Chapitre (AN) 5 Compléments sur les limites

Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.

— Henri Poincaré

Résumé & Plan

Ce chapitre vient compléter celui déjà fait sur les fonctions de début d'année. On complète plus précisément ici la notion de limite (avec notamment le théorème de la limite monotone et les équivalents usuels pour les fonctions).

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Avant d'aborder ce chapitre et le suivant, il convient de revoir notamment dans le chapitre de généralités sur les fonctions (traité en début d'année) :

- les généralités sur les fonctions (parité, périodicité, définition de fonction monotone, *etc.*),
- les techniques de calculs de limites même si la plupart seront revues et complétées dans ce chapitre.
- Les formules de calculs de dérivées (somme, produit, composée, réciproque).
- Toutes les fonctions usuelles : définition, graphe et principales propriétés.

1. NOTION DE LIMITE

Nous voyons dans cette section la définition rigoureuse de la limite et les règles d'opérations classiques afin de pouvoir effectuer des calculs.

Cadre

Jusqu'à la fin de la section, I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point même lorsque cela n'est pas précisé.

1.1. Voisinage

Définition 1 | Voisinage

- On appelle *voisinage de* $+\infty$ tout intervalle de la forme $]a,+\infty[$ où $a\in\mathbb{R}$.
- On appelle *voisinage de* $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty,a[$ où $a\in\mathbb{R}$.
- Soit $x_0\in\mathbb{R}$.
  - On appelle *voisinage de* x_0 tout intervalle de la forme $]x_0-\eta,x_0+\eta[$ où $\eta>0$.
  - On appelle *voisinage de* x_0^- tout intervalle de la forme $]x_0-\eta,x_0[$ où $\eta>0$.
  - On appelle *voisinage de* x_0^+ tout intervalle de la forme $]x_0,x_0+\eta[$ où $\eta>0$.

Définition 2 | Propriété vraie sur un voisinage

Soit $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. On dit qu'une propriété, dépendant d'une variable x, est vraie *au voisinage de* x_0 *(resp.* x_0^+,x_0^-*)* si elle est vraie pour tout $x\in V_{x_0}$ où V_{x_0} est un voisinage de x_0 (*resp.* x_0^+,x_0^-).

Exemple 1

1. Soit $f : x \longmapsto 2x$. Alors f est positive au voisinage de 0^+, négative au voisinage de 0^- ; mais son signe n'est pas déterminé au voisinage de 0 (c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]-\eta, \eta[$ avec $\eta > 0$).
2. Soit $f : x \longmapsto |x|$. Alors f est positive au voisinage de 0, strictement positive au voisinage de 0^+ et de 0^- ; mais elle n'est pas strictement positive au voisinage de 0.
3. Soit $f : x \longmapsto x^2 + x\cos(x)$, alors f est strictement positive au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.
4. Soit $f : x \longmapsto \ln(x)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, définie au voisinage de 0^+ ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.
5. Soit $f : x \longmapsto \ln(-x)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_-^*$, définie au voisinage de 0^- ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.
6. Soit $f : x \longmapsto \ln(|x|)$. Alors f est définie au voisinage de x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, définie au voisinage de 0^- et de 0^+ ; mais f n'est pas définie au voisinage de 0.

Passons à présent à la définition aux définitions de la limite.

1.2. Limite en un point

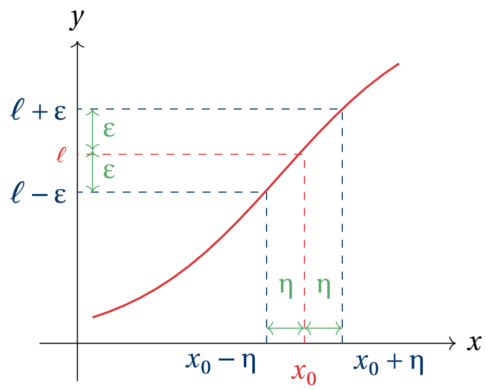
Définition 3 | Limite finie en un point

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ *tend vers* ℓ *lorsque* x *tend vers* x_0, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$, ou encore $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall \underbrace{x \in \mathrm{I},}_{\substack{x \in \mathrm{I} \\ f(x) \text{existe}}} \quad \underbrace{|x - x_0| < \eta}_{x \text{ proche de } x_0} \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

« tout intervalle du type $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0 *(en restant dans le domaine de définition)* . »



LIMITE FINIE EN UN POINT FINI

Remarque 1 On a par définition : $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell \iff f(x) - \ell \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$.

Proposition 1 | Unicité de la limite

Si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie en $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I), alors celle-ci est unique.

Remarque 2 L'unicité reste bien sûr vraie pour toutes les définitions de la limite qui vont suivre, même si nous ne l'écrivons pas à nouveau sous forme d'énoncé.

Preuve Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$, $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell'$ et par exemple $\ell < \ell'$. Posons $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{3} > 0$. Alors par définition de la limite, il existe deux réels η_1, η_2 tels que :

$$\forall x \in]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[, \quad f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[, \qquad \forall x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[, \quad f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Donc en posant $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, on a :

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \quad f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\cap]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[.$$

Or $\ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon$ puisque :

$$\ell + \varepsilon < \ell' - \varepsilon \iff \frac{\ell' + 2\ell}{3} < \frac{2\ell' + \ell}{3} \iff \ell < \ell'.$$

Donc : $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\cap]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[= \emptyset$ — contradiction, car cette intersection devrait contenir par exemple $f(x_0)$.

Lorsque l'on considère la limite d'une fonction définie au point en question, la valeur de la limite est forcément donnée par la valeur de la fonction au point (et en plus la limite est finie).

Proposition 2 | Limite finie en un point de l'ensemble de définition

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle, et $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ est } \underline{\textbf{définie en } x_0} \ (\textit{i.e. } x_0 \in \mathrm{I}) \\ \textbf{(ii)} & f \text{ possède une limite finie en } x_0 \end{cases} \implies \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Preuve D'après la définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\, \cap \mathrm{I}, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Donc en faisant $x = x_0$ (c'est précisément à cet endroit qu'intervient l'hypothèse centrale que f est définie en x_0). On obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leqslant |f(x_0) - \ell| < \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad |f(x_0) - \ell| < \dfrac{1}{n}$. Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ pour que, par théorème d'encadrement sur les suites, on puisse conclure que $f(x_0) = \ell$.

Définition 4 | Limite infinie en un point

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I).

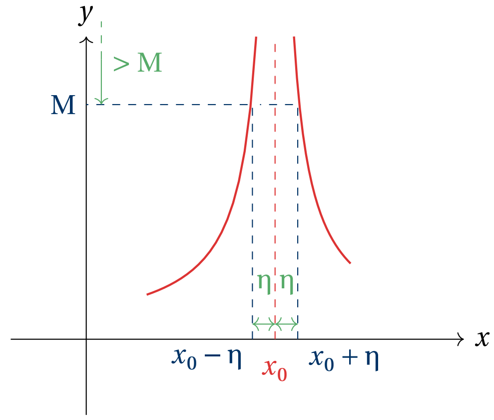
- On note $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} +\infty$, ou encore $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si :

  $$\forall \mathrm{M} > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| < \eta \implies f(x) > \mathrm{M},$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez proche de x_0 ».
- De même, on note : $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} -\infty$, on encore : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si :

  $$\forall \mathrm{M} < 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| < \eta \implies f(x) < \mathrm{M},$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit assez proche de x_0 ».
- Graphiquement, dans ces deux cas, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est une *asymptote verticale* à la courbe.



Limite infinie en un point fini

1.3. Limite en plus ou moins l'infini

Définition 5 | Limite en $+\infty$

Soit I un intervalle du type $[b, +\infty[$ où $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I, et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f *a pour limite* ℓ *en* $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow +\infty} \ell$, ou encore $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si :

  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x > a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit assez grand ». Graphiquement, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe.
- On dit que f *a pour limite* $+\infty$ *en* $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow +\infty} +\infty$, ou encore $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si :

  $$\forall \mathrm{M} > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x > a \implies f(x) > \mathrm{M},$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez grand ».
- On dit que f *a pour limite* $-\infty$ *en* $+\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow +\infty} -\infty$, ou encore $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ si :

  $$\forall \mathrm{M} < 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x > a \implies f(x) < \mathrm{M},$$

  c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit assez grand ».

Exemple 2

1. Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$. Écrire avec des quantificateurs et illustrer graphiquement la propriété : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Soit $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$ Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exemple 3

1. Soit f une fonction. Écrire avec des quantificateurs et illustrer graphiquement la propriété : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer avec la définition que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$.

Définition 6 | Limite en $-\infty$

Soit I un intervalle du type $]-\infty, b]$ où $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I, et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow -\infty} \ell$, ou encore $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de ℓ, pourvu que x soit assez petit ». Graphiquement, on dit que la droite $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow -\infty} +\infty$, ou encore $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall \mathrm{M} > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x < a \implies f(x) > \mathrm{M},$$

c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit assez petit ».

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, et on note $f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow -\infty} -\infty$, ou encore $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ si :

$$\forall \mathrm{M} < 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x < a \implies f(x) < \mathrm{M},$$

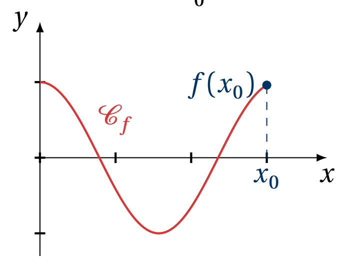
c'est-à-dire : « $f(x)$ est aussi petit que l'on veut, pourvu que x soit assez petit ».

Attention

Une fonction peut ne pas avoir de limite, nous le justifierons avec un exemple un peu plus loin dans le chapitre.

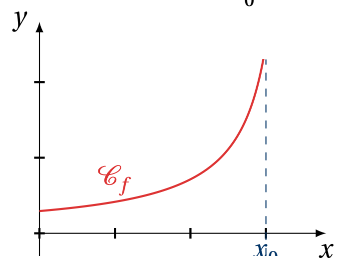
Remarque 3 (Pourquoi la notion de limite ?)

La limite en x_0 est la valeur en x_0



La notion de limite en x_0 est peu utile ici, puisqu'elle est égale à la valeur en x_0 de la fonction.

La valeur en x_0 n'existe pas



La notion de limite est typiquement là pour mettre des mots sur ce type de comportement, et l'étudier.

1.4. Limite à gauche, limite à droite

Limite à droite ou à gauche. Une limite peut être caractérisée par une convergence à droite **et** à gauche, cela signifie que x se « rapproche par la droite ou la gauche » du point x_0.

Définition 7 | Limite à droite/gauche

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

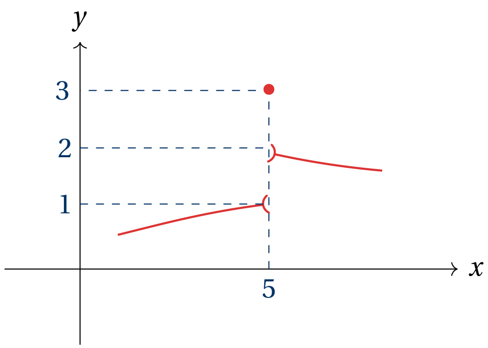
- On suppose que $]-\infty, x_0[\cap \mathrm{I} \neq \emptyset$ (c'est-à-dire f est définie au voisinage de x_0^-). On dit que *f admet ℓ pour limite à gauche en x_0* si :
$$\left|\begin{array}{ccc}]-\infty, x_0[\cap\mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right. \quad \text{admet } \ell \text{ pour limite en } x_0.$$
On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x)$ la limite à gauche. *(Autrement dit, la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, x_0[\cap\mathrm{I}$ possède une limite égale à ℓ lorsque x tend vers x_0)*
- On suppose que $\mathrm{I} \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$ (c'est-à-dire f est définie au voisinage de x_0^+). On dit que *f admet ℓ pour limite à droite en x_0* si :
$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{I}\cap]x_0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right. \quad \text{admet } \ell \text{ pour limite en } x_0.$$
On note alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x)$ la limite à droite. *(Autrement dit, la restriction de f à l'intervalle $\mathrm{I}\cap]x_0, +\infty[$ possède une limite égale à ℓ lorsque x tend vers x_0)*

Dans la version avec quantificateurs de la définition, cela revient à remplacer l'inégalité « $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta][$ » (se rapprocher par la droite ou la gauche) par :

- « $x \in]x_0 - \eta, x_0[$ » (se rapprocher par la gauche pour la limite à gauche),
- ou « $x \in]x_0, x_0 + \eta[$ » (se rapprocher par la droite pour la limite à droite).

Par exemple : soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que
$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \ell \text{ si : } \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap \mathrm{I}, \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Exemple 4 Dans l'exemple graphique suivant, déterminer : $\lim\limits_{x \longrightarrow 5^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 5^+} f(x)$.



Donnons un lien (**<u>qui n'est pas une équivalence</u>**) entre limite, limite à gauche et limite à droite :

Proposition 3 | Limite $\Longrightarrow$ (Limite à droite = limite à gauche)

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un point à l'intérieur de I (*i.e.* pas au bord de I). Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :
$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

Ainsi, avoir une limite en x_0 implique que l'on a une limite à gauche et à droite avec la même valeur.

Preuve Supposons $\ell \in \mathbb{R}$ dans la démonstration, les autres cas (limites infinies) se traitent de la même manière.

Exemple 5 (Fonction qui ne possède pas de limite en un point) Soit
$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$
Montrons que f n'a pas de limite en zéro.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \ell$, et utilisons la Proposition 2.

Attention

Avoir les deux conditions : $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$, n'implique pas nécessairement $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$!

Voici la proposition faisant le lien précis entre les trois notions de limites précédemment rencontrées.

Proposition 4 | Lien limite et limite à droite / gauche

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un point à l'intérieur de I (*i.e.* pas au bord de I).

- Si f est définie en x_0, alors :

$$f \text{ admet une limite en } x_0 \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite finie à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0). \end{cases}$$

Dans ce cas : $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Si f n'est pas définie en x_0, alors :

$$f \text{ admet une limite en } x_0 \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ admet une limite à droite et à gauche,} \\ \textbf{(ii)} & \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x). \end{cases}$$

Dans ce cas : $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Il faut savoir adapter ce résultat aussi au cas où une fonction est définie à droite ou à gauche de x_0 uniquement.

Preuve On montre seulement le premier cas, c'est-à-dire on suppose que f est définie en x_0.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\lim_{x\to x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$. Alors, comme précédemment démontré, $\ell = f(x_0)$. On obtient alors l'existence d'une limite à droite et à gauche par simple restriction de la définition de la limite à $\mathrm{I}\cap\,]-\infty, x_0[$ et $\mathrm{I}\cap\,]x_0, +\infty[$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. Alors, cela signifie par définition de la limite que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta_1 > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x_0 < x < x_0 + \eta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$
$$\exists \eta_2 > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad x_0 - \eta_2 < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dès lors, posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Donc par définition de la limite, nous avons montré : $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cette proposition est cruciale en pratique pour :

- montrer l'existence d'une limite en un point d'une fonction définie en deux morceaux (avec rupture de l'expression au point étudié),
- ou pour montrer que des fonctions n'admettent pas de limites en un point (voir exemple précédent).

Remarque 4 On calcule la limite à gauche et à droite de x_0 pour calculer la limite de f en x_0 si l'expression de $f(x)$ n'est pas la même à droite et à gauche de x_0 (*c.f.* exemple ci-dessous, ou alors par exemple expressions avec une partie entière, une valeur absolue, un maximum...). Dans le cas où l'expression de $f(x)$ est la même à droite et à gauche de x_0, il est inutile de commencer par calculer la limite à droite et à gauche de x_0 : on calcule directement la limite en x_0.

Exemple 6 (Fonctions usuelles)

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ admet une limite à droite et à gauche en 0, égale à $+\infty$. Donc admet une limite en zéro qui vaut $+\infty$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ a-t-elle une limite en 1 ?

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ a-t-elle une limite en 1 ?

Exemple 7 Reprendre l'**??** sans utiliser la Proposition 2.

Exemple 8 Notons $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0, \\ 1-x & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array} \right.$ Alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$.

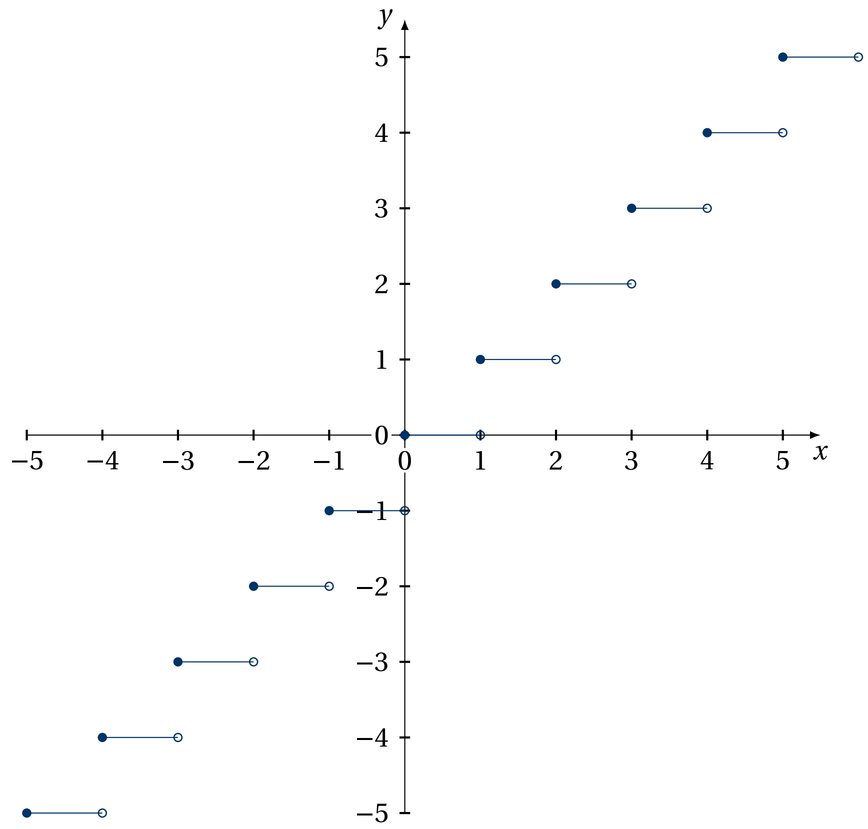
Exemple 9 Notons $f \left| \begin{array}{lcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$

Alors : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$.

Exemple 10 (Partie entière) Nous avons pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \longrightarrow k^-} \lfloor x \rfloor = k-1, \qquad \lim_{x \longrightarrow k^+} \lfloor x \rfloor = k,$$

donc la partie entière n'admet pas de limite aux points entiers.



GRAPHE DE LA FONCTION PARTIE ENTIÈRE

Exemple 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - \lfloor x \rfloor\right) \lfloor x \rfloor$.

- La fonction f admet-elle une limite en 0 ? en 1 ?

- Et en 2 ?

1.5. Caractérisation séquentielle de la limite

On souhaite reformuler ici la définition de la limite avec des suites.

Théorème 1 | Caractérisation séquentielle de la limite

- Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$ ou au bord de I. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors :
$$f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left[\left(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}, \quad u_n \xrightarrow[]{n \longrightarrow \infty} x_0\right) \Longrightarrow f(u_n) \xrightarrow[]{n \longrightarrow \infty} \ell\right].$$
- Autrement dit, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Attention

Le quantificateur $\forall$ est <u>**très**</u> important.

Preuve *(Preuve du théorème)* Procédons par double implication, dans les cas où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$. Soit (u_n) une suite de points de I convergeant vers x_0, montrons que $f(u_n) \xrightarrow[]{n \longrightarrow \infty} \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in \mathrm{I}$:
$$|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
Or $u_n \xrightarrow[]{n \longrightarrow \infty} x_0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - x_0| < \eta$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow |f(u_n) - \ell| < \varepsilon.$$
On a exactement montré que : $f(u_n) \xrightarrow[]{n \longrightarrow \infty} \ell$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Prouvons l'implication réciproque par contraposée. Supposons donc que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ lorsque x tend vers x_0 et montrons qu'il existe une suite (u_n) convergeant vers x_0 telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ.
Puisque $f(x)$ ne tend pas vers ℓ quand x tend vers x_0, on en déduit en prenant la négation de la définition de la limite :
$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| \leqslant \eta \ \underline{\textbf{et}}\ |f(x) - \ell| > \varepsilon.$$
Choisissons $\eta = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans la proposition précédente (possible à cause du quantificateur « $\forall$ »), on déduit alors :
$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists u_n \in \mathrm{I}, \quad |u_n - x_0| \leqslant \frac{1}{n+1} \ \underline{\textbf{et}}\ |f(u_n) - \ell| > \varepsilon.$$
On a donc défini une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I. De plus, on a $u_n \xrightarrow[]{n \longrightarrow \infty} x_0$ par théorème des gendarmes car $0 \leqslant |u_n - x_0| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et $f(u_n) \underset{n\longrightarrow\infty}{\not\longrightarrow} \ell$ puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |f(u_n) - \ell| > \varepsilon$ et $\varepsilon > 0$. C'est terminé.

Corollaire 1 | Non-existence d'une limite

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$ ou au bord de I. Alors s'il existe deux suites $(u_n) \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathrm{I}^{\mathbb{N}}$ telles que :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \xrightarrow[]{n \longrightarrow \infty} x_0,\ v_n \xrightarrow[]{n \longrightarrow \infty} x_0 \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(v_n) \end{cases} \quad \text{alors :} \quad f \text{ n'a pas de limite en } x_0.$$

Preuve

C'est le corollaire précédent que nous utilisons en pratique, pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point x_0. Voyons comment.

Exemple 12

- La fonctions cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

- La fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right.$ n'admet pas de limite en 0^+.

2. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

2.1. Opérations algébriques sur les limites

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, c'est-à-dire x_0 est soit un nombre réel, soit $\pm\infty$) et soient f et g deux fonctions admettant toutes les deux une limite en x_0. Dans toute la suite, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. « FI » désigne une indétermination du résultat de la limite indiqué dans le tableau (à traiter au cas par cas). Chaque résultat présent dans chaque case du tableau peut être démontré en vérifiant la définition de la limite, nous l'admettrons.

LIMITE DE $f+g$

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
ℓ'	$-\infty$	$\ell+\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	+FI	$+\infty$	$+\infty$

LIMITE DE $f \times g$

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0$	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$

LIMITE DE f/g

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ \ $\lim_{x\to x_0} g(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$
$-\infty$	FI	0	0	FI
$\ell' \neq 0$	$-\infty$ si $\ell' > 0$ $+\infty$ si $\ell' < 0$	$\dfrac{\ell}{\ell}$	0	$+\infty$ si $\ell' > 0$ $-\infty$ si $\ell' < 0$
$\ell' = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$	FI	$-\infty$
$\ell' = 0^+$	$-\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	FI	$+\infty$
$+\infty$	FI	0	0	FI

Attention — Pour retenir, mais sans l'écrire

- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que :
$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0^+} = +\infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que les formes indéterminées « FI » sont les suivantes :
$$\infty-\infty,\quad 0\times\infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty}.$$
Tout cela avec des gros guillemets donc.

Attention **Puissances variables $u(x)^{v(x)}$**

- Dans le cas d'une limite de la forme $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$, on revient **toujours** à la définition de la puissance :
$$u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}.$$
On calcule alors la limite de $v(x)\ln(u(x))$, puis on en déduit la limite recherchée, par passage à l'exponentielle.
- En particulier, « 1^{∞} » est une forme indéterminée !

Exemple 13 **(Attention aux formes indéterminées !)** Une forme indéterminée est, comme son nom l'indique, **indéterminée** ! Tout peut arriver :
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty,\qquad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0,$$
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2+2x}{x^2}=1,\qquad \frac{x(2+\cos x)}{x}\text{ n'a pas de limite en } +\infty,$$
alors que le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

2.2. Composition

On rappelle le théorème permettant de déterminer la limite d'une composée de fonctions.

Théorème 2 | Compositions de limites
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soient x_0 un élément ou une borne, finie ou infinie, de I, y_0 un élément ou une borne, finie ou infinie, de J et $\ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Alors
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = y_0\\ \lim\limits_{y\longrightarrow y_0} g(y) = \ell\end{cases} \implies \lim_{x\longrightarrow x_0} g\circ f(x) = \ell.$$

Preuve Écrivons la preuve dans le cas où $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(y) \xrightarrow[y\longrightarrow y_0]{} \ell$, alors il existe $\eta' > 0$ tel que pour $y \in \mathrm{J}$:
$$|y-y_0|<\eta' \implies |g(y)-\ell|<\varepsilon.$$
Et comme $f(x) \xrightarrow[x\longrightarrow x_0]{} y_0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in \mathrm{I}$:
$$|x-x_0|<\eta \implies |f(x)-y_0|<\eta'.$$
Ainsi, en combinant les deux (remplacer y par $f(x)$ dans la première assertion), on obtient que pour $x \in \mathrm{I}$:
$$|x-x_0|<\eta \implies |g(f(x))-\ell|<\varepsilon, \quad \text{d'où la conclusion.}$$

Exemple 14
- Déterminer : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.
- Déterminer : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1}$.

Exemple 15 Soit $a > 0$. Déterminer : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} a^x$ suivant la valeur de a.

2.3. Croissances comparées

Il existe des méthodes afin de parfois lever des formes indéterminées sur les limites. Une des plus importantes est l'utilisation d'un résultat sur les « croissances comparées ». Rappelons l'énoncé.

Théorème 3 | Croissances comparées

Soient a, b et c des réels **strictement positifs**.

- **[En $+\infty$]**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(\ln(x))^a}{x^b}=0,\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^b}{e^{cx}}=0,\quad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(\ln(x))^a}{e^{cx}}=0.$$

- **[En 0^+]**

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}x^b(\ln(x))^a=0.$$

- **[En $-\infty$]**

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}x^b e^{cx}=0.$$

Remarque 5 Ce théorème s'utilise pour n'importe quels a, b, c strictement positifs, même non entiers. Par exemple si $b=\frac{1}{2}$, $x^b=\sqrt{x}$ pour tout $x>0$.

Comment retenir ce théorème ?

Résumé Idée des croissances comparées

On se souviendra que :

- l'exponentielle diverge beaucoup plus vite en $+\infty$ que toute puissance de x, qui elle-même diverge plus vite que toute puissance de logarithme. Ce que l'on peut noter :
$$(\ln x)^a \underset{+\infty}{\ll} x^b \underset{+\infty}{\ll} e^{cx}.$$
- Toute puissance de x l'emporte en zéro sur toute puissance de logarithme :
$$x^b(\ln x)^a \underset{0}{\ll} 1.$$
- L'exponentielle tend très vite vers 0 en $-\infty$ et l'emporte sur toutes les puissances de x :
$$x^b \underset{-\infty}{\ll} e^{cx}.$$

Méthode (AN) 5.1 (Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence)

- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparait peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

3. LIMITES ET INÉGALITÉS

3.1. Passage à la limite dans une inégalité

Signe (local) d'une fonction de limite non nulle. La proposition suivante précise le signe d'une fonction qui possède une limite non nulle en un point, au voisinage de ce point.

Proposition 5 | Encadrement d'une fonction de limite $\ell \neq 0$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ (ou au bord de I) avec $f(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R}$.

- Si $\ell > 0$, alors :
$$\frac{\ell}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3\ell}{2} \quad \text{sur un voisinage de } x_0.$$
En particulier, f est strictement positive sur un voisinage de x_0.
- Si $\ell < 0$, alors :
$$\frac{3\ell}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ell}{2} \quad \text{sur un voisinage de } x_0.$$
En particulier, f est strictement négative sur un voisinage de x_0.

Ainsi, si $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}^*$ alors f est du signe de ℓ sur un voisinage de x_0.

Preuve Démontrons uniquement le premier cas, le deuxième étant similaire. Puisque $\ell > 0$, on a $\frac{\ell}{2}>0$, on peut donc appliquer la définition de limite d'une fonction avec $\varepsilon=\frac{\ell}{2}$.

En conséquence, on a :

Théorème 4 | Passage à la limite dans une inégalité

Soient f, g deux fonctions définies sur I et $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$. Soit $x_0 \in$ I ou au bord de I.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x) \\ \textbf{(ii)} & \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \\ \textbf{(iii)} & \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell' \end{cases} \implies \ell \leqslant \ell'.$$

Preuve Procédons par l'absurde et supposons que $\ell > \ell'$, c'est-à-dire $\ell - \ell' > 0$.

Remarque 6 On ne peut passer à la limite dans une inégalité que lorsque l'on sait que les limites existent.

Attention Inégalités strictes non préservées

On ne peut avoir mieux qu'une inégalité large $\ell \leqslant \ell'$ dans la conclusion, même si l'on a $f(x) < g(x)$. En effet, si $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ par exemple, alors on a bien $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et pourtant $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} g(x)$.

3.2. Théorèmes d'encadrement, de minoration, de majoration

Les théorèmes ci-après rappellent des faits intuitivement clairs :

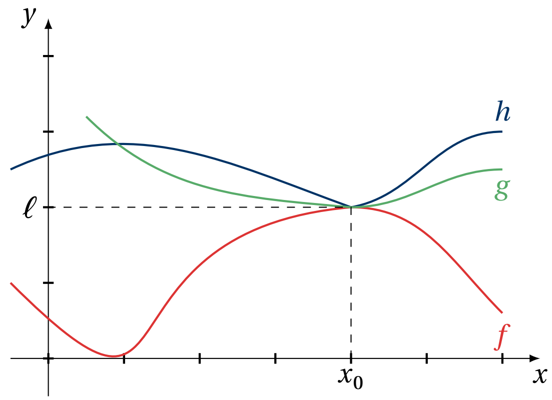
- Si f est encadré par deux autres qui tendent vers la même limite en un point (éventuellement infini), alors f tend aussi vers cette limite en ce point. Ce cas-là est souvent appelé « théorème des gendarmes ».
- Si une fonction f est minorée par une autre qui diverge en un point vers $+\infty$, alors f diverge aussi vers $+\infty$ en ce point.
- De-même si une fonction f est majorée par une autre qui diverge en un point vers $-\infty$, alors f diverge aussi vers $-\infty$ en ce point.

Théorème 5 | Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

Soient I un intervalle, $x_0 \in$ I (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère trois fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)}, \\ \textbf{(ii)} & \text{les deux fonctions } f \text{ et } h \text{ admettent } \ell \text{ pour limite en } x_0. \end{cases}$$

Alors : $g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$.



Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que

$$|x - x_0| < \eta_1 \implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$
$$|x - x_0| < \eta_2 \implies \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$$

donc en posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on déduit que pour x vérifiant $|x - x_0| < \eta$, on a les deux inégalités :

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon, \quad \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \implies \ell - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < \ell + \varepsilon.$$

D'où : $|g(x) - \ell| < \varepsilon$. Ce qui prouve que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell$.

Théorème 6 | Théorème de minoration

Soient I un intervalle et $x_0 \in$ I (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)} \\ \textbf{(ii)} & f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} +\infty. \end{cases}$$

Alors : $g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} +\infty$.

Théorème 7 | Théorème de majoration

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)} \\ \textbf{(ii)} & g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} -\infty. \end{cases}$$

Alors : $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} -\infty$.

Ces deux théorèmes se démontrent, comme celui des gendarmes, à l'aide de la définition de la limite.

On rappelle également qu'une façon commode de rédiger le théorème d'encadrement est de majorer la valeur absolue par une fonction qui tend vers zéro.

Corollaire 2 | Version valeur absolue & Bornée « × → 0 »

- Soient I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \forall x \in \mathrm{I}, \quad |f(x)| \leqslant g(x) \quad \text{(ou au moins sur un voisinage de } x_0\text{)} \\ \textbf{(ii)} & g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0. \end{cases}$$

  Alors : $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$.
- Par conséquent, le produit d'une fonction bornée au voisinage de x_0 et fonction tendant vers zéro en x_0 est une fonction tendant vers zéro en x_0.

Preuve

- L'hypothèse donne au voisinage de x_0 : $-g \leqslant f \leqslant g$. Donc puisque $g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$, $-g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$ donc par théorème d'encadrement $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$.
- Soit f une fonction bornée au voisinage de x_0 disons par $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$, et g fonction tendant vers zéro en x_0. Alors au voisinage de x_0, $0 \leqslant |fg| \leqslant \mathrm{M}|g|$. Comme $|g(x)| \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$, on conclut à l'aide de la première partie de la preuve.

Exemple 16 Calculer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\cos(x)\sin(x)}{\mathrm{e}^x}$.

Remarque 7 Tous les énoncés des théorèmes précédents s'adaptent en remplaçant les limites par des limites à droite ou à gauche.

Résumé Lever une forme indéterminée (rappel)

Voici une liste non exhaustive de résultats utiles pour lever les formes indéterminées (hors développements limités qui seront vus dans un prochain chapitre) :

- factoriser par le terme dominant,
- utiliser le théorème des croissances comparées,
- simplifier une expression avec des racines grâce à sa quantité conjuguée,
- reconnaître la limite d'un taux d'accroissement ou utiliser un équivalent (voir plus tard concernant les équivalents),
- utiliser un théorème d'encadrement, de minoration ou de majoration.

Exemple 17 (Exemple de synthèse des techniques de calcul de limites) Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x+2}{2x^2 - x - 1}$.

2. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}\right)$.

3. $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x\right)$.

4. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^5 e^{-x}$.

5. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^{3x+2} - e^2}{x}$.

6. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} - \dfrac{\cos x}{x^2} \right)$.

3.3. Limite d'une fonction monotone

On énonce le résultat suivant, analogue à celui concernant les suites monotones (mais beaucoup moins utile en pratique que celui sur les suites).

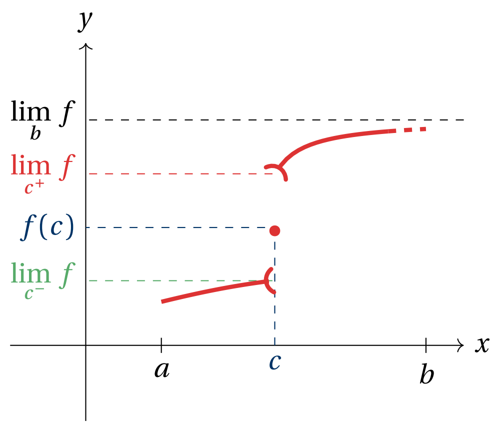
Théorème 8 | Théorème de la limite monotone

Soit $I =]a, b[$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $a < b$, et f une fonction croissante (*resp.* décroissante) telle que f soit définie sur I.

1. **[Aux bornes]**
   - Si f est majorée (*resp.* minorée) sur I, alors f admet une limite finie en b (*resp.* en a).
   - Si f n'est pas majorée (*resp.* pas minorée) sur I, alors :
   $$f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow b} +\infty \quad (\textit{resp.} \quad f(x) \xrightarrow{x \longrightarrow a} -\infty).$$
2. **[Dans l'intérieur]** Soit $c \in I$. Alors f admet une limite à gauche et une limite à droite en c et on a :
   $$\lim_{x \longrightarrow c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x \longrightarrow c^+} f(x).$$

Remarque 8 Pour les suites, seul le cas $b = \infty$, partie « aux bornes », pouvait se produire. Mais finalement le théorème est le même : lorsqu'une fonction est monotone, on a forcément existence d'une limite.

Illustrons par exemple le contexte dans le cas d'une fonction croissante.



Preuve On ne démontre que les résultats concernant la limite en b^- pour une fonction croissante, les autres résultats se démontrant de la même façon.

- Si f n'est pas majorée sur I, il existe alors pour tout $M > 0$ un réel $x_M \in I$ tel que $f(x_M) > M$. La fonction f étant croissante sur I, on a donc $f(x) > M$ pour tout $x \in]x_M, b[$. C'est exactement la définition de $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x) = +\infty$.
- Si f est majorée sur I, on pose $\ell = \sup\{f(x), x \in I\}$. Soit $\epsilon > 0$, il existe alors par définition de la borne supérieure ℓ un réel $x_\epsilon \in I$ tel que $\ell - \epsilon < f(x_\epsilon) \leqslant \ell$. La fonction f étant croissante sur I, on a donc $\ell - \epsilon < f(x) \leqslant \ell$ pour tout $x \in]x_\epsilon, b[$ et donc $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} f(x) = \ell$.

4. EQUIVALENTS

L'objectif de cette section est d'étudier la notion d'équivalents, mais pour les fonctions. Rappelons que nous avons déjà rencontré cette notion pour les suites, celle pour les fonctions bénéficiera de propriétés totalement similaires.

4.1. Définitions et propriétés

Pour les fonctions, équivalent est susceptible d'être vrai au voisinage de n'importe quel point $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et plus seulement $+\infty$ comme pour les suites. La définition est cependant la même en tout point.

Définition 8 | Fonctions équivalentes

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, tel que g **ne s'annule pas au voisinage de x_0**. On dit que f et g sont *équivalentes en x_0*, on note $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, si : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Attention

Avec notre définition, une fonction ne peut donc être équivalente à la fonction nulle.

Remarque 9 (Sur la condition « ne s'annule pas au voisinage de x_0 ») La condition peut être relâchée facilement, en considérant la définition : « il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[]{x\longrightarrow x_0} 0$, telle que :

$f(x) = (1+\varepsilon(x))\,g(x)$ « au voisinage de x_0 ».

Cette nouvelle définition a le mérite d'être plus générale (ne nécessite aucune condition sur g) mais la première suffira amplement pour notre propos.

Cadre

- **Dans la suite, x_0 désignera un élément de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.**
- **Pour notre définition, $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ implique implicitement que f, g ne s'annulent pas au voisinage de x_0. Nous ne le préciserons donc pas à chaque fois dans les énoncés.**

Exemple 18

- On pose $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x} - x^{2025}$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{3x}$.
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^2 + x^{10}$. Donner un équivalent simple au voisinage de f au voisinage en $+\infty$, et en 0.

Méthode (AN) 5.2 (Déterminer des équivalents à l'aide d'un encadrement) Supposons que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de x_0. Alors si :

$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x),\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x)$

où x_0 est une fonction définie au voisinage de x_0 et strictement positive, on montre que $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x)$ en :

1. divisant par $\mathrm{A}(x)$ tout l'encadrement : $\dfrac{f(x)}{\mathrm{A}(x)} \leqslant \dfrac{g(x)}{\mathrm{A}(x)} \leqslant \dfrac{h(x)}{\mathrm{A}(x)}$.
2. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement en faisant $x \longrightarrow x_0$.

La même méthode s'applique pour les fonctions strictement négatives bien sûr, en inversant l'encadrement.

Exemple 19 Soit $f : x \in \mathbb{R}^\star \longrightarrow \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$. Déterminer un équivalent de f en 0.

Proposition 6 | Limite vers équivalent

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell \neq 0 \implies f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \ell$.
- $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell \neq 0, \quad g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell \neq 0 \implies f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Remarque 10

- La première propriété indique simplement qu'une limite non nulle fournit un équivalent simple.
- La seconde est moins utile dans la pratique.

Preuve

- Par propriété sur les limites $\dfrac{f(x)}{\ell} \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.
- Puisque $g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell \neq 0$, g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0. De plus, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

Proposition 7 | Équivalent vers limite

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère deux fonctions $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$. Alors :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ \textbf{(ii)} & f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \end{cases} \implies g(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell.$$

Preuve On a au voisinage de x_0 (f étant alors non nulle), $g(x) = f(x)\dfrac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$, car $f(x) \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} \ell$ et $\dfrac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 1$.

4.2. Opérations sur les équivalents

Maintenant que la notion est présentée, on aimerait avoir des règles opératoires sur les équivalents. Malheureusement, vous allez constater que le symbole équivalent est toujours aussi peu flexible avec les fonctions que le symbole limite. Puisque un équivalent est un quotient,

- le symbole $\underset{x \to x_0}{\sim}$ va très bien se comporter avec les opérations multiplicatives : valeur absolue, puissances, produit, quotient, ...
- en revanche, il va très mal se comporter avec l'addition, le logarithme, l'exponentielle *etc.*.

Proposition 8 | Équivalence et opérations usuelles

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I). On considère cinq fonctions $f, g, h, a, b : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- **[Réflexivité]** $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$.
- **[Symétrique]** $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$.
- **[Transitivité]** $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ **<u>et</u>** $g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x) \implies f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)$.
- **[Valeur absolue]** $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \implies |f(x)| \underset{x \to x_0}{\sim} |g(x)|$.
- **[Multiplication]** $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a(x)$ **<u>et</u>** $g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} b(x) \implies f(x)g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a(x)b(x)$.
- **[Quotient]** $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a(x)$ **<u>et</u>** $g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} b(x) \implies \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\sim} \dfrac{a(x)}{b(x)}$.

  En particulier : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \iff \dfrac{1}{f(x)} \underset{x \to x_0}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$.
- **[Exposant]**
  - Si $k \in \mathbb{Z}$: $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \implies f(x)^k \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)^k$.
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si les fonctions sont strictement positives au voisinage de x_0 : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \implies f(x)^\alpha \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)^\alpha$.

Les preuves étant strictement identiques aux suites, nous ne les redonnons pas.

Attention

Un équivalent n'est **<u>pas</u>** une égalité : on ne peut pas passer un terme d'un côté de l'autre côté par exemple ou même additionner des équivalents comme nous allons le voir.

Attention **On ne peut pas ...**

- ... **sommer des équivalents**,
- ... **composer des équivalents** par une fonction quelconque, même continue en dehors de celles mentionnées dans la proposition précédente (inverse, valeur absolue, puissance). En particulier, on ne compose pas par l'exponentielle, le logarithme *etc.*.

Pour quelques contre-exemples, voir les exemples qui suivent.

Exemple 20 **(Pas d'exponentielle et de somme)** Posons par exemple $f : x \longmapsto x^2 + x, g : x \longmapsto x^2$ et $h : x \longmapsto -x^2 + x$. Alors :

- $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^2, \quad h(x) \underset{x\to\infty}{\sim} -x^2$ mais : $\quad f(x) + h(x) \underset{x\to\infty}{\not\sim} 0$.
- $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} g(x)$, mais : $\quad e^{f(x)} \underset{x\to\infty}{\not\sim} e^{g(x)}$.

Mais alors, comment fait-on pour les sommes et les composées ? Pour les sommes, nous avons vu dans le tout premier exemple que factoriser « par le plus gros terme » fonctionne toujours.

Exemple 21 Donner un équivalent simple de $g(x) = e^x - \dfrac{\ln(x)}{2}$ quand $x \longrightarrow \infty$.

Méthode (AN) 5.3 **(Déterminer un équivalent d'une somme en $\pm\infty$)** Se ramener à une limite usuelle à l'aide d'une factorisation.

4.3. Equivalents usuels

Comment obtenir des équivalents ? Nous allons essentiellement utiliser la définition du nombre dérivé, réécrite sous forme d'un lemme. Mais avant cela, commençons par les polynômes où la technique est déjà connue mais sans jamais avoir parlé d'équivalents.

Proposition 9 | Polynômes et quotients de polynômes

- **[Fonctions polynomiales]** Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p > q$, et $(a_p, a_{p-1}, \dots, a_q) \in \mathbb{R}^{p-q+1}$ avec $a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0$, on a :
$$\begin{cases} a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_q x^q \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_p x^p, \\ a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_q x^q \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q. \end{cases}$$
- **[Quotient de polynômes]** Soient $(p, q, r, s) \in \mathbb{N}^4$, $p > q$ et $r > s$, $(a_p, a_{p-1}, \dots, a_q) \in \mathbb{R}^{p-q+1}$ et $(b_r, b_{r-1}, \dots, r_s) \in \mathbb{R}^{r-s+1}$ avec $a_p \neq 0$, $a_q \neq 0$, $b_r \neq 0$, $b_s \neq 0$. On a :
$$\frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_q x^q}{b_r x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \dots + b_s x^s} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{a_p x^p}{b_r x^r} \quad \text{et} \quad \frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots + a_q x^q}{b_r x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \dots + b_s x^s} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{a_q x^q}{b_s x^s}.$$

Résumé **Équivalents de polynômes et fractions rationnelles**

En résumé,

- un équivalent d'un polynôme non nul en $\pm\infty$, pour les suites ou les fonctions, est donné par son monôme de plus haut degré.
- Un équivalent d'un polynôme non nul en 0 pour une fonction est donné par son monôme de plus bas degré.

Pour une fraction rationnelle, on quotiente les équivalents trouvés précédemment.

Preuve

- Au voisinage de $\pm\infty$:
$$\frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_q x^q}{a_p x^p} = 1 + \frac{a_{p-1}}{a_p}\frac{1}{x} + \dots + \frac{a_q}{a_p}\frac{1}{x^{p-q}} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 1.$$
Puis au voisinage de zéro,
$$\frac{a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_q x^q}{a_q x^q} = \frac{a_p}{a_q}x^{p-q} + \dots + \frac{a_{q+1}}{a_q}x + 1 \xrightarrow{x\to 0} 1.$$
- Le résultat sur les quotients de polynômes s'en déduit en faisant le quotient des équivalents.

Exemple 22 Déterminer un équivalent simple en 0 et $\pm\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^7 - x^3 + 2}{5x^9 + 7x^2 + x}$. En déduire les limites associées éventuelles.

Pour les fonctions, les équivalents peuvent avoir lieu en n'importe quel point. Il peut donc être utile de savoir les composer entre eux.

Proposition 10 | Changement de variable dans un équivalent

Soient I, J deux intervalles et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) ainsi que $y_0 \in \mathrm{J}$ (ou au bord de J). On considère trois fonctions $f : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \varphi(x) \xrightarrow{x \longrightarrow x_0} y_0 \\ \textbf{(ii)} & g \circ \varphi \text{ ne s'annule pas au voisinage de } x_0 \\ \textbf{(iii)} & f(y) \underset{y \to y_0}{\sim} g(y) \end{cases} \implies f(\varphi(x)) \underset{x \to x_0}{\sim} g(\varphi(x)),$$

On peut retenir que l'on peut faire des « changements de variable » dans des équivalents : ici, poser « $y = \varphi(x)$ ».

Preuve

- Les composées $g \circ \varphi$ et $f \circ \varphi$ sont bien définies au voisinage de x_0 puisque $\varphi(x) \xrightarrow{x \longrightarrow x_0} y_0$, donc $\varphi(x)$ est dans n'importe quel voisinage de $y_0 \in \mathrm{J}$ (ou au bord) pourvu que x soit assez proche de x_0 (par définition de la limite).
- Par composition des limites, $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim_{y \longrightarrow y_0} \frac{f(y)}{g(y)} = 1.$

Exemple 23 À l'aide de l'équivalent trouvé dans l'**??**, montrer que :

$$\mathrm{e}^{x^2} - \ln(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \mathrm{e}^{x^2}.$$

Remarque 11 (Composition par une suite et cas $b = \infty$) Le théorème reste vrai si φ est remplacée par une suite (u_n) telle que : $u_n \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} \infty$. On a alors :

$$f(y) \underset{y \to \infty}{\sim} g(y) \implies f(u_n) \underset{n \to \infty}{\sim} g(u_n).$$

Comme pour les suites, notre batterie d'équivalents sera établie à l'aide de la définition de fonction dérivable.

Proposition 11 | Equivalent de $f(x) - f(x_0)$ en x_0

Soient I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \quad \text{dérivable en } x_0, \\ \textbf{(ii)} & f'(x_0) \neq 0, \end{cases} \quad \text{alors : } \quad f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0).$$

Preuve Par définition, $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Or, $f'(x_0) \neq 0$, donc :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0)(x - x_0)} = 1, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0}{\sim} f'(x_0)(x - x_0).$$

Proposition 12 | Equivalents usuels

- $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $\cos x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$
- $\tan x \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x$
- $\arctan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x.$
- Pour tout $\alpha \neq 0$, $(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$. En particulier :

$$\sqrt{1 + x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{1 + x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -x, \quad \frac{1}{1 - x} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

Remarque 12 Par changement de variable, on obtient aussi des versions de ces équivalents en d'autres points que zéro. Il peut être par exemple utile de retenir que : $\boxed{\ln(y) \underset{y \to 1}{\sim} y - 1}$.

Par composition d'équivalents, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3 | Equivalents usuels – Version « composée »

Soient I un intervalle tel que $0 \in \mathrm{I}$ (ou au bord de I) et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$\boxed{\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0}$. Alors :

- $\sin f(x) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$
- $\cos f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{f(x)^2}{2}$
- $\tan f(x) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$
- $e^{f(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$
- $\ln(1+f(x)) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$
- $\arctan(f(x)) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)$.
- Pour tout $\alpha \neq 0$, $(1+f(x))^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha f(x)$. En particulier :

$$\sqrt{1+f(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f(x)}{2}, \quad \frac{1}{1+f(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -f(x), \quad \frac{1}{1-f(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} f(x).$$

Attention

La condition $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = 0$ est indispensable. Par exemple, $\sin(x) \underset{n\to\infty}{\nsim} x$ puisque $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\longrightarrow x_0]{} 0$ par théorème d'encadrement.

Preuve

- Mis à part l'équivalent $\cos x - 1 \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, tous ces équivalents s'obtiennent facilement grâce à la proposition précédente. Par exemple pour $\arctan x$:

- Pour le cosinus, on ne peut conclure directement avec la proposition précédente (comme pour les suites) puisque $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$. Mais $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ et on a, par transitivité de l'équivalence et grâce aux formules précédentes,

$$\begin{aligned}\cos x - 1 &= \sqrt{1-\sin^2 x} - 1\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}\sin^2 x\\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

Exemple 24 Déterminer : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x\tan(x)}$.

Exemple 25 Déterminer : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin(3x)}{e^{6x}-1}$.

Faisons quelques exemples pour de recherche d'équivalent d'une composée.

Méthode (AN) 5.4 **(Déterminer un équivalent d'une composée)** Il faut utiliser la transitivité de l'équivalence et donc, contrairement à d'habitude, travailler « de l'extérieur vers l'intérieur ».

Exemple 26 Déterminer un équivalent des fonctions ci-après, puis leur limite au point indiqué.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln(\cos(x))$ en zéro,

- $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\mathrm{e}^{\cos(x)} - \mathrm{e}\right)$ en zéro,

- $h(x) = \dfrac{\ln(1+\ln(1+x))}{\sin(x)}$ en zéro,

- $i(x) = \dfrac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2}$ en $+\infty$.

Méthode (AN) 5.5 **(Déterminer un équivalent en un point fini autre que zéro)**

- Si l'on souhaite un équivalent en $x_0 \neq 0$, alors on peut effectuer un changement de variable (si aucun terme ne tendant vers zéro quand $x \to x_0$ n'apparait clairement).
- On pose « $y = x - x_0$ », c'est-à-dire que l'on considère $g(y) = f(y + x_0)$, on cherche un équivalent de g en zéro, puis on conclue sur f par composition d'équivalent.

Exemple 27 Déterminer un équivalent de f définie par :

$$f(x)=\left(2x^2-3x+1\right)\tan(\pi x),\quad \text{en} \quad \frac{1}{2},$$

puis préciser sa limite au point indiqué.

Remarque 13 (Équivalent et signe/nature) Soient deux fonctions f et g telles que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$. Alors les limites de f et g :

- sont de « même nature », c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux divergentes en x_0 (éventuellement vers $\pm\infty$) ou toutes les deux convergentes vers la même limite,
- elles sont de même signe au voisinage de x_0.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (AN) 5.1 (Utiliser les croissances comparées dans une somme/différence)

- L'idée est de mettre en facteur le terme qui « pèse le plus lourd » au sens des croissances comparées. La limite du facteur qui apparait peut alors facilement se calculer en utilisant les croissances comparées.
- Cette idée peut être utilisée pour lever une forme indéterminée, même si le résultat qui s'utilise ensuite n'est pas des croissances comparées.

Méthode (AN) 5.2 (Déterminer des équivalents à l'aide d'un encadrement) Supposons que $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ au voisinage de x_0. Alors si :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x),\, h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x)$$

où x_0 est une fonction définie au voisinage de x_0 et strictement positive, on montre que $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \mathrm{A}(x)$ en :

1. divisant par $\mathrm{A}(x)$ tout l'encadrement : $\dfrac{f(x)}{\mathrm{A}(x)}\leqslant\dfrac{g(x)}{\mathrm{A}(x)}\leqslant\dfrac{h(x)}{\mathrm{A}(x)}$.
2. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement en faisant $x\longrightarrow x_0$.

La même méthode s'applique pour les fonctions strictement négatives bien sûr, en inversant l'encadrement.

Méthode (AN) 5.3 (Déterminer un équivalent d'une somme en $\pm\infty$) Se ramener à une limite usuelle à l'aide d'une factorisation.

Méthode (AN) 5.4 (Déterminer un équivalent d'une composée) Il faut utiliser la transitivité de l'équivalence et donc, contrairement à d'habitude, travailler « de l'extérieur vers l'intérieur ».

Méthode (AN) 5.5 (Déterminer un équivalent en un point fini autre que zéro)

- Si l'on souhaite un équivalent en $x_0\neq 0$, alors on peut effectuer un changement de variable (si aucun terme ne tendant vers zéro quand $x\to x_0$ n'apparait clairement).
- On pose « $y=x-x_0$ », c'est-à-dire que l'on considère $g(y)=f(y+x_0)$, on cherche un équivalent de g en zéro, puis on conclue sur f par composition d'équivalent.

5. EXERCICES

Note : vous pouvez utiliser GeoGebra (logiciel libre) pour vérifier vos résultats. Allez dans menu "affichage", sélectionnez "calcul formel" puis utilisez une des commandes "Résoudre", "Dérivée" ou "Limite". Tracer par exemple la fonction étudiée vous aidera à vérifier vos résultats. De plus, l'utilisation de ce logiciel est autorisée au concours Agro-Véto.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

- savoir calculer une limite en utilisant des règles usuelles .... ☐
- savoir calculer une limite en appliquant des théorèmes comparant une fonction avec une autre .... ☐
- savoir lever des formes indéterminées en appliquant différentes techniques (croissances comparées, factorisation, expression conjuguée, équivalents, ...) .... ☐
- connaitre les équivalents usuels et les principales propriétés/dangers de ce symbole ☐

Signalétique du TD

- Le logo 👁 désigne les exercices à regarder à la maison, avant le prochain TD (passage au tableau possible).
- Le logo 💣 désigne les exercices un peu plus difficiles ; à aborder une fois le reste du TD bien maitrisé.

Exercice 1 | Vrai ou faux ? [Solution]

1. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} u(x)=1$ alors pour toute fonction v, on a $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} u(x)^{v(x)}=1$.
2. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}(f+g)(x)$ existe alors $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$ existent.
3. tan est définie au voisinage de $+\infty$.
4. Il est possible de trouver une fonction f telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.
5. Si f est bornée au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$ existe.
6. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\dfrac{e^x}{x}$ existe et vaut 0 .
7. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} g(x)=+\infty$ alors $\dfrac{f}{g}$ admet une limite en $+\infty$ qui est soit un réel positif, soit $+\infty$.
8. Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ alors $\exp(f(x))\underset{x\to+\infty}{\sim}\exp(g(x))$.
9. Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ alors $\sqrt{f(x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{g(x)}$.
10. Si $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ alors $\ln(f(x))\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln(g(x))$.

5.1. Calculs de limites

Exercice 2 | 👁 [Solution] Pour chacune des fonctions f suivantes :

- Déterminer le domaine de définition de f,
- déterminer les limites aux bornes de ce domaine.

1. $f(x)=e^{x^2+x+1}$
2. $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$
3. $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$
4. $f(x)=\dfrac{e^x+x^2+x+1}{e^{2x}+1}$
5. $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$
6. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$
7. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{x+4}\right)$
8. $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$.

Exercice 3 | [Solution] Calculer, lorsqu'elle existe, la limite de la fonction f aux points précisés :

1. $f(x)=\dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4}$ en $-\infty$
2. $f(x)=\dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$
3. $f(x)=\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$ en 1
4. $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2-\ln(x)}$ en $+\infty$
5. $f(x)=\dfrac{x^3+8}{|x+2|}$ en -2^+
6. $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}}$ en 0
7. $f(x)=e^{\frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+1}}$ en $+\infty, 0^+$ et $\dfrac{1}{e}$
8. $f(x)=\dfrac{2\cos(x)-1}{2\sin(x)-\sqrt{3}}$ en $\dfrac{\pi}{3}$
9. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}$ en -1
10. $f(x)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ en 0^+ ;
11. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ en 1^+
12. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{\sin^2 x}$ en 0 ;
13. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x}$ en $+\infty$
14. $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ en $\pm\infty$;
15. $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ en $-\infty$
16. $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{3x}$ en 0 ;
17. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$
18. $f(x)=x^x$ en 0^+ ;
19. $f(x)=\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0
20. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $0,(-1)^+$et $+\infty$.

Exercice 4 | Avec partie entière [Solution]

1. La fonction g définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $g(x) = x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
2. La fonction h définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $h(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ a-t-elle une limite en $+\infty$?
3. Soient a et b strictement positifs. Calculer :
   1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{a}\left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$
   2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{b}{x}\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$
   3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \frac{b}{x}\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$
4. Étudier $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(1 - x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor\right)$.

5.2. Non-existence

Exercice 5 | [Solution]

1. Montrer que tan n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que $\sin + \cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$, et pas non plus en $-\infty$.

Exercice 6 | [Solution]

1. En utilisant les suites $(2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $g : x \longmapsto \frac{x^2 \sin x}{x^2+1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.
2. En utilisant les suites $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $f : x \longmapsto \frac{(-1)^{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}}{x}$ n'a pas de limite finie en 0.

5.3. Équivalents

Exercice 7 | [Solution] Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x+2)$ en -1
2. $f(x) = \frac{x+\sin x}{x - \ln x}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \ln(1+\sin(x))$ en 0
4. $f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ en $+\infty$
5. $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\cos(3x)-1}$ en 0
6. $f(x) = \exp(\sin x) - 1$ en 0
7. $f(x) = \ln(\cos(x))$ en 0
8. $f(x) = \ln\left(x^2 e^x + x^3\right)$ en $+\infty$
9. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x} + e^{-x}\right)$ en $+\infty$
10. $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)$ en $+\infty$
11. $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 8 | [Solution] Utiliser des équivalents pour déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sin ax}{\sin bx}$ en 0, $(a, b \neq 0)$
2. $f(x) = \frac{\ln(\cos(x^2))}{\sin(x)}$ en 0
3. $f(x) = \frac{(1-\cos x)\tan x}{x\sin^2 x}$ en 0
4. $f(x) = \ln(1-x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ en 1.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1. - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x-1 \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   - Régularité : la fonction f est continue sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme somme, quotient, composée et produit de fonctions continues.
2. - Domaine de définition : la fonction g est bien définie si $1+x>0$ et $|x|>0 \iff x \neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
   - Régularité : La fonction g est continue sur $\mathscr{D}_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$ comme somme, composées et produit de fonctions continues.

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. Domaine de définition : $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$.
   - Limite en $-\infty$: Comme $x^2+x+1 \underset{x\to-\infty}{\sim} x^2$: $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^2+x+1 = +\infty$. Puis par composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: Comme $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^2+x+1 = +\infty$. Puis par composée de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Domaine de définition : $x \in \mathscr{D}_f \iff e^x - 1 > 0$ (le numérateur est toujours positif strictement). Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}}$.
   - Limite en 0^+ : par règles usuelles sur les limites de quotients, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: on obtient en mettant en facteur l'exponentielle $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$.
3. Domaine de définition : $x \in \mathscr{D}_f \iff x \geqslant 0, x \neq 0$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^{+\star}}$.
   - Limite en 0^+ : par règles usuelles sur les limites de quotients, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées.
4. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $e^{2x}+1 \neq 0$: toujours vrai comme somme de deux termes strictement positifs. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$.
   - Limite en $-\infty$: Par le théorème du monôme de plus haut degré, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \left(x^2+x+1\right) = +\infty$. Puis par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites, on obtient que $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite en $+\infty$: forme indéterminée donc on met en facteur le terme dominant au numérateur (e^x) et au dénominateur e^{2x}. On obtient alors que par propriété sur les composée, sommes et quotient de limites $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$.
5. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-2 \neq 0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}}$.
   - Par propriétés sur les sommes, quotient et composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty\longrightarrow f}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x} 2^+ f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 0$.
6. - Domaine de définition : La fonction f est bien définie si $x-1 \neq 0, x \neq 0$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0,1\}}$.
   - Par propriétés sur les sommes, quotient et composée de limites, ainsi qu'avec un équivalent de $\dfrac{x}{x-1}$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty\longrightarrow f}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x} 0^+ f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x} 0^- f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x} 1^- f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x} 1^+ f(x) = +\infty$.
7. - Domaine de définition : à l'aide d'un tableau de signes du quotient on a que $\boxed{\mathscr{D}_f =]-4,2[}$.
   - Par propriétés sur les sommes, quotient de limites, on a $\lim\limits_{x\longrightarrow-4} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} f(x) = -\infty$.
8. - Domaine de définition : $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star}$.
   - Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0$. De plus $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ car $x^2 \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$, donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0$.

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \dfrac{x^7}{x^6} = x$. Donc $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad |f(x)| \leqslant \dfrac{|x|}{x^2+1}$, donc comme $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{|x|}{x^2+1} = 0$, il vient $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$ par théorème d'encadrement.
3. $\dfrac{x^5-1}{x^3-1} = \dfrac{(x-1)\sum_{k=0}^4 x^k}{(x-1)\sum_{k=0}^2 x^k} = \dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$ donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) = \dfrac{5}{3}$ par somme et quotient de limites.
4. $x^2 - \ln(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$. Or par croissances comparées, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(x^2 - \ln(x)\right) = \infty$. Donc $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|x^2-\ln(x)|} \xrightarrow{x\longrightarrow\infty} 0$. Donc par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0}$.
5. $f(x) = \dfrac{x^3+8}{|x+2|} = \dfrac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{|x+2|}$ et si $x>-2, x+2>0$ donc $|x+2| = x+2$ d'où après simplification par $(x+2)$, on obtient par somme de limites que $\lim\limits_{x\longrightarrow-2^+} f(x) = 12$.

6. $\lim\limits_{x\to0} 2x = 0$ donc $\sin(2x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$ et $\lim\limits_{x\to0} 3x = 0$ donc $1-\cos(3x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{9x^2}{2}$ puis $\sqrt{1-\cos(3x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{3|x|}{\sqrt2}$. Ainsi, par quotient d'équivalents, $\dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(3x)}} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{2\sqrt2}{3}\dfrac{x}{|x|}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{2\sqrt2}{3}$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\dfrac{2\sqrt2}{3}$. Les limites à droite et à gauche étant différentes, f n'admet pas de limite en 0.
7. En mettant en facteur le ln, on a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 1} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \mathrm{e}$, en divisant par le ln, on a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \mathrm{e}$.
8. Le plus simple est de constater que c'est un quotient de taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)-\frac12}{\sin(x)-\frac{\sqrt3}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\cos(x)-\frac12}{x-\frac{\pi}{3}}}{\frac{\sin(x)-\frac{\sqrt3}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}} = \frac{\cos'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt3.$$

9. En réduisant au même dénominateur, on a $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^3}$ donc par opérations on déduit que :

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty.$$

10. En $+\infty$ on aurait pu utiliser des équivalents, mais ici x tend vers 0^+. Au voisinage de 0^+ on a une fonction bornée multipliée par une fonction qui tend vers zéro. On conclut donc par encadrement :

$$\forall x>0, \quad |f(x)| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{1/x}-1} \xrightarrow{x\to0^+} 0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$.

11. Pour $x>1$, on peut simplifier numérateur et dénominateur.

$$\forall x>1, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \xrightarrow{x\to1^+} +\infty.$$

12. $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\sin^2(x) \underset{x\to0}{\sim} x^2$ et $1+x^2 \underset{x\to0}{\sim} 1$ donc par quotient $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Or $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty\left(\text{car } x^2 \geqslant 0\right)$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.
13. $x^2+2x-3 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc $\sqrt{x^2+2x-3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = |x| = x$ puis par quotient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
14. On peut utiliser un équivalent après mise en facteur.

$$f(x) = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x.$$

- Donc comme $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, on a pour $x>0$:

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) \underset{x\to\infty}{\sim} x\frac12\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} 0.$$

- Donc comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, on a pour $x<0$:

$$f(x) = -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} x\left(-\frac12\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x\to-\infty} 0.$$

15. Même idée, pour $x<0$:

$$f(x) = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x = -x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -x\frac12\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to-\infty} 0.$$

16. $\lim\limits_{x\to0} 2x = 0$ donc $\sin(2x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$ et par quotient, $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac23$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \dfrac23$.
17. $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac12$ par somme, composée et quotient de limites.
18. $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$ pour $x>0$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1$.
19. En $-\infty$, on obtient directement par somme et composée de limites que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\sqrt{1+x^2}-x = \dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2}+x = +\infty$ par somme et composée de limites donc par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
20. $(1+x)^{\frac1x} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Or $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to0}{\sim} 1$ donc par composée de limites, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = e$. De plus, $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = +\infty$ par quotient de limites donc par composée de limites, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$. Enfin, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(x)+\ln(1+1/x)}{x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+1/x)}{x} = 0$ par quotient d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ par composée de limites.

Solution (exercice 4) [Énoncé]

1. On remarque que, pour $x>1$, la fonction g est nulle. En effet :

$$\forall x>1,\ 0 < \frac1x < 1$$

et donc : $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ admet une limite en } +\infty \text{ qui est nulle.}}$

2. Par le même raisonnement que ci-dessus, on sait que :
$$\forall x > 1,\ h(x) = \frac{1}{x}.$$
Ainsi, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} h(x) = 0$.

3. **3.1)** On utilise ici l'inégalité caractéristique de la partie entière, à savoir :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad x-1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x.$$
- Ainsi, pour $x > 0$, on obtient : $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{b}{a}$. Et ainsi par le théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} \frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor = \frac{b}{a}$.
- Et pour $x < 0$, on obtient que : $\frac{b}{a} < \frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$. Et ainsi par le théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-} \frac{x}{a}\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor = \frac{b}{a}$.

Ainsi la limite en 0 existe et vaut $\frac{b}{a}$.

3.2) Par définition de la partie entière, on a, comme $a > 0$: $\forall x \in]0,a[,\quad \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor = 0 \implies \forall x \in]0,a[,\quad \frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor = 0$. Ainsi, la limite en 0^+ existe et vaut 0.

3.3) Par définition de la partie entière, on a, comme $a > 0$:
$$\forall x \in]-a,0[,\quad \left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor = -1 \implies \forall x \in]-a,0[,\quad \frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor = -\frac{b}{x}.$$
Ainsi : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-} \frac{b}{x}\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor = +\infty$ car $b > 0$.

4. On utilise l'inégalité caractéristique de la partie entière et on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\quad \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}.$$
On distingue alors les cas $x > 0$ et $x < 0$ puisqu'on a envie de multiplier par x, et on obtient :
- Cas $x > 0$: on a :
$$1-x < \ x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \ 1-1 \leqslant \ -x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor < \ x-10 \leqslant \ 1-x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor < \ x.$$
Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}\left(1 - x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right) = 0$.
- Cas $x < 0$: on a par le même type de raisonnement que :
$$x < 1 - x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 0.$$
Ainsi toujours par le théorème d'encadrement, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^-}\left(1 - x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right) = 0$.

Ainsi la limite à gauche et à droite étant la même, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow0} 1 - x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$.

Solution (exercice 5)

[Énoncé] Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$ par exemple, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers $+\infty$ telle que les suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers deux limites différentes quand n tend vers l'infini.

1. On pose : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n\pi$ et $v_n = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$.. Ces deux suites tendent bien toutes les deux vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. De plus, on a $\tan(u_n) = 0$ qui tend vers 0 en $+\infty$, et $\tan(v_n) = 1$ qui tend vers 1 en $+\infty$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction n'a pas de limite en } +\infty}$.

2. On pose : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n\pi$ et $v_n = \pi + 2n\pi$. Ces deux suites tendent bien toutes les deux vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. De plus, on a $\cos(u_n) + \sin(u_n) = 1$ qui tend vers 1 en $+\infty$, et $\cos(v_n) + \sin(v_n) = -1$ qui tend vers -1 en $+\infty$. Ainsi, $\boxed{\text{la fonction n'a pas de limite en } +\infty}$. Le même raisonnement en faisant tendre n vers $-\infty$ permet de montrer que la fonction n'a pas de limite en $-\infty$ non plus.

Solution (exercice 6)

[Énoncé]

1. On considère les suites définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$x_n = 2n\pi \quad\text{et}\quad y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$
D'une part, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = +\infty$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $g(x_n) = \dfrac{4n^2\pi^2\sin(2n\pi)}{4n^2\pi^2+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} g(x_n) = 0$.
- $g(y_n) = \dfrac{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2+1} = \dfrac{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2}{(2n\pi+\frac{\pi}{2})^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4n^2\pi^2}{4n^2\pi^2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} g(y_n) = 1$.

Par caractérisation séquentielle, on peut alors affirmer que g n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. On considère les suites définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$x_n = \frac{1}{2n} \quad\text{et}\quad y_n = \frac{1}{2n+1}.$$
D'une part, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = 0$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $f(x_n) = \dfrac{(-1)^{2n}}{\frac{1}{2n}} = 2n$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = +\infty$.

- $f(y_n) = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{\frac{1}{2n+1}} = -(2n+1)$ donc $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = -\infty$.

Par caractérisation séquentielle, on peut alors affirmer que f n'admet pas de limite en 0.

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1. $\ln(x+2) = \ln(1+(x+1))$. Or $\lim\limits_{x\longrightarrow -1}(x+1) = 0$ donc $\ln(x+2) \underset{x\to-1}{\sim} x+1$.
2. On met x en facteur dans le quotient, puis on utilise que $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\longrightarrow\infty} 0$, $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow{x\longrightarrow\infty} 0$. Donc $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 1$.
3. On a $\sin(x) \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$, donc $\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to0}{\sim} \sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$.
4. On a $f(x) = x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x) = x\ln(1+1/x)-\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln(x)$ puisque $\ln(1+1/x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x$ et que par conséquent $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\ln(1+1/x) = 1$.
5. $\cos(3x)-1 \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{9x^2}{2}$, et $\ln(1+2x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$, donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{2}{9x} \xrightarrow{x\longrightarrow 0} \infty$.
6. $\sin x \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$, donc $\exp(\sin x)-1 \underset{x\to0}{\sim} \sin x \underset{x\to0}{\sim} x$.
7. $\ln(\cos(x)) = \ln(1+(\cos(x)-1))$. Or $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(\cos(x)-1) = 0$ donc $\ln(\cos(x)) \underset{x\to0}{\sim} \cos(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.
8. $f(x) = \ln\left(x^2 e^x(1+xe^{-x})\right) = 2\ln x + x + \ln(1+xe^{-x})$ donc :
$$f(x) = x\left(\frac{2\ln x}{x} + 1 + \frac{\ln(1+xe^{-x})}{x}\right).$$
Comme $\dfrac{2\ln x}{x} + 1 + \dfrac{\ln(1+xe^{-x})}{x} \xrightarrow{x\longrightarrow\infty} 1$, on a : $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$.
9. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{1}{x}+e^{-x}\right) = 0$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}+e^{-x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ car $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\left(\frac{1}{x}+e^{-x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ par croissances comparées.
10. On a $f(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(x)+\ln(1+1/x)}{\ln x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right)$. Or, $\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \xrightarrow{x\longrightarrow\infty} 0$ par opérations sur les limites. Ainsi, $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x}$.
Or, $1/x \xrightarrow{x\longrightarrow\infty} 0$, donc $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$.
11. On a $f(x) = e^{1/x}\left(1-e^{1/(x+1)-1/x}\right) = e^{1/x}\left(1-e^{-\frac{1}{x(x+1)}}\right)$ or $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(-\dfrac{1}{x(x+1)}\right) = 0$ donc : $1-e^{-\frac{1}{x(x+1)}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

Au final puisque $e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{1/x} = 1\right)$, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

Solution (exercice 8) [Énoncé]

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} ax = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} bx = 0$ donc $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$. D'où $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \dfrac{a}{b}$.
2. Comme $\cos(x^2)-1 \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$, on a :
$$f(x) = \frac{\ln(1+[\cos(x^2)-1])}{\sin(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\cos(x^2)-1}{x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-\frac{x^4}{2}}{x}$$
puisque $x^2 \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$. Après simplifications, on trouve que : $f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^3}{2} \xrightarrow{x\longrightarrow 0} 0$.
3. On a $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}\times x}{x\times x^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$.
4. $f(x) = \ln(1-x)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right) \underset{x\to1}{\sim} (1-x)\ln(1-x)$ D'où $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) = 0$ par composée de limites et croissances comparées.