Chapitre # (ALG) 10 Polynômes

Résumé & Plan

On étudie dans ce chapitre des fonctions (pour nous!) particulières, que l'on appelle polynômes. Ces fonctions bénéficient de propriétés de factorisations très particulières.

Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera « je ne sais pas le reste ».

— Évariste Galois

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. DÉFINITION DE $\mathbb{K}[X]$

1.1. Généralités

Définition 1 | Polynôme sur $\mathbb{K}$

- Un *polynôme* (non nul) est une fonction du type $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ de la forme $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tel que $a_n \neq 0$.
  - L'entier n est appelé *degré de* P et généralement noté $\deg P$,
  - le coefficient $a_{\deg P}$ est appelé *coefficient dominant de* P, on le note aussi $\mathrm{dom}(P)$,
  - $a_n X^n$ est appelé le *monôme dominant*.
- Le *polynôme nul* est la fonction nulle $x \in \mathbb{K} \longmapsto 0$, on convient que :
  $\boxed{\deg(0) = -\infty}$, $\boxed{\mathrm{dom}(P) = 0}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Un *monôme de degré n* est un polynôme de la forme aX^n avec $a \in \mathbb{K}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle de polynôme à coefficients réels. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on parle de polynôme à coefficients complexes.

Définition 2 | Polynôme unitaire

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors si $\mathrm{dom}(P) = 1$, on dit que P est *unitaire*.

Notation

- La fonction $P : x \in \mathbb{K} \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{K}$ est généralement notée :
  $$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$
  et $0_{\mathbb{K}_n[X]}$ le polynôme nul. En particulier :
  - X désigne la fonction $x \in \mathbb{K} \longmapsto x \in \mathbb{K}$,
  - 1 la fonction $x \in \mathbb{K} \longmapsto 1 \in \mathbb{K}$.
- Parfois le polynôme P est aussi noté P(X), la notation P(X) désigne donc en-

core une fonction.

- $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$,
- $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ de degré inférieur à n,
- $\mathbb{K}_{=n}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ de degré égal à n.
- On note en général , c'est-à-dire la fonction nulle de $\mathbb{K}$.

Attention — Différence entre x et X

Ne pas confondre :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ pour un certain } x \in \mathbb{K}, \text{ et : } \quad \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

qui dans le premier cas est un élément de $\mathbb{K}$ (*i.e.* un réel ou un complexe), dans le second une **fonction**. En revanche, nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Remarque 1 (Degré et écriture du polynôme) Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$:

- on n'a pas nécessairement $\deg(P) = n$, ce n'est le cas que si $a_n \neq 0$. La notation est trompeuse, mais en règle générale on se donnera toujours une telle somme avec $a_n \neq 0$ de sorte qu'alors $\operatorname{dom} P = a_n$ et $\deg P = n$.
- En revanche, l'écriture implique : $\quad \deg P \leqslant n$.

Remarque 2 (Convention de degré) L'application deg est donc à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$: $\quad \deg : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \\ P & \longmapsto & \deg P. \end{array} \right.$

La convention $\deg 0 = -\infty$ est purement technique. Elle trouve son intérêt dans la formule de degré d'un produit que nous reverrons plus tard : si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\deg(0.P) = \deg(0) + \deg P$ d'une part, et d'autre part comme $0.P = 0$ on devrait avoir $\deg 0 = \deg 0 + \deg P$. Cette formule n'est jamais vérifiée sauf si P est constant, d'où la convention précédente de sorte que :

$$\text{« } -\infty = -\infty + \deg P. \text{ »}$$

La formule $\deg 0 = \deg 0 + \deg P$ est alors vraie quelque soit le degré de P.

Exemple 1

- Si $P = X^2 + 5X^3 + X^9$, on a $\deg(P) = 9$.
- Les polynômes constants ont un degré $\leqslant 0$ (et pas forcément 0, car il ne faut pas oublier le cas du polynôme nul).
- Si $P = 3X^2 + 4X^7$, alors $4X^7$ est le monôme dominant de P et $4 = \operatorname{dom}(P)$.

Exemple 2 Déterminer le degré et le coefficient dominant de $(j + X)^3 - (j - X)^3$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1.2. Opérations

Les polynômes étant définis ici comme un sous-ensemble de l'espace des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, on peut réaliser plusieurs opérations sur eux comme pour les fonctions habituelles.

Définition 3 | Opérations $+, \times, \circ, .$

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On notera $P + Q$, PQ, $P \circ Q$ et λP les applications ci-dessous :

1. $P + Q \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & P(x) + Q(x), \end{array} \right.$
2. $P \times Q \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & P(x)Q(x), \end{array} \right.$
3. $P \circ Q \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & (P \circ Q)(x), \end{array} \right.$
4. $\lambda P \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & \lambda P(x). \end{array} \right.$

Remarque 3

- Toutes les propriétés sur les lois $+, \times$ *etc.* rencontrées dans le chapitre sur les fonctions et les applications (Chapitres (ALG) 6 et (AN) 1, distributivité, associativité, élément neutre *etc.*) restent valables. Nous ne les réecrivons pas ici.
- On note parfois $P(Q)$ le polynôme $P \circ Q$, en remarquant que $P \circ X = P$, cela justifie *a posteriori* la notation $P(X)$ pour le polynôme P.
- Pour l'instant, nous n'employons pas le mot « polynôme », car nous ne savons pas encore que $P + Q, P \times Q, P \circ Q, \lambda P$ sont bien des polynômes.

Attention **Piège de notation**

Si $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $p \geqslant 0$, attention à la différence entre :
- le polynôme $\mathrm{X}^p\mathrm{P} : x \in \mathbb{K} \longmapsto x^p\mathrm{P}(x)$ — un produit,
- et le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}^p) : x \in \mathbb{K} \longmapsto \mathrm{P}(x^p)$ — une composée. Ce n'est pas du tout la même chose.

Afin de faire la distinction entre les deux, il faut bien faire attention à l'emplacement des parenthèses. Ainsi, PX^p est une notation bien maladroite, mais désigne toujours $\mathrm{X}^p\mathrm{P}$.

Proposition 1 | Opérations $+, \times, \circ, .$ à l'aide de coefficients

Soient $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k\mathrm{X}^k, \mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{q} b_k\mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, avec la convention de prolongement par zéro des deux suites :
- $a_k = 0$ si $k \notin [\![0\,,\,p]\!]$,
- $b_k = 0$ si $k \notin [\![0\,,\,q]\!]$.

Alors : $\mathrm{P}+\mathrm{Q}, \mathrm{P}\times\mathrm{Q}, \mathrm{P}\circ\mathrm{Q}, \lambda\mathrm{P}$ sont des polynômes, et :
- $\mathrm{P}+\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k+b_k)\mathrm{X}^k$,
- $(\mathrm{PQ})(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\mathrm{X}^n$,
- $(\mathrm{P}\circ\mathrm{Q})(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{p} a_n\left(\sum_{k=0}^{q} b_k\mathrm{X}^k\right)^n$,
- $\lambda\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p}\lambda a_k\mathrm{X}^k$.

On déduit directement des règles d'opération précédentes la proposition qui suit.

Proposition 2 | Stabilité de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

- Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$, PQ, $\mathrm{P}\circ\mathrm{Q}$ et $\lambda\mathrm{P}$ sont des éléments de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ (*resp.* $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$).
- L'ensemble $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est donc stable par addition, produit, composition et multiplication par un scalaire.

Note | *Nous dirons dans un futur chapitre que « $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ sont des espaces vectoriels »*

Remarque 4

- Dans la pratique, ces formules servent uniquement lorsque les polynômes sont écrits de manière abstraite à l'aide d'une somme. Dans la plupart des cas, on effectue simplement ces opérations à l'aide des opérations classiques sur les fonctions.
- Si on souhaitait vraiment passer par la formule du produit, on écrirait par exemple pour calculer PQ avec $\mathrm{P} = 1+3\mathrm{X}-\mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}+\mathrm{X}^2$:

k	0	1	2	3	4
a_k	1	3	-1	0	0
b_k	0	1	1	0	0
c_k	0	1	4	2	-1

$$c_0 = a_0b_0 = 0$$
$$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 1$$
$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 4$$
$$c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 2$$
$$c_4 = a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 = -1$$

Ce qui donne alors :
$$\mathrm{PQ} = c_0 + c_1\mathrm{X} + c_2\mathrm{X}^2 + c_3\mathrm{X}^3 + c_4\mathrm{X}^4 = \mathrm{X} + 4\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^4.$$
Cette méthode est donc très fastidieuse! On écrira donc plutôt simplement :
$$\mathrm{PQ} = \left(1+3\mathrm{X}-\mathrm{X}^2\right)\left(\mathrm{X}+\mathrm{X}^2\right) = \mathrm{X}+\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}^2+3\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^4 = \mathrm{X}+4\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^4.$$

Preuve

- Pour la somme, constatons simplement que d'après la convention sur les coefficients, on a : $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} a_k\mathrm{X}^k$, $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} b_k\mathrm{X}^k$. Donc :
$$\mathrm{P}+\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} a_k\mathrm{X}^k + \sum_{k=0}^{\max(p,q)} b_k\mathrm{X}^k = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k+b_k)\mathrm{X}^k.$$
- Pour le produit, on doit également faire un calcul.
$$\begin{aligned}(\mathrm{PQ})(\mathrm{X}) &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k\mathrm{X}^k\right)\times\left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell\mathrm{X}^\ell\right)\\ &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell \mathrm{X}^{k+\ell}\\ &= \sum_{n=0}^{p+q}\left(\sum_{(k,\ell)/k+\ell=n} a_k b_\ell\right)\mathrm{X}^n\\ &= \sum_{n=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\mathrm{X}^n.\end{aligned}$$
réécriture : les monômes possibles sont $\mathrm{X}^0, \dots, \mathrm{X}^{p+q}$, et X^n provient de $\mathrm{X}^0\mathrm{X}^n, \mathrm{X}^1\mathrm{X}^{n-1}, \dots, \mathrm{X}^n\mathrm{X}^0$

Donc : $(\mathrm{PQ})(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{p+q}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\mathrm{X}^n$.
- Composition et multiplication par λ découlent directement de la définition.

Exemple 3 On note $\mathrm{P} = 1+3\mathrm{X}-\mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}+\mathrm{X}^3$. Pour chacun des calculs ci-dessous, conjecturer une formule reliant le degré avec celui de P et Q.
- Calculer $\mathrm{P}+\mathrm{Q}$.

- Calculer PQ.

- Calculer $P \circ Q, Q \circ P$. Qu'en déduire ?

Proposition 3 | Combinaison linéaire et dégré

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

1. Si $\deg Q < \deg P$, alors :
$$\deg(P+Q) = \deg P, \quad \mathrm{dom}(P+Q) = \mathrm{dom}(P).$$
2. $\deg(\lambda P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \neq 0, \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0, \end{cases} \quad \mathrm{dom}(\lambda P) = \lambda\, \mathrm{dom}\, P.$
3. En règle générale, $\left\{ \begin{array}{l} \deg P \leqslant n \\ \deg Q \leqslant n \end{array} \right. \implies \deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant n.$

Attention aux sommes

Puisque $(X^2+X+1)+(-X^2+X+1) = X+1$, la somme de deux polynômes de degré deux n'est pas forcément un polynôme de degré deux. On observe ici une chute de degré.

Remarque 5 L'utilisation conjointe des deux premiers résultats permet de calculer le degré de $\lambda P + \mu Q$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (P, Q) \in \mathbb{K}[X]$.

Preuve On note à nouveau $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Commençons par la somme.
   - Si $P = 0$ ou $Q = 0$, le résultat est évident.
   - Supposons que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. D'après l'expression du polynôme somme, on a : $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k = \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k$ puisque $\deg P > \deg Q$. Or $a_p \neq 0, b_p = 0$ donc $a_p + b_p \neq 0$, ce qui prouve que $\deg(P+Q) = \deg(P)$.
2. Le résultat est évident si $\lambda = 0$, on suppose donc $\lambda \neq 0$.
   - Si $P = 0$, alors $\lambda P = 0$ donc la formule est vérifiée.
   - Si $P \neq 0$, alors $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k$. Comme $a_n \neq 0, \lambda a_n \neq 0$ donc $\deg(\lambda P) = p = \deg(P)$.
3. Supposons que $\left\{ \begin{array}{l} \deg P \leqslant n \\ \deg Q \leqslant n \end{array} \right. \implies \deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant n$, alors les polynômes P, Q peuvent s'écrire sous la forme : $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k, Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.
   Donc : $(\lambda P + \mu Q) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$, ceci prouve que $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant n$.

Les propriétés sur le degré permettent d'énoncé un résultat de stabilité pour les polynômes de degré $\leqslant n$.

Corollaire 1 | Stabilité de $\mathbb{K}_n[X]$

- Soient $n \geqslant 1$, $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $P+Q$, PQ, et λP sont des éléments de $\mathbb{K}_n[X]$.
- L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est donc stable par addition, produit, composition et multiplication par un scalaire.

Note | *Nous dirons dans un futur chapitre que « $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel »*

Attention

La proposition précédente est fausse pour $\mathbb{K}_{=n}[X]$. Par exemple, puisque $X^2 + (-X^2) = 0$, la somme de deux polynômes de degré deux n'est pas forcément un polynôme de degré deux.

Preuve On a clairement $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}[X]$ puisque P, Q sont des polynômes. De plus,
$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg(\lambda P), \deg(\mu P)).$$
Or $\deg(\lambda P) \leqslant \deg P \leqslant n, \deg(\mu Q) \leqslant \deg Q \leqslant n$, donc $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant n$.

Proposition 4 | Produit, composition et degré

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q, \quad \mathrm{dom}(P \times Q) = \mathrm{dom}(P) \times \mathrm{dom}(Q).$
2. $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q \quad$ si Q n'est <u>pas</u> constant.

Remarque 6 Par récurrence immédiate, on déduit de la première propriété que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\deg(P^n) = n \deg P, \quad \mathrm{dom}(P^n) = (\mathrm{dom}\, P)^n.$$

Preuve On note à nouveau $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $Q=\sum_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Passons au produit.

- Si $P=0$ ou $Q=0$, on a $PQ=0$ donc $\deg(PQ)=-\infty$. Par ailleurs, $\deg(P)+\deg(Q)=-\infty$ donc $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$. La formule est démontrée dans ce cas.
- D'après l'expression du polynôme produit, on a : $PQ=\sum_{n=0}^{p+q} c_n X^n$, avec $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \in \mathbb{K}$ pour tout $n \in [\![0,p+q]\!]$. Cette écriture prouve déjà que $\deg(PQ)\leq p+q$, mais on veut une égalité. On regarde donc si $c_{p+q}\neq 0$:
$$\begin{aligned} c_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k \underbrace{b_{p+q-k}}_{=0 \text{ car } p+q-k>q} + a_p b_q + \sum_{k=p+1}^{p+q} \underbrace{a_k}_{=0 \text{ car } k>p} b_{p+q-k} \\ &= a_p b_q \neq 0. \end{aligned}$$
On a donc montré que $\deg(PQ)=p+q=\deg P+\deg Q$, et au passage que $\mathrm{dom}(PQ)=a_p b_q=\mathrm{dom}(P)\times\mathrm{dom}(Q)$.

2. Passons à la composée.

- Si $P=0$ et Q non constant alors $P\circ Q=0$ donc $\deg(P\circ Q)=-\infty$. Par ailleurs, $\deg(P)\times\deg(Q)=-\infty$ car $\deg Q\neq 0$ (Q n'est pas constant) donc $\deg(P\circ Q)=\deg(P)\times\deg(Q)$, la formule est démontrée dans ce cas.
- Supposons que $P\neq 0$ et Q non constant donc aussi non nul, on peut donc utiliser l'expression en somme pour les deux polynômes. D'après l'expression du polynôme composé, on a : $(P\circ Q)(X)=\sum_{n=0}^{p} a_n\left(\sum_{k=0}^{q} b_k X^k\right)^n$, c'est-à-dire :
$$(P\circ Q)(X)=\sum_{n=0}^{p} a_n\left(b_0+b_1X+\cdots+b_qX^q\right)^n.$$
Parmi tous les polynômes de la somme, celui de plus haut degré est celui obtenu pour $n=p$. Donc :
$$\begin{aligned} \deg(P\circ Q) &= \deg\left(a_p\left(b_0+b_1X+\cdots+b_qX^q\right)^p\right) && a_p\neq 0 \\ &= \left(b_0+b_1X+\cdots+b_qX^q\right)^p \\ &= p\times\deg\left(b_0+b_1X+\cdots+b_qX^q\right) && b_q\neq 0 \\ &= p\times q=\deg P\times\deg Q. \end{aligned}$$

Exemple 4 Déterminer le degré et le coefficient dominant de P. Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. $P=\left(1+X+X^2\right)^n-(X-1)^n$.

2. $P=\left(1+X+X^2\right)^n\times(X-1)^n$.

Dans une somme/différence, lorsque les polynômes ont même degré et que les formules précédentes ne s'appliquent pas, on revient à la définition du degré : le but est alors d'écrire les polynômes sous forme de somme.

Exemple 5

- Déterminer degré et coefficient dominant du polynôme $P=(X-2)^n-(X+5)^n$ pour $n=2$.
- Généraliser à $P=(X-2)^n-(X+5)^n$.

Proposition 5 | Équation-produit

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors : $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff \left(P = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \text{ou} \quad Q = 0_{\mathbb{K}[X]}\right)$.

Preuve

$\boxed{\Leftarrow}$ Évident.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $PQ = 0_{\mathbb{K}[X]}$, alors en prenant le degré nous avons : $\deg P + \deg Q = -\infty$, donc nécessairement un des deux degrés vaut $-\infty$ *i.e.* $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ — encore une bonne illustration de l'intérêt de la convention « $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$ ».

Remarque 7 On a l'impression de n'avoir rien fait dans cette preuve : en fait le travail principal réside dans la propriété de degré d'un produit établie plus haut.

Attention

Ce résultat est faux pour deux fonctions quelconques non polynomiales. Par exemple, pour f la fonction valant 1 sur $\mathbb{R}^+$, 0 sur $\mathbb{R}^{-\star}$, f la fonction valant 0 sur $\mathbb{R}^+$, 1 sur $\mathbb{R}^{-\star}$. On a bien $fg = 0$ et pourtant aucune des deux fonctions n'est identiquement nulle.

Méthode Résoudre une équation polynomiale

Pour trouver tous les polynômes vérifiant une certaine condition, on :

- commence par passer au degré afin de trouver des conditions sur celui-ci.
- Dans un second temps, on essaie de trouver une condition sur les coefficients de P en injectant l'expression « $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ » dans le problème pour le n trouvé à la première étape.

Exemple 6 (Équation polynômiale) Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation polynomiale $P \circ P = P$.

1.3. Informatique

Comment coder un polynôme en Python ? Puisqu'il est entièrement déterminé par la donnée de ses coefficients, il suffit par exemple de les ranger par ordre croissant de degré et considérer en convention que le polynôme nul correspond à la liste vide. Par exemple, le polynôme $P = X^2 + 2$ peut être codé par la liste `P = [2, 0, 1]`. On peut en déduire alors facilement une fonction qui calcule le degré ou encore qui évalue le polynôme en un x.

Codage informatique d'un polynôme, degré, évaluation

```python
Inf = float('inf') # correspond à l'infini des maths

def degre(P):
    """
    retourne le degré de P
    """
    if len(P) == 0:
        return -Inf
    else:
        return len(P) - 1

def evalu(P, x):
    S = 0
    for i in range(len(P)):
```

```
        S += P[i]*x**i
    return S
```

Par exemple si $P = 1 + 2X + 3X^2$, alors :

```
>>> P = [1, 2, 3]
>>> degre(P)
2
>>> evalu(P, 1)
6
>>> evalu(P, 0) # coefficient constant
1
```

Comment coder à présent les opérations élémentaires sur les polynômes? Par exemple, voici comment s'y prendre pour la multiplication par X d'un polynôme (on constate que cela décale vers la droite tous les coefficients). Il faut donc simplement ajouter 0 en début de liste.

```
def mult_X(P):
    """
    retourne la liste correspondant à X.P
    """
    return [0] + P
```

Par exemple,

```
>>> P = [2, 0, 1]
>>> mult_X(P)
[0, 2, 0, 1]
```

Ceci est cohérent puisque $P = X^2 + 2$, donc $XP = X^3 + 2X$ qui correspond bien à la liste renvoyée. On anticipe brièvement la définition qui suit (du polynôme dérivé) : si $P = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell \in \mathbb{K}[X]$, avec $n \geqslant 1$, on définit un nouveau polynôme P' par :

$$P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}.$$

On peut également coder cette fonction en Python qui devra prendre en entrée une liste `[a_0, a_1, ..., a_n]` et retourner `[a_1, 2 a_2, 3 a_3, ..., n a_n]`.

■■ **Codage informatique du polynôme dérivé**

```
def derive(P):
    """
    retourne la liste correspondant à P'
    """
    P_der = []
    for i in range(1, len(P)):
        P_der.append(i*P[i])
    return P_der
```

Par exemple,

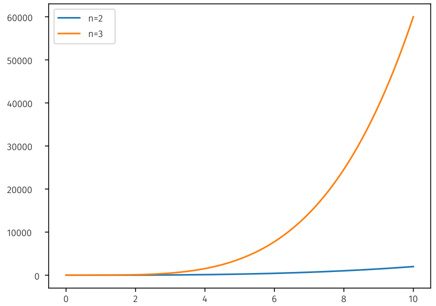
```
>>> P = [2, 0, 1]
>>> derive(P)
[0, 2]
>>> degre(derive(P))
1
```

Exemple 7 On peut utiliser les fonctions python `mult_X` et `derive` pour créer une fonction `calcul_P(n)` qui retourne P_n sous forme de liste, défini dans l'Exemple 10.

```
def calcul_P(n):
    P = [0, 1]
    for _ in range(1, n+1):
        P = mult_X(mult_X(derive(P)))[:]
        # [:] : méthode pour faire une copie de liste en dur
        P[0] += 1 # du au +1 dans la relation de récurrence
    return P
>>> calcul_P(2)
[1, 0, 0, 2]
>>> calcul_P(3)
[1, 0, 0, 0, 6]
```

Et même tracer son graphe sur $[0, 10]$ si on veut.

```
P2 = calcul_P(2)
P3 = calcul_P(3)
X = np.linspace(0, 10, 10**3)
Y2 = [evalu(P2, x) for x in X]
Y3 = [evalu(P3, x) for x in X]
plt.plot(X, Y2, label="n=2")
plt.plot(X, Y3, label="n=3")
plt.legend()
```



2. POLYNÔME DÉRIVÉ

Les polynômes ont été définis dans ce chapitre comme des fonctions d'un type particulier, donc ils héritent en particulier de la notion de dérivation des fonctions connue depuis longtemps si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. En revanche, pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, comme nous ne savons pas dériver les fonctions de la variable complexe, la définition *infra* sera finalement plus générale.

2.1. Généralités

Définition 4 | Dérivation

Soit $P=\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell \in \mathbb{K}[X]$, avec $n \geqslant 1$.

- On appelle *polynôme dérivé de* P le polynôme : $P' = \sum_{\ell=1}^{n} \ell a_\ell X^{\ell-1}$.
- On appelle *polynôme dérivé seconde de* P le polynôme :
  $(P'' = \sum_{\ell=2}^{n} \ell(\ell-1)a_\ell X^{\ell-2}$.
- Soit $k\in\mathbb{N}$. On appelle *polynôme dérivé k fois* de P le polynôme
  $P^{(k)} = \sum_{\ell=k}^{n} \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)a_\ell X^{\ell-k}$.

Note *Il n'est pas utile de distinguer le cas $k\leqslant n$ de $k>n$ (si $k>n$ on aimerait poser $P^{(k)}=0$), puisqu'alors l'ordre des bornes de la somme font qu'elle est nulle par convention.*

Remarque 8 On prendra garde d'éviter l'expression $P' = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1}$ même si le terme d'ordre $k=0$ est nul. En effet, nous n'avons pas donné un sens à $0\times\frac{1}{X}$, ce n'est pas un élément de $\mathbb{K}[X]$. *(mais de $\mathbb{K}(X)$, l'ensemble des fractions rationnelles)*

Proposition 6 | Dérivations et opérations

Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors :

1. $(\lambda P)' = \lambda P'$,
2. $(P+Q)' = P'+Q'$,
3. $(PQ)' = P'Q+PQ'$,
4. $(P\circ Q)' = P'\circ Q\times Q'$.

Preuve Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: comme pour nous les polynômes sont des fonctions, les formules ci-dessus découlent donc des formules déjà connues pour les fonctions réelles de la variable réelle. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, il faut les vérifier à l'aide des expressions avec coefficients, nous l'admettons.

Exemple 8 $(1+3X-X^2)' = 3-2X$ et $(20)'=0$.

Exemple 9 Soient $Q=\sum_{k=0}^{5} X^k$ et $R=\sum_{k=0}^{3} kX^k$. Donner le degré et le coefficient dominant de $P=RQ-Q'(X^2)$.

Exemple 10 (Suite de polynômes) On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $P_1=X$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^\star, P_{n+1}=X^2P_n'+X^{n-1}$.

1. Calculer P_2, P_3.

2. Conjecturer les valeurs du degré et du coefficient dominant de P_n, puis le montrer par récurrence.

2.2. Dérivation et degré

On déduit directement de la définition, la propriété de degré d'une dérivée.

Proposition 7 | Degré d'un polynôme dérivé

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$, alors
$$\deg\left(P^{(k)}\right) = \begin{cases} \deg P - k & \text{si } k \leqslant \deg P, \\ -\infty & \text{si } k > \deg P. \end{cases}$$
- Par conséquent, si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\quad \deg P \leqslant n \iff P^{(n+1)} = 0 \quad \left(\iff P \in \mathbb{K}_n[X]\right)$.

Preuve

- Immédiat par définition du polynôme dérivé.
- $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\deg P \leqslant n$, alors $\deg\left(P^{(n+1)}\right) = -\infty$ d'après la première partie de la définition.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $P^{(n+1)} = 0$.
  Supposons par l'absurde que $n+1 \leqslant \deg P$, alors $\deg\left(P^{(n+1)}\right) = -\infty = \deg P - (n+1)$, donc $\deg P = -\infty$ — contradiction (car $n+1 \leqslant \deg P$). Donc forcément $n+1 > \deg P$ c'est-à-dire $\deg P \leqslant n$ puisque $\deg P$ est un entier.

Exemple 11 Calculer les dérivées successives de $P = X^4 - 3X^3 + iX^2 - 1$, en commençant par analyser lesquelles sont nulles.

Puisque P *est de degré* 4, *alors* $P^{(k)} = 0$ *dès que* $k \geqslant 5$. *De plus :*
$$P' = 4X^3 - 9X^2 + 2iX, \quad P'' = 12X^2 - 18X + 2i, \quad P''' = 24X - 18, \quad P^{(4)} = 24.$$

Proposition 8 | Dérivées de $(X-a)^n$

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Alors :
$$\left[(X-a)^n\right]^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}(X-a)^{n-k} & \text{si } k \leqslant n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Preuve Le polynôme $(X-a)^n$ est de degré n donc si $k > n$, alors $\left[(X-a)^n\right]^{(k)} = 0$. Supposons que $k \leqslant n$, alors :
$$\left[(X-a)^n\right]^{(k)} = n\left[(X-a)^{n-1}\right]^{(k-1)} = n(n-1)\left[(X-a)^{n-2}\right]^{(k-2)},$$
puis de manière générale on obtient :
$$\left[(X-a)^n\right]^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}(X-a)^{n-k}.$$
Montrons proprement ce résultat par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$.

Exemple 12 Calculer les polynômes ci-après, $n \in \mathbb{N}$.

1. $(X^2)'$,
2. $(X^2)^{(2)}$,

3. $(X^2)^{(3)}$,

4. $(X^n)^{(0)}$,

5. $(X^n)'$,

6. $(X^n)^{(2)}$,

7. $(X^n)^{(3)}$,

8. $(X^n)^{(n)}$,

9. $(X^n)^{(n+1)}$.

Exemple 13 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré et coefficient dominant de $Q = 2X^{n+1}P' - P(X^2)$.

Exemple 14 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg P = n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 4$. Déterminer le degré et coefficient dominant de $Q = 4XP - X^2P'$.

2.3. Unicité des coefficients

Posons-nous à présent la question suivante : existe-il plusieurs familles de coefficients possibles $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ telles que

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad ?$$

La réponse est non, un polynôme est entièrement déterminé par la suite de ses coefficients (réels ou complexes).

Proposition 9 | Un polynôme est déterminé par ses coefficients

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$.

1. Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, nous avons : $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
2. Par conséquent :
   - $P = 0 \iff a_0 = \ldots = a_n = 0$.
   - la suite de coefficients $a_0, \ldots, a_n$ est unique.
   - Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré

et mêmes coefficients.

Preuve

1. Exprimons déjà les coefficients de P en fonction des dérivées successives. En effet, pour tout entier $k \in [\![0\,,\,n]\!]$,
$$\mathrm{P}^{(k)}(\mathrm{X}) = \left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \mathrm{X}^\ell\right)^{(k)} = \sum_{\ell=k}^{n} a_\ell \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1)\mathrm{X}^{\ell-k}.$$
Nous obtenons :
$$\mathrm{P}^{(k)}(0) = \sum_{\ell=k}^{n} a_\ell \ell(\ell-1)\dots(\ell-k+1) \times \underbrace{0^{\ell-k}}_{=0 \text{ si } \ell>k} = a_k \times k! + 0.$$
Les coefficients sont donc donnés par la formule suivante $\quad \forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad a_k = \dfrac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{k!}$.
2.
   - $\boxed{\Longleftarrow}$ Évident.

     $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\mathrm{P} = 0$, alors pour tout $k \in [\![0\,,\,n]\!]$, $\dfrac{\mathrm{P}^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{0}{k!} = 0 = a_k$.

     L'équivalence est donc démontrée.
   - Supposons qu'il existe par ailleurs $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que : $\quad \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathrm{X}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$.

     Alors : $\quad 0 = \sum_{k=0}^{n} 0.\mathrm{X}^k = \sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k)\mathrm{X}^k$, donc d'après ce qui précède $0 = b_k - a_k$ pour tout $k \in [\![0\,,\,n]\!]$. C'est terminé.
   - Notons de plus $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{q} b_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on suppose par exemple que $q \geqslant n$ sans perte de généralité. Alors :
$$\begin{aligned}
\mathrm{P} = \mathrm{Q} &\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathrm{X}^k + \sum_{k=n+1}^{q} b_k \mathrm{X}^k \qquad \textit{unicité des coefficients} \\
&\Longleftrightarrow \forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad a_k = b_k, \quad \forall k \in [\![n+1\,,\,q]\!], \quad b_k = 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall k \in [\![0\,,\,n]\!], \quad a_k = b_k, \quad \underline{\textbf{et}} \quad \deg \mathrm{Q} = n = \deg \mathrm{P}.
\end{aligned}$$

Exemple 15
- $1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 \neq \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$: ils ont même degré, mais 1 coefficient est différent,
- $1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 = \cos(0) + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$: ils ont même degré et mêmes coefficients.

3. RACINES

On se préoccupe à présent des points d'annulation d'un polynôme.

1. Premier point : on voit très clairement quel est leur nombre pour des petits degrés; une fonction affine (un polynôme de degré un) s'annule en un point, un trinôme s'annule toujours au plus deux fois dans $\mathbb{C}$. En fait, tout polynôme de degré n s'annulera au plus n fois. Des propriétés sur le nombre de racines semblent donc exister.
2. Second point : lorsque λ annule un polynôme, alors ledit polynôme sera de la forme $(\mathrm{X} - \lambda)\mathrm{Q}$ où $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Cette « factorisation » est uniquement vraie pour les polynômes — pas question d'écrire cela pour d'autres types de fonctions! (un contre-exemple sera donné plus bas)

Commençons par une notation que l'on utilisera dans toute la section.

Définition 5 | Relation de divisibilité
Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors on dit que P *divise* Q s'il existe un polynôme $\mathrm{R} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que : $\quad \mathrm{PR} = \mathrm{Q}$. On notera $\mathrm{P} \mid \mathrm{Q}$.

Exemple 16
- $\mathrm{X} - 1 \mid \mathrm{X}^2 - 1$ car $\mathrm{X}^2 - 1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$.
- Tous les polynômes divisent 0.
- $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \quad 0 \mid \mathrm{P} \Longleftrightarrow \mathrm{P} = 0$.

Exemple 17 Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{X}^2 \mid (\mathrm{X}+1)^n - n\mathrm{X} - 1$.

3.1. Généralités

Définition 6 | Racine
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *racine* de P si :

$$P(\lambda) = 0.$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: on parle de *racine réelle* si on a de plus $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 18
- 1 est une racine de $X^2 - 1$, i est une racine de $X^2 + 1$,
- 0 (polynôme nul) a une infinité de racines, 5 (polynôme constant égal à 5) n'a pas de racine.
- $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est racine de $X^2 + X + 1$:

Proposition 10 | Degré impair et existence d'une racine réelle
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré impair. Alors P possède une racine réelle.

Attention
Cette propriété est très classique : il faut bien en connaître la démonstration. Il n'y a en revanche pas nécessairement unicité.

Preuve *(Point clef — **théorème des valeurs intermédiaires**)*
Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto P(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + \cdots + a_0,$$

avec $a_0, \dots, a_{2p+1} \in \mathbb{K}$ les coefficients de P, et supposons par exemple que $a_{2p+1} > 0$ — sinon on applique le même raisonnement à $-P$. Alors :

- *P est une fonction continue, et*
- *En mettant le terme de plus haut degré en facteur :* $\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} \left(a_{2p+1}x^{2p+1}\right) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(a_{2p+1}x^{2p+1}\right) = -\infty$ *puisque* $a_{2p+1} > 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $P(\lambda) = 0$. *Autrement dit,* P *possède une racine réelle.*

3.2. Racines & Factorisation

Passons maintenant à la propriété de factorisation constatée plus haut sur des exemples.

Proposition 11 | Caractérisation par factorisation
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda \text{ est racine de } P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad (X - \lambda) \times Q = P \quad \Big(\iff X - \lambda \mid P\Big).$$

Remarque 9 Le polynôme Q apparaissant dans la propriété est alors de degré $\deg Q = \deg P - 1$.

Exemple 19 (Contre– ... pour une fonction non polynomiale) La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x - 1$ s'annule en zéro et pourtant n'est pas de la forme $x \longmapsto xQ(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. En effet, si un tel polynôme existait, alors on aurait :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad Q(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

qui n'est pas un polynôme car non continue en zéro.

Preuve
$\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat, évaluer l'identité en λ.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit λ une racine de P et notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_k \in \mathbb{K}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $P(X) = P(X) - 0 = P(X) - P(\lambda)$. Dès lors :

$$\begin{aligned} P(X) = P(X) - P(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k - \lambda^k\right) \quad \textit{téléscopage } (\star) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (X - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i-1} \\ &= (X - \lambda) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i-1}}_{:=Q} = (X - \lambda)Q. \end{aligned}$$

Justifions la formule $(\star)$, c'est-à-dire montrons que : $(X - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i-1} = X^k - \lambda^k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En effet, on a en développant le facteur :

$$\begin{aligned} (X - \lambda) \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} X^{i+1} \lambda^{k-i-1} - \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i} \quad \textit{changement d'indice } j = i+1 \textit{ dans la première somme} \\ &= \sum_{j=1}^{k} X^j \lambda^{k-j} - \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i} \quad \textit{renommage} \\ &= \sum_{i=1}^{k} X^i \lambda^{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} X^i \lambda^{k-i} \quad \textit{téléscopage} \\ &= X^k - \lambda^k. \end{aligned}$$

Exemple 20 Notons $P = 4X^5 - 3X^4 + 10X^2 + X - 122$.

1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(X - 2)Q = P$.

2. Trouver un tel polynôme Q par le calcul.

Corollaire 2 | Caractérisation par factorisations

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sont racines distinctes de P}$$

$$\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad \left[\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)\right] \times Q = P \quad \left(\iff \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) \mid P\right).$$

Preuve Par récurrence sur n, le nombre de racines.

Initialisation. Si $n = 1$, c'est le théorème précédent.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie pour n racines ($n \geq 1$). Soit maintenant P admettant $n+1$ racines notées $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$. En utilisant une propriété précédente, on peut écrire $P = (X-\lambda_{n+1})Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. En évaluant en λ_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on déduit :

$$P(\lambda_i) = 0 = (\lambda_i - \lambda_{n+1})Q(\lambda_i),$$

or $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ car les racines sont supposées distinctes, donc : $Q(\lambda_i) = 0$. Par hypothèse de récurrence, on peut alors écrire $Q = \left(\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)\right)R$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$, et donc :

$$P = (X-\lambda_{n+1})Q = (X-\lambda_{n+1}) \times \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i) \times R = \prod_{i=1}^{n+1}(X-\lambda_i) \times R.$$

La propriété est donc héréditaire, on déduit donc le résultat par principe de récurrence.

Ce corollaire nous permettra d'établir bientôt un résultat crucial : tout polynôme possède au plus n racines distinctes.

3.3. Multiplicité

Dans la Proposition 11, rien ne nous dit que λ n'est pas encore racine de Q, c'est-à-dire Q n'est pas encore lui-même de la forme $(X-\lambda)\widetilde{Q}$ avec $\widetilde{Q} \in \mathbb{K}[X]$, auquel cas on aurait $P = (X-\lambda)^2\widetilde{Q}$. Pour quantifier la puissance maximale apparaissant dans l'exposant de $X - \lambda$, on introduit la notion de *multiplicité*.

Définition/Proposition 1 | Multiplicité

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *racine d'ordre k* (ou de *multiplicité k*) de P si l'une des propositions ci-dessous est vérifiée :

$$(X-\lambda)^k \mid P \quad \text{et} \quad (X-\lambda)^{k+1} \nmid P,$$

$$\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ (X-\lambda)^k Q = P \quad \text{et} \quad Q(\lambda) \neq 0.$$

Autrement dit, l'ordre d'une racine est la plus grande puissance k telle que P soit factorisable par $(X-\lambda)^k$ dans $\mathbb{K}[X]$.

- On note $k = \mathrm{Mult}_\lambda(P)$.
- Si la multiplicité de λ est 1,2,3, on parle de racine *simple, double, triple*.
- On dit qu'une racine est *multiple* si elle est de multiplicité au moins 2.

Remarque 10 (La multiplicité existe toujours)

- Comme λ est une racine de P, $E = \{n \in \mathbb{N} \mid (X-\lambda)^n | P\}$ est non vide, puisque $1 \in E$. D'autre part, E est majoré par le degré de P. Donc cet ensemble $E \subset \mathbb{N}$ admet bien un plus grand élément qui est notre multiplicité.
- Pourquoi supposer P non nul ? Étant donné que $(X-\lambda)^k$ divise P pour tout k, toutes les racines de 0 seraient de multiplicité « infinie ». Plus précisément, l'ensemble E précédent ne serait alors pas majoré.
- On convient que si l'ordre est 0, λ n'est pas une racine de P.

Preuve Montrons l'équivalence des deux propositions.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que : $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ (X-\lambda)^k Q = P$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. Alors $(X-\lambda)^k \mid P$. Supposons par l'absurde que $(X-\lambda)^{k+1} \mid P$, alors il existe $\widetilde{Q} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(X-\lambda)^{k+1}\widetilde{Q} = P$. Alors :

$$(X-\lambda)^k\left((X-\lambda)\widetilde{Q}\right) = P = (X-\lambda)^k Q \implies \left[(X-\lambda)^k\right]\left((X-\lambda)\widetilde{Q} - Q\right) = 0.$$

C'est une équation-produit dans $\mathbb{K}[X]$, donc $(X-\lambda)^k = 0$ ou $(X-\lambda)\widetilde{Q} - Q = 0$. Or, $X - \lambda \neq 0$, donc : $(X-\lambda)\widetilde{Q} = Q$ et $Q(\lambda) = 0$ — contradiction.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Notons $Q \in \mathbb{K}[X]$, $(X-\lambda)^k Q = P$, montrons que $Q(\lambda) \neq 0$. Si par l'absurde on avait $Q(\lambda) = 0$, alors il existerait $\widetilde{Q} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = (X-\lambda)\widetilde{Q}$, donc $(X-\lambda)^k Q = (X-\lambda)^{k+1}\widetilde{Q} = P$ — contradiction.

Définition/Proposition 2 | Multiplicité « au moins k »

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une racine de *multiplicité au moins k* de P si elle est de multiplicité $\ell \geqslant k$, *i.e.* si l'une des propositions ci-dessous est vérifiée :

$$\mathrm{Mult}_\lambda(P) \geqslant k \iff (X-\lambda)^k \mid P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ (X-\lambda)^k Q = P.$$

Exemple 21

- Si $P = X^2(X-1)$: alors 2 est racine de multiplicité 2, car $X^2 \mid P$ et $Q = X - 1$ vérifie $Q(0) \neq 0$.
- Déterminer les racines de $P = (X-1)^4(X+1)^2(X^2+1) \in \mathbb{R}[X]$ et leur multiplicité.

Nous allons constater que, quand un polynôme est factorisé, on peut lire directement les racines ainsi que leur multiplicité.

Proposition 12 | Lire les multiplicités sur une forme factorisée

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\boxed{P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}}$ tel que : $\quad P(X) = \alpha \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$, où $\alpha = \mathrm{dom}(P) \in \mathbb{K}$, $\lambda_i \in K$ (avec $r \in \mathbb{N}^\star$) supposés deux à deux distincts, $m_i \in \mathbb{N}^\star$ pour tout $i \in [\![1\,,\,r]\!]$.
Alors :

- les racines de P sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, et :
- pour tout $[\![1\,,\,r]\!]$, $\quad \lambda_i$ est de multiplicité m_i.

Preuve En résolvant $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, il est évident que les racines sont bien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Soit $i \in [\![1\,,\,r]\!]$, montrons que λ_i est de multiplicité m_i.

Corollaire 3 | Caractérisation par factorisations et racines multiples

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\boxed{P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\forall i \in [\![1\,,\,r]\!],\ \lambda_i \text{ est racine de multiplicité } m_i \text{ de P}$$

$$\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X],\quad \left[\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{m_i}\right] \times Q = P \quad \left(\iff \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i} \mid P\right).$$

Ce corollaire est le parfait analogue pour les racines multiples de la version « racines » simples déjà vue (Corollaire 2).

Preuve Par récurrence sur r, le nombre de racines.

Initialisation. Si $r = 1$, c'est la proposition précédente.

Hérédité. Supposons que la propriété soit vraie pour r racines ($r \geq 1$). Soit P admettant $r+1$ racines $\lambda_1, \cdots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ de multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_r, m_{r+1}$.

- En utilisant une propriété précédente, on peut écrire $P = (X-\lambda_{r+1})^{m_{r+1}} Q_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_1(\lambda_{r+1}) \neq 0$.
- Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence à Q_1, il s'agit à présent de montrer que : $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont racines de multiplicités $m_1, \dots, m_r$.
  Soit donc $i \in [\![1\,,\,r]\!]$ et notons μ_i la multiplicité (éventuellement nulle) de λ_i en tant que racine de Q_1, c'est-à-dire $Q_1 = (X-\lambda_i)^{\mu_i} Q_2$ avec $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_2(\lambda_i) \neq 0$. Alors :
  $$P = (X-\lambda_{r+1})^{m_{r+1}} Q_1 = (X-\lambda_{r+1})^{m_{r+1}} (X-\lambda_i)^{\mu_i} Q_2 = (X-\lambda_i)^{\mu_i} \underbrace{[(X-\lambda_{r+1})^{m_{r+1}} Q_2]}_{:=Q_3}.$$
  Alors $Q_3(\lambda_i) \neq 0$ puisque les racines sont distinctes et $Q_2(\lambda_i) \neq 0$ par hypothèse, donc μ_i est finalement la multiplicité de λ_i en tant que racine <u>**de** P</u> donc $\mu_i = m_i$, on a bien montré que λ_i est racine de Q_1 de multiplicité m_i, pour tout $i \in [\![1\,,\,r]\!]$.

Par hypothèse de récurrence appliquée à Q_1, on peut alors écrire $Q_1 = \left(\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}\right) \times R$ avec $R \in \mathbb{K}[X]$, et donc :

$$P = (X-\lambda_{r+1})^{m_{r+1}} Q_1 = (X-\lambda_{r+1})^{m_{r+1}} \times \left(\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}\right) \times R = \left(\prod_{i=1}^{r+1}(X-\lambda_i)^{m_i}\right) \times R.$$

La propriété est donc héréditaire, on déduit donc le résultat par principe de récurrence.

Exemple 22 On retrouve alors le résultat de l'exemple précédent.

- Pour $P = X^2(X-1)$, alors 0 est racine double, 1 est racine simple.
- Pour $P = (X-1)^4(X+1)^2(X^2+1) = (X-1)^4(X+1)^2(X-i)(X+i) \in \mathbb{R}[X]$, alors 1 est racine de multiplicité 4, -1 de multiplicité 2, i de multiplicité 1 et $-i$ de multiplicité 1.

Exemple 23 Analyser les racines de $aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, et leur multiplicité.

Caractérisation à l'aide du polynôme dérivé. Si l'on considère $P = X^2$, on voit que 0 est une racine de multiplicité 2. Alors :

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad \text{alors que} \quad P''(0) = 2 \neq 0.$$

Ce fait s'étend à n'importe quel polynôme et caractérise même les racines multiples.

Proposition 13 | Caractérisation à l'aide du polynôme dérivé

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\boxed{P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- λ est une racine de multiplicité **au moins** $k \in \mathbb{N}$ de P
$$\iff \forall i \in [\![0\,, k-1]\!], \quad P^{(i)}(\lambda) = 0.$$
- λ est une racine de multiplicité $k \in \mathbb{N}$ de P
$$\iff \left(\forall i \in [\![0\,, k-1]\!], \quad P^{(i)}(\lambda) = 0\right) \; \underline{\textbf{et}} \; P^{(k)}(\lambda) \neq 0.$$

Nous admettons cette proposition, dont la preuve la plus simple nécessite l'utilisation d'une formule hors-programme : la formule de Taylor pour les polynômes.

Remarque 11 En cas de doute sur la mémorisation de cette proposition, toujours repenser par exemple à X^2 qui a été présenté en introduction. Cela vous aidera à retenir quelles dérivées doivent s'annuler.

Exemple 24 Notons $P = X^7 - 3X^5 + 2X^4 - X^3$, alors 0 est racine de multiplicité trois.

En effet, $P(0) = 0$ *et* $P' = 7X^6 - 15X^4 + 8X^3 - 3X^2, P'' = 42X^5 - 45X^3 + 24X^2 - 6X, P''' = 210X^4 - 135X^2 + 48X - 6$, *donc* $P'(0) = P''(0) = 0$ *mais* $P'''(0) = -6 \neq 0$.

Exemple 25 Déterminer la multiplicité m_λ de λ pour P dans chaque cas, puis trouver $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $\quad P = (X-\lambda)^{m_\lambda} Q$.

- $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$, $\lambda = 2$.

- $Q = X^5 + 6X^4 + 11X^3 + 11X^2 + 6X + 1$, $\lambda = -1$.

- $R = X^4 + 4X^3 - 8X^2 + 4X - 1$, $\lambda = 2$.

Exemple 26 Retrouver que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1.$

Exemple 27 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1. $P' = P - \frac{X^n}{n!}$,

Par linéarité de la dérivation, nous avons $P' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = P - \frac{X^n}{n!}$.

2. On déduit que les racines de P sont simples.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *une racine de* P, *alors si* λ *était une racine multiple, nous aurions* $P'(\lambda) = 0 = 0 - \frac{\lambda^n}{n!}$ *d'après la première question, donc* $\lambda = 0$, *or* 0 *n'est pas racine de* P. *D'où une contradiction et la non-existence d'une racine multiple pour* P.

3.4. Comptage de racines

On termine à présent le chapitre par probablement l'argument qui revient le plus souvent dans les exercices : le comptage des racines et la comparaison au degré.

Théorème 1 | Comptage de racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Si P est non nul, alors P possède au plus $\deg P$ racines comptées avec multiplicité.
- En contraposant : si P possède plus de racines comptées avec multiplicité que son degré, alors il est nul.

Remarque 12

- « Compter avec multiplicité » signifie par exemple que si 0 est racine double, on le comptera deux fois dans le listing des racines. Exemple : le polynôme $X^4(X-1)^2$ possède 6 racines comptées avec multiplicité (cardinal de l'ensemble $\{0,0,0,0,1,1\}$).
- On peut utiliser le théorème précédent pour prouver simplement qu'une fonction donnée n'est pas polynomiale, par exemple la fonction cos n'est pas polynomiale : en effet, si elle l'était elle serait nulle car elle s'annule une infinité de fois, ce qui n'est pas le cas. L'argument reste bien sûr valable pour sin, tan *etc.*.

Preuve Montrons le premier point, le second s'en déduit comme indiqué par contraposée. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines de P, $r \geqslant 1$, et $m_1, \dots, m_r$ les multiplicités associées. Alors d'après le Corollaire 3, comme P est non nul, on déduit :

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad \left[\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)^{m_i}\right] \times Q = P.$$

En passant au degré, on obtient : $\sum_{i=1}^{r} m_i + \deg Q = \deg P$. Or $\deg Q \neq -\infty$ puisque $Q \neq 0$ comme $P \neq 0$. Donc $\deg Q = \deg P - \sum_{i=1}^{r} m_i \geqslant 0$, d'où l'on tire : $\deg P \geqslant \sum_{i=1}^{r} m_i$. Le résultat est alors prouvé car le nombre de racines comptées avec multiplicité est exactement $\sum_{i=1}^{r} m_i$.

Corollaire 4 | Cas d'un nombre infini de racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{D}$ un sous-ensemble infini de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\forall x \in \mathscr{D}, \quad P(x) = 0 \implies P = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad \big(\text{c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = 0\big).$$

Remarque 13 Il suffit que l'ensemble $\mathscr{D}$ soit infini pour que le résultat s'applique, aussi petit soit-il. Par exemple si un polynôme s'annule sur $]-10^{23}, 10^{23}[$, il est nul partout.

Preuve Puisque P est nul sur $\mathscr{D}$, il possède une infinité de racines donc *a fortiori* en possède plus que son degré. Il est donc nul (c'est-à-dire $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}$).

Attention

Ces résultats sont caractéristiques des polynômes, pas question de les utiliser pour d'autres fonctions (voir la remarque précédente pour cos, sin, tan).

Méthode Montrer qu'un polynôme est nul

Pour montrer qu'un polynôme est nul, on peut au choix :

1. montrer que tous ses coefficients sont nuls,
2. montrer qu'il admet plus de racines que son degré (en particulier s'il en admet une infinité).

Le plus souvent, on utilise **2** pour en déduire la nullité de tous les coefficients.

Méthode Montrer que deux polynômes sont égaux

Pour montrer que deux polynômes sont égaux, on peut au choix :

1. montrer que leurs coefficients sont identiques,
2. montrer que la différence admet plus de racines que son degré (en particulier si elle en admet une infinité).

Exemple 28 Trouver deux réels a, b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}, \quad \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}.$$

En déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ sur un domaine à préciser.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}, \quad \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} \\
\iff &\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}, \quad \frac{1}{\cancel{(x+1)(x-2)}} = \frac{(a+b)x+(b-2a)}{\cancel{(x+1)(x+2)}} \\
\iff &\mathrm{P} = (a+b)\mathrm{X} + (b-2a) \textit{ est nul sur } \mathbb{R}\backslash\{-1,2\} \\
\iff &\mathrm{P} = 0_{\mathbb{R}[\mathrm{X}]} \\
\iff &a+b=0, \quad b-2a=1 \\
\iff &a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

On déduit alors qu'une primitive est :

$$x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\} \longmapsto \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| = \boxed{\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}.$$

Exemple 29 Soient $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. A-t-on $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ dans les cas suivants ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$?

Le polynôme $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ possède alors tous les réels comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Donc $\mathrm{P}-\mathrm{Q} = 0$ et $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

2. $\forall x \in]a, b[, \quad a < b, \quad \mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x)$? La différence $b-a$ est-elle importante ?

Le polynôme $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$ possède alors tous éléments de $]a, b[$ comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Donc $\mathrm{P}-\mathrm{Q} = 0$ et $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$. La différence $b-a$ (i.e. la longueur de l'intervalle) n'est pas importante étant donné que $]a, b[$ est toujours un ensemble infini.

Exemple 30 Il n'existe pas de polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{P}(n) = \sqrt[3]{n^2+1}.$$

Supposons qu'un tel polynôme existe.

Alors $\mathrm{P}^3(n) - (n^2+1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc le polynôme $\mathrm{P}^3 - \mathrm{X}^2 - 1$ possède tous les entiers comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Ainsi, $\mathrm{P}^3 - \mathrm{X}^2 - 1 = 0$ et $\mathrm{P}^3 = \mathrm{X}^2 + 1$. En passant au degré on trouve $3\deg \mathrm{P} = 2$ si $\mathrm{P} \neq 0$ donc c'est une contradiction. Mais $\mathrm{P} = 0$ ne convient pas non plus car $0 \neq \sqrt[3]{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il n'existe donc pas de polynôme comme annoncé.

Exemple 31 **(La conjugaison n'est pas polynomiale)** Il n'existe pas de polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad \mathrm{P}(z) = \overline{z}$.

Supposons qu'un tel polynôme existe. Alors $\mathrm{P}(x) - x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc le polynôme $\mathrm{P}-\mathrm{X}$ possède tous les réels comme racines, donc en possède une infinité et a fortiori plus que son degré. Ainsi, $\mathrm{P}-\mathrm{X} = 0$ i.e. $\mathrm{P} = \mathrm{X}$. On aurait alors :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(z) = z = \overline{z}.$$

Ce qui est clairement une contradiction, car il existe des complexes non réels.

4. FACTORISATION

Nous avons vu que chercher des racines pouvait nous aider à factoriser un polynôme. Nous allons d'abord un résultat général qui nous dit que tout polynôme s'écrit sous une forme factorisée dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ par des polynômes de degré 1. Ce résultat sera admis, la plupart des démonstrations dépassent largement les programmes de CPGE.

4.1. Généralités & Méthode

Théorème 2 | D'Alembert-Gauß
Tout polynôme P non constant de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{P} = \mathrm{dom}(\mathrm{P}) \times \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_i),$$

avec : $\quad n = \deg \mathrm{P} \quad$ et $\quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les racines de P comptées avec multiplicité.

Remarque 14

- Il n'y a aucune raison que les racines soient réelles, on seulement « $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ » dans le résultat.
- Le Théorème 2 a donc pour conséquence que tout polynôme possède une racine complexe. On appelle aussi parfois ce théorème le théorème fondamental de l'algèbre (bien que la plupart de ses preuves soient analytiques).
- Ce théorème a été énoncé pour la première fois sous cette forme par Jean Le Rond D'Alembert en 1746, Albert Girard en avait eu la première intuition en 1629 mais ne disposait pas des nombres complexes. Il a fallu attendre le 19e siècle pour voir apparaître des preuves complètes, d'abord par Jean Robert Argand en 1814, puis par Gauß en 1815, 1816 et 1849.
- Ce résultat est non constructif, il nous assure de l'existence d'une racine mais

ne nous donne pas de moyen de la trouver. On connait des méthodes pour les polynômes de degré 1, 2, 3 (méthode de CARDAN) et 4 (méthode de FERRARI) et Niels ABEL a prouve qu'il n'existait pas de méthode générale pour les degrés supérieurs ou égaux à 5.

L'enjeu pour factoriser un polynôme est donc de savoir trouver ses racines complexes. Avant de faire cela dans la pratique, énonçons un lemme qui va nous donner une propriété de l'ensemble des racines d'un polynôme à coefficients réels.

Proposition 14 | Structure des racines d'un polynôme à coefficients réels

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Les racines de P sont conjuguées, c'est-à-dire :

$$\lambda \text{ racine de } P \implies \overline{\lambda} \text{ est racine de } P.$$

Remarque 15 On peut montrer de plus que les multiplicités de λ et $\overline{\lambda}$ sont les mêmes.

Preuve Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg P$, $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}
P(\lambda) = 0 \implies \overline{P(\lambda)} = \overline{0} = 0 \implies \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k} = 0 \\
&\implies \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \lambda^k} = 0 && \textit{propriété de la conjugaison} \\
&\implies \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\lambda}^k = 0 && a_k \in \mathbb{R} \textit{ pour tout } k \\
&\implies P\left(\overline{\lambda}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Méthode Factoriser un polynôme sous la forme « $P = \mathrm{dom}(P) \times \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ »

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Pour factoriser P en un produit de polynômes de degré 1 dans le cas où toutes les racines ne sont pas facilement calculables d'un coup (*voir* $X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2X + 15$ *ci-dessous*), on :
  1. cherche une racine $\lambda \in \mathbb{K}$.
  2. On écrit P sous la forme $(X - \lambda) \times Q = P$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$.
  3. On recommence le processus avec Q.

  En résumé : cela revient à chercher les racines de P par factorisations successives.
- Pour factoriser P en un produit de polynômes de degré 1 dans le cas où toutes les racines sont facilement accessibles (*voir* $X^4 + 1$ *ci-dessous*), on commence par calculer les racines puis on conclut.

Exemple 32 Factoriser $P = X^4 - 2X^3 - 16X^2 + 2X + 15$. *On pourra commencer par chercher une racine évidente.*

Exemple 33 Factoriser

1. $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ avec $\theta \in]0, \pi[$ sur $\mathbb{C}[X]$.

   Calculons pour commencer le discriminant Δ *: nous avons* $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta < 0$. *Nous avons donc deux racines complexes conjuguées* $\dfrac{2\cos\theta \pm 2i\,|\sin\theta|}{2} = e^{\pm i\theta}$.
   Donc la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ *est :*
   $$\boxed{X^2 - 2X\cos\theta + 1 = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X + e^{-i\theta}\right).}$$

2. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

   Commençons par chercher les racines de $X^4 + 1$ *en utilisant les techniques du Chapitre (ALG) 5 : on utilise la forme trigonométrique de* $X = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho \geqslant 0, \theta \in [0, 2\pi[$. *Nous avons :*
   $$\begin{aligned}
   X^4 + 1 = 0 &\iff X^4 = -1 = e^{i\pi} = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^4, \\
   &\iff \rho^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi},
   \end{aligned}$$

$$\iff \rho^4 = 1, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi,$$
$$\iff \rho = 1, \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Donc :

$$X^4 + 1 = 0 \iff X \in \left\{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, -e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right\}.$$

Ainsi, la décomposition du polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ *est :*

$$X^4 + 1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}\right)\left(X - \overline{e^{\frac{i\pi}{4}}}\right).$$

Remarque 16 Dans l'exemple précédent, on peut aussi obtenir uniquement des facteurs dans $\mathbb{R}[X]$ en regroupant une racine et son conjugué :

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - \overline{e^{\frac{3i\pi}{4}}}\right)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - \overline{e^{\frac{i\pi}{4}}}\right) \\ &= (X^2 - 2X\cos(\pi/4) + 1)(X^2 - 2X\cos(3\pi/4) + 1) \\ &= \boxed{\left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right).} \end{aligned}$$

Cette dernière étape n'étant pas explicitement au programme, l'exercice vous guidera sur ce point en cas de besoin.

4.2. Applications : relations coefficients/racines

Les relations coefficients/racines relient, comme leur nom l'indique, les coefficients d'un polynôme aux racines.

Proposition 15 | Relations coefficients/racines pour l'ordre 2

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$, avec $a \in \mathbb{K}^\star$, $b, c \in \mathbb{K}$. Notons x_1, x_2 les deux racines de P. Alors : $\quad x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Preuve

- **[Première méthode : sans utiliser l'expression des racines.]**

  Par définition d'une racine, nous avons $P = a(X - x_1)(X - x_2)$. *En développant, on obtient :*

  $$P = a(X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2).$$

  Par identification des coefficients, on obtient immédiatement :

  $$a(x_1 + x_2) = b, \quad ax_1x_2 = c,$$

  ce qui en divisant par a donne les relations de l'énoncé.
- **[Seconde méthode : en utilisant l'expression des racines]** Notons δ une racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors d'après le cours sur les complexes, $x_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$. On obtient alors :

  $$x_1 + x_2 = \frac{(-b + \cancel{\delta}) + (-b - \cancel{\delta})}{2a} = \frac{-b}{a},$$
  $$x_1x_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \times \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Une conséquence de la preuve du théorème précédent est le corollaire qui suit, qui est en quelque sorte une réciproque des relations coefficients/racines : si l'on se fixe $s, p \in \mathbb{K}$ alors il est possible de trouver un polynôme dont les racines ont pour somme s et produit p. Cela permet de résoudre **sans disjonction de cas (c'est-à-dire sans substitution)** le système non-linéaire de somme/produit fixés.

Corollaire 5 | Système de somme et produit fixés

Soient $s, p \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= s \\ x_1x_2 &= p \end{cases} \iff x_1, x_2 \text{ sont les racines de } \quad X^2 - sX + p.$$

Les solutions de $\begin{cases} x_1 + x_2 &= s \\ x_1x_2 &= p \end{cases}$ sont donc exactement les racines de $X^2 - sX + p$.

Preuve

$\Longleftarrow$ Déjà montré : conséquence des relations coefficients/racines (avec $a = 1$).

$\Longrightarrow$ Supposons que $\begin{cases} x_1 + x_2 &= s, \\ x_1x_2 &= p. \end{cases}$ Alors notons $P = X^2 - sX + p$. On a par hypothèse $P = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2 = (X - x_1)(X - x_2)$, autrement dit x_1, x_2 sont les deux racines de P.

Méthode Système à somme et produit fixés

Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= s \\ x_1x_2 &= p \end{cases}, \quad \text{on peut au choix :}$$

- chercher les racines de $X^2 - sX + p$,
- **<u>ou</u>** (**<u>à éviter au maximum</u>**) résoudre par substitution en traitant le cas $x_2 = 0$, et $x_1 = \dfrac{p}{x_2}$.

Exemple 34

- Résoudre le système $\begin{cases} x + y &= 1 \\ xy &= -1 \end{cases}$ sans substitution.

  (x, y) *sont solutions du système si et seulement si* x, y *sont les racines de*

$X^2 - 1X + (-1) = X^2 - X - 1$. *Le discriminant est* $\Delta = 1 + 4 = 5$. *Donc :*

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \underline{\text{ou}}\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- Résoudre le système $\begin{cases} x+y &= 1 \\ xy &= -1 \end{cases}$ avec substitution.

PEUT-ON GÉNÉRALISER ? Existe-t-il des relations pour d'autres degrés ? La réponse est oui, mais vous n'avez pas à les connaitre.

- Dans le TD, nous établirons les mêmes relations mais pour le degré trois, mais en utilisant la première méthode car nous ne connaissons pas d'expression explicite des racines même si de telles formules existent, dues à CARDAN.
- Il est complètement illusoire d'espérer calculer, de manière générale, les racines d'un polynôme à l'aide des relations coefficients/racines : pour le degré $n \in \mathbb{N}^\star$, nous avons un système de n équations, mais absolument pas linéaire.

5. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir manipuler la notion de degré (définition, opérations) ☐
2. En particulier, savoir calculer un monôme dominant afin de trouver le degré ☐
3. Savoir manipuler la notion de dérivation de polynôme ☐
4. Connaître la notion de racine (simple et multiple) ☐
5. Savoir compter des racines et comparer au degré ☐
6. Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ ☐

Exercice 1 | **Vrai ou Faux ?** Solution

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(-P) = \deg P$.
2. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P - Q) \leqslant \deg P - \deg Q$.
3. Un polynôme constant est de degré nul.
4. Le polynôme $X - 2$ divise $P = X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 7X + 6$.
5. Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de multiplicité n d'un polynôme P, alors $P^{(n)}(z) = 0$.

5.1. Opérations sur les polynômes, Simplifications

Exercice 2 | Solution On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2, $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(X + 1)$.
3. Calculer $S \circ f$ avec $f : t \longmapsto \cos(t)$.

Exercice 3 | Solution

1. Écrire le polynôme ci-après sans symbole somme : $R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.
2. En déduire son degré et coefficient dominant.

5.2. Degré et coefficients

Exercice 4 | Solution Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants où n désigne un entier strictement positif et P un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

1. $(X^4+1)^3$
2. $(X+1)^n-(X-1)^n$
3. P^2-P+1

Exercice 5 | Solution Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le degré de $\Delta(P) = P(X+1)-P(X)$ en fonction de celui de P.

Exercice 6 | Solution Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées

1. $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4$, $P(-1) = 0$, $P(-2) = -5$, $P(2) = 15$.
2. $\deg(P) \leqslant 2$ et $P^2 = X^4+2X^3-3X^2-4X+4$.

5.3. Racines & Factorisation

Exercice 7 | Solution Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est l'ordre de multiplicité de 1 dans $P_n = nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$?

Exercice 8 | Solution Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5-aX^2-aX+1$ ait -1 comme racine au moins double.

Exercice 9 | Solution Soit n un entier non nul. Montrer que a donné est racine du polynôme et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine

1. $a = 2$ et $P = X^5-5X^4+7X^3-2X^2+4X-8$
2. $a = 1$ et $P = X^{2n}-nX^{n+1}+nX^{n-1}-1$

Exercice 10 | Solution Déterminer pour chaque exemple si Q est factorisable par P (c'est-à-dire si $P \mid Q$).

1. $P = X-1$ et $Q = X^3-2X^2+3X-2$, et déterminer le cas échéant un polynôme R tel que $Q = PR$.
2. $P = X-2$ et $Q = X^4-3X^3+X+1$, et déterminer le cas échéant un polynôme R tel que $Q = PR$.
3. $P = X^2$ et $Q = (X+1)^n-nX-1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 | Solution Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^3+1$
2. $P = (X+i)^n-(X-i)^n$
3. $P = X^6-1$
4. $P = X^8+X^4+1$
5. $P = X^4-2X^2-8$
6. $P = X^n-1$
7. $P = X^4+4$
8. $P = X^5+32$
9. $P = (2X-1)^n-(-2X+3)^n$
10. $P = X^4+3X^3-14X^2+22X-12$ sachant que $i+1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 12 | Solution Soit $n \geq 2$, on pose $P = (X+1)^n-1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.
2. On note Q l'unique polynôme tel que $P = XQ$. Justifier l'existence de Q, donner son expression en somme de monômes, puis à l'aide des racines de Q, déterminer la valeur de : $A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 13 | Solution Soit $P = (X+1)^7-X^7-1$. On rappelle que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $1+j+j^2$, que dire de j^3 ? Montrer que $j^2 = \bar{j}$.
2. Montrer que : $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} X^k$.
3. Montrer que P est divisible par $(X-j)^2$, puis que P est divisible par $\left(X-\bar{j}\right)^2$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$. *Pour $\mathbb{R}[X]$, on regroupera chaque terme faisant intervenir une racine avec son conjugué.*

Exercice 14 | **Relations coefficients/racines pour l'ordre 3** Solution

1. Soient $s, r, p \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$(x,y,z) \text{ est solution de } \left\{\begin{array}{rcl} s &=& x+y+z \\ r &=& xy+xz+yz \\ p &=& xyz \end{array}\right.$$
$$\iff x,y,z \text{ sont les racines de } Q = X^3-sX^2+rX-p.$$
2. **[Application]** résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 2, \\ x^2+y^2+z^2 &=& 2, \\ xyz &=& 0. \end{array}\right.$

5.4. Équations polynomiales

Exercice 15 | Solution

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$. Montrer que si P n'est pas constant alors $\deg P = 2$.
2. En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $(P')^2 = 4P$.

Exercice 16 | Solution On cherche ici à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.

3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Exercice 17 | Application Solution Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}$, on pose
$$\varphi(P) = (3X+1)P - X(X-1)P'.$$

1. Vérifier que φ définit bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. **2.1)** Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$?
2.2) Pour ces valeurs de n, déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\varphi(P) = X^2$.

5.5. Familles & Suites de polynômes

Exercice 18 | Solution Soit $P = X^2 - X + 1$ et $Q = X^3 - X$. On définit une suite de polynômes (P_n) telle que : $\begin{cases} P_1 = P, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$

1. Calculer P_2.
2. Calculer les degrés de P_2 et P_3.
3. Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n.
4. Déterminer le coefficient dominant de P_n.

Exercice 19 | Polynômes d'Hermite Solution On considère la suite (H_n) de polynômes, telle que $H_0(X) = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$H_{n+1} = H_n' - 2XH_n.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n \in \mathbb{R}[X]$, et donner H_1, H_2.
2. Déterminer le degré de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le coefficient dominant de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) Énoncé

1. VRAI : puisque $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ dès que $\lambda \neq 0$.
2. FAUX : prendre par exemple $Q = X$ et $P = 1$.
3. FAUX : puisque si le polynôme est constant égal à zéro, alors il est de degré $-\infty$.
4. VRAI : car $P(2) = 0$.
5. FAUX : 0 est racine de multiplicité 2 de X^2 et $\left(X^2\right)''(0) = 2 \neq 0$.

Solution (exercice 2) Énoncé

1. Les calculs donnent $P^2 = X^4 + 6X^3 + 9X^2$, $P - Q = 2X - 1$, $P^2 - Q^2 = 4X^3 + 6X^2 - 2X - 1$.
2. On obtient $P(X+1) = X^2 + 5X + 4$.
3. $S \circ f : t \longmapsto -\sin^2(t)$.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. $$\begin{aligned} R &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3X)^k (1-X)^{3n-3k+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3X(1-X))^k \left((1-X)^3\right)^{n-k} \\ &\overset{\text{binôme}}{=} (3X(1-X) + (1-X)^3)^n = (1-X)^n (3X + (1-X)^2)^n \\ &= \boxed{(1-X)^n (X^2 + X + 1)^n}. \end{aligned}$$
2. On déduit alors par somme de degrés que $\deg R = n + 2n = 3n$, et :
$$\operatorname{dom} R = \operatorname{dom}((1-X)^n) \times \operatorname{dom}\left((X^2+X+1)^n\right) = (-1)^n \times 1 = \boxed{(-1)^n}.$$

Solution (exercice 4) Énoncé

1. On a : $(X^4+1)^3 = P(Q)$ avec $P = X^3$ et $Q = X^4 + 1$. Ainsi par propriété sur le degré d'une composée de polynômes, on obtient que $\deg(X^4+1)^3 = 12$. De plus, en développant avec le binôme de NEWTON, on obtient que le coefficient dominant est 1.
2. On pose $P = (X+1)^n - (X-1)^n = Q - R$. Par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de même degré, on sait que $\deg P \leqslant \deg Q$, à savoir : $\deg P \leqslant n$. Pour connaître exactement son degré, il faut regarder les termes de plus haut degré dans Q et R et regarder s'ils s'annulent. Par le binôme de NEWTON, on sait que : $Q = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$. On commence par regarder les termes en X^n et on obtient : $P = \binom{n}{n} X^n - \binom{n}{n} (-1)^0 X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi les termes devant X^n s'annulent et donc $\deg P \leqslant n - 1$. On regarde donc maintenant les termes devant X^{n-1} et on obtient $P = \binom{n}{n-1} X^{n-1} - \binom{n}{n-1} (-1)^1 X^{n-1} + T = 2nX^{n-1} + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Comme $2n \neq 0$, on vient de démontrer que $\boxed{\deg P = n-1 \text{ et son coefficient dominant est } 2n}$.
3. Par propriété sur le degré d'une composée, on sait que $\deg P^2 = 2n$ et par propriété sur le degré d'une somme, on a : $\deg(P+1) \leqslant n$. Comme $2n \neq n$ car $n \in \mathbb{N}^\star$, par propriété sur le degré d'une somme de polynômes de degré différents, on obtient que : $\boxed{\deg(P^2 + P + 1) = 2n}$. Et si a_n est le coefficient dominant de P, alors $\boxed{a_n^2 \text{ est le coefficient dominant de } P^2 + P + 1}$ car a_n^2 est le coefficient dominant de P^2.

Solution (exercice 5) Énoncé

- Si P est nul, alors $\deg(\Delta(P)) = -\infty$ car Q est alors nul aussi.
- Si $P \neq 0$, alors écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $a_n \neq 0$ de sorte que $n = \deg P$. On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left((X+1)^k - X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} X^\ell - X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} X^\ell \\ &\overset{0 \leqslant \ell < k \leqslant n,\ \text{permutation de sommes}}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{k=\ell+1}^{n} \binom{k}{\ell} a_k\right)}_{:=b_\ell} X^\ell \end{aligned}$$

On a : $\quad b_{n-1} = \sum_{k=n}^{n} \binom{k}{n-1} a_k = n a_n.$

  - Si P non constant, alors $n a_n \neq 0$, donc $\deg \Delta(P) = n - 1$.
  - Si P est constant, on voit directement dans l'expression initiale que $\Delta(P) = 0$ donc de degré $-\infty$.

En conclusion :

$$\boxed{\deg \Delta(\mathrm{P}) = \begin{cases} \deg \mathrm{P} - 1 & \text{si } \deg \mathrm{P} \geqslant 1, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Solution (exercice 6) Énoncé

1. Notons $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d$ avec $a \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Les conditions mènent à :
$$\begin{cases} a + b + c + d = 4 \\ -a + b - c + d = 0 \\ -8a + 4b - 2c + d = -5 \\ 8a + 4b + 2c + d = 15 \end{cases}.$$
On souhaite ensuite résoudre ce système, par exemple à l'aide de matrices augmentées.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 15 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 1 \times \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 8 \times \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - 8 \times \mathrm{L}_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 27 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -17 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_2}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 6 & 9 & 27 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -17 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 1 \times \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 12 \times \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + 4 \times \mathrm{L}_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -9 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \frac{1}{6}\mathrm{L}_3}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -9 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 1 \times \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + 6 \times \mathrm{L}_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \underset{\mathrm{L}_4 \leftarrow \frac{1}{(-6)}\mathrm{L}_4}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 1/2 \times \mathrm{L}_4 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 1 \times \mathrm{L}_4 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 1/2 \times \mathrm{L}_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
L'unique solution est donc $(a, b, c, d) = (1, 1, 1, 1)$, et $\boxed{\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1}$.
2. Comme $\deg \mathrm{P} \leqslant 2$, on cherche P sous la forme : $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$. Les calculs donnent : $\mathrm{P}^2 = a^2\mathrm{X}^4 + 2ab\mathrm{X}^3 + (b^2 + 2ac)\mathrm{X}^2 + 2bc\mathrm{X} + c^2$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on doit résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} a^2 & = 1 \\ ab & = 1 \\ b^2 + 2ac & = -3 \\ bc & = -2 \\ c^2 & = 4 \end{cases}.$$
Comme $a^2 = 1$, on a : $a = -1$ ou $a = 1$. De même comme $c^2 = 4$, on a : $c = -2$ ou $c = 2$. Étudions les 4 possibilités que l'on a :
   - si $a = 1$ et $c = 2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$. Mais comme $bc = -2$, $b = -1$: impossible.
   - si $a = -1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = -1$. Mais comme $bc = -2$, $b = 1$: impossible.
   - si $a = 1$ et $c = -2$: comme $ab = 1$, on a : $b = 1$ et ainsi $bc = -2$. Et on a aussi alors $b^2 + 2ac = -3$.
   - si $a = -1$ et $c = 2$: $b = -1$ vérifie bien $ab = 1$, $bc = -2$ et $b^2 + 2ac = -3$.

   Ainsi il y a deux solutions qui sont : $\boxed{\mathrm{P} = -\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2 \text{ et } \mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 2}$.

Solution (exercice 7) Énoncé 1 est bien racine puisque $\mathrm{P}(1) = 0$. Calculons les dérivées successives de P en 1.
$$\mathrm{P}' = n(n+2)\mathrm{X}^{n+1} - (n+2)(n+1)\mathrm{X}^n + (n+2),$$
$$\mathrm{P}'(1) = 0.$$
Pour pouvoir redériver, nous avons besoin de distinguer des cas sur n.

- Si $n = 0$, alors $\mathrm{P}_0 = 0$, donc 1 est racine de multiplicité zéro (convention).
- Si $n \geqslant 1$,
$$\mathrm{P}_n''(\mathrm{X}) = n(n+1)(n+2)\mathrm{X}^n - n(n+1)(n+2)\mathrm{X}^{n-1} = n(n+1)(n+2)\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{X}-1).$$
Donc, d'après l'écriture précédente, 1 est racine de multiplicité 1 de P'', et donc $\mathrm{P}''(1) = 0$ mais $\mathrm{P}'''(1) \neq 0$. On déduit alors que : $\boxed{1 \text{ est racine de multiplicité } 3 \text{ de } \mathrm{P}_n.}$

Solution (exercice 8) Énoncé Pour que -1 soit racine au moins double de P, on doit avoir : $\mathrm{P}(-1) = 0 = \mathrm{P}'(-1)$. Les calculs donnent que : $\mathrm{P}(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$ donc -1 est racine au moins simple de P sans condition sur a. On a de plus : $\mathrm{P}' = 5\mathrm{X}^4 - 2a\mathrm{X} - a$. Ainsi, on obtient : $\mathrm{P}'(-1) = 0 \iff a = -5$.
Donc : $\boxed{-1 \text{ racine au moins double de P si et seulement si } a = -5}$.

Solution (exercice 9) Énoncé On regarde si a est racine de P et ainsi a est au moins racine simple. Puis on regarde jusqu'à quelle dérivée de P, a est-elle encore racine, ce qui donne l'ordre de multiplicité de la racine a.

1. Les calculs donnent que : $\mathrm{P}(2) = 0 = \mathrm{P}'(2) = \mathrm{P}^{(2)}(2)$ et $\mathrm{P}^{(3)}(2) \neq 0$. Ainsi 2 est

racine triple de P.

2. Les calculs donnent que : $P(1) = 0 = P'(1) = P^{(2)}(1)$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$. Ainsi 1 est racine triple de P.

Solution (exercice 10) Énoncé On commence par vérifier si les racines du diviseur testé sont bien des racines du polynôme P.

1. $Q(1) = 1-2+3-2 = 0$, donc 1 est racine de P, et $\boxed{\text{P divise Q.}}$ On cherche R sous la forme $R = X^2 + aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, donc tel que :
$$X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = (X-1)(X^2 + aX + b),$$
donc en développant :
$$X^3 - 2X^2 + 3X - 2 = X^3 + X^2(a-1) + X(b-a) - b,$$
on peut ensuite identifier coefficient par coefficient.
$$-2 = a-1, \quad 3 = b-a, \quad -b = -2 \iff b = 2, \quad a = -1.$$
Donc $\boxed{R = X^2 - X + 2.}$
2. $Q(2) = 2^4 - 3.8 + 2 + 1 = -8 + 3 = 5 \neq 0$, donc $\boxed{\text{P ne divise pas Q.}}$
3. Pour savoir si P divise Q, il s'agit de regarder si 0 est une racine de multiplicité 2 de Q. Constatons déjà que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q(0) = 0$. Et $Q'(X) = n(X+1)^{n-1} - n$, $Q'(0) = n - n = 0$ dès que $n \geqslant 1$, puis $Q''(X) = n(n-1)X^{n-2}$, $Q''(0) = 0$ dès que $n \geqslant 2$.
   - si $n = 0$: $Q = 1 + 1 = 2$ donc $\boxed{\text{P ne divise pas Q.}}$
   - Si $n = 1$: $Q = (X+1) - X - 1 = 0$ donc $\boxed{\text{P ne divise pas Q.}}$
   - Si $n \geqslant 2$, alors d'après les calculs précédents $\boxed{\text{P divise Q.}}$

Solution (exercice 11) Énoncé On ne donne ici que des indications sur la méthode et le résultat final. On rappelle que pour résoudre des équations dans $\mathbb{C}$ de la forme $z^n = \alpha$ où α est un complexe non nul, on cherche les solutions sous la forme $z = \rho e^{i\theta}, \rho \geqslant 0, \theta \in [0, 2\pi[$ (voir le Chapitre (ALG) 5) pour plus de détails.

1.
   - Racines complexes de P : on calcule avec la méthode habituelle les racines troisièmes de $-1 = e^{i\pi}$. On obtient $-1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}$, 3 racines simples.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X+1)\left(X - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)}$.
2.
   - Racines complexes de P. On résout l'équation $P(z) = 0$:
     - ◇ comme i n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq i$. Ainsi, on peut diviser par $(z-i)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a
     $$(z+i)^n = (z-i)^n \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \iff Z^n = 1$$
     en posant $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.
     - ◇ Résolution de $Z^n = 1$: on obtient (à détailler en utilisant une forme trigonométrique de Z, voir cours) que les solutions sont les Z de la forme :
     $$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$
     - ◇ On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\dfrac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$ fixé. On obtient alors :
     $$\begin{aligned}
     \frac{z+i}{z-i} &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\
     &\iff z + i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i) \\
     &\iff z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i e^{\frac{2ik\pi}{n}} - i \\
     &\iff z\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right).
     \end{aligned}$$
     Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :
     $$e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 0 \iff e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1 \iff \frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi \iff k = nk'$$
     avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc le seul k qui vérifie cela est $k = 0$.
       - Pour $k = 0$, on obtient : $0 = 2i$ donc il n'y a pas de solution pour $k = 0$.
       - Pour $k \neq 0$, à savoir pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on sait que $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq 0$ et on peut donc bien diviser. On obtient, en utilisant la méthode de l'angle moitié :
       $$z = \frac{i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1\right)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = \frac{2i\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$
     - ◇ Les racines de A sont donc $z = \dfrac{1}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$. On les bien toutes trouvées puisque l'on en a $n-1$ et que le polynôme est de degré $n-1$.
   - Factorisation dans $\mathbb{C}$: avant de factoriser, on doit trouver le coefficient dominant du polynôme. Pour cela, on utilise la formule du binôme de NEWTON, et on sort les termes en X^n (qui se simplifient) et en X^{n-1} :
   $$\begin{aligned}
   P &= (X+i)^n - (X-i)^n \\
   &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k i^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(-i)^{n-k} \\
   &= X^n + niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}X^k i^{n-k} - \left(X^n - niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}X^k(-i)^{n-k}\right) \\
   &= 2niX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}X^k\left(i^{n-k} - (-i)^{n-k}\right).
   \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme est de degré $n-1$ (ce qui est cohérent puisqu'on a trouvé $n-1$ racines complexes), et son coefficient dominant est $2ni$. On peut donc factoriser en utilisant les racines trouvées précédemment :

$$\boxed{P = 2ni\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)}.$$

3. • Racines complexes de P : -1, 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$, on a 6 racines simples pour un polynôme de degré 6.

• Factorisation dans $\mathbb{C}$:

$$\boxed{P = (X-1)(X+1)\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)}.$$

4. • Racines complexes de P : il faut remarquer que : $P = Q(X^4)$ avec $Q = Y^2 + Y + 1$. Les racines de Q sont $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^4) = 0 \iff z^4 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il faut donc calculer les racines quatrièmes des nombres complexes $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On obtient : $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{8\pi}{12}}$, $e^{i\frac{14\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{20\pi}{12}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{8\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{11\pi}{6}}$ pour les racines quatrièmes du nombre complexe $e^{i\frac{4\pi}{3}}$. On a ainsi bien obtenu 8 racines simples distinctes.

• Factorisation dans $\mathbb{C}$:

$$\boxed{P = \left(X-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(X-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)\left(X-e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)\left(X-e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X-e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)}.$$

5. • Racines complexes de P : il faut remarquer que : $P = Q\left(X^2\right)$ avec $Q = Y^2 - 2Y - 8$. Les racines de Q sont -2 et 4. Ainsi, z est racine de P si seulement si $Q(z^2) = 0 \iff z^2 = -2$ ou $z^2 = 4$. Il faut donc calculer les racines carrées des nombres $-2 = 2e^{i\pi}$ et 4. On obtient : -2, 2, $-\sqrt{2}i$ et $\sqrt{2}i$.

• Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X-2)(X+2)\left(X-\sqrt{2}i\right)(X+\sqrt{2}i)}$.

6. • Racines complexes de P : racines n-ièmes de l'unité. On obtient $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$.

• Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)}$.

7. • Racines complexes de P : racines quatrièmes de -4 : $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}$ et $\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}$: 4 racines simples pour un polynôme de degré 4.

• Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = \left(X-\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}\right)}$.

8. • Racines complexes de P : racines cinquièmes du nombre $-32 = 32e^{i\pi}$. Les racines sont : -2, $2e^{i\frac{\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $2e^{i\frac{9\pi}{5}}$: 5 racines simples pour un polynôme de degré 5.

• Factorisation dans $\mathbb{C}$: $\boxed{P = (X+2)\left(X-2e^{i\frac{\pi}{5}}\right)\left(X-2e^{i\frac{3\pi}{5}}\right)\left(X-2e^{i\frac{7\pi}{5}}\right)\left(X-2e^{i\frac{9\pi}{5}}\right)}$.

9. • Racines complexes de P : z est racine de P si et seulement si $(2z-1)^n = (-2z+3)^n$. Le but est alors de se ramener à la résolution des racines n-ième de l'unité.

◇ Comme $\frac{3}{2}$ n'est pas solution de l'équation, on peut supposer que $z \neq \frac{3}{2}$. Ainsi, on peut bien diviser par $(-2z+3)^n$ qui est bien non nul. Ainsi, on a

$$(2z-1)^n = (-2z+3)^n \iff \left(\frac{2z-1}{-2z+3}\right)^n = 1 \iff Z^n = 1$$

en posant $Z = \frac{2z-1}{-2z+3}$.

◇ Résolution des racines n-ièmes de l'unité : on obtient que les solutions sont les Z de la forme

$$Z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \in [\![0\,,\,n-1]\!].$$

◇ On repasse alors à z et on cherche donc les z tels que : $\frac{2z-1}{-2z+3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$ fixé. On obtient alors

$$\frac{2z-1}{-2z+3} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff 2z-1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(-2z+3) \iff 2z\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1.$$

Ici, il faut faire attention car on ne peut JAMAIS diviser par un nombre sans vérifier qu'il est bien NON nul. Or on a :

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1 = 0 \iff e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1 \iff \frac{2k\pi}{n} = \pi + 2k'\pi \iff k = \frac{n}{2} + nk'$$

avec $k' \in \mathbb{Z}$. Or $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$ donc le seul k qui pourrait vérifier cela est $k = \frac{n}{2}$. Ainsi on doit distinguer deux cas selon que n est pair ou impair :

– Si n est pair alors $\frac{n}{2}$ est bien un nombre entier et on doit donc prendre $k \neq \frac{n}{2}$ si on veut diviser.

– Si n est impair alors $\frac{n}{2}$ n'est pas un nombre entier et pour tout $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$, on a bien $e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1 \neq 0$.

On peut alors finir la résolution :

– Pour n pair, on obtient : z racine de P si et seulement si : $z = \frac{3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{2(e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1)} = \frac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$ et $k \neq \frac{n}{2}$. On obtient ainsi $n-1$ racines complexes distinctes et P est bien un polynôme de degré $n-1$ quand n est pair car le terme en X^n s'annule.

– Pour n impair, on obtient : z racine de P si et seulement si : $z = \frac{3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{2(e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1)} = \frac{\left(3e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1\right)e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$. On obtient ainsi

n racines complexes distinctes et P est bien un polynôme de degré n quand n est impair car le terme en X^n ne s'annule pas.

10. • Racines complexes de P : On sait que $1+i$ est racine complexe de P. Comme $P \in \mathbb{R}$, on a donc aussi que $1-i$ est racine complexe de P. Ainsi $P = (X-(1+i))(X-(1-i))Q = (X^2-2X+2)Q$ avec Q polynôme de degré 2. En cherchant Q sous la forme $Q = aX^2+bX+c$ et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient : $Q = X^2+5X-6$. Le discriminant vaut $\Delta = 7$ et les racines sont 1 et -6. Ainsi on a trouvé 4 racines pour un polynôme de degré 4, on les a toutes.

- Factorisation dans $\mathbb{C}$: $P = (X-1)(X+6)(X-(1+i))(X-(1-i))$.
- Factorisation dans $\mathbb{R}$: $P = (X-1)(X+6)(X^2-2X+2)$.

Solution (exercice 12) Énoncé

1. On cherche les racines complexes, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$P(z) = 0 \iff (z+1)^n = 1$$
$$\iff z+1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$
$$\iff z = 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}.$$

avec $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$. On a utilisé ici les solutions de $z^n = 1$ (qui sont les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$) et la méthode de l'angle moitié. Comme le coefficient dominant de P vaut 1, on en déduit la factorisation suivante :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)$$

2. • En prenant $k=0$, on remarque que 0 est racine de P, et que P se factorise sous la forme

$$P = X\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = XQ,$$

et les racines de Q sont donc les $2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![1\,,\,n-1]\!]$.

- De plus, en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient que :
$$P = X^n + nX^{n-1} + \cdots + nX + 1 - 1 = X\left(X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n\right)$$
et ainsi : $Q = X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n$.
- On a donc établi :
$$X^{n-1} + nX^{n-2} + \cdots + n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(X - 2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right).$$
En évaluant en zéro, on trouve :
$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n-1}\left(-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)\\
&= (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\\
&= (-1)^{n-1}2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi}{n}(1+\cdots+(n-1))} \times A\\
&= (-1)^{n-1}2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi n(n-1)}{2n}} \times A\\
&= (-1)^{n-1}2^{n-1}(i)^{n-1}e^{\frac{i\pi(n-1)}{2}} \times A\\
&= (-1)^{n-1}2^{n-1}(-1)^{n-1}(i)^{n-1} \times A\\
&= 2^{n-1}A.
\end{aligned}$$

- Ainsi, on obtient que $\boxed{A = \frac{n}{2^{n-1}}}$.

Solution (exercice 13) Énoncé

1. $1+j+j^2 = 0$ (somme géométrique), et $j^3 = 1$. Par ailleurs $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}-2i\pi} = e^{-i\frac{4\pi}{3}} = \bar{j}$.

2. D'après la formule du binôme, on a : $P = \sum_{k=0}^{7}\binom{n}{k}X^k - X^7 - 1 = \boxed{\sum_{k=1}^{6}\binom{n}{k}X^k}$.

Le coefficient dominant est donc $\binom{7}{6} = 7$. Le degré est donc 6.

3. Il s'agit de montrer que $P(j) = P'(j) = 0$ — cela signifie que j est une racine de multiplicité au moins égale à deux. On a :

$$P(j) = (1+j)^7 - j^7 - 1 = \left(-j^2\right)^7 - j^7 - 1 = -j^14 - j^7 - 1 = -j^2 - j - 1 = 0,$$
$$P'(j) = 7(1+j)^6 - 7j^6 = 7\left(-j^2\right)^6 - 7 = 7 - 7 = 0.$$

Dès lors $\boxed{(X-j)^2 \mid P}$. Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, on sait d'après le cours que $\bar{j}$ est également une racine de P et de même multiplicité. Donc $\boxed{\bar{j} \text{ est une racine de multiplicité au moins deux.}}$

4. Nous avons déjà deux racines, chacune de multiplicité au moins deux. Or P est de degré six, il en manque donc deux. Constatons que $0, -1$ sont deux racines évidentes. Or, le coefficient dominant de P est 7, donc

$$\boxed{P = 7(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2X(X+1).}$$

C'est la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Pour obtenir des facteurs réels, on regroupe les parties complexes avec leur version conjuguée.

$$\begin{aligned}
P &= 7(X-j)^2\left(X-\bar{j}\right)^2X(X+1)\\
&= 7\left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(jX) + |j|^2\right)^2X(X+1)
\end{aligned}$$

$$= \boxed{7\left(X^2+X+1\right)^2 X\left(X+1\right).}$$

Solution (exercice 14) Énoncé

1. Par définition d'une racine, $P = a(X-x)(X-y)(X-z)$. Développons ce produit :
$$\begin{aligned} P &= a(X-x)(X-y)(X-z) \\ &= a(X^2-(x+y)X+xy)(X-z) \\ &= a(X^3-(x+y)X^2+xyX-zX^2+z(x+y)X-xyz) \\ &= aX^3-a(x+y+z)X^2+a(xy+zx+zy)X-axyz. \end{aligned}$$
En identifiant les coefficients, on trouve :
$$-as = b, \quad ar = c, \quad d = -ap.$$
De manière équivalente :
$$\boxed{s = -\frac{b}{a}, \quad r = \frac{c}{a}, \quad p = -\frac{d}{a}}.$$
2. Notons s, r, p les trois fonctions de x, y, z définies dans l'énoncé. Constatons que $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)(x+y+z)-2(xy+xz+yz) = s^2-2r$. Alors :
$$\begin{cases} x+y+z &= 2, \\ x^2+y^2+z^2 &= 2, \\ xyz &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} s &= 2 \\ s^2-2r &= 2 \\ p &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} s &= 2, \\ r &= 1, \\ p &= 0. \end{cases}$$
$\iff x, y, z$ sont les racines de
$$X^3-sX^2+rX-p = X^3-2X^2+2X = X(X^2-2X+2).$$
Les racines de ce polynôme sont composées de 0 et des racines de X^2-2X+2 (ce dernier polynôme est de dscriminant $4-8 = -4 = (2i)^2$). Donc :
$$\boxed{x, y, z \in \{0, 1-i, 1+i\}}.$$

Solution (exercice 15) Énoncé

1. Supposons P non constant, *i.e.* $n = \deg P \geqslant 1$. Alors en passant au degré dans l'hypothèse vérifiée par P, nous obtenons
$$2(n-1) = n, \quad \boxed{n=2}.$$
2. Le seul polynôme constant solution est le polynôme nul. Supposons que $P = aX^2+bX+c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} (P')^2 = 4P &\iff (2aX+b)^2 = 4(aX^2+bX+c), \\ &\iff 4a^2X^2+4aX+b^2 = 4(aX^2+bX+c), \\ &\iff a^2 = a, \; a = b, \; b^2 = c. \end{aligned}$$
Donc :
- soit $a = 0$, auquel cas $b = 0 = c$, donc $P = 0$ - ceci est exclu.
- Soit $a \neq 0$, et donc $a = 1$, ce qui libre $b = 1$ puis $c = 1$. Donc $P = X^2+X+1$.

L'ensemble des polynômes solution est donc $\boxed{\{0, X^2+X+1\}}$.

Solution (exercice 16) Énoncé

1. On suppose que $P \in \mathbb{R}$ vérifie $P\left(X^2\right) = (1+X^2)P$. Condition sur le degré : Le polynôme nul convient bien. Sinon, si P est de degré n, alors on a : $\deg P\left(X^2\right) = 2n$ et $\deg((1+X^2)P) = 2+n$ par propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée. Ainsi, on doit avoir : $2n = n+2 \iff n = 2$. Ainsi P est un polynôme de degré 2 : $\boxed{P = aX^2+bX+c \text{ avec } a \neq 0}$ ou $\boxed{\text{P est nul}}$.
2. On cherche ici les solutions de degré 2, en injectant l'expression précédente dans l'hypothèse. D'un côté $P\left(X^2\right) = aX^4+bX^2+c$ et de l'autre côté $(1+X^2)P = aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c$. Par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient que : $\begin{cases} a &= a \\ b &= 0 \\ a+c &= b \\ c &= c \end{cases}$. Ainsi, on obtient que $b = 0$ et $a = -c$ et P est de la forme $P = aX^2-a = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des polynômes de la forme $\boxed{P = aX^2-a = a(X^2-1) \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$ et le $\boxed{\text{polynôme nul}}$.
3. On veut retrouver ce résultat d'une autre manière. On cherche donc les deux racines de P : montrons que 1 et -1 conviennent. On a :
$$P(1^2) = (1^2+1)P(1) \implies P(1) = 2P(1) \implies P(1) = 0,$$
donc 1 est bien racine de P. De-même :
$$P((-1)^2) = ((-1)^2+1)P(-1) \implies P(1) = 2P(-1) \implies P(-1) = \frac{P(1)}{2} = 0,$$
donc -1 est bien racine de P. On sait que P est de degré 2, donc on a trouvé toutes les racines, et P peut donc s'écrire $P = a(X-1)(X+1)$, avec $a \in \mathbb{R}^\star$. On retrouve bien que les solutions sont les polynômes de la forme $\boxed{P = a(X^2-1), \text{ avec } a \in \mathbb{R}^\star}$.

Solution (exercice 17) Énoncé

1. Soit $P \in \mathbb{R}$, on a alors que : $\varphi(P) = (3X+1)P-X(X+1)P'$. Comme P est un polynôme et que la dérivée d'un polynôme est un polynôme, on sait que $P' \in \mathbb{R}$.

De plus $3X+1$ et $X(X+1)$ sont aussi des polynômes et ainsi $\varphi(P)$ est un polynôme comme produit et somme de polynômes. Donc si $P \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.

2. **2.1)** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on cherche à savoir sous quelles conditions, on a aussi $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Il faut donc étudier le degré de $\varphi(P)$ sachant que $P = a_nX^n + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $a_n \neq 0$. Par définition de $\varphi(P)$, on a : $\deg\varphi(P) \leqslant n+1$. En effet, par propriété sur le degré d'un produit, d'une dérivée et d'une somme de polynômes de même degré, on a : $\deg(3X+1)P = n+1$, $\deg X(X-1)P' = n+1$ et ainsi $\deg\varphi(P) \leqslant n+1$. On obtient que : $\varphi(P) = (3X+1)(a_nX^n+Q) - X(X-1)(na_nX^{n-1}+Q')$. Étudions le terme en X^{n+1} afin de voir sous quelle condition le coefficient devant ce terme s'annule. On a : $\varphi(P) = 3a_nX^{n+1} - na_nX^{n+1} + R$ avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour que $\deg\varphi(P) \leqslant n$, on doit donc avoir : $(3-n)a_n = 0$. Comme $a_n \neq 0$, cela impose que $n = 3$ et ainsi cela impose que le degré de P soit 3. Ainsi $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $n = 3$.

2.2) P est donc un polynôme de degré 3 et ainsi il est de la forme : $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On cherche alors à résoudre $\varphi(P) = 0 \iff (3X+1)P - X(X-1)P' = 0$. Les calculs donnent : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = 0$. Puis par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient : $a = b = c = d = 0$ et ainsi seul le polynôme nul convient.

3. Les deux questions précédentes ont permis de montrer que si $n \neq 3$ et $\deg P = n$ alors $\deg(\varphi(P)) = n+1$ et si $n = 3$ alors $\varphi(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi pour que $\varphi(P) = X^2$, il faut soit que $\deg P = 1$, soit que $\deg P = 3$. On étudie ainsi chacun de ces cas :

- **[Cas 1]** si $n = 1$: $P = aX + b$:
  On doit donc avoir : $(3X+1)(aX+b) - X(X-1)a = X^2$ et en développant le terme de gauche et par identification des coefficients d'un polynôme, on obtient le système linéaire suivant à résoudre :
  Ce système est incompatible et ainsi il n'existe aucun P de degré 1 vérifiant $\varphi(P) = X^2$.
- **[Cas 2]** si $n = 3$: $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$:
  En reprenant les mêmes calculs que dans la questions 2(a), on a : $(b+4a)X^3 + (2c+3b)X^2 + (3d+2c)X + d = X^2$ et on doit donc résoudre le système suivant :
  $$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ 3b + 2c = 1 \\ 2c + 3d = 0 \\ d = 0. \end{cases}$$
  La résolution donne : $a = -\dfrac{1}{12}$, $b = \dfrac{1}{3}$ et $c = d = 0$. Ainsi on obtient qu'il existe un seul polynôme P vérifiant $\varphi(P) = P^2$, le polynôme : $\boxed{P = -\dfrac{1}{12}X^3 + \dfrac{1}{3}X^2}$.

Solution (exercice 18) Énoncé

1. Les calculs donnent : $P_2 = XP(Q) + 2Q \times P = X^7 - 5X^4 + 3X^3 + 3X^2 - X$.

2. On a donc $\deg P_2 = 7$ et en utilisant les propriétés sur le degré d'un produit et d'une composée de polynômes, on obtient : $\deg P_3 = 22$.

3.
- Comme on n'arrive pas à conjecturer directement l'expression du degré de P_n, on va obtenir une relation de récurrence en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes. On note $d_n = \deg P_n$. On sait que : $P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n$. Par propriété sur le degré d'un produit de polynômes, on sait que : $\deg QP_n = 3 + d_n$. De même, par propriété sur le degré d'une composée et d'un produit de polynômes, on obtient que : $\deg XP_n(Q) = 3d_n + 1$. Comme $3d_n + 1 > 3 + d_n$ dès que $d_n > 1$ ce qui est toujours le cas (car les degrés sont de plus en plus grands et le degré de P_1 est 2), on a par propriété sur le degré d'une somme de polynômes dont les degrés sont différents : $\deg P_{n+1} = 3d_n + 1$, à savoir : $d_{n+1} = 3d_n + 1$.
- On reconnaît donc une suite arithmético-géométrique de premier terme $d_1 = 2$ et dont la relation de récurrence est : $d_{n+1} = 3d_n + 1$. Les calculs donnent que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{d_n = \dfrac{5}{2} \times 3^{n-1} - \dfrac{1}{2}}$.

4. Les calculs faits pour P_2 et P_3 permettent de conjecturer que le coefficient dominant est 1. On le montre par récurrence en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite des polynômes. A faire.

Solution (exercice 19) Énoncé

1. Le fait que $H_n \in \mathbb{R}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une récurrence évidente puisque la dérivée d'un polynôme à coefficients réels est encore à coefficients réels. De plus, $H_1 = 1' - 2X1 = -2X$, puis $H_2 = (-2) - 2X(-2X) = 4X^2 - 2 = \boxed{2(2X^2-1)}$.

2. Déterminons le degré de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors notant $d_n = \deg P_n$, on a en passant au degré puisque le degré de XH_n est nécessairement strictement supérieur à celui de H_n' :
$$d_{n+1} = d_n + 1, \quad d_0 = 0.$$
Donc $\boxed{d_n = n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

3. Notons a_n le coefficient dominant de P_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Pour la même raison qu'à la question précédente, le coefficient dominant de $H_n' - 2XH_n$ est égal à celui de $-2XH_n$. On obtient alors :
$$a_{n+1} = (-2)a_n.$$
Donc $\boxed{a_n = (-2)^n a_0 = (-2)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$