Programme de colles
du 11 au 15/3/2024

- Sur les systèmes et matrices : éventuellement un exercice **très rapide** sur le sujet.
- L'essentiel de la colle devra porter sur les probabilités, et les polynômes (peu d'exercices faits sur le sujet encore à cause du concours blanc, donc allez au plus simple cette semaine).

1. [MATHS] ÉCHELONNEMENT MATRICIEL & SYSTÈMES LINÉAIRES

- **Échelonnement matriciel.** Opérations élémentaires, traduction matricielle. Notion de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite, de pivot. Rang d'une matrice définie comme le nombre de pivots.
- **Systèmes linéaires.** Définition. Matrice associée à un système, écriture matricielle. Système de CRAMER. Structure de l'ensemble des solutions. Méthode par substitution sur des systèmes simples. Méthode par échelonnement : présentation sous forme de matrice augmentée, ou de système directement, notion d'inconnue principale et d'inconnue auxiliaire, nombre en fonction du rang. Équivalence de systèmes, et justification du fait que l'échelonnement conduit à un système équivalent.
- **Échelonnement et inversibilité.** Équivalence entre : matrice inversible de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, son rang valant n, son échelonnée réduite est I_n et tout système associé est de CRAMER. Nouvelles méthodes de calcul de l'inverse : miroir et résolution d'un système associé.
- **Valeurs propres d'une matrice [H.P] .** Remarques générales sur les opérations autorisées pour gérer l'échelonnement d'un système ou matrice à paramètre. Définition d'une valeur propre en tant qu'élément λ tel que $\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n$ non inversible. Premiers calculs sur un exemple de matrice 2×2 et 3×3.

2. [MATHS] POLYNÔMES.

Attention
- Les polynômes sont vus comme des fonctions polynomiales en BCPST. En particulier, on évalue donc les polynômes uniquement en des complexes et réels.
- En arithmétique : rien du tout à part le symbole de divisibilité (je n'ai même pas donné de propriétés).
- Les notions de polynôme irréductible, scindé, la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ sont hors-programme. Les relations coefficients/racines sont au programme uniquement pour le degré 2.

- **Définition de $\mathbb{K}[X]$.** Définition, degré, coefficient dominant, cas du polynôme nul, opérations (somme, produit, multiplication par un réel/complexe, composition). Propriétés du degré, ensembles $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}_{=n}[X]$. Équation-produit sur $\mathbb{K}[X]$ (intégrité de $\mathbb{K}[X]$). Représentation d'un polynôme par une liste : fonction degré, évaluation (méthode naïve), dérivation, multiplication par X.
- **Polynôme dérivé.** Définition de la dérivée première, dérivées successives. Propriétés de la dérivation (immédiates pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, admises pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Degré et dérivation. Unicité des coefficients d'un polynôme.
- **Racines.** Divisibilité d'un polynôme par un autre. Définition d'une racine. Tout polynôme de degré impair possède une racine réelle. Racines multiples : définition et lien avec le polynôme dérivé. Comptage de racines.
- **Factorisation.** Allure de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, exemples de recherche de racines. Retour sur la résolution de $z^n=\alpha$ avec $\alpha\neq 0$. Relations coefficients / racines pour le degré 2.

3. [MATHS] ESPACES PROBABILISÉS

Attention
- En 1ère année : les univers sont finis, et les évènements sont toutes les parties de l'univers.
- On peut néanmoins proposer des expériences d'univers non fini, du moment qu'aucune difficulté technique n'apparait dans la résolution (séries, par exemple).

- **Introduction.** Probabilités ou Statistiques ?

- **Axiomatique des probabilités.** Notion d'univers, d'évènements, évènements élémentaires. Espace probabilisable, espace probabilisé : définition d'une probabilité, propriétés. Contexte d'équiprobabilité, probabilité uniforme. Probabilité associée à une famille finie de réels positifs de somme 1. Système complet et quasi-complet d'évènements.
- **Conditionnement & Indépendance d'évènements.** Probabilité conditionnelle. Indépendance de deux évènements, puis d'un nombre quelconque. Propriétés de l'indépendance.
- **Formules probabilistes.** Pour traiter un « OU aléatoire » : probabilités totales (pour un système complet d'évènements ou au pire un système quasi-complet d'évènements). Pour traiter des intersections d'évènements non-indépendants : probabilités composées. Pour retourner un conditionnement : formule de BAYES. **Pour commencer, les élèves peuvent bien sûr s'aider d'un arbre en cas de besoin. Il faut néanmoins que la rédaction s'appuie ensuite sur l'une de ces formules.**

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Trouver, selon deux méthodes (échelonnement et déterminant), les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Trouver, par échelonnement, les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible lorsque $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. *(Réponse :* $\lambda = \pm 3$*)*
3. Définir le polynôme dérivé une fois, puis k fois, puis donner sans justification une formule pour $\left[(X-a)^n\right]^{(k)}$.
4. Définir $P \mid Q$ pour deux polynômes P, Q. Montrer, selon deux méthodes, que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1.$$
5. Donner la **définition** de racine multiple d'un polynôme, puis la **caractérisation** à l'aide du polynôme dérivé.
6. Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
7. Soient A, B deux évènements. Définir « A indépendant de B » ($A \perp\!\!\!\perp B$). Montrer que si $A \perp\!\!\!\perp A$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.
8. Soient A, B deux évènements. Définir « A indépendant de B » ($A \perp\!\!\!\perp B$), et « A, B disjoints ». Préciser laquelle des deux hypothèses sert pour calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
9. Définition d'un système complet d'évènements fini $(A_i)_{i=1}^n$, citer la formule des probabilités totales.

Rappels et conseils pour les questions de cours

- Votre colle commence par ça, elles doivent être parfaitement connues.
- Ainsi, tant qu'il existe du flou, on se ré-entraine encore et encore... et on pose des questions (à moi-même, ou à vos camarades !).
- Travailler les questions de cours aide à cibler les méthodes importantes, et donc on travaille la pratique par la même occasion.
- Possibilité d'en faire des fiches chaque semaine, et/ou de les travailler en groupe (l'un passe au tableau sur l'une des questions, et la présente aux autres) : certains de vos camarades auront peut-être compris un point que vous n'aviez pas saisi, et inversement.

À venir : probabilités, polynômes, statistiques.