendemain avec probabilité $\frac{3}{4}$, et s'il est à l'heure un jour donné, il sera encore à l'heure le suivant avec probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose que le jour de la rentrée (correspondant au jour $k = 0$, Antoine est à l'heure).

2.1) Calculer la probabilité qu'Antoine soit à l'heure au jour k.

Note | *Cette fois, la ponctualité évolue dynamiquement d'un jour à l'autre, la probabilité (p_k) d'être à l'heure au jour k devient donc une suite. On forme en général dans ce cas une relation de récurrence à l'aide de la formule des probabilités totales.*

2.2) Calculer désormais la probabilité d'avoir au moins une fois le chiffre 6 au jour k.

Exemple 34 Cette fois-ci, on ne lance plus un nombre défini de fois le dé, mais on le lance jusqu'à ce que 6 apparaisse (une fois que c'est le cas, l'expérience s'arrête). Déterminer la probabilité que l'on lance le dé n fois avec $n \in \mathbb{N}^\star$.

Note | *On pourrait se laisser tenter ici par une hypothèse d'indépendance, sauf que ce n'est pas très propre : l'expérience s'arrête une fois un 6 obtenu. Une meilleure rédaction utilise la formule des probabilités composées. Pensez-y pour toutes les expériences à arrêt.*

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Si A et B désignent deux événements d'un même espace probabilisé, donner la définition de « A et B sont incompatibles » et de « A et B sont indépendants »	Incompatibles : $A \cap B = \emptyset$. Indépendants : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$	
Énoncer la formule de Bayes	$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B)\frac{\mathbb{P}(A)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$	*Ne pas oublier l'hypothèse de système complet d'évènements*
Définition d'un système complet d'événements	Une famille d'évènements $(A_i)_{i=1}^n$ telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$	*Attention, cette version sera généralisée en 2ème année.*
Énoncer la formule des probabilités totales	$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$ si $(A_i)_{i=1}^n$ est un système complet d'évènements. Préciser aussi que les termes $\mathbb{P}_{A_i}(A)\mathbb{P}(A_i)$ sont **par convention** égaux à zéro lorsque l'un des A_i est de probabilité nulle.	*Ne pas oublier l'hypothèse système complet d'évènements. Attention, cette version sera généralisée en 2ème année.*
Énoncer la formule des probabilités composées	Si $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\ldots \mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$.	*Ne pas oublier l'hypothèse*
Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements	Si $(A_1,\ldots,A_n)$ est une famille de n évènements, l'indépendance mutuelle signifie que : $\forall J \text{fini} \subset I, \mathbb{P}\left(\cap_{j\in J}A_j\right) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}\left(A_j\right)$	*Attention ce n'est pas uniquement* $\mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_p\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_p\right)$

5 EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les généralités sur les probabilités :
   - Déterminer des probabilités en situation d'équiprobabilité, techniques de dénombrement ☐
   - Justifier qu'une famille est un système complet d'événements ☐
   - Utiliser les formules des probabilités composées et des probabilités totales sans arbres ☐
   - Utiliser les formules de permutation de conditionnement (Bayes) ☐
2. Concernant l'indépendance :
   - Démontrer que deux événements sont indépendants ☐
   - Utiliser la mutuelle indépendance d'une famille d'événements ☐

Signalétique du TD

- Le logo désigne les exercices que vous traiterez en devoir à la maison. Vous pouvez m'en rendre un ou plusieurs, au plus tard le lundi qui précède un devoir surveillé concernant ce chapitre. Ce travail est facultatif mais fortement conseillé.
- Le logo désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

5.1 Généralités

Exercice 1 | [Solution] Soient trois personnes choisies une à une et sans remise dans une population. On note R_i l'événement « la i-ième personne a un rhésus + ». Ecrire à l'aide des R_i les événements suivants

- A : « au moins une personne a un rhésus + » ;
- B : « au moins deux personnes ont un rhésus + » ;
- C : « une personne exactement a un rhésus + » ;
- D : « au moins une des deux premières personnes a un rhésus + ».

Exercice 2 | [Solution] On étudie 4 sortes de maïs numérotés de 1 à 4 et on note M_i l'événement : « le maïs numéro i est transgénique ». Ecrire à l'aide de ces événements les événements suivants :

- A : « une seule sorte de maïs est transgénique » ;
- B : « au moins une des trois premières sortes de maïs n'est pas transgénique ».

Exercice 3 | [Solution] Dans une population, 45% des individus sont vaccinés contre la fièvre jaune, 60% sont vaccinés contre la diphtérie et 30% contre les 2 maladies. Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard ne soit vacciné contre aucune de ces deux maladies ?

Exercice 4 | [Solution] Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts notés A et B. On estime que 2% des pièces présentent les deux défauts, 5% ont le défaut A mais pas le défaut B et 10% ont le défaut B. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard présente le défaut A ? Aucun défaut ? Un seul défaut ?

Exercice 5 | Deux probabilités sur $\{1,\dots,n\}$ [Solution] Soit $\Omega = \{1,2,\dots,n\}$.

1. Déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\})$ soit proportionnel à k.
2. Déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω, tel que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(\{1,2,\dots,k\})$ soit proportionnel à k^2.

5.2 Équiprobabilité & Calculs par dénombrement

Exercice 6 | Six dés [Solution] En lançant 6 dés différents, donner les probabilités d'avoir :

1. les 6 résultats possibles,
2. au moins deux résultats distincts.

Exercice 7 | Trois dés [Solution] On lance trois dés distincts et équilibrés. On note A l'événement « les numéros sont égaux », B : « au moins un des numéros est égal à 3 » et C : « la somme des numéros est égale à 4 ».

1. On note $T = A \cup B \cup C$. Montrer que :
$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$
2. En déduire la probabilité pour qu'au moins un des trois événements soit réalisé.

Exercice 8 | Naissance le même jour [Solution]

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes dans une classe comportant n élèves soient nées le même jour ? Pour simplifier, on ne tiendra pas compte des années bissextiles.
2. >_ Écrire une fonction d'en-tête `calc_proba_anniv(n)` qui retourne cette probabilité, et prenant en argument le nombre n d'élèves. Exécuter cette fonction sur le nombre d'élèves de la classe.

Exercice 9 | Principe « Capture/Marquage/Recapture » (CMR) [Solution] On décide d'évaluer le nombre de rats qui vivent dans les égouts de Paris de la façon suivante : on en capture 1000 et on les marque (on les bague par exemple). Une semaine plus tard, on capture à nouveau 1000 rats, et on compte le nombre de rats qui sont marqués. On en trouve 10. On suppose qu'il y a n rats au total. Le but de l'exercice est d'estimer la valeur de n.

1. Combien y-a-t-il de façons possibles de capturer 1000 rats parmi les n rats de Paris ?
2. On note p_n la probabilité de l'événement A : « Il y a 10 rats marqués parmi ceux que l'on a capturés ». Calculer p_n en fonction de n.
3. Montrer que : $\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{n^2-1988n-1989}{n^2-1998n+10^6-1999}$, puis comparer ce quotient avec 1.
4. En déduire que (p_n) admet un maximum pour un certain n_0 à déterminer. Expliquez en quoi n_0 a de grande chance d'être une bonne estimation du nombre de rats qui vivent dans les égouts de Paris.

Le maximum que l'on a trouvé est appelé « maximum de vraisemblance ». C'est le nombre total de rats pour lequel notre observation est la plus probable.

5.3 Formule de BAYES

Exercice 10 | [Solution] Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie α. Lors d'une épidémie, on constate que parmi les malades, il y a 20% de vaccinés. De plus, on constate que sur l'ensemble des vaccinés, il y a eu un malade sur 12. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade de α ? Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 11 | [Solution] La proportion de pièces défectueuses dans un lot est de 0.05. Le contrôle qualité des pièces accepte une pièce bonne avec une probabilité de 0.96 et refuse une pièce mauvaise avec une probabilité de 0.98. On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité :

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?
3. qu'une pièce refusée soit bonne ?

Exercice 12 | [Solution] On possède un jeu de 32 cartes et un jeu de 52 cartes. On choisit au hasard l'un de ces jeux et on y tire une carte. On constate que c'est une dame. Quelle est la probabilité qu'elle vienne du jeu de 32 cartes ?

Exercice 13 | [Solution] Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires A, B, C et D.

- La probabilité de choisir le chemin A est $\frac{1}{3}$, le chemin B est $\frac{1}{4}$, et le chemin C est $\frac{1}{12}$.
- Il n'est jamais en retard en empruntant l'itinéraire D.
- La probabilité d'arriver en retard en empruntant A est $\frac{1}{20}$, le chemin B est $\frac{1}{10}$ et le chemin C est $\frac{1}{5}$.

L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 14 | Paradoxe de CORINE HALL [Solution] Corine est la présentatrice d'un jeu télévisé qui se déroule de la manière suivante. Il y a trois rideaux : derrière l'un, il y a une voiture à gagner, et derrière chacun des deux autres, il y a une chèvre. Bob, le participant, doit choisir un rideau, en espérant choisir celui derrière lequel se cache la voiture.

- Ensuite, Corine ouvre l'un des deux autres rideaux, où se cache une chèvre (s'il y a une chèvre derrière les 2 autres rideaux, Corine en choisit un uniformément au hasard).
- Bob doit ensuite décider s'il garde le rideau qu'il a choisi au début, ou bien s'il change avec l'autre rideau fermé restant. Une fois ce choix effectué, Corine ouvre le rideau choisi par Bob et Bob gagne ce qui se cache derrière.

Est-ce que Bob a intérêt de changer de rideau à l'étape intermédiaire, ou bien cela ne fait-il aucune différence ? *Sans perte de généralité, on pourra numéroté « 1 » le rideau choisi par Bob au début, et celui ouvert par Corine numéroté « 2 », puis ensuite définir les évènements appropriés.*

5.4 Conditionnement & Indépendance

Exercice 15 | [Solution] Soient A et B deux événements indépendants tels que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{2}{3}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right)$.
2. Les évènements A et B sont-ils incompatibles ?

Exercice 16 | [Solution] On lance deux fois une pièce parfaite. On note A l'événement : « le premier lancer donne Pile », B l'événement : « le deuxième lancer donne Pile » et C l'événement : « on obtient deux résultats différents ». Étudier l'indépendance mutuelle et deux à deux de ces trois événements.

Exercice 17 | [Solution] Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Dans une urne sont placées $n-1$ boules noires et une boule blanche. Un joueur tire au hasard une boule et la remet dans l'urne et ceci n fois. Il est gagnant si la boule blanche n'est pas tirée lors des n tirages.

1. Calculer la probabilité p_n pour que le joueur soit gagnant.
2. Montrer que $(p_n)_n$ est croissante.
3. Le joueur a-t-il intérêt à ce que le nombre de boules soit le plus grand possible ? Quelle est, si elle existe, la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

5.5 Formule des probabilités composées

Exercice 18 | [Solution] Une urne contient b boules blanches et n boules noires (b et n sont dans $\mathbb{N}^\star$).

1. On fait deux tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules de couleurs différentes ?

2. Même question dans le cas où les tirages s'effectuent de la façon suivante : si la première boule tirée est blanche, on la remet avec en plus deux boules blanches, sinon on ne la remet pas.

Exercice 19 | [Solution] M. H. dispose de n clefs sur son trousseau et une seule ouvre la porte de la salle 310.

1. N'ayant pas beaucoup dormi la nuit précédente, M. H. essaye les clés jusqu'à trouver la bonne sans penser à mettre de côté les mauvaises clés. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au k-ième essai ?
2. Même question dans le cas où M. H. a bien dormi et pense à mettre de côté les mauvaises clés.

5.6 Formule des probabilités totales

Application directe

Exercice 20 | [Solution] Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ jetons noirs. On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à αk. Après quoi on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Trouver la valeur de α.
2. Quelle est la probabilité de tirer un jeton blanc.
3. Le jeton pioché est blanc. Quelle est la probabilité que ce jeton proviennent du sac S_k pour $k \in [\![1\,,\,n]\!]$ fixé ?

Exercice 21 | [Solution] On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement 3 boules. Après chaque tirage la boule tirée est remise, mais toutes les boules de l'urne dont le numéro est supérieur à la boule tirée sont retirées de l'urne.

1. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre : 9,5 et 4.
2. Donner une expression (sous la forme d'une somme double que l'on ne cherchera pas à calculer) de la probabilité de piocher la boule numéro 1 au 3ème tirage.
3. >_ Proposer un script en langage Python permettant de calculer la probabilité de la question précédente.

Récurrences

Exercice 22 | Récurrence d'ordre 1 [Solution] Un fumeur cherche à arrêter de fumer chaque jour. On note p_n la probabilité qu'il fume le jour n.

- S'il a réussi à ne pas fumer un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{2}$.
- S'il fume un jour, il ne fume pas le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

1. Exprimer p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 23 | [Solution] Un joueur compulsif joue n parties d'un jeu de probabilité de gain $\frac{2}{3}$. Pour tout $k \in [\![1\,,\,n-1]\!]$, on note C_k l'événement « Le joueur gagne les k-ième et $(k+1)$-ième parties et c'était la première fois qu'il gagnait deux parties consécutives ». On note également $p_k = \mathbb{P}(C_k)$. On suppose, d'après les règles du jeu, que les parties sont indépendantes.

1. Calculer p_1, p_2.
2. On note G_1 « Le joueur gagne la première partie ». Justifier pour tout $k \in [\![1\,,\,n-3]\!]$ l'égalité : $\mathbb{P}_{\overline{G_1}}(C_{k+2}) = p_{k+1}$.
3. En déduire que pour tout $k \in [\![1\,,\,n-3]\!]$: $p_{k+2} = \frac{1}{3}p_{k+1} + \frac{2}{9}p_k$.
4. En déduire une expression explicite de p_k en fonction de k pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
5. >_ Créer une fonction Python d'en-tête `Trace_Calc(n)` qui prend en argument un entier n et renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de (p_n), et trace les termes associés sur un graphique.

Exercice 24 | Relation d'ordre 1 entre deux suites [Solution] Une abeille va chaque jour sur l'une des deux fleurs A et B. Au jour 0, elle va à la fleur A. à chaque nouvelle journée, il y a une probabilité $p \in [0,1]$ qu'elle aille sur la même fleur que la veille. Pour tout entier n, on note A_n l'événement « l'abeille est sur la fleur A le jour n » et B_n l'événement « l'abeille est sur la fleur B le jour n ». On pose de plus $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Pour tout entier n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. >_ Écrire une fonction d'en-tête `liste_ab(n, p)` qui retourne deux listes correspondant aux valeurs des deux suites jusqu'à n. En déduire un tracé des suites, conjecturer leur limite. *On pourra choisir plusieurs paramètres p.*
3. En remarquant que $a_n + b_n = 1$, déterminer les expressions explicites de a_n et b_n.

4. Vers quoi tendent les deux suites ? Interpréter.

Exercice 25 |

[Solution] Aldo et Bob jouent au frisbee avec leur ami Charlie. Lorsque Aldo ou Bob a le frisbee, il l'envoie deux fois sur trois à Charlie, et sinon à l'autre joueur, et lorsque Charlie a le frisbee il l'envoie deux fois sur trois à Aldo et une fois sur trois à Bob. On note A_n, B_n, C_n les événements « Aldo a le frisbee », « Bob a le frisbee » et « Charlie a le frisbee » à l'instant n. On note de plus $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$, $c_n = \mathbb{P}(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, et c_n. Déterminer la matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $X_{n+1} = AX_n$.

2. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de X_0, D, P et n. En déduire les termes généraux de a_n, b_n et c_n, sachant qu'Aldo a le frisbee au début du jeu. Calculer les limites de a_n, b_n et c_n. En temps long, qui a le plus de chance d'avoir le frisbee ?

5.7 Devoir-maison

Exercice 26 | Rat de laboratoire

[Solution] Un rat de laboratoire est dans une cage disposant de trois sorties identiques. Deux de ces sorties ramènent le rat dans la cage, une de ces sortie conduit le rat à l'extérieur de la cage. Un biologiste s'intéresse au nombre nécessaire de tentatives pour que le rat trouve la bonne sortie. On considère qu'une fois sortie, le rat ne retourne pas dans la cage. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on pose les événements suivants :

- C_n : « le rat est encore dans la cage après son $n^{\text{ème}}$ essai », et on note c_n sa probabilité.
- S_n : « le rat trouve la sortie à son $n^{\text{ème}}$ essai », et on note s_n sa probabilité.
- $S_n^\star$: « le rat trouve la sortie en au plus n essais », et on note $s_n^\star$ sa probabilité.

On pose également l'événement C_0 : « le rat est initialement dans la cage », on a donc $c_0 = 1$.

1. [Préliminaires]

1.1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\{C_n, \overline{C_n}\right\}$ est un système complet d'événements.

1.2) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer S_n à l'aide de C_{n-1} et C_n.

1.3) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer $S_n^\star$ à l'aide de $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

2. [Modèle sans mémoire] On considère dans cette question que le rat est sans mémoire : il ne se rappelle pas du résultat de ses tentatives précédentes et doit donc à chaque tentative choisir aléatoirement entre trois portes identiques.

2.1) Trouver une relation entre c_{n+1} et c_n.

2.2) Expliciter la suite (c_n) et étudier sa convergence.

2.3) Les évènements de $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont-ils des évènements mutuellement indépendants ?

2.4) Expliciter la suite (s_n) et étudier sa convergence ; idem pour $(s_n^\star)$.

2.5) Commenter ce dernier résultat.

3. [Modèle avec mémoire] On considère dans cette question que le rat est avec mémoire : il se rappelle du résultat de ses tentatives précédentes, il ne choisit donc pas les portes qu'il a déjà essayé.

3.1) Calculer c_1 et c_2 en justifiant vos calculs.

3.2) Calculer c_n pour $n \geq 3$.

3.3) Expliciter les suites (s_n) et $(s_n^\star)$.

4. [Modèle avec mémoire 2] On considère dans cette question que le rat ne se rappelle que du résultat de sa **dernière** tentative, il ne choisit pas la porte qu'il a essayé à sa tentative précédente.

4.1) Calculer c_1, s_1 et c_2 en justifiant vos calculs.

4.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, trouver une relation entre c_{n+1} et c_n.

4.3) Expliciter la suite (c_n) et étudier sa convergence.

4.4) $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une famille d'événements mut. indépendants ?

4.5) Expliciter (s_n) pour $n \geq 2$, étudier la convergence de cette suite.

4.6) Expliciter $(s_n^\star)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$, étudier la convergence de cette suite.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé]

Il s'agit ici uniquement de formuler les événements à l'aide de R_1, R_1, R_3.

- $A = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.
- $B = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_3) \cup (R_2 \cap R_3)$
- $C = (R_1 \cap \overline{R}_2 \cap \overline{R}_3) \cup (R_2 \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_3) \cup (R_3 \cap \overline{R}_1 \cap \overline{R}_1)$.
- $D = R_1 \cup R_2$.

Solution (exercice 2) [Énoncé]

Même chose que dans l'exercice précédent.

- $A = (M_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4) \cup (M_2 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_3 \cap \overline{M}_4) \cup (M_3 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_4) \cup (M_4 \cap \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 \cap \overline{M}_3)$.
- $B = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 \cup \overline{M}_3$.

Solution (exercice 3) [Énoncé]

- Notations : on note J l'événement « être vacciné contre la fièvre jaune », D l'événement « être vacciné contre la diphtérie » et T l'événement « être vacciné contre aucune de ces deux maladies ».
- Traduction des données de l'énoncé : $\mathbb{P}(J) = \frac{9}{20}$, $\mathbb{P}(D) = \frac{3}{5}$ et $\mathbb{P}(J \cap D) = \frac{3}{10}$.
- Calcul de $\mathbb{P}(T)$:
  On remarque que $T = \overline{J} \cap \overline{D}$. Or on a : $\overline{T} = J \cup D$ et ainsi on obtient que : $\mathbb{P}(T) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{T}\right)$. On calcule donc $\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)$: les événements J et D ne sont pas incompatibles, on utilise donc la formule du crible et on obtient que :
  $$\mathbb{P}\left(\overline{T}\right) = \mathbb{P}(J) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(J \cap D) = \frac{3}{4}.$$
  Ainsi on a : $\boxed{\mathbb{P}(T) = \frac{1}{4}}$.

Solution (exercice 4) [Énoncé]

- Notations : on note A l'événement « présenter le défaut A » et B l'événement « présenter le défaut B ». On note aussi T l'événement « ne présenter aucun défaut » et S l'événement « présenter un seul défaut ».
- Traduction des données : $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{50}$, $\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{20}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{10}$.
- Calcul de $\mathbb{P}(A)$: comme $(B, \overline{B})$ est un système complet d'évènements, on a d'après la formule des probabilités totales que : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{50} + \frac{1}{20} = \frac{7}{100}$.
- Calcul de $\mathbb{P}(T)$: on remarque que $T = \overline{A} \cap \overline{B}$. Ainsi on a que $\overline{T} = A \cup B$ et donc $\mathbb{P}(T) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{T}\right)$. Calculons $\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)$. Comme les événements A et B ne sont pas incompatibles, on utilise la formule du crible et on obtient que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{20}$. Ainsi on a : $\mathbb{P}(T) = \frac{17}{20}$.
- Calcul de $\mathbb{P}(S)$: on remarque que $S = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$. Or les deux événements $A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles deux à deux et ainsi on a : $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$. On connaît $\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{20}$. Il reste à calculer $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right)$. Pour cela on peut utiliser par exemple $\mathbb{P}(B)$. En effet $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) \iff \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{25}$. Finalement on obtient alors que $\boxed{\mathbb{P}(S) = \frac{13}{100}}$.

Solution (exercice 5) [Énoncé]

1. Une condition nécessaire et suffisante est la suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$
Notons $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de sorte que $\mathbb{P}(\{k\}) = \lambda \cdot k$. Alors
$$\lambda \sum_{k=1}^{n} k = 1 \implies \lambda = \frac{2}{n(n+1)}.$$
Donc
$$\boxed{\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{2k}{n(n+1)}}.$$

2. Une condition nécessaire et suffisante est la suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$
Or, pour tout $k \geqslant 2$,
$$\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{1, 2, \ldots, k\}) - \mathbb{P}(\{1, 2, \ldots, k-1\}).$$
Notons $\lambda \in \mathbb{R}^+$ de sorte que $\mathbb{P}(\{1, 2, \ldots, k\}) = \lambda \cdot k$. Alors
$$\lambda \sum_{k=2}^{n} \lambda(k - (k-1)) + \lambda 1 = 1 \implies \lambda = \frac{1}{n}.$$
Donc
$$\boxed{\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{k}{n}}.$$

Solution (exercice 6) [Énoncé]

- L'univers Ω est l'ensemble des 6-uplet d'éléments pris parmi 6 et ainsi $\operatorname{Card}\Omega = 6^6$. En effet, il y a ordre car les dés sont distincts (par exemple de couleurs différentes) et il y a répétition.
- Comme les 6 dés sont équilibrés, on munit Ω de la probabilité uniforme.
- Notations des événements : on note A l'événement « obtenir les 6 résultats possibles » et B l'événement « obtenir au moins deux résultats distincts ».
- Calcul de $\mathbb{P}(A)$: pour obtenir les 6 résultats possibles, on doit obtenir une

permutation de $[\![1\,,6]\!]$. Comme il y a 6! telles permutations, on en déduit que $\mathbb{P}(A)=\frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}=\boxed{\frac{6!}{6^6}}$.

- Calcul de $\mathbb{P}(B)$: il est plus simple ici de passer à l'événement contraire. On a $\mathbb{P}(B)=1-\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$ avec $\overline{B}$: « avoir tous les résultats identiques ». Or il n'y a que 6 possibilités pour avoir les résultats tous identiques. Ainsi, on obtient que :

$$\mathbb{P}(B)=1-\frac{\text{Card}(\overline{B})}{\text{Card}\,\Omega}=1-\frac{6}{6^6}=\boxed{\frac{6^5-1}{6^5}}.$$

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1. Utiliser deux fois la forme d'inclusion-exclusion (voir cours).
2. Si on note T l'événement « au moins un des trois événements A, B et C est réalisés » alors on a : $T=A\cup B\cup C$. Ces trois événements ne sont pas incompatibles deux à deux et ainsi on utilise la question précédente :

$$\mathbb{P}(T)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C).$$

Calculons chacun de ces événements.

- L'univers Ω est l'ensemble des 3-uplet d'éléments pris parmi 6 et ainsi $\text{Card}\,\Omega=6^3$. En effet, il y a ordre car les dés sont distincts (par exemple de couleurs différentes) et il y a répétition.
- Comme les 3 dés sont équilibrés, on munit Ω de la probabilité uniforme.
- Calcul de $\mathbb{P}(T)$:
  - On a : $\mathbb{P}(A)=\frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$.
  - On a : $\mathbb{P}(B)=1-\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)=1-\frac{\text{Card}\,\overline{B}}{\text{Card}\,\Omega}=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{6^3-5^3}{6^3}$.
  - On a : $\mathbb{P}(C)=\frac{\text{Card}\,C}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{3}{6^3}=\frac{1}{72}$ car il n'y a que 3 possiblités pour obtenir une somme de 4.
  - On a : $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{\text{Card}\,A\cap B}{\text{Card}\,\Omega}=\frac{1}{6^3}$ car la seule solution est d'avoir les 3 numéros qui valent 3.
  - On a : $\mathbb{P}(A\cap C)=\frac{\text{Card}\,A\cap C}{\text{Card}\,\Omega}=0$ car $A\cap C=\emptyset$.
  - On a : $\mathbb{P}(B\cap C)=\frac{\text{Card}\,B\cap C}{\text{Card}\,\Omega}=0$ car $B\cap C=\emptyset$.
  - On a : $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\frac{\text{Card}\,A\cap B\cap C}{\text{Card}\,\Omega}=0$ car $A\cap B\cap C=\emptyset$.

On obtient ainsi que $\mathbb{P}(T)=\frac{99}{216}$.

Solution (exercice 8) [Énoncé]

1. - Soit n le nombre d'élèves dans la classe. Le choix des différentes dates d'anniversaires se fait avec ordre et avec répétition car deux personnes peuvent être nées le même jour. L'univers est donc l'ensemble des n-listes de l'ensemble $[\![1\,,365]\!]$ et ainsi $\text{Card}\,\Omega=365^n$ (on a 365 choix pour la date d'anniversaire de la première personne, 365 choix pour la date d'anniversaire de la deuxième personne...).
   - On munit l'univers de la probabilité uniforme car il y a équiprobabilité sur le jour de naissance des personnes.
   - Notation : on note A l'événement « Au moins deux personnes sont nées le même jour ».

   Il est plus simple ici de passer à l'événement contraire. On a $\overline{A}$: « Toutes les personnes sont nées des jours différents ».
   Comme on a muni l'univers de la probabilité uniforme, on obtient que $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=\frac{\text{Card}\left(\overline{A}\right)}{\text{Card}\,\Omega}$. Or pour calculer $\text{Card}\,\overline{A}$ il faut choisir les dates d'anniversaire dans $[\![1\,,365]\!]$ mais sans répétition. Ainsi, il y a 365 choix possibles pour la première personne, 364 choix possibles pour la deuxième personne,.... et $365-n+1$ choix possibles pour la n-ième personne. On obtient donc que :

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}.$$

   Et donc : $\boxed{\mathbb{P}(A)=1-\prod_{k=0}^{n-1}\frac{365-k}{365}}$.
2. Il s'agit de calculer, avec Python, 1 moins le produit :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{365-k}{365}.$$

On suit donc la méthode typique vue au début de l'année.

```
def calc_proba_anniv(n):
    P = 1
    for k in range(n):
        P *= (365-k)/365
    return 1-P
```

```
>>> n = 44
>>> calc_proba_anniv(n)
0.9328853685514263
```

Il y a donc une très forte probabilité que 2 élèves aient la même date d'anniversaire dans la classe !

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. On choisit les rats sans ordre et sans remise, on cherche donc le nombre de combinaisons de 1000 rats parmi n, et on a $\boxed{\binom{n}{1000}}$ possibilités.
2. On a capturé 10 rats parmi les 1000 qui étaient marqués, on a donc $\binom{1000}{10}$ possibilités pour ceux là. Et on a donc capturé 990 rats parmi les $n-1000$ non marqués, soient $\binom{n-1000}{990}$ possibilités. Au final on a donc $\text{Card}\,A=\binom{1000}{10}\binom{n-1000}{990}$. On suppose ici que l'on attrape les rats au hasard, on utilise donc la loi de probabilité uniforme. Finalement, on obtient $\boxed{p_n=\frac{\binom{1000}{10}\binom{n-1000}{990}}{\binom{n}{1000}}}$.

3. On a $p_n > 0$ donc on peut regarder le quotient :

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{p_{n+1}} &= \frac{\cancel{\binom{1000}{10}}\binom{n-1000}{990}}{\binom{n}{1000}} \times \frac{\binom{n+1}{1000}}{\cancel{\binom{1000}{10}}\binom{n+1-1000}{990}} \\ &= \frac{(n-1000)!\cancel{1000!}(n-1000)!}{\cancel{990!}(n-1000-990)!n!} \times \frac{(n+1)!\cancel{990!}(n+1-1000-990)!}{\cancel{1000!}(n+1-1000)!(n+1-1000)!} \\ &= \frac{(n+1)(n+1-1000-990)}{(n+1-1000)^2} \\ &= \boxed{\frac{n^2-1988n-1989}{n^2-1998n+10^6-1999}}.\end{aligned}$$

On résout ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{p_{n+1}} \leq 1 &\iff \frac{n^2-1988n-1989}{n^2-1998n+10^6-1999} \leq 1 \\ &\iff n^2-1988n-1989 \leq n^2-1998n+10^6-1999 \\ &\iff 10n \leq 10^6-10 \\ &\iff \boxed{n \leq 10^5-1}.\end{aligned}$$

4. On a donc montré que la suite (p_n) était croissante pour $n \leq 10^5-1$, puis décroissante ensuite. La suite (p_n) admet donc un maximum en $\boxed{n_0 = 10^5-1}$.

5. On a montré que la probabilité de notre observation était maximale pour un nombre total de rats valant n_0. L'estimation que l'on obtient est donc de 10^5-1 rats.

Solution (exercice 10) [Énoncé]

- Notations : on note V l'événement « être vacciné », M l'événement « être malade ».
- Traduction des données de l'énoncé :
  - ◇ $\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4} \neq 0$ et ainsi $\mathbb{P}_V$ existe bien.
  - ◇ $\mathbb{P}\left(\overline{V}\right) = 1-\mathbb{P}(V) = \frac{3}{4} \neq 0$ et ainsi $\mathbb{P}_{\overline{V}}$ existe bien.
  - ◇ $\mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5}$. De plus, comme $\mathbb{P}_M$ est une probabilité, on a donc : $\mathbb{P}_M\left(\overline{V}\right) = 1-\mathbb{P}_M(V) = \frac{4}{5}$.
  - ◇ $\mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12}$ car $\mathbb{P}_V$ existe bien. De plus, comme $\mathbb{P}_V$ est une probabilité, on a donc : $\mathbb{P}_V\left(\overline{M}\right) = 1-\mathbb{P}_V(M) = \frac{11}{12}$.
- Calcul de $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$: on a inversion de conditionnement, donc on utilise la formule de BAYES, car $\mathbb{P}(M)$ et $\mathbb{P}\left(\overline{V}\right)$ sont non nulles : $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{\mathbb{P}_M\left(\overline{V}\right)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}\left(\overline{V}\right)}$. De plus, pour calculer $\mathbb{P}(M)$, on peut utiliser à nouveau la formule de BAYES : $\mathbb{P}_V(M) = \frac{\mathbb{P}_M(V)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(V)}$, sous réserve que les probabilités conditionnelles existent. On sait que : $\mathbb{P}_M(V) = \frac{1}{5}$ et que $\mathbb{P}_V(M) = \frac{1}{12}$. On en déduit que $\mathbb{P}(M) = \frac{\mathbb{P}_V(M)\mathbb{P}(V)}{\mathbb{P}_M(V)} = \frac{5}{48}$. Ainsi, on obtient que : $\mathbb{P}_{\overline{V}}(M) = \frac{16}{15} \times \frac{5}{48} = \frac{1}{9}$. Donc il y a 1 chance sur 9 qu'un non vacciné tombe malade.
- On a $\mathbb{P}_V(M) < \mathbb{P}_{\overline{V}}(M)$, donc le vaccin est efficace.

Solution (exercice 11) [Énoncé]

1.
- Notations : on note A l'événement « accepter une pièce », B l'événement « la pièce est bonne » et T l'événement « il y a une erreur de contrôle ».
- Reprise des données de l'exercice :
  - ◇ $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 0.05 \neq 0$ et ainsi $\mathbb{P}_{\overline{B}}$ existe bien.
  - ◇ $\mathbb{P}(B) = 1-\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 0.95 \neq 0$ et ainsi $\mathbb{P}_B$ existe bien.
  - ◇ $\mathbb{P}_B(A) = 0.96$ car $\mathbb{P}_B$ existe bien. De plus, comme $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, on a donc : $\mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1-\mathbb{P}_B(A) = 0.04$.
  - ◇ $\mathbb{P}_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right) = 0.98$ car $\mathbb{P}_{\overline{B}}$ existe bien. De plus, comme $\mathbb{P}_{\overline{B}}$ est une probabilité, on a donc : $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) = 1-\mathrm{P}_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0.02$.
- Calcul de $\mathbb{P}(T)$. On a : $T = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$. Or les événements $A\cap\overline{B}$ et $\overline{A}\cap B$ sont incompatibles et ainsi on obtient que : $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\cap B\right)$. Puis comme les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}$ existent bien, on obtient que : $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) + \mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B) = 0.02\times0.05 + 0.04\times0.95$. Ainsi $\mathbb{P}(T) = 0.039$.

2. On remarque qu'il y a ici un retournement de conditionnement, on va donc utiliser la formule de BAYES. Ainsi sous réserve que les deux probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_A$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}$ existent bien, on a : $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)}{\mathbb{P}(A)}$.

- On sait que $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) = 0.05 \neq 0$ et ainsi $\mathbb{P}_{\overline{B}}$ existe bien.
- Calculons $\mathbb{P}(A)$ et vérifions que $\mathbb{P}(A) \neq 0$:
  Comme presque toujours avec la formule de BAYES, le dénominateur se calcule en utilisant la formule des probabilités totales. On a en effet ici que $(B, \overline{B})$ est un système complet d'évènements et ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)$. Mais on a déjà montré que $\mathbb{P}_B$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}$ existent bien et ainsi on obtient avec la version 2 de la formule des probabilités totales : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\,\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$. D'après ce que l'on a déjà calculé, on obtient que : $\mathbb{P}(A) = 0.96\times0.95 + 0.02\times0.05 = 0.913$. Ainsi $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}_A$ existe bien.

Ainsi les deux hypothèses de la formule de BAYES sont bien vérifiées et on

obtient donc :

$$\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = \frac{\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.02 \times 0.05}{0.913} = \frac{1}{913}.$$

3. On remarque qu'il y a ici un retournement de conditionnement, on va donc utiliser la formule de BAYES. Ainsi sous réserve que les deux probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}$ existent bien, on a : $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$.

- On sait que $\mathbb{P}(B) = 0.95 \neq 0$ et ainsi $\mathbb{P}_B$ existe bien.
- Calculons $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$ et vérifions que $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \neq 0$. Ici il n'y a pas besoin d'utiliser la formule des probabilités totales car on connaît $\mathbb{P}(A)$. Ainsi on a :

  $$\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0.087.$$

  Ainsi $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \neq 0$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}$ existe bien.

Ainsi les deux hypothèses de la formule de BAYES sont bien vérifiées et on obtient donc :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{0.04 \times 0.95}{0.087} = \frac{38}{87}.$$

Solution (exercice 12) [Énoncé]

- Notations : on note D l'événement « tirer une dame », J1 l'événement « tirer une carte du jeu de 32 cartes » et J2 l'événement « tirer une carte du jeu de 52 cartes ».
- Calcul de $\mathbb{P}_D(J1)$ sous réserve que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_D$ existe bien. On remarque un retournement de conditionnement, on va donc utiliser la formule de BAYES. Ainsi sous réserve que les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{J1}$ et $\mathbb{P}_D$ existent bien, on obtient que : $\mathbb{P}_D(J1) = \frac{\mathbb{P}_{J_1}(D)\mathbb{P}(J1)}{\mathbb{P}(D)}$.
  - ◇ Calcul de $\mathbb{P}(J1)$: comme on choisit l'un des deux jeux au hasard, on utilise la probabilité conditionnelle et on obtient que : $\mathbb{P}(J1) = \frac{1}{2}$. En particulier $\mathbb{P}_{J1}$ existe bien car $\mathbb{P}(J1) \neq 0$.
  - ◇ Calcul de $\mathbb{P}(D)$: comme le plus souvent avec la formule de BAYES, le dénominateur se calcule en utilisant un système complet d'évènements et la formule des probabilités totales. Ainsi ici, on a (J1, J2) est un système complet d'évènements et ainsi d'après la formule des probabilités totales, on obtient que $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \cap J1) + \mathbb{P}(D \cap J2)$. De plus, on a : $\mathbb{P}(J1) = \mathbb{P}(J2) = \frac{1}{2}$ car on choisit au hasard le jeu de carte utilisé. Ainsi on obtient en particulier que $\mathbb{P}(J1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(J2) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{J1}$ et $\mathbb{P}_{J2}$ existent bien. On peut donc utiliser la version 2 de la formule des probabilités totales et on obtient que : $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}_{J_1}(D)\,\mathbb{P}(J1) + \mathbb{P}_{J_2}(D)\,\mathbb{P}(J2)$. Comme les cartes sont bien mélangées et que l'on tire une carte au hasard, on utilise la probabilité uniforme et ainsi on obtient que : $\mathbb{P}_{J_1}(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}_{J_2}(D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. On a ainsi : $\mathbb{P}(D) = \frac{91}{208}$. En particulier $\mathbb{P}(D) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_D$ existe bien.

  On peut donc bien appliquer la formule de BAYES et on obtient que : $\mathbb{P}_D(J1) = \frac{13}{91}$.

Solution (exercice 13) [Énoncé]

- Notations : on note A, B, C et D les événements « l'élève emprunte l'itinéraire A, B, C ou D ». On note de plus R l'événement « arriver en retard ».
- Traduction des données de l'exercice :
  - ◇ On a $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{12}$.
    De plus, comme (A, B, C, D) est un système complet d'évènements, on sait que : $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) = 1$ et ainsi, on obtient que : $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C) = \frac{1}{3}$.
  - ◇ $\mathbb{P}_A(R) = \frac{1}{20}$, $\mathbb{P}_B(R) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}_C(R) = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}_D(R) = 0$ car $\mathbb{P}_A$, P_B, P_C et $\mathbb{P}_D$ existent bien car on vient de voir que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(C) \neq 0$, $\mathbb{P}(D) \neq 0$.
- On cherche à calculer $\mathbb{P}_R(C)$ sous réserve d'existence de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_R$. Comme on remarque un retournement de conditionnement, on utilise la formule de BAYES. Ainsi sous réserve que les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_R$ et $\mathbb{P}_C$ existent bien, on a : $\mathbb{P}_R(C) = \frac{\mathbb{P}_C(R)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R)}$.
  - ◇ D'après les données de l'exercice, on sait que $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{12} \neq 0$ et ainsi $\mathbb{P}_C$ existe bien.
  - ◇ Calcul de $\mathbb{P}(R)$: comme (A, B, C, D) est un système complet d'évènements, on a d'après la formule des probabilités totales que : $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \cap A) + \mathbb{P}(R \cap B) + \mathbb{P}(R \cap C) + \mathbb{P}(R \cap D)$. Mais on a déjà vu que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(C) \neq 0$ et $\mathbb{P}(D) \neq 0$, ainsi les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_A$, P_B, P_C et $\mathbb{P}_D$ existent bien et on peut alors appliquer la version 2 de la formule des probabilités totales. Ainsi on a : $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}_A(R)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_B(R)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_C(R)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_D(R)\mathbb{P}(D)$. D'après les données de l'exercice, on obtient : $\mathbb{P}(R) = \frac{7}{12}$. En particulier $\mathbb{P}(R) \neq 0$ et $\mathbb{P}_R$ existe bien.

  On peut donc bien appliquer la formule de BAYES et on obtient que : $\boxed{\mathbb{P}_R(C) = \frac{1}{35}}$.

Solution (exercice 14) [Énoncé]

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, notons V_i l'événement « la voiture est derrière le rideau i » et C_i l'événement « Corine a ouvert la porte i pour révéler une chèvre ». D'après la formule de BAYES, avec le système complet d'événements (V_1, V_2, V_3), on a :

$$\mathbb{P}_{C_2}(V_1) = \frac{\mathbb{P}(V_1)\,\mathbb{P}_{V_1}(C_2)}{\mathbb{P}(V_1)\,\mathbb{P}_{V_1}(C_2) + \mathbb{P}(V_2)\,\mathbb{P}_{V_2}(C_2) + \mathbb{P}(V_3)\,\mathbb{P}_{V_3}(C_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

De plus, $\mathbb{P}_{C_2}(V_2) = 0$ et donc $\mathbb{P}_{C_2}(V_3) = 1-\frac{1}{3}-0 = \frac{2}{3}$. En résumé :

$$\mathbb{P}_{C_2}(V_1) < \mathbb{P}_{C_2}(V_3).$$

La probabilité que Bob a de gagner si elle ne change pas de porte est donc égale à $\frac{1}{3}$. Bob a donc intérêt à changer son choix de porte.

Solution (exercice 15) [Énoncé]

1. Par définition, $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right)}{\mathbb{P}(A)}$. De plus, par indépendance, on a :

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
$$= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)(1-\mathbb{P}(A)).$$

D'où l'on peut ensuite tirer $\mathbb{P}(B)$:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cup B)-\mathbb{P}(A)}{1-\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

De plus, comme $(B,\overline{B})$ est un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales livre (avec l'indépendance de A et B) :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right) \Longrightarrow \mathbb{P}\left(A\cap\overline{B}\right) = \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi : $\mathbb{P}_A\left(\overline{B}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

2. Si les évènements étaient incompatibles, on aurait $A\cap B = \emptyset$ puis $\mathbb{P}(A\cap B) = 0$. Ce qui est exclu puisque par indépendance $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \neq 0$. Donc : A et B ne sont pas incompatibles.

Solution (exercice 16) [Énoncé]

1. On doit donc regarder si les événements A, B ; A, C et B, C sont indépendants. Pour cela on doit donc calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A\cap B)$, $\mathbb{P}(A\cap C)$ et $\mathbb{P}(B\cap C)$.

- Calcul de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$:
  On obtient que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$. Il s'agit de faire le raisonnement suivant, par exemple pour $\mathbb{P}(C)$: on a $C = (P_1\cap F_2)\cup(F_1\cap P_2)$ avec notations évidentes. Les deux évenments $P_1\cap F_2$ et $F_1\cap P_2$ sont incompatibles deux à deux et ainsi on obtient que : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(P_1\cap F_2)+\mathbb{P}(F_1\cap P_2)$. Puis les événements P_1, F_2 et F_1, P_2 sont mutuellement indépendants car on répète deux fois de suite la même expérience dans les mêmes conditions. Ainsi on obtient que : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2)+\mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2) = \frac{1}{2}$ car la pièce n'est pas truquée et on utilise donc la probabilité uniforme.
- ◇ $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(P_1\cap P_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = \frac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements P_1 et P_2 sont mutuellement indépendants.
  ◇ $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(P_1\cap F_2) = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements P_1 et F_2 sont mutuellement indépendants.
  ◇ $\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(F_1\cap P_2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(P_2) = \frac{1}{4}$ en utilisant le fait que les événements F_1 et P_2 sont mutuellement indépendants.
- On remarque ainsi que l'on a bien : $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(B\cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et ainsi les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

2. Pour étudier l'indépendance mutuelle, il faut que les événements sont déjà deux à deux indépendants et en plus ils doivent vérifier : $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. Or ici, on a : $A\cap B\cap C = \emptyset$ et ainsi $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0$. Ainsi $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ et les trois événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Solution (exercice 17) [Énoncé]

1. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i » et on note G l'événement « être gagnant ». Ainsi on a : $G = N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_n$. Comme il y a remise, on répète bien la même expérience n fois dans les mêmes conditions. Ainsi les événements $(N_1, N_2, \dots, N_n)$ sont mutuellement indépendants et on a : $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(N_2)\dots\mathbb{P}(N_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. On pouvait aussi calculer cette probabilité sans utiliser la mutuelle indépendance mais avec du dénombrement car on est dans un cadre d'ordre et de répétition.

2. Pour cela, on peut montrer que la fonction $f : x \longmapsto \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ est croissante sur $[2,+\infty[$. Il s'agit ici d'une étude classique de fonction. La fonction f est dérivable sur $[2,+\infty[$ comme quotient, somme et composée de fonctions et pour tout $x\geqslant 2$: $f'(x) = f(x)\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}\right]$. On pose pour tout $x\geqslant 2$: $g(x) = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}$. Cette fonction est elle aussi dérivable sur $[2,+\infty[$ et pour tout $x\geqslant 2$: $g'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2}$. Ainsi comme on est sur $[2,+\infty[$, g' est négative et ainsi la fonction g est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$. De plus $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = 0$ par propriété sur les somme, quotient et composée de limites. Ainsi la fontion g reste positive sur $[2,+\infty[$. Donc f' est positive sur $[2,+\infty[$ comme produit de deux nombres positifs et car f est bien positive car c'est une exponentielle. Ainsi la fonction f est bien croissante sur $[2,+\infty[$. Et donc en particulier on a la croissance de la suite à partir de $n\geqslant 2$. De plus si $n=1$, il n'y a pas de boule noire et ainsi $\mathbb{P}(G) = 0$. Ceci prouve la croissance sur $\mathbb{N}^\star$ car pour tout $n\geqslant 2$: $f(n)\geqslant 0 \iff f(n)\geqslant f(1)$. Donc $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

3. • Comme la fonction $n \longmapsto \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante sur $\mathbb{N}^\star$, plus le nombre de boules totales n augmente, plus le nombre $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ augmente aussi, à savoir plus la probabilité de gagner augmente. Le joueur a donc intérêt à ce que le nombre de boules totales soient le plus grand possible.

• En utilisant les équivalents usuels, on a : $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{=\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$. On obtient donc que : $n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{=\infty}{\sim} -1$. Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1$ puis par propriété sur la composition de limite, on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$. Or comme $p_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on obtient que : $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} p_n = \mathrm{e}^{-1}}$.

Solution (exercice 18) [Énoncé]

1. • Notations : on note B_i l'événement « tirer une boule blanche au tirage i », N_i l'événement « tirer une boule noire au tirage i » et on note S l'événement « on tire deux boules de couleurs différentes ».

• Expression de S : $S = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$.

• Calcul de $\mathbb{P}(S)$:

◇ Comme les événements $B_1 \cap N_2$ et $N_1 \cap B_2$ sont incompatibles, on a : $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$.

◇ Calcul de $\mathbb{P}(B_1 \cap N_2)$: on a $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{b+n}$, car les tirages sont font avec équiprobabilité, donc $\mathbb{P}(B_1) \neq 0$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2)$. De plus, on a : $\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{n}{n+b-1}$ car on a enlevé une boule blanche de l'urne. Ainsi, on obtient que : $\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{b}{b+n} \times \frac{n}{n+b-1}$.

◇ Calcul de $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$: de même, on a $\mathbb{P}(N_1) = \frac{n}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(B_2)$. De plus, on a : $\mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{b}{n+b-1}$. Ainsi, on obtient que : $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \frac{n}{b+n} \times \frac{b}{n+b-1}$.

◇ Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(S) = \frac{2nb}{(b+n)(b+n-1)}}$.

2. • Expression de S : de même qu'à la question 1, $S = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$.

• Calcul de $\mathbb{P}(S)$:

◇ Comme les événements $B_1 \cap N_2$ et $N_1 \cap B_2$ sont incompatibles, on a : $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$.

◇ Calcul de $\mathbb{P}(B_1 \cap N_2)$: on a toujours $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2)$. De plus, on a cette fois : $\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{n}{n+b+2}$ car on a remis la boule blanche ainsi que 2 autres boules blanches. Ainsi, on obtient que : $\mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \frac{b}{b+n} \times \frac{n}{n+b+2}$.

◇ Calcul de $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2)$: on a toujours $\mathbb{P}(N_1) = \frac{n}{b+n} \neq 0$, donc d'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(B_2)$. De plus, on a : $\mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{b}{n+b-1}$ car on ne remet pas de boule dans l'urne. Ainsi, on obtient que : $\mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \frac{n}{b+n} \times \frac{b}{n+b-1}$.

◇ Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(S) = \frac{2nb}{b+n}\left[\frac{1}{n+b+2} + \frac{1}{n+b-1}\right]}$.

Solution (exercice 19) [Énoncé]

1. On note S l'évènement « ouvrir la porte au k-ième essai » (attention : cela sous-entend qu'on a donc en plus pas ouvert la porte aux essais 1, 2 …, $k-1$, cet évènement contient donc plus d'informations que C_j introduit plus bas), et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, C_j l'évènement « la j-ième clef essayée ouvre la porte ». On a donc :

$$S = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}} \cap C_k.$$

Or ici M. H. ne met pas de côté les mauvaises clés : les événements sont donc mutuellement indépendants. On a donc :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(\overline{C_1}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{C_2}\right) \times \ldots \times \mathbb{P}\left(\overline{C_{k-1}}\right) \times \mathbb{P}(C_k).$$

De plus, comme M. H. choisit les clés au hasard, la probabilité d'avoir une mauvaise clé vaut $\frac{n-1}{n}$ et la probabilité d'avoir la bonne clé vaut $\frac{1}{n}$. On a donc : $\boxed{\mathbb{P}(S) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \times \frac{1}{n}}$.

2. Attention, cette fois M. H. met de côté les mauvaises clés : les événements ne sont pas mutuellement indépendants, il faut utiliser la formule des probabilités composées. Il faut de plus supposer que l'on a $k \leqslant n$, car au bout de n essais, M. H. est sûr d'avoir trouvé la bonne clé. On a $\mathbb{P}\left(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{k-1}}\right) \neq 0$, car il est possible de choisir $k-1$ fois de suite une mauvaise clé si $k \leqslant n$. On peut alors utiliser la formule des probabilités composées et on obtient que :

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}\left(\overline{C_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{C_1}}\left(\overline{C_2}\right)\mathbb{P}_{\overline{C_1}\cap\overline{C_2}}\left(\overline{C_3}\right) \times \ldots$$
$$\times \mathbb{P}_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-2}}}\left(\overline{C_{k-1}}\right)\mathbb{P}_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-1}}}(C_k).$$

On a de plus :

• $\mathbb{P}\left(\overline{C_1}\right) = \frac{n-1}{n}$ car on choisit la clé au hasard donc il y a équiprobabilité, et il y a $n-1$ clés qui n'ouvrent pas la porte pour n clés en tout.

• $\mathbb{P}_{\overline{C_1}}\left(\overline{C_2}\right) = \frac{n-2}{n-1}$ car on a enlevé une mauvaise clé du trousseau, donc il reste $n-2$ qui ne marchent pas pour $n-1$ clés au total.

• On continue ainsi de suite, jusqu'à $\mathbb{P}_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-2}}}\left(\overline{C_{k-1}}\right) = \frac{n-1-(k-2)}{n-(k-2)} = \frac{n-k+1}{n-k+2}$ car on a enlevé $k-2$ mauvaises clés.

• Enfin, on a : $\mathbb{P}_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{k-1}}}(C_k) = \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n-k+1}$ car on a enlevé $k-1$ mauvaises clés, et il n'y a qu'une seule clé qui ouvre la porte.

Calculons alors $\mathbb{P}(S)$. On a :

$$\mathbb{P}(S) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Ainsi : la probabilité de trouver la bonne clé au k-ième essai est $\frac{1}{n}$.

Solution (exercice 20) [Énoncé]

1. On pose pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$ S_k l'évènement « choisir le sac S_k ». Comme $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n)$ est un système complet d'évènements, on sait que : $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k) = 1$. Or on sait que pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, on a : $\mathbb{P}(S_k) = \alpha k$. Ainsi le calcul de la somme donne

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} k = \alpha \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

On obtient donc que : $\alpha \times \frac{n(n+1)}{2} = 1 \iff \alpha = \frac{2}{n(n+1)}$.

2. On note B l'évènement « tirer un jeton blanc ». Pour calculer $\mathbb{P}(B)$, on doit savoir dans quel sac on se trouve. On utilise ainsi le fait que $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n)$ est un système complet d'évènements et on obtient donc d'après la formule des probabilités totales que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap S_k) = \mathbb{P}(B \cap S_1) + \mathbb{P}(B \cap S_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap S_n).$$

On sait que pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$: $\mathbb{P}(S_k) = \frac{2k}{n(n+1)}$ donc pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$: $\mathbb{P}(S_k) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{S_k}$ existe pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On peut donc appliquer la formule des probabilités composées et on obtient que :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_k)\mathbb{P}_{S_k}(B) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \times \mathbb{P}_{S_k}(B).$$

Mais on a pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$: $\mathbb{P}_{S_k}(B) = \frac{k}{n+1}$. Ainsi on obtient que

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3(n+1)}.$$

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé. On cherche à calculer $\mathbb{P}_B(S_k)$ qui existe bien car on vient de montrer à la question précédente que $\mathbb{P}(B) \neq 0$ et ainsi la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$ existe bien. De plus on remarque qu'il y a inversion de chronologie et on utilise donc la formule de BAYES. On obtient alors

$$\mathbb{P}_B(S_k) = \frac{\mathbb{P}_{S_k}(B)\mathbb{P}(S_k)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Et on sait que $\mathbb{P}(S_k) \neq 0$ car $\mathbb{P}(S_k) = \frac{2k}{n(n+1)}$ donc la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{S_k}$ existe bien. Comme $\mathbb{P}_{S_k}(B) = \frac{k}{n+1}$, on obtient au final que

$$\mathbb{P}_B(S_k) = \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Solution (exercice 21) [Énoncé]

1. Pour $i \in [\![1\,,\,10]\!]$ et $j \in \mathbb{N}$, notons i_j l'évènement « piocher i au tour j ». Alors on souhaite calculer $\mathbb{P}(9_1 \cap 5_2 \cap 4_3)$. Il n'y a clairement pas indépendance, donc utilisons la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(9_1 \cap 5_2 \cap 4_3) = \mathbb{P}(9_1) \cap \mathbb{P}_{9_1}(5_2)\mathbb{P}_{9_1 \cap 5_2}(4_3)$$
$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{450}}.$$

En effet, après avoir pioché le 9, il ne reste plus dans l'urne que les boules 1 à 9 car on enlève la 10-ième (soit 9 boules). Puis, après voir pioché le 5, il ne reste que les boules 1 à 5 (soit 5 boules).

2. Il faut décomposer ici selon les valeurs possibles des deux premiers tirages. Notons que $(i_1 \cap j_2)_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 10}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(1_3) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant 10} \mathbb{P}_{i_1 \cap j_2}(1_3)\mathbb{P}(i_1 \cap j_2) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{i} \mathbb{P}_{i_1 \cap j_2}(1_3)\mathbb{P}(i_1 \cap j_2).$$

Lorsque $j \leqslant i$, alors $\mathbb{P}(i_1 \cap j_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{i}$ à l'aide des probabilités composées comme dans la 1ère question. Donc :

$$\mathbb{P}(1_3) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} \frac{1}{10i} = \boxed{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{i \times j}}.$$

3.

```
def proba_13():
    S = 0
    for i in range(1, 11):
        for j in range(1, i+1):
            S += 1/(i*j)
    return (1/10)*S
```

```
>>> proba_13()
0.5064311381960l9
```

Solution (exercice 22) [Énoncé]

1. Notons F_n l'évènement « fume le jour n ». Alors puisque $\left(F_n, \overline{F}_n\right)$ est un système complet d'évènements pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathbb{P}(F_{n+1}) = \mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1})\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}_{\overline{F}_n}(F_{n+1})\mathbb{P}\left(\overline{F}_n\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{4}\right) p_n + \frac{1}{2}(1 - p_n)$$
$$= \frac{3}{4} p_n - \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.}$$

2. Cherchons $C \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$C = \frac{1}{4}C + \frac{1}{2} \iff C = \frac{2}{3}.$$

Alors $(p_n - C)$ est géométrique de raison $\frac{1}{4}$, et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{4^{n-1}}\left(p_1 - \frac{2}{3}\right),$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{4^{n-1}}\left(p_1 - \frac{2}{3}\right)}.$$

3. On déduit $\boxed{p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{3}}$. Il y a deux chances sur 3 qu'il continue à fumer lorsque le nombre de jours grandit.

Solution (exercice 23) [Énoncé]

1. p_1 correspond donc au fait de gagner des deux premières parties donc $p_1 = \frac{4}{9}$. Puis p_2 au fait que la première est perdue, mais que les deux suivantes sont gagnées : donc $p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$.

2. Sachant que la première partie est perdue, cela revient à démarrer une nouvelle série de partie, à partir de la seconde (sachant la première partie gagnée, là il faudrait que l'on suppose la seconde partie perdue... donc plus compliqué).

3. D'après la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $\left\{G_1, \overline{G_1}\right\}$:

$$p_{k+2} = \mathbb{P}_{\overline{G_1}}(C_{k+2})\,\mathbb{P}\left(\overline{G_1}\right) + \mathbb{P}_{G_1}(C_{k+2})\,\mathbb{P}(G_1) = \frac{1}{3}p_{k+1} + \frac{2}{9}p_k.$$

Puisque dans la dernière probabilité, si la première est gagnée, il faut nécessairement que la seconde soit perdue (pour ne pas avoir une série de deux).

4. ..

5. Résoudre la suite récurrente linéaire.

Solution (exercice 24) [Énoncé]

1. On utilise pour cela le système complet d'évènements (A_n, B_n) et on obtient d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n), \quad \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap B_n).$$

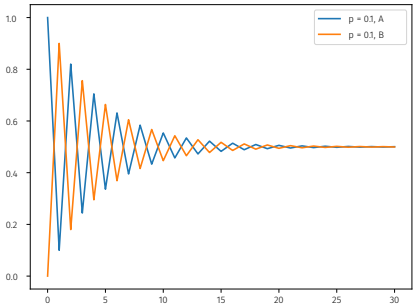
D'après le protocole, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B_n) \neq 0$ et ainsi les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{A_n}$ et $\mathbb{P}_{B_n}$ existent bien. On peut donc alors appliquer la formule des probabilités composées et on obtient que :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_{n+1}}(A_n) + \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}_{A_{n+1}}(B_n) = pa_n + (1-p)b_n$$

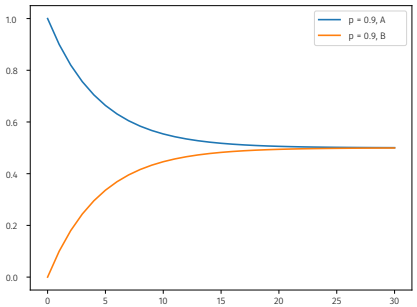
$$b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{B_{n+1}}(A_n) + \mathbb{P}(B_n)\,\mathbb{P}_{B_{n+1}}(B_n) = (1-p)a_n + pb_n.$$

2.
```
def liste_ab(n, p):
    a, b = 1, 0
    A = [a] # l'abeille est en A au début
    B = [b]
    for _ in range(1, n+1):
        a, b = p*a+(1-p)*b, (1-p)*a+p*b
        A.append(a)
        B.append(b)
    return A, B
```

```
A_1, B_1 = liste_ab(30, 0.1)
A_2, B_2 = liste_ab(30, 0.9)
plt.plot(A_1, label="p = 0.1, A")
plt.plot(B_1, label="p = 0.1, B")
plt.legend()
```




```
plt.plot(A_2, label="p = 0.9, A")
plt.plot(B_2, label="p = 0.9, B")
plt.legend()
```



On conjecture que peu importe la valeur de p, les suites semblent converger

vers $\frac{1}{2}$.

3. Comme (A_n, B_n) est un système complet d'évènements, on a bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = 1$. Ainsi on obtient que :

$$a_{n+1} = (2p-1)a_n + 1 - p, \quad b_{n+1} = (2p-1)b_n + 1 - p.$$

Dans les deux cas, on reconnaît une suite arithmético-géométrique et les calculs sur ce type de suite donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{a_n = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}}, \quad \boxed{b_n = -\frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}},$$

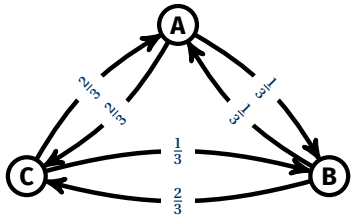
en utilisant le fait que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

4. Comme $p \in [0,1]$, alors $2p-1 \in [0,1]$ et ainsi on a : $-1 < 2p-1 < 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} (2p-1)^n = 0$. Donc par somme de limite, on obtient que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} b_n}.$$

Solution (exercice 25)

[Énoncé] Il peut être utile dans ce genre d'exercice de représenter la situation avec un graphe (permettant ainsi de traduire tout l'énoncé et éviter sa relecture fastidieuse!).



1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n)$$
$$b_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n)$$
$$c_{n+1} = \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n).$$

Par lecture de l'énoncé (ou le graphe précédent), on déduit alors :

$$a_{n+1} = 0 \times a_n + \frac{1}{3} \times b_n + \frac{2}{3} \times c_n$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{3} \times a_n + 0 \times b_n + \frac{1}{3} \times c_n$$
$$c_{n+1} = \frac{2}{3} \times a_n + \frac{2}{3} \times b_n + 0 \times c_n.$$

Ces trois équations peuvent s'écrire matriciellement sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ avec : $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}}$.

2. Après calculs, on trouve : $\boxed{D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ et P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}$. Puisque D est diagonale, on a immédiatement :

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

3. Comme Aldo a le frisbee au début du jeu, cela signifie que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une récurrence classique donne $A^n = PD^nP^{-1}$, et une autre récurrence classique donne :

$$X_n = A^nX_0 = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5.\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 8.\left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 5.\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 8.\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 7 \\ -5.\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 5 \\ -8.\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 8 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel, on trouve alors : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{20}\left(5.\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 8.\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 7\right), \quad b_n = \frac{1}{20}\left(-5.\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 5\right)},$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{20}\left(-8.\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 8\right)}.$$

Puisque $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ et $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, on déduit alors :

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{7}{20}, \quad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4} = \frac{5}{20}, \quad c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{5} = \frac{8}{20}.}$$

Ainsi, en temps long, c'est Charlie qui a (un peu) plus de chance d'avoir le frisbee que les autres.

Solution (exercice 26) [Énoncé]

1. [Préliminaires]

1.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition : $C_n \cup \overline{C_n} = \Omega$ et $C_n \cap \overline{C_n} = \emptyset$. $\left\{C_n, \overline{C_n}\right\}$ est donc un système complet d'événements.

1.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, dire que le rat trouve la sortie à son $n^{\text{ème}}$ essai c'est dire qu'il était encore dans la cage après son $(n-1)^{eme}$ essai, c'est à dire C_{n-1}, **et** qu'il n'est plus dans la cage après son $n^{\text{ème}}$ essai, c'est à dire $\overline{C_n}$. On a donc :

$$S_n = C_{n-1} \cap \overline{C_n}$$

1.3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, dire que le rat trouve la sortie en au plus n essais c'est dire qu'il a trouvé la sortie à son premier essai, c'est-à-dire S_1, **ou** qu'il a trouvé la sortie à son deuxième essai, c'est-à-dire S_2,..., **ou** qu'il a trouvé la sortie à son $n^{\text{ème}}$ essai, c'est-à-dire S_n. On a donc :

$$S_n^\star = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

2. [Modèle sans mémoire]

2.1) Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $\left\{C_n, \overline{C_n}\right\}$ est un système complet d'événements, on peut écrire d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\overline{C_n}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$$

$$c_{n+1} = c_n \times \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) + (1-c_n) \times \mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$$

Le rat ne peut pas retourner dans la cage s'il en est déjà sorti, ainsi $\mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1}) = 0$.
Si C_n se réalise, alors C_{n+1} se réalise si et seulement si le rat choisit une une mauvaise sortie à son $(n+1)^{eme}$ essai. Le rat n'ayant pas de mémoire et choisissant à chaque fois une des trois sortie au hasard, on a donc par équiprobabilité $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 2/3$. Finalement :

$$c_{n+1} = \frac{2}{3} c_n$$

2.2) D'après la question précédente, la suite (c_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n c_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

La suite (c_n) est donc convergente vers 0 $(-1 < 2/3 < 1)$.

2.3) L'événement C_n ne peut se réaliser si l'événement C_p, avec $p < n$, ne s'est pas réalisé (le rat ne peut pas être dans la cage s'il en est sortit précédemment). La réalisation ou non d'un de ces événements a donc une incidence sur la réalisation des suivants, $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est donc pas une famille d'événements mutuellement indépendants.

2.4) D'après l'étude préliminaire, $s_n = \mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}\left(C_{n-1} \cap \overline{C_n}\right)$, on a donc d'après la formule des probabilités composées[a]

$$s_n = \mathbb{P}(C_{n-1}) \times \mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right).$$

$\mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right)$ est la probabilité que le rat soit dehors après son $n^{\text{ème}}$ sachant qu'il était dans la cage précédemment, c'est-à-dire la probabilité qu'il choisisse la bonne porte à sa $n^{\text{ème}}$ tentative : elle vaut $1/3$ par équiprobabilité. On a donc :

$$s_n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

On en déduit alors que la suite (s_n) converge vers 0 $(-1 < 2/3 < 1)$.

2.5) D'après l'étude préliminaire, $s_n^\star = \mathbb{P}\left(S_n^\star\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right)$. Les événements S_i sont de plus deux à deux incompatibles (le rat ne retournant pas dans la cage, il ne peut pas trouver la sortie à deux essais différents), on a donc :

$$s_n^\star = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$$

$$s_n^\star = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$s_n^\star = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \times 3$$

$$s_n^\star = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On pouvait également remarquer que $S_n^\star = \overline{C_n}$, ce qui donnait le résultat immédiatement...
On en déduit que la suite $(s_n^\star)$ tend vers 1, ce qui semble cohérent : le rat va nécessairement finir par trouver la sortie.

3. [Modèle avec mémoire]

3.1) $\mathbb{P}(C_1)$: probabilité que le rat choisisse lors de son premier essai une des deux sorties le ramenant dans la cage. On a donc $\boxed{c_1 = \frac{2}{3}}$ par équiprobabilité. $(C_1, \overline{C_1})$ est un système complet d'événements, on peut écrire d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}(C_2) + \mathbb{P}\left(\overline{C_1}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{C_1}}(C_2)$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \times \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$$

D'après l'énoncé, le rat ne peut pas retourner dans la cage s'il en est déjà sorti, donc $\mathbb{P}_{\overline{C_1}}(C_2) = 0$. D'après l'énoncé, le rat se rappelle du résultat de ses tentatives précédentes. La probabilité qu'il soit dans la cage après son 2^{eme} essai sachant qu'il y était après son 1^{er} essai est donc la probabilité qu'il choisisse une mauvaise sortie à son 2^{eme} essai parmi les deux sorties qu'il n'a pas encore essayé. On a donc $\mathbb{P}_{C_1}(C_2) = 1/2$ par équiprobabilité. On obtient finalement : $\boxed{c_2 = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}}$

3.2) Soit $n \geq 3$,$(C_2, \overline{C_2})$ est un système complet d'événements, on peut écrire d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(C_2) \times \mathbb{P}_{C_2}(C_n) + \mathbb{P}\left(\overline{C_2}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{C_2}}(C_n)$$

$$c_n = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}_{C_2}(C_n) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}_{\overline{C_2}}(C_n).$$

D'après l'énoncé, le rat ne peut pas retourner dans la cage s'il en est déjà sorti, donc $\mathbb{P}_{\overline{C_2}}(C_n) = 0$.
D'après l'énoncé, le rat se rappelle du résultat de ses tentatives précédentes. Si le rat est encore dans la cage après son $n^{\text{ème}}$ essai sachant qu'il y était après son 2^{eme} essai, cela veut dire en particulier qu'il a choisi une mauvaise sortie à son 3^{eme} essai (et aussi aux suivants) parmi les sorties qu'il n'a pas encore essayé. Or il ne reste qu'une sortie et elle mène à la sortie, c'est donc un événement impossible. On a donc $\mathbb{P}_{C_2}(C_n) = 0$. On obtient finalement $\boxed{c_n = 0}$.

3.3) On a vu précédemment que $s_n = \mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}(C_{n-1}) \times \mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on en déduit que :

- $n = 1$, $s_1 = \mathbb{P}(C_0) \times \mathbb{P}_{C_0}\left(\overline{C_1}\right) = \mathbb{P}(C_0) \times \mathbb{P}\left(\overline{C_1}\right) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
- $n = 2$, $s_2 = \mathbb{P}(C_1) \times \mathbb{P}_{C_1}\left(\overline{C_2}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
- $n = 3$, $s_3 = \mathbb{P}(C_2) \times \mathbb{P}_{C_2}\left(\overline{C_3}\right) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$
- $n > 3$, $s_n = \mathbb{P}(C_{n-1}) \times \mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right) = 0 \times \mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right) = 0$.

On a vu précédemment que $s_n^\star = \mathbb{P}\left(S_n^\star\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_i)$ (les événements S_i sont toujours deux à deux incompatibles) pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on en déduit que :

- $n = 1$, $s_1^\star = \frac{1}{3}$
- $n = 2$, $s_2^\star = \frac{2}{3}$
- $n \geq 3$, $s_n^\star = 1$

4. [Modèle avec mémoire 2]

4.1) Lors du premier essai, le rat choisit une des trois portes aléatoirement. On a donc $c_1 = \frac{2}{3}$ et $s_1 = \frac{1}{3}$ par équiprobabilité. C_2 se réalise si et seulement si le rat échoue lors de ses deux premières tentatives, $C_2 = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$. On a alors $c_2 = \mathbb{P}\left(\overline{S_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{S_1}}\left(\overline{S_2}\right) = \frac{2}{3}\mathbb{P}_{\overline{S_1}}\left(\overline{S_2}\right)$ d'après la formule des probabilités composées. Si $\overline{S_1}$ se réalise, le rat essaie lors de sa deuxième tentative une des deux portes qu'il n'a pas encore essayé et on a donc $\mathbb{P}_{\overline{S_1}}\left(\overline{S_2}\right) = \frac{1}{2}$ par équiprobabilité. On obtient finalement $\boxed{c_2 = \frac{1}{3}}$.

4.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, trouver une relation entre c_{n+1} et c_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $\left\{C_n, \overline{C_n}\right\}$ est un système complet d'événements, on peut écrire d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n) \times \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\overline{C_n}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$$

$$c_{n+1} = c_n \times \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) + (1 - c_n) \times \mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1})$$

Le rat ne peut pas retourner dans la cage s'il en est déjà sorti, ainsi $\mathbb{P}_{\overline{C_n}}(C_{n+1}) = 0$. Si C_n se réalise, alors C_{n+1} si et seulement si le rat choisit une une mauvaise sortie à son $(n+1)^{eme}$ essai. Le rat choisissant une sortie au hasard parmi les deux qu'il n'a pas alors de sa précédente tentative ($n \geq 1$, il y a donc bien eu au moins une tentative), on a par équiprobabilité $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 1/2$. Finalement : $\boxed{c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n}$.

4.3) D'après la question précédente, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $1/2$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{c_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ (notons que cette formule n'est pas valable pour $n = 0$). On en déduit alors que (c_n) converge vers 0.

4.4) La réponse est non, pour les mêmes raisons qu'à la première partie.

4.5) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. D'après l'étude préliminaire, $s_n = \mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}\left(C_{n-1} \cap \overline{C_n}\right)$. On a donc $s_n = \mathbb{P}(C_{n-1}) \times \mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right)$ d'après la formule des probabilités composées et donc, puisque $n - 1 \geq 1$:

$$s_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right)$$

d'après la question précédente. Enfin :

$$\mathbb{P}_{C_{n-1}}\left(\overline{C_n}\right) = 1 - \mathbb{P}_{C_{n-1}}(C_n) = \frac{1}{2}$$

et on obtient finalement : $\boxed{s_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ (notons que cette formule n'est pas valable pour $n = 1$) et la suite (s_n) converge vers 0.

4.6) Puisque $S_n^\star = \overline{C_n}$, on a $s_n^\star = 1 - c_n = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la suite $(s_n^\star)$ converge donc vers 1.

a. Attention : les événements C_{n-1} et $\overline{C_n}$ ne sont pas pas indépendants !