Chapitre (AN) 6 Compléments sur la continuité et la dérivation

Résumé & Plan

Ce chapitre vient compléter les notions de continuité et dérivabilité déjà rencontrées. On complète la continuité (notamment avec le théorème des valeurs intermédiaires) ainsi que la dérivation (avec les « grands » théorèmes, comme celui de ROLLE, des accroissements finis, *etc.*).

D'après le théorème du point fixe de BROUWER, si vous touillez votre café et que vous attendez que le liquide se stabilise, alors il existera au moins une molécule qui sera revenue à sa position de départ.

— Le saviez-vous ?

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

Dans ce chapitre encore, I désignera toujours un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point même lorsque cela n'est pas précisé.

1. COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ

On reprend quelques généralités sur les fonctions continues, avant d'y ajouter quelques grands théorèmes.

Remarque 1 Tous les résultats sont énoncés pour des fonctions définies sur un intervalle I. Ils s'étendent sans difficulté aux fonctions définies sur une réunion d'intervalles disjoints ; on regarde alors la restriction de la fonction à l'unique intervalle contenant le point d'étude de la continuité.

1.1. Continuité locale

Définition 1 | Continuité en un point
Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est *continue en* x_0 si : $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Remarque 2
- La définition avec des « epsilon » donne :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathrm{I}, \quad |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$
Autrement dit : « $f(x)$ est arbitrairement proche de $f(x_0)$ pour x suffisamment proche de x_0 ».
- De manière équivalente, on dit que f est continue en x_0 si elle admet une limite finie en x_0 ; en effet, on a montré dans le Chapitre (AN) 5 que si la limite en x_0 **dans le domaine de définition** existe, alors elle vaut forcément $f(x_0)$.

Attention
On parle de continuité en un point de **l'ensemble de définition**, puisque $x_0 \in \mathrm{I}$ dans la définition précédente. La question ne se pose donc même pas en les points qui ne sont pas dans l'ensemble de définition.

Définition 2 | Continuité à droite, continuité à gauche

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que :
- f est *continue à gauche* en x_0 si : $\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- f est *continue à droite* en x_0 si : $\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Proposition 1 | Continuité, à gauche et à droite

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } x_0 &\iff f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0 \\ &\iff \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$

Note | *Attention : puisqu'ici la fonction f est définie en x_0, il ne faut pas oublier l'égalité à $f(x_0)$.*

Preuve Conséquence directe de la proposition qui fait le lien entre limite à droite et limite à gauche.

Exemple 1 Considérons $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor. \end{array} \right.$ Soit $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f est-elle continue à droite en k ? Continue à gauche en k ? Continue à gauche en k ?

Exemple 2 Étudier la continuité au point de raccord des fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

- $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

- $h : x \longmapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Définition 3 | Continuité sur un intervalle
Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :
- *continue sur* I si : $\forall x_0 \in \mathrm{I}, \quad \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est-à-dire si elle est continue en tout $x_0 \in \mathrm{I}$,
- *continue sur* I *sauf en un nombre fini de points* si elle est continue sur $\mathrm{I} \setminus \mathrm{E}$, où E est un sous-ensemble fini de I.

Notation
On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Exemple 3 Justifier que la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est continue sauf en un nombre fini de points.

Exemple 4 Étudier la continuité et la continuité sauf en un nombre fini de points des fonctions suivantes :
- $f : x \longmapsto \begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 3x^2-1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$
- $g : x \longmapsto \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Catalogue de fonctions continues. Les fonctions usuelles, à l'exception de la fonction partie entière pour laquelle tous les entiers relatifs sont des points de discontinuité, sont continues sur leur domaine de définition, c'est-à-dire :

- Les fonctions polynomiales, exponentielle, sinus, cosinus, valeur absolue, racine cubique sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction tangente est continue sur les intervalles $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}}]k, k+1[$ (elle est constante sur chaque $]k, k+1[$).
- La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriétés des fonctions continues. Passons maintenant aux propriétés qui vont nous permettre de montrer que des fonctions sont continues en pratique.

Proposition 2 | Opérations sur les fonctions continues en un point
Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :
- les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues en x_0.
- De plus, si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 et est continue en x_0.

On déduit immédiatement de la définition d'une fonction continue, des versions locales des deux énoncés précédents leur version globale : « Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Alors les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues sur I. De plus, si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I. »

Théorème 1 | Composition de fonctions continues

Soient I et J deux intervalles, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

- **[Version locale]** Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{ll} \textbf{(i)} & f \text{ est continue en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & g \text{ est continue en } f(x_0) \end{array}\right. \Longrightarrow g \circ f \text{ est continue en } x_0.$$

- **[Version globale]** Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Méthode (AN) 6.1 (Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle) En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition, puis on vérifie à la main (calcul de limite) les points qui posent problème.

La notion de fonction continue en un point a, qui est : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim\limits_{x \to a} x\right)$ peut donc être comprise comme une « permutation fonction / limite ». Cela fonctionne aussi pour des suites qui tendent vers a.

Théorème 2 | Permutation limite de suite et fonction

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors :

$$\left\{\begin{array}{ll} \textbf{(i)} & u_n \text{ converge et, } \lim\limits_{n \to \infty} u_n \in \mathrm{I} \\ \textbf{(ii)} & f \text{ est continue en } \lim\limits_{n \to \infty} u_n \end{array}\right. \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to \infty} u_n\right).$$

Remarque 3

- Ce théorème permet de permuter limite d'une suite et fonction, lorsque la fonction est continue.
- Ce résultat est crucial dans l'étude de suites récurrentes vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$. Il nous avait permis de montrer que toute limite finie ℓ de (u_n) est un point fixe de f donc vérifie $\ell = f(\ell)$ si f est continue en ℓ.

Preuve Par hypothèse, $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = \ell$. Donc par caractérisation séquentielle de la limite, puisque $u_n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell$, on déduit le résultat $f(u_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(\ell)$.

1.3. Prolongement par continuité

Définition 4 | Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ telle que f admette une limite finie en x_0.

- On appelle alors *prolongement par continuité de f en x_0* la fonction $\widehat{f}$ définie sur I tout entier par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \widehat{f}(x) = \left\{\begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0. \end{array}\right.$$

- La fonction $\widehat{f}$ est souvent encore notée $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, et elle est continue en x_0. On dit aussi que l'on a effectué un *prolongement par continuité de f en x_0*.

Remarque 4

- On peut définir de manière analogue le prolongement par continuité à gauche de f en x_0 et le prolongement par continuité à droite de f en x_0.
- Lorsque f n'est pas continue en plusieurs points, on étend sans difficulté la définition précédente : il s'agit alors d'analyser l'existence d'une limite en tous les points aux bornes du domaine de définition, en lesquels f n'est pas définie.

Exemple 5 Prolonger par continuité les deux fonctions ci-dessous aux bornes de leur ensemble de définition.

1. f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

2. g définie par $g(x) = \dfrac{\arctan(x^2)}{1-\cos(x)}$.

2. GRANDS THÉORÈMES DE CONTINUITÉ

2.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer l'existence (mais pas l'unicité!) de solutions d'une équation du type $f(x) = k$, où f est une fonction et k un nombre réel. On commence par le cas $k = 0$.

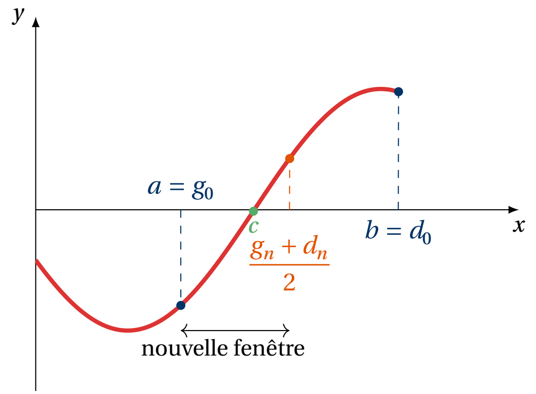
EXISTENCE D'UNE SOLUTION À L'ÉQUATION $f(x) = 0$. Ce premier cas parait restrictif, mais en fait pas tant que ça puisqu'on peut souvent s'y ramener.

Théorème 3 | Théorème des valeurs intermédiaires
Soient I un intervalle, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tels que $a \leqslant b$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** telle que : $f(a) \times f(b) \leqslant 0$. Alors : $\exists c \in [a, b], \quad f(c) = 0$.

Nous présentons ici une preuve « constructive » du théorème : nous allons construire c comme la limite de deux suites adjacentes.

Preuve *(Approximation de c par dichotomie ♥)* La démonstration de ce théorème repose sur le *principe de dichotomie*. On va découper successivement l'intervalle d'étude en deux sous-intervalles plus petit dont l'un contient le point qui nous intéresse.
Sans perte de généralité on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (si $f(a) = 0, c = a$ convient et si $f(b) = 0, c = b$ convient).

- On va définir deux suites (g_n) et (d_n) telles que les intervalles $[g_n, d_n]$ soient de plus en plus petits, et on montre qu'elles convergent vers une même limite c. Posons $g_0 = a$ et $d_0 = b$, puis par récurrence :
$$\begin{cases} g_{n+1} = g_n,\ d_{n+1} = \frac{g_n+d_n}{2} & \text{si} \quad f\left(\frac{g_n+d_n}{2}\right) \geqslant 0, \\ g_{n+1} = \frac{g_n+d_n}{2},\ d_{n+1} = d_n & \text{si} \quad f\left(\frac{g_n+d_n}{2}\right) < 0. \end{cases}$$
Faisons un dessin par exemple dans le cas d'une fonction croissante sur $[a, b]$. *(mais la preuve fonctionne même si f n'est même pas monotone sur $[a, b]$)*



- Alors, on montre par récurrence la propriété $(\mathscr{P}_n)$:
«$g_n, d_n \in [a, b], \quad a = g_0 \leqslant \ldots \leqslant g_n, \quad d_n \leqslant \ldots \leqslant d_0 = b,$
$d_n - g_n = \dfrac{b-a}{2^n}, \quad f(g_n) \leqslant 0 \leqslant f(d_n)$.»

Remarque 5 Pour vérifier le changement de signe, on a parfois recours à des calculs de limites. Dans ce cas là, la fonction en question est définie sur $\mathbb{R}$ et on justifie l'existence d'un segment $[a, b]$ sur le quel on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires en calculant $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x)$.

Remarque 6 **(S'il existe plusieurs c)** S'il existe plusieurs c tels que $f(c) = 0$, la preuve précédent ne précise pas vers lequel les suites convergent. Il s'agira donc dans ce cas là d'initialiser à des bornes a, b suffisamment proches de sorte qu'il n'existe qu'une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

(Algorithme de dichotomie pour les fonctions) Cette dernière preuve nous livre directement un algorithme pour approcher ce type de zéros, qui est très important.

```python
def dicho(a, b, f, prec):
    """
    renvoie une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b \
    ↪ avec précision
    prec
    """
    g, d = a, b
    while d - g > prec:
        m = (g + d)/2
        if f(g)*f(m) <= 0:
            # changement de signe sur [g,m]
            d = m
        else:
            # pas de changement de signe sur [g,m]
            g = m
    return (g + d)/2
```

On peut aussi adopter une version récursive.

```python
def dicho_rec(a, b, f, prec):
    """
    renvoie une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b \
    ↪ avec précision prec
    """
    if b - a <= prec:
        return (a + b)/2
    else:
        m = (a + b)/2
        if f(a)*f(m) <= 0:
```

```
            # changement de signe sur [a,m]
            return dicho_rec(a, m, prec)
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,m]
            return dicho_rec(m, b, prec)
```

Il existe encore d'autres méthodes plus sophistiquées (méthode de Newton, de la sécante, *etc.*...).

Exemple 6

- De quel réel obtient-on une valeur approchée pour $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$ et $b = 2$?

- De quel réel obtient-on une valeur approchée pour $f(x) = \sin(x)$, $a = 3$ et $b = 4$?

Exemple 7 Prouver que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - 2x + \ln(x)$ s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner une valeur approchée d'une solution à 10^{-3} près.

L'appel suivant répond à la question.

```
>>> def f(x):
...     return 1/x-2*x+ma.log(x)
...
>>> f(0.5)
0.3068528194400547
>>> f(1)
-1.0
>>> dicho(0.5, 1, f, 10**(-3))
0.58642578125
```

Exemple 8 Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application continue.

- Alors, f admet un *point fixe* : il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

- Étant donnée `f` définie en Python, écrire quelques commandes et/ou fonctions permettant de renvoyer une valeur approchée de c à précision 10^{-3}.

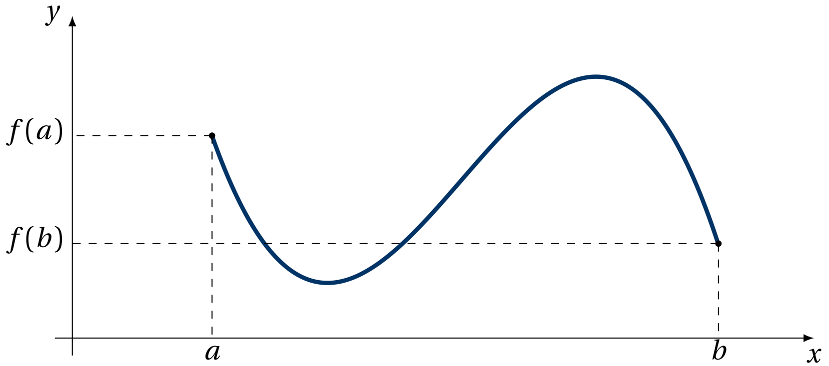
EXISTENCE D'UNE SOLUTION À L'ÉQUATION $f(x)=k$. Le théorème des valeurs intermédiaires est à utiliser lorsque l'on souhaite prouver l'existence d'un réel solution à une équation. Il existe une version plus générale :

Théorème 4 | Théorème des valeurs intermédiaires
Soient I un intervalle, $(a,b)\in \mathrm{I}^2$ tels que $a\leqslant b$, $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$: $\exists c\in[a,b],\quad f(c)=k$.

Preuve Notons $g:x\in\mathrm{I}\longmapsto f(x)-k$. Alors g est continue par différence de telles fonctions. En supposant par exemple que $f(a)\leqslant k\leqslant f(b)$, alors :

$$g(a)\times g(b)=\left(\underbrace{f(a)-k}_{\leqslant 0}\right)\left(\underbrace{f(b)-k}_{\geqslant 0}\right)\leqslant 0.$$

Plaçons un point k entre $f(a)$ et $f(b)$ ci-dessous, et illustrons le théorème.



Corollaire 1 | Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Preuve
- Soient I un intervalle et $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue. On admet que $f(\mathrm{I})$ est un intervalle si et seulement si pour tout $(y,y')\in f(\mathrm{I})^2$ tel que $y\leqslant y'$, on a $[y,y']\subset f(\mathrm{I})$. Utilisons ce fait pour montrer que $f(\mathrm{I})$ est aussi un intervalle.
- Pour un tel couple (y,y'), il existe $(x,x')\in\mathrm{I}^2$ tel que $y=f(x)$ et $y'=f(x')$.
- Supposons par exemple que $y'\geqslant y$. Soit $k\in[y,y']=[f(x),f(x')]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in\mathrm{I}$ tel que $k=f(c)$, donc $kx_0\in f(\mathrm{I})$. Ainsi, $[y,y']\subset f(\mathrm{I})$. Même chose si $y'<y$.
- On en déduit que $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Remarque 7 (Aspects informatiques)
- Pour résoudre $f(x)=k$ avec $k\in\mathbb{R}$, on utilise les fonctions `dicho` et `dicho_rec` précédentes à $x\longmapsto f(x)-\alpha$.
- Pour résoudre $f(x)=x$, on utilise les fonctions `dicho` et `dicho_rec` précédentes à $x\longmapsto f(x)-x$.

2.2. Théorème des bornes atteintes

Rappelons une définition déjà rencontrée dans le Chapitre (ALG) 2 sur les nombres réels.

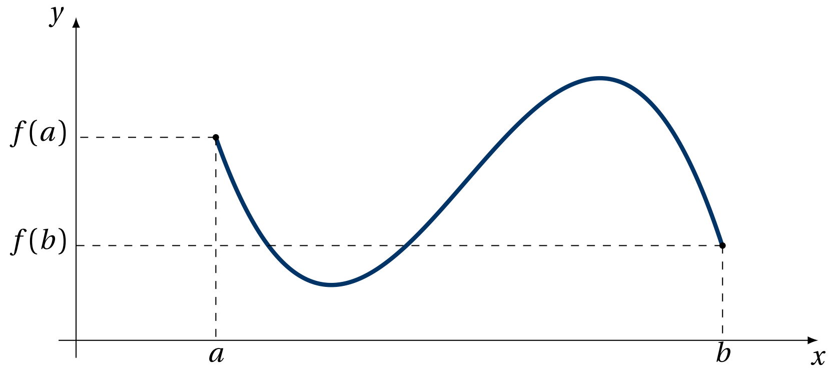
Définition 5 | Segment
On appelle *segment* tout intervalle fermé borné, *i.e.* tout intervalle du type $[a,b]$, ou a et b sont deux réels de sorte que $a<b$.

Ainsi, l'intervalle $[2,5]$ est un segment tandis que l'intervalle $]0,4]$ n'en est pas un.

Théorème 5 | Bornes atteintes
Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et ses bornes sont atteintes, c'est-à-dire : il existe $(x_1,x_2)\in[a,b]^2$ tel que

$$f(x_1)=\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\},\quad f(x_2)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}.$$

Plaçons les points x_1,x_2 sur la figure ci-dessous.



Nous admettons ce théorème, dont la preuve nécessite un théorème hors-programme sur les suites.

Attention
- Il n'y a aucune raison pour que les bornes soient atteintes en a et b, donc sur les bords de l'intervalle. Penser à la fonction sinus sur $[0,2\pi]$ par exemple.

- Le fait que $[a,b]$ soit un segment est crucial. Penser à la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,1]$ par exemple.

Exemple 9 La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur le segment $[-1,2]$. Elle est bornée : $\forall x \in [-1,2], \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant 4$, et atteint ses bornes en 0 et 2 car $0^2 = 0$ et $2^2 = 4$.

Exemple 10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $g = f \circ \sin$ est bornée.

Corollaire 2 | Image d'un segment par une fonction continue
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Autrement dit, si f est une continue sur un segment $[a,b]$, on a :

$$f([a,b]) = [m, \mathrm{M}], \quad \text{où :} \quad m = \min_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{[a,b]} f.$$

Preuve Montrons l'égalité d'ensembles par double-inclusion : $f([a,b]) = [m,\mathrm{M}]$.
$\boxed{\subset}$ Par definition du max et du min : $\forall x \in [a,b], m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$, donc $f([a,b]) \subset [m,\mathrm{M}]$.
$\boxed{\supset}$ D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $x_1, x_2 \in [a,b]$ tels que $m = f(x_1), \mathrm{M} = f(x_2)$. Par définition de l'image d'un intervalle, $m \in f([a,b])$ et $\mathrm{M} \in f([a,b])$. Comme $f([a,b])$ est un intervalle d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on a $[m,\mathrm{M}] \subset f([a,b])$.

2.3. Théorème de la bijection

Lorsque l'on souhaite montrer l'existence **mais aussi l'unicité** d'une solution pour une équation du type $f(x) = k$, on aura recours au théorème de la bijection sur un intervalle bien choisi.

Théorème 6 | Théorème de la bijection
Soit f une fonction numérique **continue** sur $\mathrm{I} \subset \mathscr{D}_f$, et **strictement monotone** sur I. Alors :

- $f(\mathrm{I})$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$. Plus précisément, l'intervalle $f(\mathrm{I})$ est donné par le tableau suivant :

I / $f(\mathrm{I})$	$[a,b]$	$]a,b]$	$[a,b[$	$]a,b[$
str. ↗	$[f(a), f(b)]$	$\left]\lim_a f, f(b)\right]$	$\left[f(a), \lim_b f\right[$	$\left]\lim_a f, \lim_b f\right[$
str. ↘	$[f(b), f(a)]$	$\left[f(b), \lim_a f\right[$	$\left]\lim_b f, f(a)\right]$	$\left]\lim_b f, \lim_a f\right[$

- La bijection réciproque $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Remarque 8 Ce théorème sert à montrer l'existence et l'unicité de solutions à certaines équations.

Preuve
- L'ensemble $f(\mathrm{I})$ est bien un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires et f est surjective de I dans $f(\mathrm{I})$ par définition de $f(\mathrm{I})$. Il reste donc à vérifier que f est bien injective sur I.
- Si f est strictement croissante sur I, alors : $x < y \iff f(x) < f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{I}^2$. Ainsi, si $f(x) = f(y)$ avec $x, y \in \mathrm{I}$, montrons que $x = y$.
  - Si $x > y$, alors $f(x) > f(y)$ — contradiction.

- ◇ Si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$ — contradiction.

  Donc nécessairement $x = y$. La fonction f est donc bien injective sur I et f^{-1} est bien strictement croissante sur $f(\mathrm{I})$.
- La preuve dans le cas où f est strictement décroissante sur I est identique.

Méthode (AN) 6.2 (Utilisation du théorème de la bijection ou du théorème des valeurs intermédiaires) On souhaite justifier l'existence (et l'unicité éventuelle) d'une solution $x \in \mathbb{R}$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur un intervalle I tel que $\alpha \in f(\mathrm{I})$.

Notez également que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $g(x) = \alpha$ avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$, et $\alpha = 0$.

Exemple 11

1. Prouver que $f : x \longmapsto \ln\left(x^2 - x - 2\right)$ ne s'annule que deux fois sur son domaine de définition.

2. Soit $n \geqslant 1$, montrer que $\mathrm{e}^{-nx} - x = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$.

3. COMPLÉMENTS DE DÉRIVATION

On reprend quelques généralités sur les fonctions dérivables, avant d'y ajouter quelques grands théorèmes.

Définition 6 | Dérivabilité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est *dérivable* en x_0 si la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Taux d'accroissement de } f \text{ entre } x \text{ et } x_0} \end{array}\right.$$

  admet une limite finie en x_0. La limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en x_0*. *(Puisque x_0 est un bord de $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$, la limite éventuelle a bien un sens)*
- On dit que f est *dérivable à droite en x_0* (*resp. à gauche*) si on a seulement existence d'une limite à droite ou à gauche.

Remarque 9

- Une fonction est donc dérivable en x_0 si son taux d'accroissement tend vers une limite finie.
- Le taux d'accroissement s'interprète comme la pente de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x_0 et x. Lorsque f est dérivable en x_0, le nombre $f'(x_0)$ s'interprète alors comme la « pente limite » de ces cordes.

Remarque 10 **(Version « $x_0 + h$ »)** La limite du taux d'accroissement peut aussi, par composition des limites (poser « $h = x - x_0 \xrightarrow[]{x \longrightarrow x_0} 0$ »), être écrite sous cette forme :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Notation

On note en général (sous réserve d'existence) :

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f en x_0,
- $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à gauche en x_0,
- $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à droite en x_0.

On obtient directement des résultats sur les limites, la propriété suivante.

Proposition 3 | Dérivabilité, à gauche et à droite

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & f'_g(x_0) = f'_d(x_0). \end{cases}$$

Définition 7 | Tangente

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *tangente à f d'abscisse a* la droite d'équation :
$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$
- Si f est dérivable à gauche (*resp.* droite) en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *demi-tangente à gauche (resp. droite) à f d'abscisse x_0* la droite d'équation :
$$y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \quad \left(\textit{resp.} \quad y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\right).$$

On dit que f *admet une tangente horizontale en x_0* lorsque $f'(x_0) = 0$.

Exemple 12

1. La valeur absolue n'est pas dérivable en zéro, mais elle l'est à droite et à gauche.

2. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro.

Exemple 13 Soit $f \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$ Étudier la dérivabilité de f en zéro.

Exemple 14 Soit $g \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{array} \right.$ Étudier la dérivabilité de f en zéro, en admettant l'encadrement : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad -\dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) - x \leqslant 0.$

Exemple 15 On considère la fonction f définie par $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$. Étudier la dérivabilité en chaque entier $k \in \mathbb{Z}$, et celles à droite/gauche.

Exemple 16 **(Cas d'un prolongement continu)** Montrer que l'on peut prolonger par continuité en 0 la fonction $f : x \longmapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exemple 17

- Soit f une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en $-x_0$ et exprimer $f'(-x_0)$ en fonction de $f'(x_0)$.

- Mêmes questions si f est impaire.

Rappelons également le lien entre continuité et dérivabilité déjà rencontré et démontré dans le Chapitre (AN) 1.

Théorème 7 | Dérivabilité & Continuité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Attention

La réciproque est, en général, fausse. La valeur absolue est continue en zéro, alors qu'elle n'y est pas dérivable comme nous l'avons déjà constaté.

Enfin, en faisant varier x_0 on créer ainsi une nouvelle fonction notée f'.

Définition 8 | Fonction dérivée, Fonction dérivable

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point $x \in \mathrm{I}$. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée de* f.

Notation

On note $\mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles.

Avant de poursuivre, refaisons quelques calculs de dérivées. Il convient de refaire ceux présents dans le chapitre de fonctions du premier semestre si vous pensez avoir oublié certaines formules.

Exemple 18 (Calculs de dérivées – Synthèse) Dériver les fonctions suivantes, en commençant par justifier qu'elles sont bien dérivables sur un domaine à préciser.

1. $f : x \longmapsto (x+1)^2(2x-1)^3$

2. $g : x \longmapsto \dfrac{\cos\left(x^2\right)}{x}$

3. $u : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$

4. $v : x \longmapsto \sin^3(x)\tan(3x)$

Exemple 19 **(Calculs de dérivées – Bijection réciproque)** Dans un exemple précédent, on a montré que $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathrm{e}^{-x} - x$ réalisait une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, \infty[$. Étudier la dérivabilité de f^{-1}, calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

- Soit $y \in [1, \infty[$. Résolvons $f'\left(f^{-1}(y)\right) = 0$.
-

3.2. Dérivées successives, classe d'une fonction

DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR. Lorsque f' est encore dérivable, on appelle la dérivée de f' la dérivée *seconde* de f, et ainsi de suite.

Définition 9 | Dérivabilité n-ième

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit, sous réserve d'existence, les *dérivées successives* de f en posant $f^{(0)} = f$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Exemple 20 Déterminer les dérivées successives de ln.

Exemple 21 Montrer que cos est n fois dérivable, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Remarque 11 Le même type de formule existe pour le sinus : on peut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$

Définition 10 | Classe $\mathscr{C}^1, \mathscr{C}^n$

- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur I si :
  - f est dérivable sur I,
  - et si f' est **continue** sur I.

- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^n$ sur I si :
  - f est n fois dérivable sur I,
  - et si $f^{(n)}$ est **continue** sur I.
- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation $\mathscr{D}_k$ et $\mathscr{C}^k$

- On note $\mathscr{D}^k(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I, donc telles que $f^{(k)}$ existe.
- $\mathscr{C}^k(\mathrm{I})$ est donc l'ensemble des fonctions de $\mathscr{D}^k(\mathrm{I})$ telles que $f^{(k)} \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet parfois d'indiquer l'intervalle I.

Remarque 12 **(Inclusions)** Ainsi, en notant $\mathscr{C}^n(\mathrm{I})$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $\mathscr{D}^n(\mathrm{I})$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I,

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^{n+1}(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^n(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^n(\mathrm{I}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^1(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^1(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$$

Attention au vocabulaire

On dit bien « f dérivable à dérivée continue » pour signifier que f est $\mathscr{C}^1$ et pas « f est continue dérivable » qui signifie simplement que f est dérivable ! (car dérivable implique continue).

Proposition 4 | Caractère $\mathscr{C}^k$ des fonctions usuelles

- Les fonctions $x \longmapsto \cos x, x \longmapsto \sin x, x \longmapsto \tan x, x \longmapsto \arctan x, x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto x^k, k \in \mathbb{Z}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.
- Les fonctions $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto x^a, a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition privé de 0.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, les sommes, produits, combinaisons linéaires, compositions et quotients (bien définis) de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sont de classe $\mathscr{C}^k$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$).

Exemple 22 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}_+$, on notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Montrer que f est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

4. GRANDS THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

4.1. Points critiques et extremums locaux

Définition 11 | *Extrema* global / local

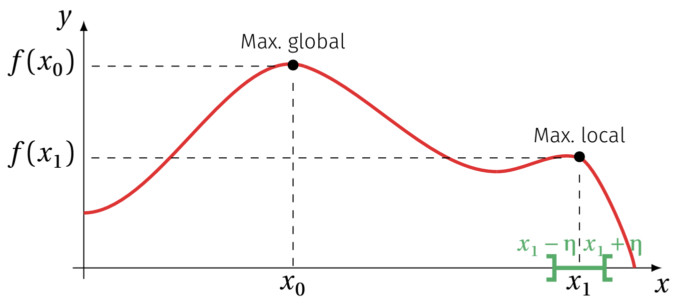
Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

- **[Global]**
  - On dit que f admet un *maximum global* en x_0 si $x_0 \in \mathrm{I}$, et :
  $$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$
  On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I.
  - On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si $x_0 \in \mathrm{I}$, et :
  $$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$
  On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I.
- **[Local]** On dit que f admet en $x_0 \in \mathrm{I}$ un *minimum local*/*maximum local* si l'une des égalités précédentes a lieu uniquement sur un voisinage de x_0 dans I, c'est-à-dire sur un domaine de la forme $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap \mathrm{I}$, pour un certain

$\eta > 0$. Ainsi :

- ◇ f admet un *maximum local* en x_0 si :
$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$
- ◇ f admet un *minimum local* en x_0 si :
$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

- On dit que f admet en x_0 un *extremum* (*resp. extremum local*) si f admet en x_0 un minimum ou un maximum (*resp.* un minimum local ou un maximum local).



NOTION D'*EXTREMA LOCAL* ET *GLOBAL*

Définition 12 | Point critique
On appelle *point critique* d'une fonction dérivable $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ tout réel $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que : $f'(x_0) = 0$.

Théorème 8 | Condition nécessaire d'*extrema* local
Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathrm{I}$. On suppose que :

- x_0 est à l'intérieur de I, *i.e.* il existe $\eta > 0$ vérifiant : $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset \mathrm{I}$, autrement dit, x_0 n'est pas une borne de I,
- f admet en x_0 un extremum local,
- f est dérivable en x_0.

Alors, x_0 est un point critique de f, c'est-à-dire : $f'(x_0) = 0$.

Preuve

Remarque 13 (Autour des hypothèses du théorème précédent) Chacune des hypothèses du théorème précédent est indispensable :

- **[Si x_0 est une borne de I]** Par exemple $f : x \in [2,5] \longmapsto x^2$, elle admet un minimum en 2, $f(2) = 4$, un maximum en 5, $f(5) = 25$ et pourtant 2 et 5 ne sont pas des points critiques.
- **[Si f n'est pas dérivable en x_0]** Par exemple $f : x \in [-1,1] \longmapsto |x|$ admet bien en 0 un minimum local, et pourtant 0 n'est pas un point critique (la fonction n'est même pas dérivable en ce point !).

Remarque 14 (Réciproque du théorème) La réciproque du théorème est fausse. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0.
Nous reverrons un peu plus tard que l'on a un extremum (local) en un point critique x_0 qui n'est pas une borne de l'intervalle de définition si, de plus, la dérivée s'annule **en changeant de signe** en x_0.

4.2. Théorème de ROLLE

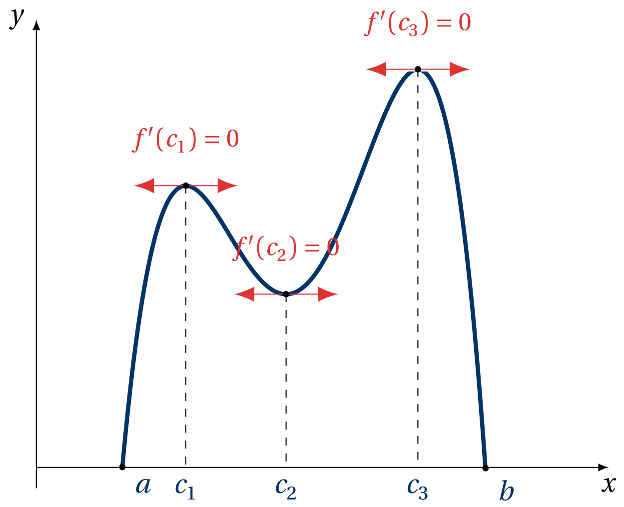
Théorème 9 | Théorème de ROLLE
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$). On suppose que :

- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors : $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = 0$.

L'interprétation du théorème est la suivante : à un moment, la courbe possède une tangente horizontale.

Attention
Il n'y a pas unicité d'un tel c, on le constate sur la figure ci-après. On peut aussi considérer la fonction sin sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.



Preuve Si f est constante sur $[a,b]$, alors le résultat est évident. Sinon, l'application f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle admet un minimum et un maximum distincts sur cet intervalle. Au moins un de ces *extrema* est différent de $f(a)=f(b)$ (sinon f serait constante) et correspond donc à un point intérieur à $[a,b]$, c'est-à-dire à un point de $]a,b[$. Le Théorème 8 conclut.

Le théorème de Rolle est souvent appliqué pour trouver l'existence d'un zéro de la dérivée entre deux zéros de la fonction (cas particulier où $f(a)=f(b)=0$).

Remarque 15 **(Sur les hypothèses du théorème de Rolle)** Dans le théorème de Rolle,

- f n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle (considérer $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$).
- La continuité aux bornes est nécessaire (considérer $x \longmapsto x-\lfloor x \rfloor$ sur $[0,1]$).
- La dérivabilité est nécessaire : considérer $x \longmapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

Remarque 16 La fonction f n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle (considérer par exemple $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$), on peut montrer que $f(-1)=f(1)$ avec f dérivable seulement sur $]-1,1[$ vérifiant $f'(0)=0$).

Exemple 23

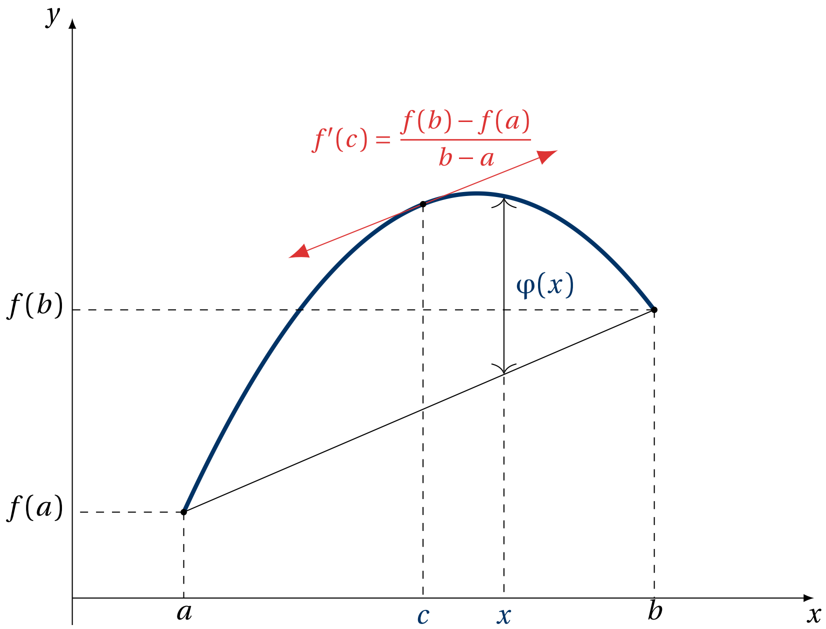
1. Montrer qu'entre deux racines d'un polynôme P, il existe une racine de P′.
2. Soit $f: \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois, on suppose que f s'annule trois fois sur I. Montrer que f'' s'annule au moins une fois.

4.3. Egalité des accroissements finis

Théorème 10 | Égalité des accroissements finis
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$). On suppose que :
- f est continue sur $[a,b]$,
- f est dérivable sur $]a,b[$.

Alors : $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

L'interprétation du théorème est la suivante : à un moment, le coefficient directeur de la tangente vaut celui de la sécante entre les points $(a, f(x_0))$ et $(b, f(b))$.



Preuve *(Idée clef : appliquer le théorème de* Rolle *pour une fonction bien choisie)* Introduisons la fonction φ définie sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (x-a) - f(a).$$

Remarque 17 (Inégalités des accroissements finis)
1. Dans les faits, il n'est pas très pratique de manipuler le nombre $f'(c)$ pour la simple raison que l'on ne connaît pas la valeur de c. On préférera très souvent encadrer la dérivée (ou majorer sa valeur absolue) pour obtenir un encadrement de $f(b) - f(a)$. De ce constat se déduit l'*inégalité des accroissements finis* mais qui n'est pas au programme.
2. L'égalité des accroissements finis permet donc de majorer l'écart entre deux images $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en fonction de l'écart entre x_1 et x_2 et des valeurs de f'.
3. Ce théorème intervient souvent dans les exercices dédiés à l'étude d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Ces exercices sont très classiques et très présents aux concours.

Exemple 24 Montrons à l'aide de l'égalité des accroissements finis (appliquée à $t \longmapsto \ln(1+t)$ sur $[0,x]$ pour tout $x > 0$) que :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Exemple 25 **(Étude d'une suite récurrente)** Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}(4 - x^2)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$, $\quad |f'(x)| \leqslant \frac{8}{9}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2).$$

2.1) Justifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

2.2) Montrer que : $\quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(b) - f(a)| \leqslant \frac{8}{9}|b - a|$.

2.3) En déduire que (u_n) converge vers 1.

4.4. Lien avec la monotonie

Démontrons enfin le fait suivant, déjà en classe de Première et largement utilisé dans les études de fonctions, mais admis à l'époque. C'est une conséquence de l'égalité des accroissements finis.

Théorème 11 | Monotonie et signe de la dérivée

Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors :

- **[Monotonie]**
$$f \text{ est croissante} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \geqslant 0,$$
$$f \text{ est décroissante} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \leqslant 0.$$
- **[Stricte monotonie]**
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement croissante.
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement décroissante.

Preuve On se contente de prouver le premier point dans le cas croissant, les autres se prouvant de la même façon.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose f dérivable et croissante sur l'intervalle I et soit $x_0 \in \mathrm{I}$, montrons que $f'(x_0) \geqslant 0$.

- Si f est définie au voisinage de x_0^+, on a :
$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Or f est croissante sur I, donc $x > x_0$ entraîne $f(x) \geqslant f(x_0)$ soit $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. La conservation des inégalités larges par passage à la limite entraîne alors que $f'(x_0) \geqslant 0$.
- On obtient le même résultat avec le même raisonnement si f est définie au voisinage de x_0^-.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que f' est positive. Soient $x \leqslant x_0$ deux éléments de I, montrons que $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Nous sommes désormais capables de détecter les points critiques (en un point intérieur du domaine de définition d'une fonction) qui fournissent des extremums locaux. L'allure des tableaux de variations est le suivant.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

Minimum local

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	

Maximum local

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (AN) 6.1 **(Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle)** En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition, puis on vérifie à la main (calcul de limite) les points qui posent problème.

Méthode (AN) 6.2 **(Utilisation du théorème de la bijection ou du théorème des valeurs intermédiaires)** On souhaite justifier l'existence (et l'unicité éventuelle) d'une solution $x \in \mathbb{R}$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur un intervalle I tel que $\alpha \in f(\mathrm{I})$.

Notez également que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $g(x) = \alpha$ avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$, et $\alpha = 0$.

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Si f est une fonction définie sur un intervalle I, et si $a \in \mathrm{I}$, définition de la continuité de f en a	$\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$ $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$	
Énoncer le théorème de la bijection monotone.	*Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ continue, strictement monotone. Alors f réalise une bijection de I sur J, et f^{-1} est de même monotonie que f Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ continue, strictement monotone. Alors f réalise une bijection de I sur J, et f^{-1} est de même monotonie que f*	
Donner la définition d'une fonction f prolongeable par continuité en un point a	*Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$. Elle est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie ℓ en a. Le prolongement est alors : $\forall x \in \mathrm{I},\quad \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$ Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$. Elle est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie ℓ en a. Le prolongement est alors : $\forall x \in \mathrm{I},\quad \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$*	
Énoncer le théorème de ROLLE	*Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) telle que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b) = 0$, alors : $\exists c \in]a,b[,\quad f'(c) = 0$. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$) telle que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b) = 0$, alors : $\exists c \in]a,b[,\quad f'(c) = 0$.*	*Ne pas oublier les hypothèses précises : continue sur le **segment**, dérivable sur l'intervalle **ouvert***

Rappeler la formule des accroissements finis	*Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *(où* $a<b$*) telle que* f *est continue sur* $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$*, alors :* $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$*. Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *(où* $a<b$*) telle que* f *est continue sur* $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$*, alors :* $\exists c \in]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$*.*	*Ne pas oublier les hypothèses précises : continue sur le* ***segment****, dérivable sur l'intervalle* ***ouvert***

5. EXERCICES

Note : vous pouvez utiliser GeoGebra (logiciel libre) pour vérifier vos résultats. Allez dans menu "affichage", sélectionnez "calcul formel" puis utilisez une des commandes "Résoudre", "Dérivée" ou "Limite". Tracer par exemple la fonction étudiée vous aidera à vérifier vos résultats. De plus, l'utilisation de ce logiciel est autorisée au concours Agro-Véto.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant la continuité :
   - savoir montrer qu'une fonction est continue en un point .... ☐
   - savoir prolonger de manière continue une fonction en un point .... ☐
   - savoir utiliser la continuité pour déterminer la limite d'une suite récurrente ... ☐
2. Concernant les théorèmes de continuité :
   - savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = a$ .... ☐
   - savoir utiliser le théorème des bornes atteintes pour prouver l'existence d'un maximum ou d'un minimum .... ☐
   - savoir utiliser le théorème de la bijection pour montrer qu'une fonction est bijective, et étudier le sens de variations d'une fonction réciproque .... ☐
3. Connaître la notion de dérivabilité :
   - savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point en utilisant le taux d'accroissement .... ☐
   - savoir utiliser la dérivabilité à droite et à gauche pour démontrer une dérivabilité ☐
   - savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point .... ☐
4. Savoir utiliser les formules de dérivation :
   - connaître les dérivées des fonctions usuelles .... ☐
   - savoir déterminer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une composée .... ☐
   - savoir déterminer la dérivée en un point d'une fonction réciproque .... ☐
5. Concernant les théorèmes de dérivation :
   - savoir utiliser le théorème de ROLLE pour démontrer que la dérivée d'une fonction s'annule .... ☐
   - savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis .... ☐
   - connaître le lien entre signe de la dérivée et monotonie d'une fonction .... ☐
6. Savoir étudier complètement une fonction (tableau de variations, comportement asymptotique) .... ☐

ÉTUDES DE CONTINUITÉ

Exercice 1 | Étudier la continuité des fonctions suivantes après avoir déterminé leur domaine de définition.

$$f : x \longmapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad g : x \longmapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x).$$

Solution (exercice 1)

1. - Domaine de définition : la fonction f est bien définie si $x-1\neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   - Régularité : la fonction f est continue sur $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ comme somme, quotient, composée et produit de fonctions continues.
2. - Domaine de définition : la fonction g est bien définie si $1+x>0$ et $|x|>0 \iff x\neq 0$. Ainsi $\mathscr{D}_g=]-1,0[\cup]0,+\infty[$.
   - Régularité : La fonction g est continue sur $\mathscr{D}_g=]-1,0[\cup]0,+\infty[$ comme somme, composées et produit de fonctions continues.

Exercice 2 | 👁 Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\\ x^2 & \text{si } x\leqslant 0,\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}\frac{\sin^2 x}{e^{x^2}-1} & \text{si } x\neq 0\\ 2 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Solution (exercice 2)

1. Étude de la fonction f :
   - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$: $\mathscr{D}_f=\mathbb{R}$.
   - Étude de la continuité de f :
     - ◇ La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient et composée de fonctions continues.
     - ◇ La fonction f est continue sur $]-\infty,0]$ comme fonction polynomiale. En particulier elle est donc continue à gauche en 0 et on a : $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$.
     - ◇ Étude de la continuité en 0 : la fonction f est définie par un raccord en 0, on doit donc étudier la continuité en ce point en repassant par la définition, à savoir par un calcul de limite. On a déjà que : $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$. Étude de la limite à droite en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}=0$ par propriétés sur les quotient et composée de limites. Ainsi on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ donc la fonction f est bien continue en 0.

   La fonction f est ainsi continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Étude de la fonction g :
   - La fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$: $\mathscr{D}_g=\mathbb{R}$. En effet pour $x\neq 0$, la fonction g est bien définie si et seulement si : $e^{x^2}-1\neq 0 \iff x^2\neq 0 \iff x\neq 0$ ce qui est bien le cas.
   - Étude de la continuité de g :
     - ◇ La fonction g est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.
     - ◇ Étude de la continuité en 0 : la fonction g est définie par un raccord en 0, on doit donc étudier la continuité en ce point en repassant par la définition, à savoir par un calcul de limite. On a par définition que : $g(0)=2$. De plus, pour tout $x\neq 0$, on a : $g(x)=\frac{\sin^2(x)}{e^{x^2}-1}$. Avec les équivalents usuels en 0, on a : $\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim} x$ puis par produit d'équivalents : $\sin^2(x)\underset{x\to 0}{\sim} x^2$. De plus par changement de variable dans l'équivalent : $e^{x^2}-1\underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Ainsi par quotient d'équivalents : $g(x)\underset{x\to 0}{\sim} 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. Comme $1\neq g(0)=2$, la fonction g n'est pas continue en 0.

   La fonction g est ainsi continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ et n'est pas continue en 0.

Exercice 3 | On considère la fonction h définie par :

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{si } |x|<1,\\ ax^2+bx+c & \text{si } |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

Déterminer les réels a,b et c pour lesquels h est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution (exercice 3)

La fonction h est définie par : $h(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{si} -1<x<1, \\ ax^2+bx+c & \text{si} x\leqslant -1 \text{ ou } x\geqslant 1.\end{cases}$ Ainsi la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, elle est continue sur $]-1,1[$ comme somme et composée de fonctions continues et elle est continue sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ comme fonction polynomiale. Comme cette fonction est définie par deux raccords, on doit étudier la continuité en -1 et en 1 en repassant par la définition, à savoir avec les limites.

- Étude en -1 : La fonction h est continue à gauche en -1 avec $f(-1)=a-b+c=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$. De plus : $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2}=0$ par propriété sur les somme et composée de limites. Ainsi, pour que h soit continue en -1, on doit avoir : $a-b+c=0$.
- Étude en 1 : La fonction h est continue à droite en 1 avec $f(1)=a+b+c=$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)$. De plus : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \sqrt{1-x^2} = 0$ par propriété sur les somme et composée de limites. Ainsi, pour que h soit continue en 1, on doit avoir : $a+b+c=0$.

Ainsi, on doit prendre a, b et c tels que : $\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=0. \end{cases}$ La résolution de ce système linéaire donne : $\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=0. \end{cases} \iff \begin{cases} a+\ \ b+c=0 \\ \quad 2b \quad\ =0. \end{cases}$ Ainsi, si on prend par exemple : $b=0$, $a=1$ et $c=-1$, ces trois réels permettent que la fonction h soit bien continue en -1 et en 1. Et ainsi elle sera bien continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 4 | Étudier la définition et la continuité éventuelle de :

$$f : x \longmapsto (-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}\right).$$

Solution (exercice 4)

- La fonction est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
- Il reste à étudier la continuité aux entiers $k\in\mathbb{Z}$.
  - Soit $k\in 2\mathbb{Z}$ un entier pair. Alors $\lim\limits_{x\to k,>} f(x) = \lim\limits_{x\to k,>}\left(x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, même chose à gauche : $\lim\limits_{x\to k,<} f(x) = -\lim\limits_{x\to k,<}\left(x-(k-1)-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, bref f est continue également aux entiers pairs.
  - Soit $k\in 2\mathbb{Z}+1$, $\lim\limits_{x\to k,>} f(x) = -\lim\limits_{x\to k,>}\left(x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to k,<} f(x) = \lim\limits_{x\to k,<}\left(x-(k-1)-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, elle l'est aussi aux entiers impairs.

Donc : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ tout entier}}$.

Exercice 5 | Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \lfloor x\rfloor\sin(\pi x), \quad g(x) = \lfloor x\rfloor\sin(x).$$

Étudier leur continuité sur $\mathbb{R}$.

Solution (exercice 5)

Les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$ par opérations. Étudions la continuité aux entiers relatifs $k\in\mathbb{Z}$.

- On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow k^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow k^+}(k\times\sin(k\pi)) = k\times 0 = 0$. De-même, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow k^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow k^-}((k-1)\times\sin(k\pi)) = 0$.
- De-même : $\lim\limits_{x\longrightarrow k^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow k^+}(k\times\sin(k)) = k\sin k$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow k^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow k^+}((k-1)\times\sin(k)) = (k-1)\sin k \neq k\sin k$ dès que $\sin k\neq 0$, c'est-à-dire pour $k\neq 0$. En revanche, g est continue en zéro.

En conclusion :

- $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$,
- $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}^\star}$.

Grands théorèmes

Exercice 6 | Pour tout $x>0$, on pose $f(x) = (e^x+2x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
2. Étudier l'existence d'un éventuel prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. On souhaite dans cette question préciser le domaine de définition.
   3.1) Montrer que $\mathscr{D}_f =]\alpha,0[\cup]0,+\infty[$ avec $-1<\alpha<0$ un réel.
   3.2) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Solution (exercice 6)

1. Pour $x>0$, $e^x+2x>0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif, donc : $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(e^x+2x)\right)$ est bien définie.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, composées et quotient de fonctions continues. De plus, en mettant e^x en facteur dans le ln, on obtient que $\frac{\ln(e^x+2x)}{x} = 1+\frac{\ln(1+2xe^{-x})}{x}$. De plus par changement de variable dans l'équivalent, on a : $\ln(1+2xe^{-x}) \underset{x\to 0}{\sim} 2xe^{-x}$ puis par quotient d'équivalents, on obtient que : $\frac{\ln(1+2xe^{-x})}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 2e^{-x}$. Ainsi on vient de prouver que : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+2xe^{-x})}{x} = 2$. Puis par somme de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(e^x+2x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(1+\frac{\ln(1+2xe^{-x})}{x}\right) = 3$. Puis par propriété sur la composition de limites, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+2x)} = e^3$. Ainsi $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = e^3$. Ainsi la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=e^3$.
   On obtient alors une nouvelle fonction que l'on continue de noter f qui est définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
   $$f(x) = \begin{cases} (e^x+2x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x>0, \\ e^3 & \text{si } x=0. \end{cases}$$
   Cette fonction est alors bien continue sur $\mathbb{R}^+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme somme, composées et quotient de fonctions continues et elle est continue en 0 par prolongement.
3. **3.1)** On a : $x\in\mathscr{D}_f \iff e^x+2x>0, x\neq 0$. Notons $g : x\in\mathbb{R}\longmapsto e^x+2x$.

Alors en dérivant, on observe que g est strictement croissante, continue, $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \ni 0$. Donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donc : $x \in \mathscr{D}_f \iff g(x) > 0, x \neq 0 \iff x > \alpha, x \neq 0$. Or, $\alpha < 0$ puisque $g(0) = 1 > 0$ et $\alpha > 1$ puisque $g(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0$, donc $\boxed{\mathscr{D}_f =]\alpha, 0[\cup]0, +\infty[}$.

3.2)

```python
def dicho(a, b, f, prec):
    """
    renvoie une valeur approchée d'un zéro de f entre a \
    ↪ et b avec précision
    prec
    """
    g, d = a, b
    while d - g > prec:
        m = (g + d)/2
        if f(g)*f(m) <= 0:
            # changement de signe sur [g,m]
            d = m
        else:
            # pas de changement de signe sur [g,m]
            g = m
    return (g + d)/2
```

On obtient alors :

```python
def f(x):
    return ma.exp(x)+2*x
```

```
>>> dicho(-1, 0, f, 10**(-3))
-0.35205078125
```

Exercice 7 | 👁

Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

Solution (exercice 7)

Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$ est équivalent à montrer que l'équation $h(x) = 0$ avec $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$ admet au moins une solution dans $[0,1]$. On est dans le cas d'un exercice abstrait (on ne connaît pas l'expression explicite de la fonction) et l'on doit montrer l'existence d'une solution à une équation. On est donc dans le cadre typique du théorème des valeurs intermédiaires. On a donc

- La fonction h est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues car, par hypothèse, on sait que f et g sont continues sur $[0,1]$.
- On a : $h(0) = f(0) - g(0)$ et $h(1) = f(1) - g(1)$. Or $f(1) = g(0)$ et $g(1) = f(0)$. Ainsi on obtient que $h(1) = g(0) - f(0) = -h(0)$. Ainsi $h(0)$ et $h(1)$ sont de signes contraires donc il y en a forcément un positif et un négatif.

Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $h(x) = 0$ sur $[0,1]$. Ainsi $\boxed{\text{l'équation } f(x) = g(x) \text{ possède au moins une solution dans } [0,1].}$

Vous noterez qu'en choisissant $g = \mathrm{Id}$, *on retrouve le résultat d'existence d'un point fixe vu en cours.*

Exercice 8 |

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe x_1 et x_2 dans $[0;1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$.

Solution (exercice 8)

Il s'agit de montrer qu'il existe $x_2 \in [0,1]$ tel que
$$f\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) = f(x_2).$$
Pour cela, introduisons la fonction $g \left| \begin{array}{ccc} [0,1/2] & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & f(x+1/2) - f(x). \end{array} \right.$ Elle est continue en tant que différence de telles fonctions, et de plus :
$$g(1/2) = f(1) - f(1/2), \quad g(0) = f(1/2) - f(0) = f(1/2) - f(1) = -g(1/2).$$
Donc g change de signe sur $[0,1/2]$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_2 \in [0,1/2]$ tel que $g(x_2) = 0$, *i.e.* $f\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) = f(x_2)$. En posant $x_1 = x_2 + \frac{1}{2}$, on a donc montré :
$$\exists x_1, x_2 \in [0,1], \quad \boxed{f(x_1) = f(x_2), \quad x_1 - x_2 = \frac{1}{2}}.$$

Exercice 9 | 👁

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$. Dans la suite, on notera $\mathrm{I} = [-1/2; +\infty[$.
2. Sans chercher à calculer f^{-1}, montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle à déterminer.
3. Expliciter ensuite sa bijection réciproque f^{-1}.

Solution (exercice 9)

1. Le discriminant du trinôme $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ est strictement négatif, on a donc $x^2 + x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}}$.

2. Dans la suite, on étudie f que sur I.

de montrer que $\boxed{g \text{ est constante tout le temps égale à } g(0)}$.

Équations fonctionnelles

Exercice 10 | Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

Solution (exercice 10)

1. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: «$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ ».

   Initialisation. pour $n = 0$: d'un côté, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x)$ et de l'autre côté, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g\left(\dfrac{x}{2^0}\right) = g(x)$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Mais si on pose $X = \dfrac{x}{2n}$, on sait aussi par hypothèse sur g que : $g(X) = g\left(\dfrac{X}{2}\right)$, à savoir : $g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = g\left(\dfrac{x}{2^n} \times \dfrac{1}{2}\right) = g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$.
   On vient donc de montrer que : $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$ donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : par principe de récurrence on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On sait donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Or on a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ et par propriété sur le produit de limites. On a donc
   - $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$.
   - La fonction g est continue en 0 par hypothèse.

   Ainsi d'après le théorème sur les suites et les fonctions, on obtient que : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} g\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = g(0)$. Comme on sait aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(x) = g\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ et que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} g(x) = g(x)$ car $g(x)$ ne dépend pas de n, on a par unicité de la limite que : $g(x) = g(0)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on vient bien

5.2. Dérivabilité

Études locales & complètes

Exercice 11 | **Fonction symétrique dérivable** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, et soit f une fonction définie au voisinage de x_0.

1. Supposons f dérivable en x_0. Calculer :
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \quad \text{et } \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}.$$
2. Supposons que $\quad \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$ existe et est finie. La fonction f est-elle forcément dérivable en x_0 ?

Solution (exercice 11)

1. On reconnaît un taux d'accroissement :
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \lim_{X \longrightarrow x_0} \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0},$$
   en posant $X = x_0 + h$. Or f est dérivable en x_0, donc la limite vaut $f'(x_0)$: $\boxed{\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$. Pour la deuxième limite, on fait apparaître deux taux d'accroissement :
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$
$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} + \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{x_0 - (x_0-h)}.$$
   De même que plus haut (quitte à poser $X = x_0 + h$ et $X = x_0 - h$), comme f est dérivable en x_0 on a : $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = f'(x_0)$ et $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{x_0 - (x_0-h)} = f'(x_0)$.

   On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0)}$.

2. Non en règle générale. Prenons par exemple la valeur absolue pour f et $x_0 = 0$. Alors, dans ce cas :
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|h| - |h|}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

alors que la valeur absolue n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Exercice 12 | Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}} \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition et les limites aux bornes.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de g.

Solution (exercice 12)

1. - Domaine de définition : la fonction g est toujours bien définie et ainsi on a : $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.
   - Limite aux bornes :
     - Limite en $+\infty$: pour tout $x > 0$, on a $g(x) = x^{\frac{3}{2}} \ln x$. Ainsi, par propriété sur le produit de limites, on a : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De même : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
     - Limite en $-\infty$: pour tout $x < 0$, $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Ainsi par propriété sur la composée de limite, on a : $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$.
2. - Étude de la continuité : la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit de fonctions continues. Elle est aussi continue sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme composée de fonctions continues. Il reste donc à étudier la continuité en 0 : $\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ par propriété sur la composition de limite. Et $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} x^{\frac{3}{2}} \ln x = 0$ par croissance comparée. Ainsi, on a : $\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^+} g(x) = g(0)$ donc la fonction g est aussi continue en 0. Ainsi la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
   - Étude de la dérivabilité : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme produit de fonctions dérivables. Elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^{-\star}$ comme composée de fonctions dérivables. Il reste donc à étudier la dérivabilité en 0.

     Pour tout $x < 0$, on a : $\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = Xe^X$ en posant $X = \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x\to0^-} X = -\infty$, on a par croissance comparée : $\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0$. Et ainsi, on obtient que : $\lim_{x\to0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$. Ainsi la fonction g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = 0$.

     Pour tout $x > 0$, on a : $\frac{g(x)-g(0)}{x} = \sqrt{x} \ln x$. Ainsi par croissance comparée : $\lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$. Et ainsi, on obtient que : $\lim_{x\to0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$. Ainsi la fonction g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$. La fonction g est dérivable à gauche et à droite en 0 avec $g'_d(0) = 0 = g'_g(0)$. Donc la fonction g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. Ainsi la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 | Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

Solution (exercice 13)

- La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,0[\cup]0,1[$ comme composée, somme et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonction $\mathscr{C}^1$.
- Étude de la continuité en 0, point particulier : on doit vérifier que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0, $x \neq 0$ est bien égale à $f(0) = 0$. Soit $x \neq 0$, $x \in]-1,0[\cup]0,1[$, on a en utilisant la quantité conjuguée (la forme est sous cette forme indéterminée en 0).
$$f(x) = \frac{1+x^2-(1-x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}.$$
  On a ainsi levé l'indétermination et on obtient par somme et quotient de limites : $\lim_{x\to0,\ x\neq0} f(x) = 0$. Ainsi la fonction est bien continue en 0 et ainsi f est continue sur $]-1,1[$.
- Montrons que la fonction est dérivable en 0. Pour cela, on revient au calcul du taux d'accroissement. On a :
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$
  d'après le calcul précédent. On en déduit que $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
- Montrons que la fonction f' est continue en 0. Pour cela, il faut calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, et calculer sa limite en 0. On a pour tout $x \in]-1,1[\smallsetminus\{0\}$
$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$= \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}.$$

La dérivée n'est pas sous forme indéterminée en 0 et on obtient par somme, composée, produit et quotient de limite : $\lim_{x\to 0} f'(x) = 1 = f'(0)$. On en déduit que f' est continue en 0, donc finalement que f est $\mathscr{C}^1$ en 0. Il faut donc montrer que f' est continue en zéro. Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)}.$$

Donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La dérivée n'est pas sous forme indéterminée en 0 et on obtient par somme, composée, produit et quotient de limite :

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 1 = f'(0).$$

- La fonction f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et elle est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,0[\cup]0,1[$, donc elle est bien $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

Exercice 14 | Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}}$.

1. Donner le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f. La fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. On note encore f la fonction ainsi prolongée. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser librement l'équivalent suivant, que l'on pourra démontrer dans un prochain chapitre : $2-x-e^{-2x}(x+2) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$

Solution (exercice 14)

1. $x \in \mathscr{D}_f \iff 1-e^{-2x} \neq 0 \iff -2x \neq 0 \iff x \neq 0$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^\star.}$ Comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues, la fonction $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^\star}$.
On cherche à présent à prolonger f en zéro. On a : $x^2e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ car $e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ car $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$. Et par changement de variable dans l'équivalent, on a : $1 - e^{-2x} \underset{x\to 0}{\sim} 2x$. Ainsi par quotient d'équivalents, on obtient que : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$. Ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$.
$\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en posant } f(0) = 0.}$ On obtient alors :
$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$
2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ comme composée, somme, produit et quotient de fonctions continues. Montrons que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0. Commençons par montrer que f est dérivable en zéro.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2e^{-x}}{x(1-e^{-2x})} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{-(-2x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$
Donc f est dérivable en zéro, et $f'(0) = \frac{1}{2}$. Par opérations, elle est dérivable aussi sur $\mathbb{R}^\star$. Pour tout $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{(2x-x^2)e^{-x}(1-e^{-2x}) - x^2e^{-x}2e^{-2x}}{(1-e^{-2x})^2} = \frac{xe^{-x}\left((2-x)(1-e^{-2x})-2xe^{-2x}\right)}{(1-e^{-2x})^2},$$
donc en résumé :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^{-x}(2-x-e^{-2x}(x+2))}{(1-e^{-2x})^2} & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
On cherche à montrer que f' est continue. Elle l'est déjà sur $\mathbb{R}^\star$ par opérations. De plus, en utilisant l'équivalent donné, on a :
$$\frac{xe^{-x}\left((2-x)(1-e^{-2x})-2xe^{-2x}\right)}{(1-e^{-2x})^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x.2x}{4x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} = f'(0).$$
En conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 15 | Étude complète de fonction

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall x \in [0,+\infty[, \quad g(x) = e^x - xe^x + 1.$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g et tracer son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$. On note α cette solution.
4. Écrire un programme `ValeurApprocheeAlpha` qui calcule une valeur approchée de α à $\varepsilon = 10^{-3}$ près.
5. Soit A la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall x \in [0,+\infty[, \quad A(x) = \dfrac{4x}{e^x+1}$.
   5.1) Etudier la dérivabilité de A, et écrire A′ en fonction de g.
   5.2) En déduire les variations de A sur $\mathbb{R}^+$.

Solution (exercice 15) Notons $\mathscr{D}_g = [0, \infty[$.

1. Nous avons pour tout $x \in \mathscr{D}_g$.
$$g(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - x + \mathrm{e}^{-x}\right),$$
mais $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left(1 - x + \mathrm{e}^{-x}\right) = -\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} g(x) = -\infty.}$
2. Pour tout $x \in \mathscr{D}_g$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x \leqslant 0$. Donc g est décroissante et on a la tableau ci-après.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	0		$-$		
$g(x)$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. On ne peut pas la résoudre, donc appliquons le théorème de la bijection. La fonction g est strictement décroissante, continue et $g(\mathscr{D}_g) =]-\infty, 2] \ni 0$, donc g réalise une bijection de $\mathscr{D}_g$ sur $g(\mathscr{D}_g)$, donc $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}^+}$. On note α cette unique solution.
4. En tapant dans la console la valeur de g en 2 on trouve que $g(2) \leqslant 0$.

```python
import math as ma

def G(x):
    return ma.exp(x)-x*ma.exp(x)+1
def ValeurApprocheeAlpha(prec):
    """
    Retourne une valeur approchée de alpha à précision prec
    Retourne faux si aucune racine n'existe
    """
    g, d = 0, 2
    while d - g > prec:
        c = (g + d)/2
        if G(g)*G(c) <= 0:
            # changement de signe sur [g,c]
            d = c
        else:
            # pas de changement de signe sur [g,c]
            g = c
    return (g + d)/2
```

```
>>> ValeurApprocheeAlpha(10**(-3))
1.27880859375
```

5. Soit A la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad \mathrm{A}(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
   5.1) Etudier la dérivabilité de A, et écrire A′ en fonction de g.
   5.2) En déduire les variations de A sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 16 | On définit une fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(x^2 - 3x + 2\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f est-elle continue ? Dérivable ?
3. Étudier les variations de f. Tracer la courbe.
4. Montrer que f est une bijection de $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ sur un intervalle à déterminer.
5. Étudier la fonction réciproque : domaine de définition, continuité, variations, dérivabilité, courbe.
6. Déterminer explicitement l'expression de la réciproque.

Solution (exercice 16)

1. La fonction f est bien définie si et seulement si : $\ln(x-2) \neq 0$ pour tout $x > 2$. Or on a : $\ln(x-2) = 0 \iff x = 3$. Ainsi $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$.

2.
- Commençons par étudier les limites aux bornes.
  - ◇ Limite au point de raccord 2 : par continuité de la fonction $x \longmapsto e^{x^2-3x+2}$ qui est bien continue sur $[0,2]$ comme somme et composée de fonctions continues, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 1$. De plus, pour tout $x > 2$, on a : $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{\ln(x-2)}$. Et par propriétés sur les sommes, composée et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 1$. Ainsi, on a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 1 = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x)$. Ainsi la fonction f est bien continue en 2.
  - ◇ Limite en 3 : par propriété sur les sommes, composée et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = -\infty$. Ainsi la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 3$.
  - ◇ Limite en $+\infty$: pour tout $x > 2$, $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{\ln(x-2)}$. Ainsi par propriété sur les sommes, composée et quotient de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Étude de la continuité de f : la fonction f est continue sur $[0,2[$ comme somme et composée de fonctions continues. La fonction f est continue sur $]2,+\infty[\setminus\{3\}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions continues. De plus, on a montré que la fonction f est aussi continue en 2. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{3\}$.
- La fonction f est dérivable sur $[0,2[$ comme somme et composée de fonctions dérivables. La fonction f est dérivable sur $]2,+\infty[\setminus\{3\}$ comme sommes, composée et quotient de fonctions dérivables. Étudions la dérivabilité en 2 :
  - ◇ la fonction f est dérivable sur $[0,2]$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Ainsi elle est dérivable à gauche en 2 et $f'_g(2) = (4-3)\times e^0 = 1$.
  - ◇ Étude de la dérivabilité à droite en 2 : pour tout $x > 2$, on a : $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1 - \dfrac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$. En posant $X = x-2$, on a par croissance comparée que : $\lim\limits_{X\longrightarrow 0^+} X\ln X = 0^+$. Ainsi par propriété sur les composée, quotient et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$. Ainsi la fonction f, n'est pas dérivable à droite en 2 et elle n'est donc pas dérivable en 2. De plus le point d'abscisse 2 est un point anguleux avec à droite une demi-tangente verticale.

  Ainsi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{2,3\}$.

3. On vient de voir que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{2,3\}$. Le calcul donne pour tout $x > 0$, $x \neq 2$ et $x \neq 3$:
$$f'(x) = \begin{cases} (2x-3)e^{x^2-3x+2} & \text{si} 0 \leqslant x < 2 \\ \sqrt{x}\left(\frac{3}{2}\ln x + 1\right) & \text{si} x > 2. \end{cases}$$
Pour tout $x > 2$: $f'(x) > 0$ comme somme de deux termes strictement positifs car $\ln x > 0$ car $x > 2$ et comme produit de deux termes strictement positifs. Il reste à étudier le signe de f' sur $[0,2[$. Comme une exponentielle est toujours strictement positive, le signe de f' ne dépend donc que du signe de $2x-3$. On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	||	+	
f	e^2		$e^{-\frac{1}{4}}$				$+\infty$

4. On a que la fonction f est continue sur $[\frac{3}{2},2]$ comme somme et composée de fonctions continues, f est strictement croissante sur $[\frac{3}{2},2]$, $f(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$ et $f(2) = 1$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, la fonction f est bijective de $[\frac{3}{2},2]$ sur $[e^{-\frac{1}{4}},1]$.

On a : $f^{-1} : [e^{-\frac{1}{4}},1] \longrightarrow [\frac{3}{2},2]$. La fonction f^{-1} est continue sur $[e^{-\frac{1}{4}},1]$ comme bijection réciproque d'une fonction continue. Elle a le tableau de variations suivant :

x	$e^{-\frac{1}{4}}$	1
f^{-1}	$\frac{3}{2}$	2

Étude de la dérivabilité de f^{-1} : pour cela on va utiliser le théorème de la dérivabilité d'une fonction réciproque et il faut donc commencer par regarder les points d'annulation de f'. Or on a sur $[\frac{3}{2},2]$: $f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$. De plus on a : $f(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$. Ainsi d'après le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque, f^{-1} est dérivable sur $]e^{-\frac{1}{4}}, 1]$.

5. Comme on a déjà montré que la fonction f est bijective de $[\frac{3}{2}, 2]$ sur $[e^{-\frac{1}{4}}, 1]$, on sait que :

$$\forall x \in [\frac{3}{2}, 2], \forall y \in [e^{-\frac{1}{4}}, 1] y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Soit $y \in [e^{-\frac{1}{4}}, 1]$. On résout $y = f(x)$ en $x \in [\frac{3}{2}, 2]$. Or on a : $y = f(x) \iff x^2 - 3x + 2 - \ln y = 0$ car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Ainsi, on doit résoudre une équation du second degré en x. On a $\Delta = 1 + 4\ln y$. Or $y \in [e^{-\frac{1}{4}}, 1]$ donc $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$ et en particulier il existe deux solutions qui sont : $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{1 + 4\ln y}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{1 + 4\ln y}}{2}$. Mais comme $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ et que $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$, on a que $\frac{3}{2} \leqslant x_1 \leqslant 2$ et $1 \leqslant x_2 \leqslant \frac{3}{2}$. Ainsi seule la solution x_1 convient. Ainsi, on vient de montrer que : $y = f(x) \iff x = \dfrac{3 + \sqrt{1 + 4\ln y}}{2}$.

Et ainsi, on a pour tout $y \in [e^{-\frac{1}{4}}, 1] : f^{-1}(y) = \dfrac{3 + \sqrt{1 + 4\ln y}}{2}$.

Grands théorèmes

Exercice 17 | Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. En considérant la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = \ln(f(x)) - \ln(f(a)) - \frac{\ln(f(b)) - \ln(f(a))}{b - a}(x - a),$$

montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\dfrac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b - a)\dfrac{f'(c)}{f(c)}\right)$. <u>*Indication :*</u> *Commencer par appliquer le théorème de Rolle à la fonction* φ *sur l'intervalle* $[a, b]$

Solution (exercice 17)

Exercice 18 | Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant dont toutes les racines sont réelles et simples. Montrer que toutes les racines de P' sont réelles et simples.

Solution (exercice 18) Supposons que P soit un polynôme de degré n. Comme toutes ses racines sont réelles et simples, on sait qu'il existe $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $P(x_i) = 0$. Il s'agit alors d'appliquer le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Faisons le par exemple pour $[x_1, x_2]$:

- La fonction P est continue sur $[x_1, x_2]$ comme fonction polynôme.
- La fonction P est dérivable sur $]x_1, x_2[$ comme fonction polynôme.

Ainsi d'après le théorème de Rolle, on sait qu'il existe $y_1 \in]x_1, x_2[$ tel que $P'(y_1) = 0$. Ainsi on a trouvé une racine réelle de P'. En itérant le raisonnement sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, on trouve ainsi : $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1}$ racines réelles de P'. Ainsi on a trouvé $n-1$ racines réelles dinstinctes de P'. Or comme $\deg P = n$, on a $\deg P' = n - 1$ et on a donc trouvé toutes les racines de P'. Ainsi les racines de P' sont bien toutes réelles et simples.

Exercice 19 | En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer : $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

Solution (exercice 19) Notons $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{\frac{1}{x}} \end{array} \right.$. Soit alors $x > 0$.

La fonction f est continue sur $[x, x+1]$, et dérivable sur $]x, x+1[$, il existe donc $c_x \in]x, x+1[$ tel que :

$$f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x + 1 - x).$$

Or, pour tout $x > 0$, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - xe^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$. On cherche les variations de f' pour connaître un encadrement.

Pour cela, on calcule $f''(x)$ pour tout $x > 0$. On trouve : $f''(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^3} > 0$ pour tout $x > 0$.

Ainsi la fonction f' est croissante, et on peut encadrer $f'(c_x)$ de la manière suivante :

$$f'(x) = \inf_{y \in]x, x+1[} f'(y) \leqslant f'(c_x) \leqslant \sup_{y \in]x, x+1[} f'(y) = f'(x+1),$$

d'où :

$$e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant f(x+1) - f(x) \leqslant f'(x+1) = e^{\frac{1}{x+1}}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right).$$

Les exponentielles convergent vers zéro lorsque $x \longrightarrow \infty$. D'où : $\boxed{\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = 1}$.

Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 20 | Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Montrer par récurrence l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$. Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient dominant.

Solution (exercice 20) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathscr{H}(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Initialisation. Pour $n = 0$. On a : $f^{(0)}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc il suffit de poser $P_0 = 1$ pour avoir $f^{(0)}(x) = \dfrac{P_0(x)}{1+x^2}$. Donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathscr{H}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Cette fonction $f^{(n)}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= \frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1} - 2xP_n(x)(n+1)(1+x^2)^n}{(1+x^2)^{2n+2}} \\ &= \frac{P_n'(x)(1+x^2) - 2x(n+1)P_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2X(n+1)P_n$, qui est bien un polynôme comme produit et somme de polynômes, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}$. Donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n polynôme tel que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}}.$$

Degré et coefficient dominant de P_n : le calcul des premiers polynômes de la suite donne : $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$, $P_2 = 6X^2 - 2$, $P_3 = -24X^3 + T$. Ainsi on peut conjecturer que $\deg P_n = n$ et $a_n = (-1)^n(n+1)!$ avec a_n coefficient dominant de P_n.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ cette propriété, que l'on note $\mathscr{H}(n)$.

Initialisation. Pour $n = 0$: on a vu que $P_0 = 1$ donc on a : $\deg P_0 = 0$ et $a_0 = 1 = (-1)^0 1!$. Donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $\mathscr{H}(n)$ vraie, montrons que $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que : $P_n = (-1)^n(n+1)!X^n + T$ avec $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, on sait que $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2X(n+1)P_n$ donc on obtient que :

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1+X^2)((-1)^n n(n+1)!X^{n-1} + T') - 2X(n+1)((-1)^n(n+1)!X^n + T) \\ &= [(-1)^n(n+1)!(-n-2)]X^{n+1} + R, \end{aligned}$$

avec $R = (-1)^n n(n+1)!X^{n-1} + (1+X^2)T' - 2(n+1)XT$. Et $R \in \mathbb{R}_n[X]$ par propriété sur le degré d'une dérivée, d'un produit et d'une somme de polynômes. Ainsi on a bien que : $\deg P_{n+1} = n+1$ et $a_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+2)!$. Donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\deg P_n = n}$ et le coefficient $\boxed{\text{dominant de } P_n \text{ est } (-1)^n(n+1)!}$.

Exercice 21 | **Itérations de Rolle** Montrer que si f est non constante, dérivable n fois sur $[a,b]$ et admet $n+1$ zéros sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.

Solution (exercice 21) Ici l'idée est de voir que grâce au théorème de Rolle appliqué entre chacun des zéros, on arrive à trouver un zéro de moins à chaque dérivée de la fonction. Je commence par donner l'idée générale : on sait que la fonction f admet au moins $n+1$ zéros, que l'on note $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. On va appliquer le théorème de Rolle pour montrer que f' s'annule au moins une fois sur $[x_1, x_2]$, puis sur $[x_2, x_3]$, …, puis sur $[x_n, x_{n+1}]$ (faites un dessin !).
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On vérifie les hypothèses du théorème : f est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, et on a $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$ car f s'annule en tous les x_i. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$.
On a donc montré que f' s'annule au moins n fois : en $c_1, c_2, \ldots, c_n$, qui sont bien distincts car ils appartiennent à des intervalles distincts.
L'idée est ensuite de recommencer : on montre de la même façon que f'' s'annule au moins $n-1$ fois, …, jusqu'à $f^{(n)}$ qui s'annule au moins 1 fois.
Pour démontrer rigoureusement le résultat, on raisonne par récurrence : montrons par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, n\}$ la propriété P_k : « $f^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois. »

Initialisation. Par hypothèse, $f^{(0)} = f$ s'annule $n+1-0$ fois donc P_0 est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ fixé, on suppose P_k vraie, montrons P_{k+1} vraie.
Par hypothès de récurrence, $f^{(k)}$ s'annule $n+1-k$ fois : on note $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1-k}$

les zéros distincts de $f^{(k)}$ sur $]a,b[$ dans l'ordre croissant $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1-k}$. Pour tout $i \in \{0,\dots,n-k\}$, on note I_i l'intervalle $\mathrm{I}_i = [x_i, x_{i+1}]$. D'après les hypothèses énoncées sur f, on sait que, pour tout $i \in \{0,\dots,n-k\}$:

- $f^{(k)}$ est continue sur $\mathrm{I}_i = [x_i, x_{i+1}]$,
- $f^{(k)}$ est dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$,
- $f(x_i) = f(x_{i+1})$ (et cela vaut 0).

Ainsi, d'après le théorème de ROLLE appliqué à la fonction $f^{(k)}$ sur l'intervalle I_i, on sait qu'il existe $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $(f^{(k)})'(c_i) = f^{(k+1)}(c_i) = 0$. Comme le théorème s'applique à tous les intervalles I_i avec $i \in \{0,\dots n-k\}$ et que tous ces intervalles sont disjoints, on obtient que la fonction $f^{(k+1)}$ admet $n-k = n+1-(k+1)$ zéros distincts dans l'intervalle $]a,b[$. Donc P_{k+1} est vraie.
Ainsi on a montré que P_k est vraie pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, en particulier P_n est vraie, et on a bien montré que la fonction $f^{(n)}$ admet un zéro.

5.3. Applications aux suites

Exercice 22 | Série

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$.
   1.1) En utilisant l'égalité des accroissements finis, montrer que :
   $$\exists c_k \in]k-1,k[, \quad \arctan(k) - \arctan(k-1) = \frac{1}{c_k^2+1}.$$
   1.2) En déduire que : $\arctan(k) - \arctan(k-1) \geqslant \dfrac{1}{k^2+1}$.
2. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2+1}\right)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

Exercice 23 | Suite explicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$. Déterminer la limite de la suite (u_n) :

1. à l'aide d'un équivalent,
2. à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction racine carrée. Quelle information supplémentaire obtient-on ainsi ?

Solution (exercice 23)

1. On factorise simplement par n^2 afin de se ramener à l'équivalent usuel. On a, puisque $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[]{n\to\infty} 0$:
$$\sqrt{n^2+1} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \xrightarrow[]{n\to\infty} \boxed{0}.$$
2. Notons $f : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sqrt{x}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue sur $[n^2, n^2+1]$, dérivable sur $]n^2, n^2+1[$. Donc il existe $c_n \in]n^2, n^2+1[$ tel que $f'(c_n) = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{1} = \sqrt{n^2+1} - n$. Or, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$, donc
$$n^2 < c_n < n^2+1 \implies \frac{1}{2\sqrt{n^2+1}} < f'(c_n) < \frac{1}{2\sqrt{n^2}} = \frac{1}{2n}.$$
Par théorème d'encadrement, on conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} f'(c_n) = \boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = 0}$. On obtient par cette méthode en plus un encadrement sur la suite.

Exercice 24 | Suite implicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant n^{\frac{1}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Montrer que la suite est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a : $\left(\dfrac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\dfrac{u_n}{n}$. En déduire que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$, puis la limite de la suite (u_n).

Solution (exercice 24)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^3 + 3x - n$.

1. La fonction f_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n'(x) = 3x^2 + 3$. Ainsi $f_n'(x) > 0$ comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif.
   - La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

   Ainsi d'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R} \ni 0$, donc $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}.}$ On note u_n cette solution.
2. On a : $f_n(0) = -n < 0$ et $f_n(n^{\frac{1}{3}}) = 3n^{\frac{1}{3}} > 0$. Comme par définition de u_n, on a :

$f_n(u_n)=0$, on vient de montrer que : $f_n(0)<f_n(u_n)<f_n(n^{\frac{1}{3}})$. Or la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ainsi on a :

$$f_n(0)<f_n(u_n)<f_n(n^{\frac{1}{3}}) \iff 0<u_n<n^{\frac{1}{3}}.$$

Et donc on a aussi $\boxed{0\leqslant u_n\leqslant n^{\frac{1}{3}}.}$

3. Par définition de f_n, on a : $f_n(u_{n+1})=(u_{n+1})^3+3u_{n+1}-n$. De plus par définition de la suite, on a aussi que :

$$f_{n+1}(u_{n+1})=0 \iff (u_{n+1})^3+3u_{n+1}-n-1=0 \iff (u_{n+1})^3+3u_{n+1}-n=1.$$

Ainsi on vient de montrer que : $f_n(u_{n+1})=1>0$. Comme $f_n(u_n)=0$, on vient de prouver que : $f_n(u_{n+1})>f_n(u_n)$ et comme la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f_n(u_{n+1})>f_n(u_n) \iff u_{n+1}>u_n.$$

Ainsi $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est croissante.}}$

4. **4.1)** On utilise la définition de la suite. En effet, on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a :

$$f_n(u_n)=0 \iff u_n^3+3u_n-n=0 \iff u_n^3=n-3u_n.$$

On divise alors cette égalité par $n>0$ et on obtient que

$$\frac{u_n^3}{n}=1-3\frac{u_n}{n} \iff \boxed{\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3=1-3\frac{u_n}{n}.}$$

4.2)
- On sait que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$: $0\leqslant u_n\leqslant n^{\frac{1}{3}}$. Ainsi on a :
$$0\leqslant\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}0=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}=0$, on obtient d'après le théorème d'encadrement que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=0$. Ainsi par somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\frac{u_n}{n}=1$. On vient donc de prouver que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3=1$ et par composition de limite (on compose par la fonction racine cubique continue sur $\mathbb{R}$), on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}=1$. On vient donc bien de prouver que $\boxed{u_n\underset{n\to\infty}{\sim}n^{\frac{1}{3}}.}$
- Par propriété sur les équivalents, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{3}}=+\infty$. Ainsi $\boxed{\text{la suite diverge vers } +\infty.}$

Exercice 25 | Suite récurrente

On définit la suite (v_n) par récurrence par :

$$v_0=1,\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1}=\sqrt{12+v_n}.$$

1. Montrer que la suite est bien définie, minorée par 0 et strictement majorée par 4.
2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad |v_{n+1}-4|<\frac{1}{4}|v_n-4|$
3. En déduire que la suite (v_n) converge et donner sa limite.

Solution (exercice 25)

On pose f la fonction associée à la suite définie par récurrence : $f(x)=\sqrt{12+x}$. On a en particulier que $\mathscr{D}=[-12,+\infty[$.

1. On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété : $\mathscr{P}(n)$: "v_n est bien défini et $v_n\in[0,4[$".

Initialisation. pour $n=0$: par définition de la suite, on sait que $v_0=1$. Ainsi, v_0 est bien défini et $v_0\in[0,4[$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. soit $n\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que v_n est bien définie et que $v_n\in[0,4[$. On a alors :
- v_n est bien définie et $v_n\in[0,4[\subset\mathscr{D}_f$. Ainsi $f(v_n)$ existe et donc v_{n+1} existe.
- Comme $v_n\in[0,4[$, on a : $12+v_n\in[12,16[$ et la fonction racine carrée étant strictement croissante, on a : $\sqrt{12+v_n}\in[\sqrt{12},4[\subset[0,4[$. Ainsi, on a bien $v_{n+1}\in[0,4[$.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{(v_n) \text{ est bien définie et que : } \quad \forall n\in\mathbb{N},\quad v_n\in[0,4[}$.

2. On doit montrer que $4-v_{n+1}<\frac{1}{4}(4-v_n)$. Or on a $v_{n+1}=f(v_n)$ et $f(4)=\sqrt{16}=4$. Donc on doit montrer que $f(4)-f(v_n)<\frac{1}{4}(4-v_n)$. On applique donc le théorème des accroissements finis à la fonction f entre v_n et 4. On vérifie les hypothèses :
- la fonction f est continue sur $[v_n,4]$ (ici on sait que $v_n<4$).
- La fonction f est dérivable sur $]v_n,4[$.

Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $c\in\,]v_n,4[$ tel que :

$$f(4)-f(v_n)=(4-v_n)f'(c) \iff 4-v_{n+1}=(4-v_n)f'(c).$$

Il reste alors à majorer la dérivée $f'(c)$. Or, on a : $f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{12+c}}$. Or on sait que $c>v_n>0$ donc $12+c>12$ et ainsi : $\frac{1}{2\sqrt{12+c}}<\frac{1}{2\sqrt{12}}$. Or : $2\sqrt{12}=4\sqrt{3}>4$ et ainsi, on obtient que : $\frac{1}{2\sqrt{12+c}}<\frac{1}{2\sqrt{12}}<\frac{1}{4}$. Puis, comme $4-v_n>0$, on a bien : $\boxed{4-v_{n+1}<\frac{1}{4}(4-v_n)}$.

3. À chaque étape, la distance entre v_n et 4 est au moins divisée par 4. On conjecture (à montrer par récurrence) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$0 < 4 - v_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n (4 - v_0) \iff 0 < 4 - v_n < 3\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$
Puis, ensuite, comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et ainsi d'après le théorème d'encadrement, on obtient que la suite $\boxed{(v_n) \text{ converge et qu'elle converge vers } 4}$.

Exercice 26 | Fonctions k-contractantes

On suppose que f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ et qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que :
$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|.$$
Une telle fonction s'appelle une fonction k-*contractante*.

1. Montrer que f est continue et admet un unique point fixe dans $[0,1]$ que l'on notera c.
2. On considère alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = f(c_n)$.
   2.1) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   2.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |c_n - c| \leqslant k^n\,|c_0 - c|$.
   2.3) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution (exercice 26)

1. On cherche à étudier la continuité de f sur $[0,1]$. On repasse pour cela par la définition de la continuité en montrant que pour tout $x_0 \in [0,1]$, f est continue en x_0. Pour cela il faut donc montrer que pour tout $x_0 \in [0,1]$: $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Soit donc $x_0 \in [0,1]$ fixé. On cherche donc à montrer que $f(x) - f(x_0)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Mais par définition d'une fonction k-contractante, on sait que :
$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x) - f(x_0)| \leqslant k\,|x - x_0|.$$
Donc :
$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant k\,|x - x_0|.$$
Or, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} k\,|x - x_0| = 0$ donc par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ ce qui est équivalent à $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainsi on a montré que la fonction f est continue en x_0 et comme cela est vrai pour tout $x_0 \in [0,1]$, on a la continuité de f sur $[0,1]$.
Vérifions que f admet un unique point fixe dans $[0,1]$.
   - La fonction f vérifie bien : $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ et on vient de montrer qu'elle est continue sur $[0,1]$. Ainsi elle vérifie les hypothèses de la première question et ainsi on a bien l'existence d'un point fixe dans $[0,1]$.
   - Comme il est impossible d'avoir une hypothèse de croissance ou de décroissance pour f, on ne va pas pouvoir appliquer le théorème de la bijection. Ainsi, pour obtenir l'unicité du point fixe, on suppose par l'absurde qu'il existe deux points fixes $(c,d) \in [0,1]^2$ de f différents. Ainsi, on a :
$$|f(c) - f(d)| \leqslant k\,|c - d| \iff |c - d| \leqslant k\,|c - d|.$$
Or $0 < k < 1$ et ainsi, on a : $|c - d| < |c - d|$: absurde. Ainsi $c = d$ et f admet bien un unique point fixe.
2. **2.1)** On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: c_n est bien définie et $c_n \in [0,1]$.
Initialisation. pour $n = 0$: par définition de la suite, on sait que c_0 existe bien et que $c_0 \in [0,1]$. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie au rang n, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait donc que c_n existe et que $c_n \in [0,1]$.
   - Comme $\mathscr{D}_f = [0,1]$ et que $c_n \in [0,1]$, on a : $c_n \in \mathscr{D}_f$. Ainsi $f(c_n)$ existe bien à savoir c_{n+1}.
   - De plus, comme on sait que $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ et que $c_n \in [0,1]$, on obtient alors que : $f(c_n) \in [0,1]$, à savoir $c_{n+1} \in [0,1]$.

   Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe bien et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n \in [0,1]$.
2.2) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: $|c_n - c| \leqslant k^n\,|c_0 - c|$.
Initialisation. pour $n = 0$: d'un côté, on a : $|c_0 - c|$ et de l'autre côté, on a : $k^0\,|c_0 - c| = |c_0 - c|$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie au rang n, montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. D'après la définition de la fonction f, on sait que : $|f(c_n) - f(c)| \leqslant k\,|c_n - c| \iff |c_{n+1} - c| \leqslant k\,|c_n - c|$ car c est le point fixe de f. Puis par hypothèse de récurrence, on sait aussi que $|c_n - c| \leqslant k^n\,|c_0 - c|$. Ainsi comme $k > 0$, on a : $k\,|c_n - c| \leqslant k^{n+1}\,|c_0 - c|$. Puis : $|c_{n+1} - c| \leqslant k^{n+1}\,|c_0 - c|$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|c_n - c| \leqslant k^n\,|c_0 - c|$.
2.3) On peut alors utiliser le théorème d'encadrement et on obtient que :
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |c_n - c| \leqslant k^n\,|c_0 - c|$.
   - $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} k^n\,|c_0 - c| = 0$ car $-1 < k < 1$.

   Ainsi d'après le corollaire du théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} c_n = c$.

III

Troisième partie

Aléatoire & Statistiques