

Chapitre (ALG) 11 Polynômes

- 1 **Définition de $\mathbb{K}[X]$**
- 2 **Polynôme dérivé**
- 3 **Racines**
- 4 **Factorisation**
- 5 **Exercices**

Résumé & Plan

On étudie dans ce chapitre des fonctions (pour nous!) particulières, que l'on appelle polynômes. Ces fonctions bénéficient de propriétés de factorisations très particulières.

Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera « je ne sais pas le reste ».

— ÉVARISTE GALOIS

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.



Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble \mathbb{K} désignera \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. DÉFINITION DE $\mathbb{K}[X]$

1.1. Généralités

Définition 1 | Polynôme sur \mathbb{K}

- Un *polynôme* (non nul) est une fonction du type $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
- Le *polynôme nul* est la fonction nulle $x \in \mathbb{K} \mapsto 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Un *monôme de degré n* est un polynôme de la forme aX^n avec $a \in \mathbb{K}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle de polynôme à coefficients réels. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on parle de polynôme à coefficients complexes.



Notation

- La fonction $P : x \in \mathbb{K} \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{K}$ est généralement notée :

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k, \quad \text{et } 0_{\mathbb{K}_n[X]} \text{ le polynôme nul.}$$

En particulier :

- ◇ X désigne la fonction $x \in \mathbb{K} \mapsto x \in \mathbb{K}$,
- ◇ 1 la fonction $x \in \mathbb{K} \mapsto 1 \in \mathbb{K}$.
- Parfois le polynôme P est aussi noté $P(X)$, la notation $P(X)$ désigne donc encore une fonction.

Exemple 1

- L'expression $5X^3$ est un monôme désignant la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^3$.
- La fonction X^0 est la fonction constante égale à 1.

DEGRÉ. Moralement, le degré d'un polynôme est la puissance maximale qui apparaît dans l'écriture d'un polynôme.

Définition 2 | Degré/Coefficient dominant d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors :

- on appelle *degré de P* que l'on note $\deg P$, le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. On convient que : $\deg 0 = -\infty$.
- Le coefficient $a_{\deg P}$ est appelé *coefficient dominant de P*, on le note aussi $\text{dom}(P)$. On convient que : $\text{dom}(0) = 0$.
- Lorsque $P \neq 0$, le monôme $a_{\deg P} X^{\deg P}$ est appelé *monôme dominant*.

Définition 3 | Polynôme unitaire

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors si $\text{dom}(P) = 1$, on dit que P est *unitaire*.

Notation

On note :

- $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur \mathbb{K} ,
- $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes sur \mathbb{K} de degré inférieur à n ,
- $\mathbb{K}_{=n}[X]$ l'ensemble des polynômes sur \mathbb{K} de degré égal à n .

Attention Différence entre x et X

Ne pas confondre :

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \text{ pour un certain } x \in \mathbb{K}, \text{ et : } \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

qui dans le premier cas est un élément de \mathbb{K} (*i.e.* un réel ou un complexe), dans le second une **fonction**. En revanche, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \left(\sum_{k=0}^n a_k X^k \right) (x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Exemple 2

- Si $P = X^2 + 5X^3 + X^9$, on a $\deg(P) = 9$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
- Les polynômes constants ont un degré ≤ 0 (et pas forcément 0, car il ne faut pas oublier le cas du polynôme nul).
- Si $P = 3X^2 + 4X^7$, alors $4X^7$ est le monôme dominant de P et $4 = \text{dom}(P)$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, donner un exemple de polynôme :
 - ◊ Q de degré 2,



- ◊ de polynôme R de degré 5,



- ◊ de polynôme S de degré 0,



- ◊ de polynôme T dans $\mathbb{R}_{2025}[X]$.



- ◊ de polynôme U dans $\mathbb{C}_{2025}[X] \setminus \mathbb{R}_{2025}[X]$.



- Écrire explicitement les ensembles $\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.



Exemple 3 Déterminer le degré et le coefficient dominant de $P = (X + 1)^2 - (X - 1)^2$.



Note

Il faut faire attention ici car le polynôme n'est pas écrit sous forme développé

Remarque 1 (Degré et écriture du polynôme) Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$:

- on n'a pas nécessairement $\deg(P) = n$, ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$. La notation est trompeuse, mais en règle générale on se donnera toujours une telle somme avec $a_n \neq 0$ de sorte qu'alors $\text{dom} P = a_n$ et $\deg P = n$.
- En revanche, l'écriture implique : $\deg P \leq n$.

1.2. Opérations

Les polynômes étant définis ici comme un sous-ensemble de l'espace des fonctions de \mathbb{K} dans \mathbb{K} , on peut réaliser plusieurs opérations sur eux comme pour les fonctions habituelles.

Définition 4 | Opérations $+, \times, \circ, \cdot$

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On notera $P + Q$, PQ , $P \circ Q$ et λP les applications ci-dessous :

$$\begin{array}{l} \bullet P + Q \left| \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \\ x \longrightarrow P(x) + Q(x), \end{array} \right. \quad \bullet P \times Q \left| \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \\ x \longrightarrow P(x)Q(x), \end{array} \right. \\ \bullet P \circ Q \left| \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \\ x \longrightarrow (P \circ Q)(x), \end{array} \right. \quad \bullet \lambda P \left| \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \\ x \longrightarrow \lambda P(x). \end{array} \right. \end{array}$$

Remarque 2

- Toutes les propriétés sur les lois $+, \times$ etc. rencontrées dans le chapitre sur les fonctions et les applications (**Chapitres (ALG) 6** et (**AN) 1**, distributivité, associativité, élément neutre etc.) restent valables. Nous ne les réécrivons pas ici.
- On note parfois $P(Q)$ le polynôme $P \circ Q$, en remarquant que $P \circ X = P$, cela justifie *a posteriori* la notation $P(X)$ pour le polynôme P .
- Pour l'instant, nous n'employons pas le mot « polynôme », car nous ne savons pas encore que $P + Q, P \times Q, P \circ Q, \lambda P$ sont bien des polynômes.

Proposition 1 | Opérations $+, \times, \circ, \cdot$ à l'aide de coefficients

Soient $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, avec la convention de prolongement par zéro des deux suites :

- $a_k = 0$ si $k \notin [0, p]$,
- $b_k = 0$ si $k \notin [0, q]$.

Alors : $P + Q, P \times Q, P \circ Q, \lambda P$ sont des polynômes, et :

- $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$,
- $(PQ)(X) = \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n$,
- $(P \circ Q)(X) = \sum_{n=0}^p a_n \left(\sum_{k=0}^q b_k X^k \right)^n$,
- $\lambda P = \sum_{k=0}^p \lambda a_k X^k$.

Remarque 3

- Dans la pratique, ces formules servent uniquement lorsque les polynômes sont écrits de manière abstraite à l'aide d'une somme. Dans la plupart des cas, on effectue simplement ces opérations à l'aide des opérations classiques sur les fonctions.
- Si on souhaitait vraiment passer par la formule du produit, on écrirait par exemple pour calculer PQ avec $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^2$:

k	0	1	2	3	4
a_k	1	3	-1	0	0
b_k	0	1	1	0	0
c_k	0	1	4	2	-1

$$c_0 = a_0 b_0 = 0$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 4$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 2$$

$$c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = -1$$

Ce qui donne alors :

$$PQ = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + c_3 X^3 + c_4 X^4 = X + 4X^2 + 2X^3 - X^4.$$

Cette méthode est donc très fastidieuse! On écrira donc plutôt simplement :

$$PQ = (1 + 3X - X^2)(X + X^2) = X + X^2 + 3X^2 + 3X^3 - X^3 - X^4 = X + 4X^2 + 2X^3 - X^4.$$

Preuve

- Pour la somme, constatons simplement que d'après la convention sur les coefficients, on

$$a : P = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} a_k X^k, \quad Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} b_k X^k. \text{ Donc :}$$

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} a_k X^k + \sum_{k=0}^{\max(p,q)} b_k X^k = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k.$$

- Pour le produit, on doit également faire un calcul.

$$\begin{aligned}
 (PQ)(X) &= \left(\sum_{k=0}^p a_k X^k \right) \times \left(\sum_{\ell=0}^q b_\ell X^\ell \right) \\
 &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q a_k b_\ell X^{k+\ell} \\
 &= \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{(k,\ell)/k+\ell=n} a_k b_\ell \right) X^n \quad \left. \begin{array}{l} \text{réécriture : les monômes possibles sont } X^0, \dots, X^{p+q}, \text{ et} \\ X^n \text{ provient de } X^0 X^n, X^1 X^{n-1}, \dots, X^n X^0 \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n.
 \end{aligned}$$

Donc : $(PQ)(X) = \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) X^n.$

- Composition et multiplication par λ découlent directement de la définition.

On déduit directement des règles d'opération précédentes la proposition qui suit.

Proposition 2 | Stabilité de $\mathbb{K}[X]$

- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $P + Q$, PQ , $P \circ Q$ et λP sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$.
- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est donc stable par addition, produit, composition et multiplication par un scalaire.

Exemple 4 Dans chaque cas ci-dessous, calculer $P + Q$ et conjecturer une formule reliant le degré de $P + Q$ avec celui de P et Q .

- $P = X^4 - X^3 + X + 1$ et $Q = 2X^3 - 5X + 1.$



- $P = 2X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q = -2X^3 + X^2 - 1.$



- $P = -3X^4 + X^3 + 2$ et $Q = -3X^4 - X^3 + X^2 + 1.$



Exemple 5 On note $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^3$. Pour chacun des calculs ci-dessous, conjecturer une formule reliant le degré avec celui de P et Q .

- Calculer PQ .



- Calculer :

- ◇ $P \circ Q$



- ◇ $Q \circ P$



- ◇ Qu'en déduire?



Exemple 6 Si $P = X^2 - 2$ et $Q = \sqrt{2}$. Calculer $P \circ Q$. La formule conjecturée précédemment est-elle encore vraie?



Attention Piège de notation sur la composition

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $p \geq 0$, attention à la différence entre :

- le polynôme $X^p P : x \in \mathbb{K} \rightarrow x^p P(x)$ — un produit,
- et le polynôme $P(X^p) : x \in \mathbb{K} \rightarrow P(x^p)$ — une composée. Ce n'est pas du tout la même chose.

Afin de faire la distinction entre les deux, il faut bien faire attention à l'emplacement des parenthèses. Ainsi, PX^p est une notation bien maladroite, mais désigne toujours $X^p P$.



Exemple 7 On note $P = 1 + 3X - X^2$. Préciser les polynômes $P(X^2)$, $X^2 P$ et PX^2 .



Des conjectures sur les propriétés du degré ayant été faites, passons à présent aux propriétés générales.

Proposition 3 | Combinaison linéaire et degré

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

1. Si $\deg Q < \deg P$, alors :

$$\deg(P + Q) = \deg P, \quad \text{dom}(P + Q) = \text{dom}(P).$$

Note

Ainsi, si les degrés sont différents une somme est de degré le plus grand. Si les degrés sont égaux, on voit au cas par cas.

$$2. \deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \neq 0, \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0, \end{cases} \quad \text{dom}(\lambda P) = \lambda \text{ dom } P.$$

Attention aux sommes

Puisque $(X^2 + X + 1) + (-X^2 + X + 1) = X + 1$, la somme de deux polynômes de degré deux n'est pas forcément un polynôme de degré deux. On observe ici une chute de degré.

Remarque 4

- L'utilisation conjointe des deux premiers résultats permet de calculer le degré de $\lambda P + \mu Q$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]$.
- **[Retour sur la convention de degré]** On a :

$$\deg : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \\ P & \rightarrow \deg P. \end{cases}$$

La convention $\deg 0 = -\infty$ est purement technique. Elle trouve son intérêt dans la formule de degré d'un produit que nous venons de voir : si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\deg(0.P) = \deg(0) + \deg P$ d'une part, et d'autre part comme $0.P = 0$ on devrait avoir $\deg 0 = \deg 0 + \deg P$. Cette formule n'est jamais vérifiée sauf si P est constant, d'où la convention précédente de sorte que :

$$\ll -\infty = -\infty + \deg P \gg.$$

La formule $\deg 0 = \deg 0 + \deg P$ est alors vraie quelque soit le degré de P .

Preuve On note à nouveau $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Commençons par la somme.

- Si $P = 0$ ou $Q = 0$, le résultat est évident.
- Supposons que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. D'après l'expression du polynôme somme, on a : $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$ puisque $\deg P > \deg Q$. Or $a_p \neq 0$, $b_p = 0$ donc $a_p + b_p \neq 0$, ce qui prouve que $\deg(P + Q) = \deg(P)$.

2. Le résultat est évident si $\lambda = 0$, on suppose donc $\lambda \neq 0$.

- Si $P = 0$, alors $\lambda P = 0$ donc la formule est vérifiée.
- Si $P \neq 0$, alors $\lambda P = \sum_{k=0}^p (\lambda a_k) X^k$. Comme $a_n \neq 0$, $\lambda a_n \neq 0$ donc $\deg(\lambda P) = p = \deg(P)$.

Les propriétés sur le degré permettent d'énoncé un résultat de stabilité pour les polynômes de degré $\leq n$.

Corollaire 1 | Stabilité de $\mathbb{K}_n[X]$

- Soient $n \geq 1$, $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $P+Q$, et λP sont des éléments de $\mathbb{K}_n[X]$.
- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est donc stable par addition et multiplication par un scalaire.

Attention

La proposition précédente est fautive pour $\mathbb{K}_{=n}[X]$. Par exemple, puisque $X^2 + (-X^2) = 0$, la somme de deux polynômes de degré deux n'est pas forcément un polynôme de degré deux.

Preuve Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X], \lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que :
 $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}[X]$, et $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq n$.

- On a déjà vu que $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}[X]$.
- Reste à prouver que $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq n$. Puisque P, Q sont de degré inférieur ou égal à n , les polynômes P, Q peuvent s'écrire sous la forme : $\sum_{k=0}^n a_k X^k$, et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$. Donc :
 $(\lambda P + \mu Q) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$, ceci prouve que $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq n$.

Proposition 4 | Produit, composition et degré

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$, $\text{dom}(P \times Q) = \text{dom}(P) \times \text{dom}(Q)$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$ si Q n'est pas constant ou constant mais non racine de P .

Note : La condition Q non constant est importante. Par exemple, nous avons déjà constaté un contre-exemple avec $P = X^2 - 2$ et $Q = \sqrt{2}$: $P \circ Q = 0$, de degré $-\infty \neq 2 \times 0$.

Remarque 5 Par récurrence immédiate, on déduit de la première propriété que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\deg(P^n) = n \deg P$, $\text{dom}(P^n) = (\text{dom } P)^n$.

Preuve On note à nouveau $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$.

- Passons au produit.
 - Si $P = 0$ ou $Q = 0$, on a $PQ = 0$ donc $\deg(PQ) = -\infty$. Par ailleurs, $\deg(P) + \deg(Q) = -\infty$ donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. La formule est démontrée dans ce cas.
 - D'après l'expression du polynôme produit, on a : $PQ = \sum_{n=0}^{p+q} c_n X^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \in \mathbb{K}$ pour tout $n \in \llbracket 0, p+q \rrbracket$. Cette écriture prouve déjà que $\deg(PQ) \leq p+q$, mais on veut une égalité. On regarde donc si $c_{p+q} \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 c_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k \underbrace{b_{p+q-k}}_{=0 \text{ car } p+q-k > q} + a_p b_q + \sum_{k=p+1}^{p+q} \underbrace{a_k}_{=0 \text{ car } k > p} b_{p+q-k} \\
 &= a_p b_q \neq 0.
 \end{aligned}$$

On a donc montré que $\deg(PQ) = p+q = \deg P + \deg Q$, et au passage que $\text{dom}(PQ) = a_p b_q = \text{dom}(P) \times \text{dom}(Q)$.

- Passons à la composée.
 - Si $P = 0$ et Q non constant alors $P \circ Q = 0$ donc $\deg(P \circ Q) = -\infty$. Par ailleurs, $\deg(P) \times$

$\deg(Q) = -\infty$ car $\deg Q \neq 0$ (Q n'est pas constant) donc $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$, la formule est démontrée dans ce cas.

- Supposons que $P \neq 0$ et Q non constant donc aussi non nul, on peut donc utiliser l'expression en somme pour les deux polynômes. D'après l'expression du polynôme composé, on a : $(P \circ Q)(X) = \sum_{n=0}^p a_n \left(\sum_{k=0}^q b_k X^k \right)^n$, c'est-à-dire :

$$(P \circ Q)(X) = \sum_{n=0}^p a_n (b_0 + b_1 X + \dots + b_q X^q)^n.$$

Parmi tous les polynômes de la somme, celui de plus haut degré est celui obtenu pour $n = p$. Donc :

$$\begin{aligned}
 \deg(P \circ Q) &= \deg(a_p (b_0 + b_1 X + \dots + b_q X^q)^p) \quad \downarrow a_p \neq 0 \\
 &= (b_0 + b_1 X + \dots + b_q X^q)^p \\
 &= p \times \deg(b_0 + b_1 X + \dots + b_q X^q) \quad \downarrow b_q \neq 0 \\
 &= p \times q = \deg P \times \deg Q.
 \end{aligned}$$

Exemple 8 Déterminer le degré et le coefficient dominant de P . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $P = (1 + X + X^2)^n - (X - 1)^n$.



- $P = (1 + X + X^2)^n \times (X - 1)^n$.



Dans une somme/différence, lorsque les polynômes ont même degré et que les formules précédentes ne s'appliquent pas, on revient à la définition du degré : le but est alors d'écrire les polynômes sous forme de somme.

Exemple 9

- Déterminer degré et coefficient dominant du polynôme $P = (X-2)^n - (X+5)^n$ pour $n = 2$.



- Généraliser à $P = (X-2)^n - (X+5)^n$.



Exemple 10 (Suite de polynômes (1)) On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n$.

1. Calculer P_2, P_3, P_4 .



2. Conjecturer les valeurs du degré et du coefficient dominant de P_n , puis le montrer par récurrence.



L'utilisation du degré permet de rendre de précieux services ; voir par exemple la proposition qui suit dont la démonstration sans passage au degré prendrait beaucoup plus de temps.

Proposition 5 | Équation-produit

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors : $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff (P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{K}[X]})$.

Preuve

Évident.



Supposons que $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors en prenant le degré nous avons : $\deg P + \deg Q = -\infty$, donc nécessairement un des deux degrés vaut $-\infty$ i.e. $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ — encore une bonne illustration de l'intérêt de la convention « $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$ ».

Note

On a l'impression de n'avoir rien fait dans cette preuve : en fait le travail principal réside dans la propriété de degré d'un produit établie plus haut.

**Attention**

Ce résultat est faux pour deux fonctions quelconques non polynomiales. Par exemple, pour f la fonction valant 1 sur \mathbb{R}^+ , 0 sur \mathbb{R}^{-*} , g la fonction valant 0 sur \mathbb{R}^+ , 1 sur \mathbb{R}^{-*} . On a bien $fg = 0$ et pourtant aucune des deux fonctions n'est identiquement nulle.

Méthode (ALG) 11.1 (Résoudre une équation polynomiale) Pour trouver tous les polynômes vérifiant une certaine condition, on :

- commence par passer au degré afin de trouver des conditions sur celui-ci.
- Dans un second temps, on essaie de trouver une condition sur les coefficients de P en injectant l'expression « $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ » dans le problème pour le n trouvé à la première étape.

Exemple 11 (Équation polynomiale) Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation polynomiale $P \times P = P$.

**1.3. >_ Informatique**

Comment coder un polynôme en Python? Puisqu'il est entièrement déterminé par la donnée de ses coefficients, il suffit par exemple de les ranger par ordre croissant de degré et considérer en convention que le polynôme nul correspond à la liste vide. Par exemple, le polynôme $P = X^2 + 2$ peut être codé par la liste $P = [2, 0, 1]$. On peut en déduire alors facilement une fonction qui calcule le degré ou encore qui évalue le polynôme en un x .

■ Codage informatique d'un polynôme, degré, évaluation

```
Inf = float('inf') # correspond à l'infini des maths
```

```
def degre(P):
    """
    retourne le degré de P
    """
    if len(P) == 0:
        return -Inf
    else:
        return len(P) - 1
```

```
def evalu(P, x):
    S = 0
    for i in range(len(P)):
        S += P[i]*x**i
    return S
```

Par exemple si $P = 1 + 2X + 3X^2$, alors :

```
>>> P = [1, 2, 3]
>>> degre(P)
2
>>> evalu(P, 1)
6
>>> evalu(P, 0) # coefficient constant
1
```


Les polynômes ont été définis dans ce chapitre comme des fonctions d'un type particulier, donc ils héritent en particulier de la notion de dérivation des fonctions connue depuis longtemps si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En revanche, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, comme nous ne savons pas dériver les fonctions de la variable complexe, la définition *infra* sera finalement plus générale.

2.1. Généralités

Définition 5 | Dérivation

Soit $P = \sum_{\ell=0}^n a_{\ell} X^{\ell} \in \mathbb{K}[X]$, avec $n \geq 1$.

- On appelle *polynôme dérivé de P* le polynôme : $P' = \sum_{\ell=1}^n \underbrace{\ell a_{\ell} X^{\ell-1}}_{\text{dérivée de } a_{\ell} X^{\ell}}$.

Note | La dérivée d'un polynôme est simplement la somme des dérivées de chaque monôme

- On appelle *polynôme dérivé seconde de P* le polynôme :

$$P'' = \sum_{\ell=2}^n \ell(\ell-1) a_{\ell} X^{\ell-2}.$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On appelle *polynôme dérivé k fois de P* le polynôme :

$$P^{(k)} = \sum_{\ell=k}^n \ell(\ell-1) \dots (\ell-k+1) a_{\ell} X^{\ell-k}.$$

Note | Il n'est pas utile de distinguer le cas $k \leq n$ de $k > n$. En effet, si $k > n$, on a $P^{(k)} = 0$ par convention sur les sommes, ce qui est attendu.

Remarque 6 On prendra garde d'éviter l'expression $P' = \sum_{k=0}^n k a_k X^{k-1}$ même si le terme d'ordre $k=0$ est nul. En effet, nous n'avons pas donné un sens à $0 \times \frac{1}{X}$, ce n'est pas un élément de $\mathbb{K}[X]$. (mais de $\mathbb{K}(X)$, l'ensemble des fractions rationnelles)

Exemple 12 $(1 + 3X - X^2)' = 3 - 2X$ et $(C)' = 0$ pour toute constante $C \in \mathbb{K}$. Justifions proprement la formule concernant C' .

Proposition 6 | Dérivations et opérations

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $(\lambda P)' = \lambda P'$,
- $(P + Q)' = P' + Q'$,
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$,
- $(P \circ Q)' = P' \circ Q \times Q'$.

Preuve Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: comme pour nous les polynômes sont des fonctions, les formules ci-dessus découlent donc des formules déjà connues pour les fonctions réelles de la variable réelle. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il faut les vérifier à l'aide des expressions avec coefficients, nous l'admettons.

Exemple 13 Soient $Q = \sum_{k=0}^5 X^k$ et $R = \sum_{k=0}^3 kX^k$. Donner le degré et le coefficient dominant de $P = RQ - Q'(X^2)$.



Exemple 14 (Suite de polynômes (2)) On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $P_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_{n+1} = X^2 P'_n + X^{n-1}$.

- Calculer P_2, P_3 .



- Conjecturer les valeurs du degré et du coefficient dominant de P_n , puis le

montrer par récurrence.



2.2. Dérivation et degré

On déduit directement de la définition, la propriété de degré d'une dérivée.

Proposition 7 | Degré d'un polynôme dérivé

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\deg(P^{(k)}) = \begin{cases} \deg P - k & \text{si } k \leq \deg P, \\ -\infty & \text{si } k > \deg P. \end{cases}$$

- Par conséquent, si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P \leq n \iff P^{(n+1)} = 0 \quad (\iff P \in \mathbb{K}_n[X]).$

Preuve

- Immédiat par définition du polynôme dérivé.
- \implies Si $\deg P \leq n$, alors $\deg(P^{(n+1)}) = -\infty$ d'après la première partie de la définition.
- \impliedby On suppose que $P^{(n+1)} = 0$.

Supposons par l'absurde que $n+1 \leq \deg P$, alors $\deg(P^{(n+1)}) = -\infty = \deg P - (n+1)$, donc $\deg P = -\infty$ — contradiction (car $n+1 \leq \deg P$). Donc forcément $n+1 > \deg P$ c'est-à-dire $\deg P \leq n$ puisque $\deg P$ est un entier.

Exemple 15 Calculer les dérivées successives de $P = X^4 - 3X^3 + iX^2 - 1$, en commençant par analyser lesquelles sont nulles.



Exemple 16 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré et coefficient dominant de $Q = 2X^{n+1}P' - P(X^2)$.



Exemple 17 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 4$. Déterminer le degré et coefficient dominant de $Q = 4XP - X^2P'$.



Proposition 8 | Dérivées de $(X - a)^n$

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Alors :

$$[(X - a)^n]^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} (X - a)^{n-k} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Preuve Le polynôme $(X - a)^n$ est de degré n donc si $k > n$, alors $[(X - a)^n]^{(k)} = 0$. Supposons que $k \leq n$, alors :

$$[(X - a)^n]^{(k)} = n[(X - a)^{n-1}]^{(k-1)} = n(n-1)[(X - a)^{n-2}]^{(k-2)},$$

puis de manière générale on obtient :

$$[(X - a)^n]^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)(X - a)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} (X - a)^{n-k}.$$

Montrons proprement ce résultat par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.



Exemple 18 Calculer les polynômes ci-après, $n \in \mathbb{N}$.

1. $(X^2)'$,



2. $(X^2)^{(2)}$,



3. $(X^2)^{(3)}$,



4. $(X^n)^{(0)}$,



5. $(X^n)'$,



6. $(X^n)^{(2)}$,



7. $(X^n)^{(3)}$,



8. $(X^n)^{(n)}$,



9. $(X^n)^{(n+1)}$.



2.3. Unicité des coefficients

Posons-nous à présent la question suivante : existe-il plusieurs familles de coefficients possibles $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ telles que

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad ?$$

La réponse est non, un polynôme est entièrement déterminé par la suite de ses coefficients (réels ou complexes).

Proposition 9 | Un polynôme est déterminé par ses coefficients

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

1. Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, nous avons : $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

2. Par conséquent :

• $P = 0 \iff a_0 = \dots = a_n = 0$.

- la suite de coefficients a_0, \dots, a_n est unique.
- Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont même degré et mêmes coefficients.

Preuve

1. Exprimons déjà les coefficients de P en fonction des dérivées successives. En effet, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$P^{(k)}(X) = \left(\sum_{\ell=0}^n a_\ell X^\ell \right)^{(k)} = \sum_{\ell=k}^n a_\ell \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)X^{\ell-k}.$$

Nous obtenons :

$$P^{(k)}(0) = \sum_{\ell=k}^n a_\ell \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1) \times \underbrace{0^{\ell-k}}_{=0 \text{ si } \ell > k} = a_k \times k! + 0.$$

Les coefficients sont donc donnés par la formule suivante $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

2. • \Leftarrow Évident.

\Rightarrow Supposons que $P = 0$, alors pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{0}{k!} = 0 = a_k$.
L'équivalence est donc démontrée.

- Supposons qu'il existe par ailleurs $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que : $P = \sum_{k=0}^n b_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

Alors : $0 = \sum_{k=0}^n 0 \cdot X^k = \sum_{k=0}^n (b_k - a_k) X^k$, donc d'après ce qui précède $0 = b_k - a_k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. C'est terminé.

- Notons de plus $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on suppose par exemple que $q \geq n$ sans perte de généralité. Alors :

$$\begin{aligned} P = Q &\iff \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n b_k X^k + \sum_{k=n+1}^q b_k X^k \\ &\iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k, \quad \forall k \in \llbracket n+1, q \rrbracket, b_k = 0 \\ &\iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k, \quad \text{et} \quad \deg Q = n = \deg P. \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{unicité des} \\ \text{coefficients} \end{array} \right\}$

Exemple 19

- $1 + X + X^2 \neq X + X^2$: ils ont même degré, mais 1 coefficient est différent,
- $1 + X + X^2 = \cos(0) + X + X^2$: ils ont même degré et mêmes coefficients.

3. RACINES

On se préoccupe à présent des points d'annulation d'un polynôme.

1. Premier point : on voit très clairement quel est leur nombre pour des petits degrés ; une fonction affine (un polynôme de degré un) s'annule en un point, un

trinôme s'annule toujours au plus deux fois dans \mathbb{C} . En fait, tout polynôme de degré n s'annulera au plus n fois. Des propriétés sur le nombre de racines semblent donc exister.

2. Second point : lorsque λ annule un polynôme, alors ledit polynôme sera de la forme $(X - \lambda)Q$ où $Q \in \mathbb{K}[X]$. Cette « factorisation » est uniquement vraie pour les polynômes — pas question d'écrire cela pour d'autres types de fonctions ! (un contre-exemple sera donné plus bas)

Commençons par une notation que l'on utilisera dans toute la section.

Définition 6 | Relation de divisibilité

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors on dit que P *divise* Q s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $PR = Q$. On notera $P \mid Q$.

Exemple 20

- $X - 1 \mid X^2 - 1$ car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.
- Tous les polynômes divisent 0.
- $\forall P \in \mathbb{K}[X], 0 \mid P \iff P = 0$.



Exemple 21 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X^2 \mid (X + 1)^n - nX - 1$.



3.1. Généralités

Définition 7 | Racine

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *racine* de P si :

$$P(\lambda) = 0.$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: on parle de *racine réelle* si on a de plus $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 22

- 1 est une racine de $X^2 - 1$, i est une racine de $X^2 + 1$,
- 0 (polynôme nul) a une infinité de racines, 5 (polynôme constant égal à 5) n'a pas de racine.
- $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de $X^2 + X + 1$:



Proposition 10 | Degré impair et existence d'une racine réelle

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré impair. Alors P possède une racine réelle.

Attention

Cette propriété est très classique : il faut bien en connaître la démonstration. Il n'y a en revanche pas nécessairement unicité.

Preuve (Point clef — *théorème des valeurs intermédiaires*)

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto P(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + \dots + a_0,$$

avec $a_0, \dots, a_{2p+1} \in \mathbb{K}$ les coefficients de P , et supposons par exemple que $a_{2p+1} > 0$ — sinon on applique le même raisonnement à $-P$. Alors :

- P est une fonction continue, et
- En mettant le terme de plus haut degré en facteur : $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_{2p+1}x^{2p+1}) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_{2p+1}x^{2p+1}) = -\infty$ puisque $a_{2p+1} > 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$. Autrement dit, P possède une racine réelle.

3.2. Racines & Factorisation

Passons maintenant à la propriété de factorisation constatée plus haut sur des exemples.

Proposition 11 | Caractérisation par factorisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \text{ est racine de } P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad (X - \lambda) \times Q = P \quad \left(\iff X - \lambda \mid P \right).$$

Note | Le polynôme Q est alors de degré $\deg Q = \deg P - 1$.

Preuve

\Leftarrow Immédiat, évaluer l'identité en λ .

\Rightarrow Soit λ une racine de P et notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $P(X) = P(X) - 0 = P(X) - P(\lambda)$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
 P(X) &= P(X) - P(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k (X^k - \lambda^k) \\
 &= \sum_{k=0}^n (X - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i-1} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^n} \right\} \text{téléscopage } (\star) \\
 &= (X - \lambda) \underbrace{\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i-1}}_{:=Q} = (X - \lambda)Q.
 \end{aligned}$$

Justifions la formule (\star) , c'est-à-dire montrons que : $(X - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i-1} = X^k - \lambda^k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En effet, on a en développant le facteur :

$$\begin{aligned}
 (X - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} X^{i+1} \lambda^{k-i-1} - \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i} \\
 &= \sum_{j=1}^k X^j \lambda^{k-j} - \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i} \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^k} \right\} \text{changement d'indice } j = i + 1 \text{ dans la première somme} \\
 &= \sum_{i=1}^k X^i \lambda^{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i} \quad \left. \vphantom{\sum_{i=1}^k} \right\} \text{renommage} \\
 &= X^k - \lambda^k. \quad \left. \vphantom{\sum_{i=1}^k} \right\} \text{téléscopage}
 \end{aligned}$$

Exemple 23

 Notons $P = X^3 - 2X + 1$.

1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X - 1)Q = P$.



2. Trouver un tel polynôme Q par le calcul.



Corollaire 2 | Caractérisation par factorisations

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors :

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont racines distinctes de P

$$\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad \left[\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \right] \times Q = P \quad \left(\iff \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \mid P \right).$$

Preuve Par récurrence sur n , le nombre de racines.

Initialisation. Si $n = 1$, c'est le théorème précédent.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie pour n racines ($n \geq 1$). Soit maintenant P admettant $n + 1$ racines notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$. En utilisant une propriété précédente, on peut écrire $P = (X - \lambda_{n+1})Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. En évaluant en λ_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on déduit :

$$P(\lambda_i) = 0 = (\lambda_i - \lambda_{n+1})Q(\lambda_i),$$

or $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ car les racines sont supposées distinctes, donc : $Q(\lambda_i) = 0$. Par hypothèse

de récurrence, on peut alors écrire $Q = \left(\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \right) R$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$, et donc :

$$P = (X - \lambda_{n+1})Q = (X - \lambda_{n+1}) \times \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \times R = \prod_{i=1}^{n+1} (X - \lambda_i) \times R.$$

La propriété est donc héréditaire, on déduit donc le résultat par principe de récurrence.

Ce corollaire nous permettra d'établir bientôt un résultat crucial : tout polynôme possède au plus n racines distinctes.

Exemple 24 Notons $P = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X + 1)(X - j)Q = P$.



2. Trouver un tel polynôme Q par le calcul.

**3.3. Multiplicité**

Dans la **Proposition 11**, rien ne nous dit que λ n'est pas encore racine de Q , c'est-à-dire Q n'est pas encore lui-même de la forme $(X - \lambda)\tilde{Q}$ avec $\tilde{Q} \in \mathbb{K}[X]$, auquel cas on aurait $P = (X - \lambda)^2\tilde{Q}$. Pour quantifier la puissance maximale apparaissant dans l'exposant de $X - \lambda$, on introduit la notion de *multiplicité*.

Définition/Proposition 1 | Multiplicité

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *racine d'ordre k* (ou de *multiplicité k*) de P si l'une des propositions ci-dessous est vérifiée :

$$(X - \lambda)^k \mid P \quad \text{et} \quad (X - \lambda)^{k+1} \nmid P,$$

$$\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad (X - \lambda)^k Q = P \quad \text{et} \quad Q(\lambda) \neq 0.$$

Autrement dit, l'ordre d'une racine est la plus grande puissance k telle que P soit factorisable par $(X - \lambda)^k$ dans $\mathbb{K}[X]$.

- Si la multiplicité de λ est 1, 2, 3, on parle de racine *simple*, *double*, *triple*.
- On dit qu'une racine est *multiple* si elle est de multiplicité au moins 2.

Remarque 7 (La multiplicité existe toujours)

- Comme λ est une racine de P , $E = \{n \in \mathbb{N} \mid (X - \lambda)^n \mid P\}$ est non vide, puisque $1 \in E$. D'autre part, E est majoré par le degré de P . Donc cet ensemble $E \subset \mathbb{N}$ admet bien un plus grand élément qui est notre multiplicité.
- Pourquoi supposer P non nul? Étant donné que $(X - \lambda)^k$ divise P pour tout

k , toutes les racines de 0 seraient de multiplicité « infinie ». Plus précisément, l'ensemble E précédent ne serait alors pas majoré.

- On convient que si l'ordre est 0, λ n'est pas une racine de P .

Preuve Montrons l'équivalence des deux propositions.

\Leftarrow Supposons que : $\exists Q \in \mathbb{K}[X], (X - \lambda)^k Q = P$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. Alors $(X - \lambda)^k \mid P$.
 Supposons par l'absurde que $(X - \lambda)^{k+1} \mid P$, alors il existe $\tilde{Q} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X - \lambda)^{k+1} \tilde{Q} = P$.
 Alors :

$$(X - \lambda)^k ((X - \lambda)\tilde{Q}) = P = (X - \lambda)^k Q \implies [(X - \lambda)^k]((X - \lambda)\tilde{Q} - Q) = 0.$$

C'est une équation-produit dans $\mathbb{K}[X]$, donc $(X - \lambda)^k = 0$ ou $(X - \lambda)\tilde{Q} - Q = 0$. Or, $X - \lambda \neq 0$, donc : $(X - \lambda)\tilde{Q} = Q$ et $Q(\lambda) = 0$ — contradiction.

\Rightarrow Notons $Q \in \mathbb{K}[X], (X - \lambda)^k Q = P$, montrons que $Q(\lambda) \neq 0$. Si par l'absurde on avait $Q(\lambda) = 0$, alors il existerait $\tilde{Q} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = (X - \lambda)\tilde{Q}$, donc $(X - \lambda)^k Q = (X - \lambda)^{k+1} \tilde{Q} = P$ — contradiction.

$$\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \left[\prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i} \right] \times Q = P \quad \left(\iff \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \mid P \right).$$

Ce corollaire est le parfait analogue pour les racines multiples de la version « racines » simples déjà vue (**Corollaire 2**).

Preuve Par récurrence sur r , le nombre de racines.

Initialisation. Si $r = 1$, c'est la proposition précédente.

Hérédité. Supposons que la propriété soit vraie pour r racines ($r \geq 1$). Soit P admettant $r + 1$ racines $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ de multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_r, m_{r+1}$.

- En utilisant une propriété précédente, on peut écrire $P = (X - \lambda_{r+1})^{m_{r+1}} Q_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_1(\lambda_{r+1}) \neq 0$.
- Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence à Q_1 , il s'agit à présent de montrer que : $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont racines de multiplicités m_1, \dots, m_r .

Soit donc $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et notons μ_i la multiplicité (éventuellement nulle) de λ_i en tant que racine de Q_1 , c'est-à-dire $Q_1 = (X - \lambda_i)^{\mu_i} Q_2$ avec $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_2(\lambda_i) \neq 0$. Alors :

$$P = (X - \lambda_{r+1})^{m_{r+1}} Q_1 = (X - \lambda_{r+1})^{m_{r+1}} (X - \lambda_i)^{\mu_i} Q_2 = (X - \lambda_i)^{\mu_i} \underbrace{[(X - \lambda_{r+1})^{m_{r+1}} Q_2]}_{:= Q_3}.$$

Alors $Q_3(\lambda_i) \neq 0$ puisque les racines sont distinctes et $Q_2(\lambda_i) \neq 0$ par hypothèse, donc μ_i est finalement la multiplicité de λ_i en tant que racine **de P** donc $\mu_i = m_i$, on a bien montré que λ_i est racine de Q_1 de multiplicité m_i , pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Par hypothèse de récurrence appliquée à Q_1 , on peut alors écrire $Q_1 = \left(\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \right) \times R$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$, et donc :

$$P = (X - \lambda_{r+1})^{m_{r+1}} Q_1 = (X - \lambda_{r+1})^{m_{r+1}} \times \left(\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \right) \times R = \left(\prod_{i=1}^{r+1} (X - \lambda_i)^{m_i} \right) \times R.$$

La propriété est donc héréditaire, on déduit donc le résultat par principe de récurrence.

Nous allons constater que, quand un polynôme est factorisé, on peut lire directement les racines ainsi que leur multiplicité.

Proposition 12 | Lire les multiplicités sur une forme factorisée

Soient $P \in \mathbb{K}[X], P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ tel que : $P(X) = \alpha \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\alpha = \text{dom}(P) \in \mathbb{K}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (avec $r \in \mathbb{N}^*$) supposés deux à deux distincts, $m_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Alors :

- les racines de P sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, et :
- pour tout $\llbracket 1, r \rrbracket$, λ_i est de multiplicité m_i .

Preuve En résolvant $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, il est évident que les racines sont bien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, montrons que λ_i est de multiplicité m_i .



Définition/Proposition 2 | Multiplicité « au moins k »

Soient $P \in \mathbb{K}[X], P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une racine de *multiplicité au moins k* de P si elle est de multiplicité $\ell \geq k$, i.e. si l'une des propositions ci-dessous est vérifiée :

$$(X - \lambda)^k \mid P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], (X - \lambda)^k Q = P.$$

Exemple 25

- Si $P = X^2(X - 1)$: alors 2 est racine de multiplicité 2, car $X^2 \mid P$ et $Q = X - 1$ vérifie $Q(0) \neq 0$.
- Déterminer les racines de $P = (X - 1)^4(X + 1)^2(X^2 + 1) \in \mathbb{R}[X]$ et leur multiplicité.



Corollaire 3 | Caractérisation par factorisations et racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X], P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_i \text{ est racine de multiplicité } m_i \text{ de } P$$



Exemple 26 On retrouve alors le résultat de l'exemple précédent.

- Pour $P = X^2(X - 1)$, alors 0 est racine double, 1 est racine simple.
- Pour $P = (X - 1)^4(X + 1)^2(X^2 + 1) = (X - 1)^4(X + 1)^2(X - i)(X + i) \in \mathbb{R}[X]$, alors 1 est racine de multiplicité 4, -1 de multiplicité 2, i de multiplicité 1 et $-i$ de multiplicité 1.

Exemple 27 Analyser les racines de $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, et leur multiplicité.



LIEN AVEC LE POLYNÔME DÉRIVÉ. Si l'on considère $P = X^2$, on voit que 0 est une racine de multiplicité 2. Alors :

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad \text{alors que} \quad P''(0) = 2 \neq 0.$$

Ce fait s'étend à n'importe quel polynôme et caractérise même les racines multiples.

Proposition 13 | Caractérisation des racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :

$$\lambda \text{ est une racine multiple de } P \iff P(\lambda) = P'(\lambda) = 0.$$

Preuve



Exemple 28

- Si $P = X^7 - 3X^5 + 2X^4 - X^3$, alors 0 est une racine multiple de P .

◇ [Méthode 1 : la plus rapide]



◇ [Méthode 2]



Note

La méthode 1 ne peut pas toujours être employée; mettre une puissance de X en facteur est facile, mais une puissance de $X - \lambda$ l'est moins. Le critère avec la dérivé est alors utile, voir l'exemple suivant.

- Si $P = X^3 - 3X - 2$, alors 1 est une racine multiple.



- Si $P \in \mathbb{C}[X]$, alors 1 est racine multiple de $Q = (X - 1)(P - P(1))$.



Exemple 29 Retrouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, X^2 \mid (X + 1)^n - nX - 1$. (Cela avait déjà été établi en utilisant la formule du binôme)



Remarque 8 (Caractérisation à l'aide du polynôme dérivé [H.P]) Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a l'équivalence suivante :

- λ est une racine de multiplicité **au moins** $k \in \mathbb{N}$ de P
 $\iff \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, P^{(i)}(\lambda) = 0$.
- λ est une racine de multiplicité $k \in \mathbb{N}$ de P
 $\iff \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, P^{(i)}(\lambda) = 0$ **et** $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

Ce résultat n'est en revanche plus au programme.

3.4. Comptage de racines

On termine à présent le chapitre par probablement l'argument qui revient le plus souvent dans les exercices : le comptage des racines et la comparaison au degré.

Théorème 1 | Comptage de racines



Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si P est non nul, alors P possède au plus $\deg P$ racines comptées avec multiplicité.
- En contraposant : si P possède plus de racines comptées avec multiplicité que son degré, alors il est nul.

Remarque 9

- « Compter avec multiplicité » signifie par exemple que si 0 est racine double, on le comptera deux fois dans le listing des racines. Exemple : le polynôme $X^4(X - 1)^2$ possède 6 racines comptées avec multiplicité (cardinal de l'ensemble $\{0, 0, 0, 0, 1, 1\}$).
- On peut utiliser le théorème précédent pour prouver simplement qu'une fonction donnée n'est pas polynomiale, par exemple la fonction \cos n'est pas polynomiale : en effet, si elle l'était elle serait nulle car elle s'annule une infinité de fois, ce qui n'est pas le cas. L'argument reste bien sûr valable pour \sin , \tan etc..

Preuve Montrons le premier point, le second s'en déduit comme indiqué par contraposée. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines de P , $r \geq 1$, et m_1, \dots, m_r les multiplicités associées. Alors d'après le **Corollaire 3**, comme P est non nul, on déduit :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \times Q = P.$$

En passant au degré, on obtient : $\sum_{i=1}^r m_i + \deg Q = \deg P$. Or $\deg Q \neq -\infty$ puisque $Q \neq 0$ comme $P \neq 0$. Donc $\deg Q = \deg P - \sum_{i=1}^r m_i \geq 0$, d'où l'on tire : $\deg P \geq \sum_{i=1}^r m_i$. Le résultat est alors prouvé car le nombre de racines comptées avec multiplicité est exactement $\sum_{i=1}^r m_i$.


On peut donc retenir ce résultat de la manière suivante :

Si P possède strictement plus de racines que son degré, alors c'est le polynôme nul.

Exemple 30 Soient a, b, c trois réels distincts. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = P(b) = P(c) = 0$. Que dire de P ?



On peut aussi remplacer 0 par n'importe quelle constante.

 **Exemple 31** Soit $n \geq 0$ un entier, $C \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(k) = C. \quad \text{Montrer que : } P = C.$$



Exemple 32 Soient a, b, c trois réels distincts. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que : $P(a) = Q(a)$, $P(b) = Q(b)$ et $P(c) = Q(c)$.
Montrer que : $P = Q$.



Note

La méthode utilisée dans cet exemple est à retenir : pour montrer que deux polynômes P et Q sont égaux, on peut montrer que le polynôme $P - Q$ est le polynôme nul en montrant que $P - Q$ a plus de racines que son degré.

Le **Théorème 1** mène également au constat suivant :

Si P possède une infinité de racines, alors c'est le polynôme nul.

Exemple 33 La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos(x)$ est-elle polynomiale?



Exemple 34 Que dire d'un polynôme P vérifiant $P(e^x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?



Exemple 35 Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. A-t-on $P = Q$ dans les cas suivants?

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = Q(x)$? *Le polynôme $P - Q$ possède alors tous les réels comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Donc $P - Q = 0$ et $P = Q$. Le polynôme $P - Q$ possède alors tous les réels comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Donc $P - Q = 0$ et $P = Q$.*
- $\forall x \in]a, b[, \quad a < b, \quad P(x) = Q(x)$? *La différence $b - a$ est-elle importante? Le polynôme $P - Q$ possède alors tous éléments de $]a, b[$ comme racines, donc*

en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Donc $P - Q = 0$ et $P = Q$. La différence $b - a$ (i.e. la longueur de l'intervalle) n'est pas importante étant donné que $]a, b[$ est toujours un ensemble infini. Le polynôme $P - Q$ possède alors tous éléments de $]a, b[$ comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Donc $P - Q = 0$ et $P = Q$. La différence $b - a$ (i.e. la longueur de l'intervalle) n'est pas importante étant donné que $]a, b[$ est toujours un ensemble infini.

Résumons les précédentes méthodes.

Méthode (ALG) 11.2 (Montrer qu'un polynôme est nul) Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

1. montrer que tous ses coefficients sont nuls,
2. montrer qu'il admet plus de racines que son degré (en particulier s'il en admet une infinité).

Le plus souvent, on utilise 2 pour en déduire la nullité de tous les coefficients.

Méthode (ALG) 11.3 (Montrer que deux polynômes sont égaux) Pour montrer que deux polynômes sont égaux, on peut au choix :

1. montrer que leurs coefficients sont identiques,
2. montrer que la différence admet plus de racines que son degré (en particulier si elle en admet une infinité).

4. FACTORISATION

Nous avons vu que chercher des racines pouvait nous aider à factoriser un polynôme. Nous allons d'abord un résultat général qui nous dit que tout polynôme s'écrit sous une forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$ par des polynômes de degré 1. Ce résultat sera admis, la plupart des démonstrations dépassent largement les programmes de CPGE.

4.1. Généralités & Méthode

Théorème 2 | D'ALEMBERT-GAUR

Tout polynôme P non constant de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit sous la forme :

$$P = \text{dom}(P) \times \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i),$$

avec : $n = \deg P$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les racines de P comptées avec multiplicité.

Remarque 10

- Il n'y a aucune raison que les racines soient réelles, on a seulement « $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ » dans le résultat, pensez à $P = X^2 + 1$.
- Le **Théorème 2** a donc pour conséquence que tout polynôme possède une racine complexe. On appelle aussi parfois ce théorème le théorème fondamental de l'algèbre (bien que la plupart de ses preuves soient analytiques).
- Ce théorème a été énoncé pour la première fois sous cette forme par Jean Le Rond D'ALEMBERT en 1746, Albert GIRARD en avait eu la première intuition en 1629 mais ne disposait pas des nombres complexes. Il a fallu attendre le 19e siècle pour voir apparaître des preuves complètes, d'abord par Jean Robert ARGAND en 1814, puis par GAUß en 1815, 1816 et 1849.
- Ce résultat est non constructif, il nous assure de l'existence d'une racine mais ne nous donne pas de moyen de la trouver. On connaît des méthodes pour les polynômes de degré 1, 2, 3 (méthode de CARDAN) et 4 (méthode de FERRARI) et Niels ABEL a prouvé qu'il n'existait pas de méthode générale pour les degrés supérieurs ou égaux à 5.

L'enjeu pour factoriser un polynôme est donc de savoir trouver ses racines complexes.

Méthode (ALG) 11.4 (Factoriser un polynôme sous la forme « $P = \text{dom}(P) \times \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ ») Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Pour factoriser P en un produit de polynômes de degré 1 dans le cas où toutes les racines ne sont pas facilement calculables d'un coup (voir $X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2X + 15$ ci-dessous), on :
 1. cherche une racine $\lambda \in \mathbb{K}$.
 2. On écrit P sous la forme $(X - \lambda) \times Q = P$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ que l'on calcule.
 3. On recommence le processus avec Q .
 En résumé : cela revient à chercher les racines de P par factorisations successives.
- Pour factoriser P en un produit de polynômes de degré 1 dans le cas où toutes les racines sont facilement accessibles (voir $X^4 + 1$ ci-dessous), on commence par calculer les racines puis on conclut.

Exemple 36 Factoriser $P = X^4 - X^3 - 7X^2 + 11X + 12$. On pourra commencer par chercher une racine évidente, et on vérifiera à chaque fois si une racine est multiple ou non.



Exemple 37 Factoriser

1. $P = X^2 - 2X \cos \theta + 1$ avec $\theta \in]0, \pi[$ sur $\mathbb{C}[X]$.



2. $Q = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.



3. Dans l'exemple précédent, retrouver les faits suivants à l'aide de résultats sur les polynômes.

- Q admet au plus 4 racines.



- Q admet que des racines simples.



Remarque 11 Dans l'exemple précédent, on peut aussi obtenir uniquement des facteurs dans $\mathbb{R}[X]$ en regroupant une racine et son conjugué :

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \\ &= (X^2 - 2X \cos(\pi/4) + 1)(X^2 - 2X \cos(3\pi/4) + 1) \\ &= \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right) \left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right). \end{aligned}$$

Cette dernière étape n'étant pas explicitement au programme, l'exercice vous guidera sur ce point en cas de besoin.

4.2. Applications : relations coefficients/racines

Les relations coefficients/racines relient, comme leur nom l'indique, les coefficients d'un polynôme aux racines.

Proposition 14 | Relations coefficients/racines pour l'ordre 2

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$, avec $a \in \mathbb{K}^*$, $b, c \in \mathbb{K}$. Notons x_1, x_2 les deux racines de P . Alors : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Preuve

• [Première méthode : sans utiliser l'expression des racines.] Par définition d'une racine, nous avons $P = a(X - x_1)(X - x_2)$. En développant, on obtient :

$$P = a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2).$$

Par identification des coefficients, on obtient immédiatement :

$$a(x_1 + x_2) = -b, \quad a x_1 x_2 = c,$$

ce qui en divisant par a donne les relations de l'énoncé.

• [Seconde méthode : en utilisant l'expression des racines] Notons δ une racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors d'après le cours sur les complexes, $x_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$. On obtient alors :

$$x_1 + x_2 = \frac{(-b + \delta) + (-b - \delta)}{2a} = \frac{-b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \times \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Une conséquence de la preuve du théorème précédent est le corollaire qui suit, qui est en quelque sorte une réciproque des relations coefficients/racines : si l'on se fixe $s, p \in \mathbb{K}$ alors il est possible de trouver un polynôme dont les racines ont pour somme s et produit p . Cela permet de résoudre **sans disjonction de cas (c'est-à-dire sans substitution)** le système non-linéaire de somme/produit fixés.

Corollaire 4 | Système de somme et produit fixés

Soient $s, p \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases} \iff x_1, x_2 \text{ sont les racines de } X^2 - sX + p.$$

Les solutions de $\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases}$ sont donc exactement les racines de $X^2 - sX + p$.

Preuve

⇐ Déjà montré : conséquence des relations coefficients/racines (avec $a = 1$).

⇒ Supposons que $\begin{cases} x_1 + x_2 = s, \\ x_1 x_2 = p. \end{cases}$ Alors notons $P = X^2 - sX + p$. On a par hypothèse $P = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2 = (X - x_1)(X - x_2)$, autrement dit x_1, x_2 sont les deux racines de P .

Méthode (ALG) 11.5 (Système à somme et produit fixés) Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases}, \quad \text{on peut au choix :}$$

- chercher les racines de $X^2 - sX + p$,
- **ou (à éviter au maximum)** résoudre par substitution en traitant le cas $x_2 = 0$, et $x_1 = \frac{p}{x_2}$.

Exemple 38

• Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$ sans substitution. (x, y) sont solutions du système si, et seulement si, x, y sont les racines de $X^2 - 1X + (-1) = X^2 - X - 1$. Le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$. Donc :

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -1 \end{cases}$ avec substitution.



PEUT-ON GÉNÉRALISER? Existe-t-il des relations pour d'autres degrés? La réponse est oui, mais vous n'avez pas à les connaître.

- Dans le TD, nous établirons les mêmes relations mais pour le degré trois, mais en utilisant la première méthode car nous ne connaissons pas d'expression explicite des racines même si de telles formules existent, dues à CARDAN.
- Il est complètement illusoire d'espérer calculer, de manière générale, les racines d'un polynôme à l'aide des relations coefficients/racines : pour le degré $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons un système de n équations, mais absolument pas linéaire.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (ALG) 11.1 (Résoudre une équation polynomiale) Pour trouver tous les polynômes vérifiant une certaine condition, on :

- commence par passer au degré afin de trouver des conditions sur celui-ci.
- Dans un second temps, on essaie de trouver une condition sur les coefficients de P en injectant l'expression « $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ » dans le problème pour le n trouvé à la première étape.

Méthode (ALG) 11.2 (Montrer qu'un polynôme est nul) Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

1. montrer que tous ses coefficients sont nuls,
2. montrer qu'il admet plus de racines que son degré (en particulier s'il en admet une infinité).

Le plus souvent, on utilise **2** pour en déduire la nullité de tous les coefficients.

Méthode (ALG) 11.3 (Montrer que deux polynômes sont égaux) Pour montrer que deux polynômes sont égaux, on peut au choix :

1. montrer que leurs coefficients sont identiques,
2. montrer que la différence admet plus de racines que son degré (en particulier si elle en admet une infinité).

Méthode (ALG) 11.4 (Factoriser un polynôme sous la forme « $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ ») Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Pour factoriser P en un produit de polynômes de degré 1 dans le cas où toutes les racines ne sont pas facilement calculables d'un coup (*voir* $X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2X + 15$ *ci-dessous*), on :

1. cherche une racine $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. On écrit P sous la forme $(X - \lambda) \times Q = P$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ que l'on calcule.
3. On recommence le processus avec Q .

En résumé : cela revient à chercher les racines de P par factorisations successives.

- Pour factoriser P en un produit de polynômes de degré 1 dans le cas où toutes les racines sont facilement accessibles (*voir* $X^4 + 1$ *ci-dessous*), on commence par calculer les racines puis on conclut.

Méthode (ALG) 11.5 (Système à somme et produit fixés) Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = p \end{cases}, \quad \text{on peut au choix :}$$

- chercher les racines de $X^2 - sX + p$,
- **ou (à éviter au maximum)** résoudre par substitution en traitant le cas $x_2 = 0$, et $x_1 = \frac{p}{x_2}$.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUß	Tout polynôme P non constant de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit sous la forme : $P = \text{dom}(P) \times \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ Tout polynôme P non constant de $\mathbb{K}[X]$ s'écrit sous la forme : $P = \text{dom}(P) \times \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$	On peut aussi lui préférer la conclusion suivante : « ... possède une racine complexe »
Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme non nul ?	Le $m \in \mathbb{N}$ maximal tel que $(X - \lambda)^m \mid P$ mais $(X - \lambda)^{m+1} \nmid P$ Le $m \in \mathbb{N}$ maximal tel que $(X - \lambda)^m \mid P$ mais $(X - \lambda)^{m+1} \nmid P$	Ici on attend la définition , ne pas confondre avec la caractérisation à l'aide du polynôme dérivé
Pour $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}$, que vaut la dérivée k -ième du polynôme X^n ?	$(X^n)^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)X^{n-k}$ si $k \leq n$ et 0 si $k > n$ $(X^n)^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)X^{n-k}$ si $k \leq n$ et 0 si $k > n$	Ne pas oublier le cas particulier
Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?	un $\lambda \in \mathbb{K}$ (donc \mathbb{R} ou \mathbb{C}) tel que $P(\lambda) = 0$ un $\lambda \in \mathbb{K}$ (donc \mathbb{R} ou \mathbb{C}) tel que $P(\lambda) = 0$	

5. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir manipuler la notion de degré (définition, opérations)
2. En particulier, savoir calculer un monôme dominant afin de trouver le degré
3. Savoir manipuler la notion de dérivation de polynôme
4. Connaître la notion de racine (simple et multiple)
5. Savoir compter des racines et comparer au degré
6. Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 🎯 désigne les exercices un peu plus difficiles; à aborder une fois le reste du TD bien maîtrisé.

Cahier de calculs

Fiche(s) à travailler :

24

Exercice 1 | Vrai ou Faux?

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(-P) = \deg P$.
2. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P - Q) \leq \deg P - \deg Q$.
3. Un polynôme constant est de degré nul.
4. Le polynôme $X - 2$ divise $P = X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 7X + 6$.
5. Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité n d'un polynôme P , alors $P^{(n)}(z) = 0$.

Solution (exercice 1)

1. **VRAI** : puisque $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ dès que $\lambda \neq 0$.
2. **FAUX** : prendre par exemple $Q = X$ et $P = 1$.
3. **FAUX** : puisque si le polynôme est constant égal à zéro, alors il est de degré $-\infty$.
4. **VRAI** : car $P(2) = 0$.
5. **FAUX** : 0 est racine de multiplicité 2 de X^2 et $(X^2)''(0) = 2 \neq 0$.

51. Opérations sur les polynômes, Simplifications

Exercice 2 | On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2 , $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(X + 1)$.
3. Calculer $S \circ f$ avec $f : t \mapsto \cos(t)$.

Solution (exercice 2)

1. Les calculs donnent $P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2$, $P - Q = 2X - 1$, $P^2 - Q^2 = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$.
2. On obtient $P(X + 1) = X^2 + 5X + 4$.
3. $S \circ f : t \mapsto -\sin^2(t)$.

Exercice 3 | 👁

1. Écrire le polynôme ci-après sans symbole somme : $R = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.
2. En déduire son degré et coefficient dominant.

Solution (exercice 3)

$$\begin{aligned} 1. R &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3X)^k (1-X)^{3n-3k+k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (3X(1-X))^k ((1-X)^3)^{n-k} \\ &= (3X(1-X) + (1-X)^3)^n = (1-X)^n (3X + (1-X)^2)^n \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} \text{binôme} \\ &= \boxed{(1-X)^n (X^2 + X + 1)^n}. \end{aligned}$$

2. On déduit alors par somme de degrés que $\deg R = n + 2n = 3n$, et : $\text{dom } R = \text{dom}((1-X)^n) \times \text{dom}((X^2 + X + 1)^n) = (-1)^n \times 1 = \boxed{(-1)^n}$.

5.2. Degré et coefficients

Exercice 4 | 👁 Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants où n désigne un entier strictement positif et P un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

1. $(X^4 + 1)^3$
2. $P^2 - P + 1$

Solution (exercice 4)

1. On a : $(X^4 + 1)^3 = P(Q)$ avec $P = X^3$ et $Q = X^4 + 1$. Ainsi par propriété sur le degré d'une composée de polynômes, on obtient que $\deg(X^4 + 1)^3 = 12$. De

plus, en développant avec le binôme de NEWTON, on obtient que le coefficient dominant est 1.

- Par propriété sur le degré d'une composée, on sait que $\deg P^2 = 2n$ et par propriété sur le degré d'une somme, on a : $\deg(P+1) \leq n$. Comme $2n \neq n$ car $n \in \mathbb{N}^*$, par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de degré différents, on obtient que : $\deg(P^2 + P + 1) = 2n$. Et si a_n est le coefficient dominant de P, alors a_n^2 est le coefficient dominant de $P^2 + P + 1$ car a_n^2 est le coefficient dominant de P^2 .

Exercice 5 | Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le degré de $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ en fonction de celui de P. On pourra commencer par traiter le cas $P = 0$.

Solution (exercice 5)

- Si P est nul, alors $\deg(\Delta(P)) = -\infty$ car Q est alors nul aussi.
- Si $P \neq 0$, alors écrivons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$ de sorte que $n = \deg P$. On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{k=0}^n a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k ((X+1)^k - X^k) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} X^\ell - X^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} X^\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\ell+1}^n \binom{k}{\ell} a_k \right) X^\ell \end{aligned}$$

$0 \leq \ell < k \leq n$, permutation de sommes

On a : $b_{n-1} = \sum_{k=n}^n \binom{k}{n-1} a_k = n a_n$.

- Si P non constant, alors $n a_n \neq 0$, donc $\deg \Delta(P) = n - 1$.
- Si P est constant, on voit directement dans l'expression initiale que $\Delta(P) = 0$ donc de degré $-\infty$.

En conclusion :

$$\deg \Delta(P) = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } \deg P \geq 1, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 6 | Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant

les conditions indiquées

- $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4, P(-1) = 0, P(-2) = -5, P(2) = 15$.
- $\deg(P) \leq 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

Solution (exercice 6)

- Notons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Les conditions mènent à :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ -a + b - c + d = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = -5 \\ 8a + 4b + 2c + d = 15. \end{cases}$$

On souhaite ensuite résoudre ce système, par exemple à l'aide de matrices augmentées.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 1 \times L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8 \times L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 8 \times L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 27 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -17 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 27 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -17 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1 \times L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 12 \times L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4 \times L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6} L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -9 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1 \times L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 6 \times L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{(-6)} L_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1/2 \times L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1 \times L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1/2 \times L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

- L'unique solution est donc $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$, et $P = X^3 + X^2 + X + 1$.
- Comme $\deg P \leq 2$, on cherche P sous la forme : $P = aX^2 + bX + c$. Les calculs donnent : $P^2 = a^2 X^4 + 2abX^3 + (b^2 + 2ac)X^2 + 2bcX + c^2$. Puis par unicité des

coefficients d'un polynôme, on doit résoudre le système suivant :


$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ ab = 1 \\ b^2 + 2ac = -3 \\ bc = -2 \\ c^2 = 4. \end{cases}$$

Comme $a^2 = 1$, on a : $a = -1$ ou $a = 1$. De même comme $c^2 = 4$, on a : $c = -2$ ou $c = 2$. Étudions les 4 possibilités que l'on a :

- si $a = 1$ et $c = 2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$. Mais comme $bc = -2$, $b = -1$: impossible.
- si $a = -1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = -1$. Mais comme $bc = -2$, $b = 1$: impossible.
- si $a = 1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$ et ainsi $bc = -2$. Et on a aussi alors $b^2 + 2ac = -3$.
- si $a = -1$ et $c = 2$: $b = -1$ vérifie bien $ab = 1$, $bc = -2$ et $b^2 + 2ac = -3$.

Ainsi il y a deux solutions qui sont : $\boxed{P = -X^2 - X + 2 \text{ et } P = X^2 + X - 2}$.

5.3. Racines & Factorisation

Exercice 7 |  Déterminer pour chaque exemple si Q est factorisable par P (c'est-à-dire si $P \mid Q$).

1. $P = X - 1$ et $Q = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$, et déterminer le cas échéant un polynôme R tel que $Q = PR$.
2. $P = X - 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + X + 1$, et déterminer le cas échéant un polynôme R tel que $Q = PR$.

Solution (exercice 7) On commence par vérifier si les racines du diviseur testé sont bien des racines du polynôme P.

1. $Q(1) = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$, donc 1 est racine de P, et $\boxed{P \text{ divise } Q}$. On cherche R sous la forme $R = X^2 + aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, donc tel que :

$$X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = (X - 1)(X^2 + aX + b),$$

donc en développant :

$$X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = X^3 + X^2(a - 1) + X(b - a) - b,$$

on peut ensuite identifier coefficient par coefficient.

$$-2 = a - 1, \quad 3 = b - a, \quad -b = -2 \iff b = 2, \quad a = -1.$$

Donc $\boxed{R = X^2 - X + 2}$.

2. $Q(2) = 2^4 - 3 \cdot 8 + 2 + 1 = -8 + 3 + 5 \neq 0$, donc $\boxed{P \text{ ne divise pas } Q}$.

Exercice 8 | Soit P le polynôme défini par : $P = X^3 + 4X^2 + X - 6$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Déterminer le polynôme Q tel que $P(X) = (X - 1)Q(X)$.
3. Déterminer les racines de P. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit S le polynôme défini par $S(X) = X^6 + 4X^4 + X^2 - 6$. Déterminer les racines réelles de S.

Solution (exercice 8)

1. Il suffit de montrer que $P(1)$ est égal à 0, sachant que :

$$P(1) = 1 + 4 + 1 - 6$$

$$= 0,$$

donc 1 est bien racine de P.

2. On peut par exemple effectuer la division euclidienne de P par $X - 1$: on trouve que $P(X) = (X - 1)Q(X)$, où $Q(X) = X^2 + 5X + 6$.
3. Le polynôme Q est de degré 2, et a pour discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 6 = 1$. Ainsi, Q possède deux racines réelles qui sont :

$$r_1 = \frac{-5 - 1}{2} = -3 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-5 + 1}{2} = -2.$$

D'où : $Q(X) = (X + 2)(X + 3)$, et : $P(X) = (X - 1)(X + 2)(X + 3)$. Ainsi, les racines de P sont 1, -2 et -3.

4. Puisque $S(X) = P(X^2)$, on obtient directement (en utilisant la forme factorisée de P) que

$$\begin{aligned} S(X) &= (X^2 - 1)(X^2 + 2)(X^2 + 3) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 2)(X^2 + 3). \end{aligned}$$




Puisque les polynômes $(X^2 + 2)$ et $(X^2 + 3)$ n'ont pas de racine réelle, S admet pour racines réelles 1 et -1.

Exercice 9 | Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ ait -1 comme racine au moins double.

Solution (exercice 9) Pour que -1 soit racine au moins double de P, on doit avoir : $P(-1) = 0 = P'(-1)$. Les calculs donnent que : $P(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$ donc -1 est racine au moins simple de P sans condition sur a. On a de plus : $P' = 5X^4 - 2aX - a$. Ainsi, on obtient : $P'(-1) = 0 \iff a = -5$.

Donc : $\boxed{-1 \text{ racine au moins double de P si et seulement si } a = -5}$.

Exercice 10 |  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1.  $P = X^3 + 1$
2. $P = X^6 - 1$
3. $P = X^8 + X^4 + 1$
4.  $P = X^4 - 2X^2 - 8$
5. $P = X^n - 1$
6.  $P = X^4 + 4$

7. $P = X^5 + 32$

8. $\odot P = X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ sachant que $i + 1$ est racine dans \mathbb{C} . On commencera par justifier que $1 + i$ est aussi racine de P .

Solution (exercice 10) On ne donne ici que des indications sur la méthode et le résultat final. On rappelle que pour résoudre des équations dans \mathbb{C} de la forme $z^n = \alpha$ où α est un complexe non nul, on cherche les solutions sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ (voir le **Chapitre (ALG) 5**) pour plus de détails.

1. ● Racines complexes de P : on calcule avec la méthode habituelle les racines troisièmes de $-1 = e^{i\pi}$. On obtient $-1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}$, 3 racines simples.

● Factorisation dans \mathbb{C} :
$$P = (X + 1) \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}} \right).$$

2. ● Racines complexes de P : $-1, 1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}$, on a 6 racines simples pour un polynôme de degré 6.

- Factorisation dans \mathbb{C} :

$$P = (X - 1)(X + 1) \left(X - e^{i\frac{\pi}{3}} \right) \left(X - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right) \left(X - e^{i\frac{4\pi}{3}} \right) \left(X - e^{i\frac{5\pi}{3}} \right).$$

3. ● Racines complexes de P : il faut remarquer que $P = Q(X^4)$ avec $Q = Y^2 + Y + 1$. Les racines de Q sont $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^4) = 0 \iff z^4 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il faut donc calculer les racines quatrièmes des nombres complexes $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On obtient : $e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{7\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{11\pi}{6}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{8\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{11\pi}{6}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On a ainsi bien obtenu 8 racines simples distinctes.

- Factorisation dans \mathbb{C} :

$$P = \left(X - e^{i\frac{\pi}{6}} \right) \left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}} \right) \left(X - e^{i\frac{7\pi}{6}} \right) \left(X - e^{i\frac{11\pi}{6}} \right) \left(X - e^{i\frac{2\pi}{6}} \right) \left(X - e^{i\frac{5\pi}{6}} \right) \left(X - e^{i\frac{8\pi}{6}} \right) \left(X - e^{i\frac{11\pi}{6}} \right).$$

4. ● Racines complexes de P : il faut remarquer que $P = Q(X^2)$ avec $Q = Y^2 - 2Y - 8$. Les racines de Q sont -2 et 4 . Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^2) = 0 \iff z^2 = -2$ ou $z^2 = 4$. Il faut donc calculer les racines carrées des nombres $-2 = 2e^{i\pi}$ et 4 . On obtient : $-2, 2, -\sqrt{2}i$ et $\sqrt{2}i$.

● Factorisation dans \mathbb{C} :
$$P = (X - 2)(X + 2) \left(X - \sqrt{2}i \right) \left(X + \sqrt{2}i \right).$$

5. ● Racines complexes de P : racines n -ièmes de l'unité. On obtient $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

● Factorisation dans \mathbb{C} :
$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

6. ● Racines complexes de P : racines quatrièmes de -4 : $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$: 4 racines simples pour un polynôme de degré 4.

● Factorisation dans \mathbb{C} :
$$P = \left(X - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(X - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(X - \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(X - \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} \right).$$

7. ● Racines complexes de P : racines cinquièmes du nombre $-32 = 32e^{i\pi}$. Les racines sont : $-2, 2e^{i\frac{\pi}{5}}, 2e^{i\frac{3\pi}{5}}, 2e^{i\frac{7\pi}{5}}, 2e^{i\frac{9\pi}{5}}$: 5 racines simples pour un polynôme de degré 5.

● Factorisation dans \mathbb{C} :
$$P = (X + 2) \left(X - 2e^{i\frac{\pi}{5}} \right) \left(X - 2e^{i\frac{3\pi}{5}} \right) \left(X - 2e^{i\frac{7\pi}{5}} \right) \left(X - 2e^{i\frac{9\pi}{5}} \right).$$

8. ● Racines complexes de P : On sait que $1 + i$ est racine complexe de P . Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a donc aussi que $1 - i$ est racine complexe de P . Ainsi $P = (X - (1 + i))(X - (1 - i))Q = (X^2 - 2X + 2)Q$ avec Q polynôme de degré 2. En cherchant Q sous la forme $Q = aX^2 + bX + c$ et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient : $Q = X^2 + 5X - 6$. Le discriminant vaut $\Delta = 7$ et les racines sont 1 et -6 . Ainsi on a trouvé 4 racines pour un polynôme de degré 4, on les a toutes.

● Factorisation dans \mathbb{C} : $P = (X - 1)(X + 6)(X - (1 + i))(X - (1 - i))$.

● Factorisation dans \mathbb{R} : $P = (X - 1)(X + 6)(X^2 - 2X + 2)$.

Exercice 11 | Soient a, b, c trois réels distincts et :

$$P = \frac{(X - a)(X - b)}{(c - a)(c - b)} + \frac{(X - b)(X - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(X - c)(X - a)}{(b - c)(b - a)}.$$

Calculer $P(a), P(b)$ et $P(c)$. Qu'en déduisez-vous pour P ?

Solution (exercice 11) Un calcul montre que $P(a) = P(b) = P(c) = 1$, donc $Q = P - 1$ vérifie $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$. Donc Q possède trois racines, il est de degré au plus 2 donc il est nul. Ainsi, $P - 1 = 0$ c'est-à-dire $\underline{P = 1}$.

Exercice 12 | Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant.

Solution (exercice 12) On montre facilement (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$. Ainsi, le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X) - P(0)$ possède une infinité de racines : c'est le polynôme nul. On en déduit que $P(X) = P(0)$, donc \underline{P} est un polynôme constant.

Exercice 13 | \odot Soit $n \geq 2$, on pose $P = (X + 1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans \mathbb{C} et en déduire la factorisation de P dans \mathbb{C} .

2. On note Q l'unique polynôme tel que $P = XQ$. Justifier l'existence de Q , donner son expression en somme de monômes, puis à l'aide des racines de Q , déterminer la

valeur de :
$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Solution (exercice 13)

1. On cherche les racines complexes, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff (z+1)^n = 1 \\ &\iff z+1 = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \\ &\iff z = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}}. \end{aligned}$$

avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a utilisé ici les solutions de $z^n = 1$ (qui sont les $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$) et la méthode de l'angle moitié. Comme le coefficient dominant de P vaut 1, on en déduit la factorisation suivante :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}} \right)$$

2. ● En prenant $k=0$, on remarque que 0 est racine de P , et que P se factorise sous la forme

$$P = X \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}} \right) = XQ,$$

et les racines de Q sont donc les $2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

● De plus, en utilisant la formule du binôme de NEWTON, on obtient que :

$$P = X^n + nX^{n-1} + \dots + nX + 1 - 1 = X(X^{n-1} + nX^{n-2} + \dots + n)$$

et ainsi : $Q = X^{n-1} + nX^{n-2} + \dots + n$.

● On a donc établi :

$$X^{n-1} + nX^{n-2} + \dots + n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}} \right).$$

En évaluant en zéro, on trouve :

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}} \right).$$

Or,

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{n-1} \left(-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{i \frac{k\pi}{n}} \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} (i)^{n-1} e^{i \frac{\pi}{n}(1+\dots+(n-1))} \times A \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} (i)^{n-1} e^{\frac{i\pi n(n-1)}{2n}} \times A \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} (i)^{n-1} e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} \times A \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n-1} (-1)^{n-1} (i)^{n-1} \times A \\ &= 2^{n-1} A. \end{aligned}$$

● Ainsi, on obtient que $A = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 14 | 👁 Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On rappelle que $j = e^{i \frac{2\pi}{3}}$.

- Calculer $1+j+j^2$, que dire de j^3 ? Montrer que $j^2 = \bar{j}$.
- Montrer que : $P = \sum_{k=1}^6 \binom{7}{k} X^k$.
- Montrer que P est divisible par $(X-j)^2$, puis que P est divisible par $(X-\bar{j})^2$.
- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$. Pour $\mathbb{R}[X]$, on regroupera chaque terme faisant intervenir une racine avec son conjugué.

Solution (exercice 14)

1. $1+j+j^2 = 0$ (somme géométrique), et $j^3 = 1$. Par ailleurs $j^2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} = e^{i \frac{4\pi}{3} - 2i\pi} = e^{-i \frac{2\pi}{3}} = \bar{j}$.

2. D'après la formule du binôme, on a : $P = \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} X^k - X^7 - 1 = \sum_{k=1}^6 \binom{7}{k} X^k$.

Le coefficient dominant est donc $\binom{7}{6} = 7$. Le degré est donc 6.

3. Il s'agit de montrer que $P(j) = P'(j) = 0$ — cela signifie que j est une racine de multiplicité au moins égale à deux. On a :

$$P(j) = (1+j)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^7 - 1 = -j^14 - j^7 - 1 = -j^2 - j - 1 = 0,$$

$$P'(j) = 7(1+j)^6 - 7j^6 = 7(-j^2)^6 - 7 = 7 - 7 = 0.$$

Dès lors $(X-j)^2 \mid P$. Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait d'après le cours que \bar{j} est également une racine de P et de même multiplicité. Donc \bar{j} est une racine de multiplicité au moins deux.

4. Nous avons déjà deux racines, chacune de multiplicité au moins deux. Or P est de degré six, il en manque donc deux. Constatons que 0, -1 sont deux racines évidentes. Or, le coefficient dominant de P est 7, donc

$$P = 7(X-j)^2 (X-\bar{j})^2 X(X+1).$$

C'est la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Pour obtenir des facteurs réels, on regroupe les parties complexes avec leur version conjuguée.

$$\begin{aligned} P &= 7(X-j)^2 (X-\bar{j})^2 X(X+1) \\ &= 7(X^2 - 2\operatorname{Re}(jX) + |j|^2)^2 X(X+1) \\ &= 7(X^2 + X + 1)^2 X(X+1). \end{aligned}$$

Exercice 15 | Relations coefficients/racines pour l'ordre 3

1. Soient $s, r, p \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$(x, y, z) \text{ est solution de } \begin{cases} s = x + y + z \\ r = xy + xz + yz \\ p = xyz \end{cases}$$

$$\iff x, y, z \text{ sont les racines de } Q = X^3 - sX^2 + rX - p.$$

2. [Application] résoudre dans \mathbb{C}^3 le système :
$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ xyz = 0. \end{cases}$$

Solution (exercice 15)

1. Par définition d'une racine, $P = a(X - x)(X - y)(X - z)$. Développons ce produit :

$$\begin{aligned} P &= a(X - x)(X - y)(X - z) \\ &= a(X^2 - (x + y)X + xy)(X - z) \\ &= a(X^3 - (x + y)X^2 + xyX - zX^2 + z(x + y)X - xyz) \\ &= aX^3 - a(x + y + z)X^2 + a(xy + zx + zy)X - axyz. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on trouve :

$$-as = b, \quad ar = c, \quad d = -ap.$$

De manière équivalente :

$$\boxed{s = -\frac{b}{a}, \quad r = \frac{c}{a}, \quad p = -\frac{d}{a}}.$$

2. Notons s, r, p les trois fonctions de x, y, z définies dans l'énoncé. Constatons que $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)(x + y + z) - 2(xy + xz + yz) = s^2 - 2r$. Alors :

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ xyz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2 \\ s^2 - 2r = 2 \\ p = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2, \\ r = 1, \\ p = 0 \end{cases}$$

$\iff x, y, z$ sont les racines de

$$X^3 - sX^2 + rX - p = X^3 - 2X^2 + 2X = X(X^2 - 2X + 2).$$

Les racines de ce polynôme sont composées de 0 et des racines de $X^2 - 2X + 2$ (ce dernier polynôme est de discriminant $4 - 8 = -4 = (2i)^2$). Donc :

$$\boxed{x, y, z \in \{0, 1 - i, 1 + i\}}.$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$. Montrer que si P n'est pas constant alors $\deg P = 2$.

2. En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $(P')^2 = 4P$.

Solution (exercice 16)

1. Supposons P non constant, i.e. $n = \deg P \geq 1$. Alors en passant au degré dans l'hypothèse vérifiée par P , nous obtenons

$$2(n - 1) = n, \quad \boxed{n = 2}.$$

2. Le seul polynôme constant solution est le polynôme nul. Supposons que $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors


$$\begin{aligned} (P')^2 = 4P &\iff (2aX + b)^2 = 4(aX^2 + bX + c), \\ &\iff 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4(aX^2 + bX + c), \\ &\iff a^2 = a, \quad ab = b, \quad b^2 = 4c. \end{aligned}$$

Donc :

- soit $a = 0$, auquel cas P n'est pas de degré deux - ceci est exclu.
- Soit $a \neq 0$, et donc $a = 1$, ce qui donne $b \in \mathbb{R}$ puis $c = \frac{b^2}{4}$. Donc $P =$

$$X^2 + bX + \frac{b^2}{4}, \quad \text{où } b \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des polynômes solution est donc constitué du polynôme nul et des polynômes d'écrivant sous la forme $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$, où $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 |  On cherche ici à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2 + 1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2) = (X^2 + 1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Solution (exercice 17)

1. On suppose que $P \in \mathbb{R}$ vérifie $P(X^2) = (1 + X^2)P$. Condition sur le degré : Le polynôme nul convient bien. Sinon, si P est de degré n , alors on a : $\deg P(X^2) = 2n$ et $\deg((1 + X^2)P) = 2 + n$ par propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée. Ainsi, on doit avoir : $2n = n + 2 \iff n = 2$. Ainsi P est un polynôme de degré 2 : $\boxed{P = aX^2 + bX + c \text{ avec } a \neq 0}$ ou $\boxed{P \text{ est nul}}$, donc de degré $-\infty$.

2. On cherche ici les solutions de degré 2, en injectant l'expression précédente dans l'hypothèse. D'un côté $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et de l'autre côté $(1 + X^2)P = aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c$. Par identification des coeffi-

5.4. Équations polynomiales

Exercice 16 |

cients d'un polynôme, on obtient que : $\begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ a + c = b \\ c = c \end{cases}$. Ainsi, on obtient que

$b = 0$ et $a = -c$ et P est de la forme $P = aX^2 - a = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des polynômes de la forme $P = aX^2 - a = a(X^2 - 1)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et le **polynôme nul**.

3. On veut retrouver ce résultat d'une autre manière. On cherche donc les deux racines de P : montrons que 1 et -1 conviennent. On a :

$$P(1^2) = (1^2 + 1)P(1) \implies P(1) = 2P(1) \implies P(1) = 0,$$

donc 1 est bien racine de P . De-même :

$$P((-1)^2) = ((-1)^2 + 1)P(-1) \implies P(-1) = 2P(-1) \implies P(-1) = \frac{P(1)}{2} = 0,$$

donc -1 est bien racine de P . On sait que P est de degré 2, donc on a trouvé toutes les racines, et P peut donc s'écrire $P = a(X - 1)(X + 1)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$. On retrouve bien que les solutions sont les polynômes de la forme $P = a(X^2 - 1)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 18 |

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, on note $n = \deg P$.
 - Quel est le degré de P' ?
 - Quel est le degré de XP' ?
 - En déduire le degré de $XP' - P$.
- Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $XP' - P = 0$.

Solution (exercice 18)

1. 1.1) D'après le cours : $\deg(P') = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \leq 0 \\ n - 1 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$

1.2) Par conséquent, les propriétés sur le symbole degré donne :

$$\deg(XP') = \deg(X) + \deg(P') = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 1, \\ -\infty & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

- 1.3) • La polynôme $XP' - P$ fait apparaître une somme de deux polynômes, mais malheureusement ils sont de même degré. Pour savoir quel est le degré, il faut donc travailler avec des coefficients explicites.
- Notons tout d'abord que si P est le polynôme nul (donc si $n = -\infty$), alors $XP' - P = 0$, donc $\deg(XP' - P) = -\infty$. Sinon, notons $P = a_n X^n + \dots + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Ainsi, le terme dominant de P' est $na_n X^{n-1}$, donc le terme dominant de XP' est $na_n X^n$. On en déduit que le terme

dominant de $XP' - P$ est $na_n X^n - a_n X^n$, à savoir $(n - 1)a_n X^n$. Ainsi :

- Si $n \neq 1$, alors $(n - 1)a_n \neq 0$, donc : $\deg(XP' - P) = n = \deg P$.
- Dans le cas particulier où $n = 1$, on peut écrire $P = a_1 X + a_0$ où (a_0, a_1) sont deux réels avec $a_1 \neq 0$. On a alors : $P' = a_1$, donc : $XP' = a_1 X$, puis : $XP' - P = a_1 X - (a_1 X + a_0) = -a_0$.

Ainsi, en conclusion : $\deg(XP' - P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_0 = 0, \\ 0 & \text{si } a_0 \neq 0. \end{cases}$

2. On a, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$XP' - P = 0 \iff \deg(XP' - P) = -\infty.$$

Or, d'après la question précédente, en notant $n = \deg(P)$, on a $\deg(XP' - P) = n$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (dans ce cas, on n'a donc pas : $\deg(XP' - P) = -\infty$). Les solutions de l'équation sont ainsi à chercher parmi les polynômes P pour lesquels $n = -\infty$ ou $n = 1$.

- si $n = -\infty$, i.e. si P est le polynôme nul, on vérifie sans peine que $P = 0$ est solution.
- Si $n = 1$, le polynôme P s'écrit sous la forme $P = a_1 X + a_0$, où a_0 et a_1 sont deux réels tels que $a_1 \neq 0$. Les calculs de la question précédente donnent : $XP' - P = -a_0$. Le degré de $XP' - P$ est alors égal à $-\infty$ si et seulement si $a_0 = 0$, autrement dit, si et seulement si $P = a_1 X$. On vérifie que ces polynômes sont bien solution de l'équation.

D'où : **les solutions sont les $P = aX$ où $a \in \mathbb{R}^*$.**

Exercice 19 | Application

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(P) = (3X + 1)P - X(X - 1)P'$.

- Vérifier que φ définit bien une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- 2.1) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$?
2.2) Pour ces valeurs de n , déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\varphi(P) = X^2$.

Solution (exercice 19)

1. Soit $P \in \mathbb{R}$, on a alors que : $\varphi(P) = (3X + 1)P - X(X + 1)P'$. Comme P est un polynôme et que la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on sait que $P' \in \mathbb{R}$. De plus $3X + 1$ et $X(X + 1)$ sont aussi des polynômes et ainsi $\varphi(P)$ est un polynôme comme produit et somme de polynômes. Donc si $P \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.
2. 2.1) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on cherche à savoir sous quelles conditions, on a aussi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Il faut donc étudier le degré de $\varphi(P)$ sachant que $P = a_n X^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a_n \neq 0$. Par définition de $\varphi(P)$, on a : $\deg \varphi(P) \leq n + 1$. En effet, par propriété sur le degré d'un produit, d'une dérivée et d'une somme de polynômes de même degré, on a :

$\deg(3X+1)P = n+1$, $\deg X(X-1)P' = n+1$ et ainsi $\deg \varphi(P) \leq n+1$. On obtient que : $\varphi(P) = (3X+1)(a_n X^n + Q) - X(X-1)(na_n X^{n-1} + Q')$. Étudions le terme en X^{n+1} afin de voir sous quelle condition le coefficient devant ce terme s'annule. On a : $\varphi(P) = 3a_n X^{n+1} - na_n X^{n+1} + R$ avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour que $\deg \varphi(P) \leq n$, on doit donc avoir : $(3-n)a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$, cela impose que $n = 3$ et ainsi cela impose que le degré de P soit 3. Ainsi $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n = 3$.

2.2) P est donc un polynôme de degré 3 et ainsi il est de la forme : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On cherche alors à résoudre $\varphi(P) = 0 \iff (3X+1)P - X(X-1)P' = 0$. Les calculs donnent : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = 0$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient : $a = b = c = d = 0$ et ainsi seul le polynôme nul convient.

3. Les deux questions précédentes ont permis de montrer que si $n \neq 3$ et $\deg P = n$ alors $\deg(\varphi(P)) = n+1$ et si $n = 3$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi pour que $\varphi(P) = X^2$, il faut soit que $\deg P = 1$, soit que $\deg P = 3$. On étudie ainsi chacun de ces cas :

• **[Cas 1]** si $n = 1$ c'est-à-dire $P = aX + b$. On doit donc avoir : $(3X+1)(aX+b) - X(X-1)a = X^2$ et en développant le terme de gauche et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient le système linéaire suivant à résoudre :

Ce système est incompatible et ainsi il n'existe aucun P de degré 1 vérifiant $\varphi(P) = X^2$.

• **[Cas 2]** si $n = 3$ c'est-à-dire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. En reprenant les mêmes calculs que dans la questions 2(a), on a : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = X^2$ et on doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4a + b & = 0 \\ 3b + 2c & = 1 \\ 2c + 3d & = 0 \\ d & = 0. \end{cases}$$

La résolution donne : $a = -\frac{1}{12}$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = d = 0$. Ainsi on obtient qu'il existe un seul polynôme P vérifiant $\varphi(P) = X^2$, le polynôme :

$$P = -\frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{3}X^2.$$

5.5. Familles & Suites de polynômes

Exercice 20 | \odot Soit $P = X^2 - X + 1$ et $Q = X^3 - X$. On définit une suite de

polynômes $(P_n)_{n \geq 1}$ telle que :
$$\begin{cases} P_1 = P, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$$

- Calculer P_2 .
- Calculer les degrés de P_2 et P_3 .
- Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P_n .

Solution (exercice 20)

- Les calculs donnent : $P_2 = XP(Q) + 2Q \times P = X^7 - 3X^4 + X^3 + 3X^2 - X$.
- On a donc $\deg P_2 = 7$ et en utilisant les propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée de polynômes, on obtient : $\deg P_3 = 22$.
- Comme on n'arrive pas à conjecturer directement l'expression du degré de P_n , on va obtenir une relation de récurrence en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes. On note $d_n = \deg P_n$. On sait que : $P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n$. Par propriété sur le degré d'un produit de polynômes, on sait que : $\deg QP_n = 3 + d_n$. De même, par propriété sur le degré d'une composée et d'un produit de polynômes, on obtient que : $\deg XP_n(Q) = 3d_n + 1$. Comme $3d_n + 1 > 3 + d_n$ dès que $d_n > 1$ ce qui est toujours le cas (car les degrés sont de plus en plus grands et le degré de P_1 est 2), on a par propriété sur le degré d'une somme de polynômes dont les degrés sont différents : $\deg P_{n+1} = 3d_n + 1$, à savoir : $d_{n+1} = 3d_n + 1$.
- On reconnaît donc une suite arithmético-géométrique de premier terme $d_1 = 2$ et dont la relation de récurrence est : $d_{n+1} = 3d_n + 1$. Les calculs donnent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$d_n = \frac{5}{2} \times 3^{n-1} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 21 | \odot **Polynômes d'HERMITE** On considère la suite (H_n) de polynômes, telle que $H_0(X) = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_{n+1} = H'_n - 2XH_n.$$

- Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n \in \mathbb{R}[X]$, et donner H_1, H_2 .
- Déterminer le degré de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Déterminer le coefficient dominant de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution (exercice 21)

- Le fait que $H_n \in \mathbb{R}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une récurrence évidente puisque la dérivée d'un polynôme à coefficients réels est encore à coefficients réels. De plus, $H_1 = 1' - 2X1 = -2X$, puis $H_2 = (-2)' - 2X(-2X) = 4X^2 - 2 = 2(2X^2 - 1)$.
- Déterminons le degré de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors notant $d_n = \deg P_n$, on a en passant au degré puisque le degré de XH_n est nécessairement

strictement supérieur à celui de H'_n :

$$d_{n+1} = d_n + 1, \quad d_0 = 0.$$

Donc $d_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Notons a_n le coefficient dominant de P_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Pour la même raison qu'à la question précédente, le coefficient dominant de $H'_n - 2XH_n$ est égal à celui de $-2XH_n$. On obtient alors :

$$a_{n+1} = (-2)a_n.$$

Donc $a_n = (-2)^n a_0 = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Deuxième partie

Analyse