Chapitre # (ALG) 11 — Espaces vectoriels

L'Algèbre est généreuse, elle donne souvent plus qu'on ne lui demande.

— J. D'Alembert

Résumé & Plan

Nous allons regrouper au sein de la terminologie « espace-vectoriel » tous les ensembles qui sont stables lorsque l'on exerce des combinaisons linéaires. Nous allons ensuite développer des résultats généraux sur ces ensembles, qui se transmettront alors automatiquement à tous les exemples. Vous connaissez déjà de telles ensembles : les vecteurs de la géométrie depuis le collège, les fonctions, les polynômes, les suites ou encore les matrices.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, tous les énoncés faisant intervenir $\mathbb{K}$ sont vrais que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Commençons par rappeler des notations importantes, qui nous serviront dans tout

Notation — Ensemble des applications

Soient E, F deux ensembles. On notera E^F (ou $\mathscr{F}(F, E)$) l'ensemble des applications de F dans E.

Exemple 1

- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (*resp.* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) désigne l'ensemble des suites à valeurs complexes (*resp.* à valeurs réelles).
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^2}$ l'ensemble des fonctions de deux variables à valeurs réelles.

Intérêt des raisonnements algébriques. Ce chapitre — ainsi que quelques autres pendant l'année — s'inscrit dans le domaine de l'*Algèbre* en Mathématiques, dont la vocation principale est l'étude d'ensembles munis de lois, et la recherche d'un cadre commun à plusieurs objets mathématiques. Une fois ce cadre dégagé (voir la Définition 1 ci-dessous) nous l'étudierons en détail. Tous les résultats établis dans cette étude se transmettront donc automatiquement aux objets qui vérifient la Définition 1.

Comment mémoriser facilement les définitions ? 🎉 Gardez à l'esprit que toutes les notions qui vont être présentées, quoique abstraites à première vue, sont des généralisations de quelque chose de concret que vous connaissez déjà (vecteurs, repères, coordonnées, ...).

1. STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Commençons par un premier exemple : celui de $\mathbb{K}^n$ avec $n \geqslant 1$ un entier. On rappelle que :

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}\}.$$

Pour $n=2$, ce sont des couples, pour $n=3$ des triplets *etc.*. Constatons quelques opérations sur $\mathbb{K}^n$:

- vous savez additionner deux vecteurs : si $X=(x_1,\dots,x_n), Y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$, alors on pose :
  $$X+Y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\in\mathbb{K}^n.$$
  C'est l'addition « coordonnée par coordonnée », on l'appelle la *loi interne*.
- Vous savez multiplier un vecteur par un scalaire : si $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n, \lambda\in\mathbb{K}$, alors on pose :
  $$\lambda X=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)\in\mathbb{K}^n.$$
  C'est la multiplication « coordonnée par coordonnée », on l'appelle la *loi externe*.

De manière plus générale on sait réaliser ce type d'opérations sur des fonctions, des polynômes, des complexes, des suites, *etc.* tous ces ensembles munis de ces lois seront qualifiés d'espaces-vectoriels, dont voici la définition.

1.1. Généralités

Définition 1 | Espace vectoriel

On appelle *espace vectoriel* (ou *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$) tout triplet $(E,+,\cdot)$ où :

1. $(E,+)$ est un *groupe commutatif* c'est-à-dire :

(i) $+$ est une *loi interne* appelée *addition de* E :
$$+\left|\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E, \\ (x,y) & \longmapsto & x+y. \end{array}\right.$$

(ii) $+$ est *associative* : $\forall x,y,z\in E,\quad (x+y)+z=x+(y+z)$,

(iii) **[Neutre 0_E pour $+$]** $\forall x\in E,\quad x+0_E=0_E+x=x$,

(iv) tout élément de E est inversible pour $+$:
$$\forall x\in E,\quad \exists y\in E,\quad x+y=y+x=0_E.$$
L'élément y inverse de x sera noté $-x$.

(v) La loi $+$ est *commutative*, *i.e.* $\forall x,y\in E,\quad x+y=y+x$.

2. La loi $\cdot\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array}\right.$ est appelée *loi externe*. Elle vérifie en outre les règles de calcul suivantes : pour tous $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $(x,y)\in E^2$, on a :

(i) $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$,

(ii) $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$,

(iii) $(\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$,

(iv) $1x=x$.

De plus,

- les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les *scalaires*, les éléments de E sont les *vecteurs*, $\mathbb{K}$ est appelé le *corps de base*.
- L'élément neutre de E pour la loi $+$ est appelé *vecteur nul*, et on le notera 0_E comme précédemment, ou simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Note — *La loi $+$ transforme donc deux vecteurs en un autre vecteur, alors que $\cdot$ transforme un réel ou complexe et un vecteur en un autre vecteur.*

Remarque 1

- Toutes les propriétés précédentes sont des règles de calcul dans E, et sont comparables aux règles habituelles sur les nombres réels et vecteurs du plan ou de l'espace que vous utilisez depuis longtemps.
- La tradition veut qu'on ne mette pas de flèches sur les vecteurs en algèbre linéaire.
- Vérifier qu'un ensemble donné muni de deux opérations est un espace vectoriel est très fastidieux. Ainsi, on ne vous demandera jamais de prouver qu'un tel ensemble est un espace vectoriel mais plutôt qu'il s'agit d'un « sous-espace vectoriel » d'un espace vectoriel connu (voir une prochaine section). Des espaces vectoriels de référence seront également étudiés.

Attention

Dans un espace vectoriel, vous pouvez multiplier les vecteurs $x\in E$ par des **scalaires** $\lambda\in\mathbb{K}$, **mais pas** multiplier deux vecteurs $x,y\in E$ entre eux, en règle générale. [1]

En combinant la stabilité par somme et multiplication par un scalaire, on obtient directement la propriété qui suit.

Proposition 1 | Stabilité d'un espace vectoriel par combinaison linéaire

Soit E un espace vectoriel. Pour tous $x_1,\dots,x_n\in E$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$, alors :
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\in E.$$

Preuve Puisque E est un espace vectoriel, pour tout $i\in[\![1\,,\,n]\!]$, on a :
$$x_i\in E \overset{\text{stabilité par multiplication ext.}}{\Longrightarrow} \lambda_i x_i\in E \overset{\text{stabilité par somme}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\in E.$$

1. Même si dans certains espaces vectoriels c'est possible, par exemple il est possible de multiplier deux polynômes ou deux matrices compatibles entre elles.

PREMIERS EXEMPLES. Donnons sans plus tarder quelques exemples d'espaces vectoriels. La vérification complète des axiomes ne présente aucune difficulté et est laissée au lecteur, seuls quelques-uns seront précisés.

Exemple 2 (Cas de $E = \mathbb{K}^n$ – Uplets) Soient $X = (x_1, \ldots, x_n), Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :

$$X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici le n-uplet nul $0_E = (0, \ldots, 0)$, l'élément opposé pour $+$ de $X = (x_1, \ldots, x_n)$ est $-X = (-x_1, \ldots, -x_n)$ car $X + (-X) = 0_E$.

Exemple 3 (Cas de $E = \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n, p \in \mathbb{N}^\star$ – Matrices) Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}, B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathbb{K}^n$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :

$$A + B = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}, \quad \lambda A = \left(\lambda a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici la matrice nulle de format $n \times p$, c'est-à-dire $0_E = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, l'élément opposé pour $+$ de $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est $-A = \left(-a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ car $A + (-A) = 0_E$.

Exemple 4 (Cas de $E = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ – Suites) Soient $(u_n), (v_n) \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n), \quad \lambda (u_n) = (\lambda u_n).$$

Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici la suite nulle $0_E = (0)$, l'élément opposé pour $+$ de (u_n) est $(-u_n)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + (-u_n) = 0$.

Exemple 5 (Cas des polynômes) Nous avons défini dans le Chapitre (ALG) 10 deux lois $+, .$ sur les polynômes. Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici le polynôme nul, l'élément opposé pour $+$ de P est $-P$ car $P + (-P) = 0$.

Exemple 6 (Cas de $E = \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ – Fonctions) Soient $f, g \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :

$$f + g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x), \end{array} \right. \qquad \lambda f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & \lambda.f(x). \end{array} \right.$$

Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici la fonction nulle $0_E : x \in \mathbb{K} \longmapsto 0$, l'élément opposé pour $+$ de f est $-f : x \in \mathbb{K} \longmapsto -f(x)$ car pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f(x) + (-f(x)) = 0$.

RÈGLES DE CALCULS SECONDAIRES. De la définition d'un espace vectoriel découlent directement d'autres propriétés.

Proposition 2 | Autres règles de calcul

Soit E un espace vectoriel. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $(x, y) \in E^2$, on a :

- **[Développement d'une expression]** $\begin{cases} (\lambda - \mu) \cdot x &= \lambda \cdot x - \mu \cdot x \\ \lambda \cdot (x - y) &= \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \end{cases}$
- **[Multiplication par zéro]** $0_{\mathbb{K}} x = 0_E, \quad \lambda \cdot 0_E = 0_E,$
- **[Multiplication par l'opposé]** $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x),$
- **[Équation-produit]** $\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ **ou** $x = 0_E).$

Remarque 2 La dernière assertion n'a *a priori* rien d'évident, d'ailleurs elle est même fausse pour d'autres ensembles que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais dans notre cadre (*cf.* début de chapitre) ce sera toujours le cas.

Preuve Démontrons l'équivalence pour l'équation-produit.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\lambda \cdot x = 0_E$.

- **[1er cas]** si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors on peut multiplier l'hypothèse par $\frac{1}{\lambda}$ à gauche :

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} 0_E = 0_E \implies x = 0_E.$$

- **[2ème cas]** $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Évident par définition d'un espace vectoriel : $0 \cdot x = 0_E$ et d'autre part $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.

Maintenant que le cadre est posé, regardons ce que l'on peut faire avec les vecteurs, *i.e.* les éléments d'un espace vectoriel. En combinant les deux lois définies plus haut (additive et scalaire-multiplicative), on arrive directement à la notion de combinaison linéaire présentée ci-après.

1.2. Combinaisons linéaires & Sous-espaces vectoriels

Définition 2 | Combinaison linéaire de vecteurs

Soit E un espace vectoriel.

- **[Famille finie]** Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéairev(sur $\mathbb{K}$)* des vecteurs x_1, ..., x_n tout vecteur $x \in E$ s'écrivant sous la forme :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad \text{avec :} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

- **[Famille quelconque]** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est un ensemble quelconque. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$

toute combinaison linéaire **finie** de ces vecteurs.

Notation

On note généralement :

- $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(x_1,\dots,x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, ou plus simplement $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté,
- $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(x_i)_{i\in I}$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille quelconque de vecteurs, ou plus simplement $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Méthode — Montrer l'appartenance « à un Vect »

Pour montrer que $x \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$, on cherche $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des scalaires (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$), tels que : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Exemple 7 (Est-on combinaison linéaire de ?)

1. **[Dans $\mathbb{R}^2$]** Est-ce que le vecteur $u=(3,3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $a=(1,1)$, $b=(1,0)$ et $c=(0,1)$? Y a-t-il unicité de l'écriture de u comme combinaison linéaire de a, b et c ?

2. **[Dans $\mathbb{R}^3$]** On note $u=(-1,2,2)$, $a=(1,1,0)$, $b=(-2,1,3)$ et $c=(1,0,-1)$. A-t-on $u \in \mathrm{Vect}(a,b,c)$?

3. **[Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$]** On note $M=\begin{pmatrix}-1&2\\2&0\end{pmatrix}$, et $N=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}-2&1\\3&2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$. A-t-on $M \in \mathrm{Vect}(N,O,P)$?

4. **[Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$]** On note $u : x \longmapsto \cos^2 x$, $f : x \longmapsto 1$, $g : x \longmapsto \cos(2x)$. Montrer que $u \in \mathrm{Vect}(f, g)$.

5. **[Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^\star}$]** La suite $(1)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est-elle combinaison linéaire de $(n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

6. **[Dans $\mathbb{R}[X]$]** On note $P = 2X^3 + 2X^2 + 3X + 3$ et $Q = 2X^3 + X^2 + 2X$. Sont-ils des combinaisons linéaires des polynômes $P_1 = X^3 + 1$, $P_2 = X^2 + X + 1$ et $P_3 = X^3 + X$?

7. **[Dans $\mathbb{R}[X]$]** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Peut-on avoir $P \in \mathrm{Vect}(1, P')$?

Attention **Identification non-systématique des coefficients d'une combinaison linéaire**

On retiendra du premier exemple qu'*a priori* on ne peut pas identifier de manière systématique les coefficients d'une combinaison linéaire :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right) \quad \not\Longrightarrow \quad (\forall k \in [\![1\,,n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k).$$

Note *Nous appellerons plus tard « famille libre » toute famille où c'est le cas.*

Exemple 8 Toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n est combinaison linéaire de 1, X, X^2, ..., X^n, puisqu'il peut être écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où les a_k sont dans $\mathbb{K}$. On peut donc résumer cela en :

$$\mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n) = \mathbb{K}_n[X].$$

Sous-espaces vectoriels. La structure de sous-espace vectoriel aura un intérêt pour justifier qu'un ensemble est un espace vectoriel. En effet, nous allons voir que si un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, alors ce sous-ensemble sera aussi un espace vectoriel (et il est plus facile de vérifier la propriété de sous-espace vectoriel que d'espace vectoriel).

Définition 3 | Sous-espace vectoriel

On appelle *sous-espace vectoriel* d'un espace vectoriel E tout ensemble F tel que :

- $F \subset E$,
- $0_E \in F$,
- F est *stable par combinaison linéaire :* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F.$

Voici la proposition principale, qui nous permettra de vérifier facilement que des ensembles sont des espaces vectoriels.

Proposition 3 | Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \text{E est un espace vectoriel} \\ \textbf{(ii)} & \text{F est un sous-espace vectoriel de E} \end{cases} \Longrightarrow \text{F est un espace vectoriel.}$$

Preuve Simple (mais longue!) vérification des axiomes de la Définition 1.

Note *De manière plus rigoureuse, il faudrait même noter dans la proposition précédente* $(F, +|_{F\times F}, \cdot|_{\mathbb{K}\times F})$ *au lieu de* $(F, +, .)$, *puisque les ensembles de départ ne sont pas les mêmes pour les deux lois.*

Remarque 3 (Économie de rédaction) Comme déjà souligné, l'énorme intérêt de la notion de sous-espace vectoriel réside dans la proposition précédente : une économie dans la rédaction. En effet, il nous suffira de vérifier qu'une structure est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel du cours (fait que vous avez le droit d'utiliser sans argument supplémentaire, seulement 3 axiomes à vérifier, beaucoup plus rapide que la Définition 1), pour justifier la structure d'espace vectoriel.

Avant de regarder quelques exemples, commençons par montrer une propriété très utile dans la pratique : « les Vect » sont des sous-espaces vectoriels.

Proposition 4 | Un « Vect » est un espace vectoriel.

Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est un ensemble. Alors :

- $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de E. Plus précisément, c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $(x_i)_{i\in I}$.
- De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} \text{ est un sous-espace vectoriel de F} \iff \forall i \in I, \quad x_i \in F.$$

En particulier, $\quad \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} \subset F \iff \forall i \in I, \quad x_i \in F.$

Preuve Pour alléger les notations, faisons la preuve dans le cas d'une famille de deux vecteurs. Soient $x_1, x_2 \in E$, montrons que $V = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x_1, x_2.

- ⋄ Montrons que V est un sous-espace vectoriel de E contenant x_1, x_2.

⋄ Montrons maintenant que V est le plus petit sous-espace vectoriel vérifiant cette propriété, *i.e.* soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $x_1, x_2 \in F$ alors $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2) \subset F$, puisque toute combinaison linéaire de x_1, x_2 est encore dans F étant donné que F est un espace vectoriel.

- Le dernier point se montre sans difficulté par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Évident puisque pour tout $i \in [\![1\,,\,2]\!]$, $x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2) \subset \mathrm{F}$ donc $x_i \in \mathrm{F}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Immédiat car F est un sous-espace vectoriel de E donc stable par combinaison linéaire. Ainsi, si $x_1, x_2 \in \mathrm{F}$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2) \subset \mathrm{F}$.

Méthode — Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Deux options sont donc possibles (au choix).

1. EST UN SOUS-ESPACE VECTORIEL — Justifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{K}^n$, de polynômes, de fonctions, de suites ...) **ou**
2. EST UN Vect — Montrer que l'ensemble s'écrit comme Vect d'une famille.

Méthode — Montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel

Deux options sont possibles (au choix).

1. MISE EN DÉFAUT DU NEUTRE — c'est-à-dire qu'il ne contient pas le neutre d'un espace vectoriel plus gros.
2. MSE EN DÉFAUT DE LA STABILITÉ — c'est-à-dire on montre qu'il n'est pas stable par combinaison linéaire. Par exemple :
   - deux vecteurs dont la somme n'est pas dans l'espace,
   - un vecteur dont l'opposé n'est pas dans l'espace...

Exemple 9 (dans $\mathbb{K}^n$ — géométrie)

1. Un espace vectoriel E admet toujours comme sous-espaces vectoriels $\{0_{\mathrm{E}}\}$ et E lui-même. On les appelle parfois les *sous-espaces vectoriels triviaux.*
2. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{\lambda(2,3) = (2\lambda, 3\lambda) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(2,3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $(2,3)$. Dessinons cet ensemble.

3. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{\lambda(1,2,0) = (\lambda, 2\lambda, 0) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $(1,2,0)$.
   - **[1ère méthode : avec la définition]**

   - **[2ème méthode : c'est un** Vect**]** C'est cette méthode qu'il faut privilégier. *(Puisque dans ce cas, l'ensemble est déjà donné sous forme de* Vect *!)*

4. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{\lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1) = (\lambda+\mu, 2\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est le plan vectoriel de vecteurs de l'espace dirigé par les vecteurs directeurs directeurs $(1,2,0)$ et $(1,0,1)$.
   - **[1ère méthode : avec la définition]**

- **[2ème méthode : c'est un** Vect**]** $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,2,0),(1,0,1))$.

5. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \,\middle|\, x+y+z+t=0, x-y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$. Montrons qu'il s'agit d'un Vect.

Exemple 10 (dans des espaces de matrices) L'ensemble ci-dessous est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$?

$$\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exemple 11 (Systèmes homogènes) Soit le système linéaire homogène à p inconnues et n équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathrm{A}_{1,1}\mathbf{x_1} + \mathrm{A}_{1,2}\mathbf{x_2} + \cdots + \mathrm{A}_{1,p}\mathbf{x_p} & = 0 \\ \mathrm{A}_{2,1}\mathbf{x_1} + \mathrm{A}_{2,2}\mathbf{x_2} + \cdots + \mathrm{A}_{2,p}\mathbf{x_p} & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ \mathrm{A}_{n,1}\mathbf{x_1} + \mathrm{A}_{n,2}\mathbf{x_2} + \cdots + \mathrm{A}_{n,p}\mathbf{x_p} & = 0 \end{array} \right. \qquad (\mathrm{S})$$

où $\mathrm{A}_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!]$, écrit aussi matriciellement sous la forme $\mathrm{AX} = 0_{n,1}$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ selon le point de vue).

Exemple 12 (dans des espaces de fonctions)

1. Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$ des fonctions $\mathscr{C}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$.

- *l'inclusion $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ est évidente car une fonction $\mathscr{C}^n$ est en particulier une fonction,*
- *la fonction nulle est de classe $\mathscr{C}^n$,*
- *une combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^n$ est $\mathscr{C}^n$ d'après les propriétés du Chapitre (AN) 6.*

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I},\mathbb{R})$ est un sev de $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n \leqslant p$, $\mathscr{C}^p(\mathrm{I},\mathbb{R})$ est un sev de $\mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 3f(x)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Note | *On reconnaît ici l'ensemble des fonctions solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.*

- **[1ère méthode : avec la définition]**

- **[2ème méthode : c'est un** Vect**]**

4. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{+\star},\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ f'(x) = 3f(x)^2\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

Note | *La présence d'un carré vous guide sur la réponse : non.*

<u>*Indication :*</u> *Constatons que la fonction $g : x \longmapsto x^3$ est un élément de* F

5. Plus généralement, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle <u>**linéaire homogène**</u> *(homogène, pour que la fonction nulle soit bien une solution)* sur un intervalle I (du premier ou du second ordre) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$.
6. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{F} = \mathscr{P}$ des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels de E. *Nous faisons par exemple la preuve pour les fonctions paires.*
7. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathrm{E} \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 13 **(dans des espaces de suites)**

1. Notons F l'ensemble des suites réelles convergentes, alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   - **[1ère méthode : avec la définition]**
   - **[2ème méthode : c'est un** Vect**]** *Supposons par exemple que $a^2 - 4b > 0$, les autres cas se traitant de la même manière.*

3. Plus généralement, l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence **linéaire** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 14 **(dans des espaces de polynômes)** Soit $n \geqslant 0$.

1. Alors $\mathbb{K}_n[X]$ — l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n — est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

   En effet, par définition d'un polynôme, $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$. L'ensemble s'écrit comme un Vect*, c'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}[X]$.

2. Soit $n \geqslant 1$. En revanche $\mathbb{K}_{=n}[X]$ — l'ensemble des polynômes de degré n — n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Pourquoi ?

   $\mathbb{K}_{=n}[X]$ *ne contient pas le polynôme nul, qui est de degré* $-\infty$.

3. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \leqslant p$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_p[X]$.

   Ici, on demande de vérifier que $\mathbb{K}_n[X]$ *est un sous-espace vectoriel non pas de* $\mathbb{K}[X]$ *mais de* $\mathbb{K}_p[X]$. *Il faut donc appliquer le dernier point de la Proposition 4. On a* $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$, *et comme $n \leqslant p$ on a bien :*

   $$\forall i \in [\![0\,,\,n]\!], \quad X^i \in \mathbb{K}_p[X].$$

   Donc $\mathbb{K}_n[X]$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}_p[X]$.

Méthode Inclusion de Vect

Écrivons la méthode par exemple pour des familles de deux vecteurs. Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ deux familles de vecteurs. Alors,

établir que $\mathrm{Vect}(x_1, x_2) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ revient à *(d'après la Proposition 4)* :

$\boxed{\subset}$ montrer que $\mathrm{Vect}(x_1, x_2) \subset \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, c'est-à-dire :

$\forall i \in [\![1\,,\,2]\!], \quad x_i \in \mathrm{Vect}(y_1, y_2),$

En effet, puisque $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ *est un espace vectoriel, s'il contient* x_1, x_2*, alors il contient toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs.*

$\boxed{\supset}$ **et** montrer que $\mathrm{Vect}(y_1, y_2) \subset \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$, c'est-à-dire :

$\forall i \in [\![1\,,\,2]\!], \quad y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2).$

En effet, puisque $\mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ *est un espace vectoriel, s'il contient* y_1, y_2*, alors il contient toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs.*

On montrera plus tard que l'on peut se passer d'une inclusion en montrant l'égalité des « dimensions ».

Exemple 15 **(Inclusion de Vect (1))** Soient E un espace vectoriel et $(x, y) \in E^2$. Montrer que : $\mathrm{Vect}(x, y) = \mathrm{Vect}(x + y, x - y)$.

$\boxed{\supset}$

$\boxed{\subset}$

Exemple 16 **(Inclusion de Vect (2))** On note $F = \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (1, 2, 3))$ et $G = \mathrm{Vect}((3, 2, 1), (2, 2, -3))$.

- A-t-on $F \subset G$?

- A-t-on $G \subset F$?

Passons à quelques propriétés du Vect que nous utiliserons un peu plus tard. Elles sont admises, la preuve ne présentant pas spécialement de difficulté en raisonnant par double-inclusion.

Proposition 5 | Propriétés du Vect

Soit $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.

- Si $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$: $\quad \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n).$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0_E\}$, et $i \in [\![1\,,\,n]\!]$:
$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, \lambda x_i, \ldots x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n).$$
- Pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$ et $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$:
$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_i + x, \ldots x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n).$$

Cette proposition peut être résumée ainsi.

- **On ne change pas un Vect en ajoutant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.**
- **On ne change pas un Vect en multipliant l'un des vecteurs par un scalaire non nul.**

Proposition 6 | Réunion & Intersection

Soit E un espace vectoriel.

- Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.
- Une réunion de sous-espaces vectoriels de E **n'est en général pas** un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

1. Considérons, pour simplifier la rédaction, deux sous-espaces vectoriels F_1, F_2 de E. Montrons que $F = F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Donnons un contre-exemple, d'abord sour forme de dessin.

Cas particulier : modes d'écriture des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

De façon générale, il existe principalement deux types d'écriture des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$, que nous avons déjà rencontrées dans des précédents exemples. Vous devez savoir passer de l'une à l'autre. Par exemple, la droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ dirigée par $(1,1)$ peut s'écrire :

- comme un Vect : c'est $F = \mathrm{Vect}(1,1) = \{(\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. On parle aussi de *forme paramétrique*.
- Ou à l'aide d'une ou plusieurs équations, ici $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x\right\}$. On parle de *forme cartésienne*, et $y = x$ s'appelle *l'équation cartésienne* de F.

Note | *La terminologie « paramétrique » / « cartésienne » provient de la géométrie, et a normalement déjà été rencontrée au lycée.*

Nous allons avoir comment faire pour, de manière générale, passer d'une forme à une autre.

Méthode — Lien entre paramétrisation & équations cartésiennes

Soit $E = \mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de E.

- **Paramétrisation → Équations cartésiennes :**
  - Écrire que $(x,y,z,\dots) \in F \iff \exists \lambda,\mu,\nu\dots$ tel que $(x,y,z,\dots) = \lambda\cdots+\mu\dots$.
  - C'est un système en $\lambda,\mu,\nu\dots$: le résoudre en ces inconnues.
  - Si le système a toujours des solutions peu importe $x,y,z\dots$ alors $F = \mathbb{K}^n$. Sinon, il y a une ou plusieurs conditions compatibilités : ces équations donnent alors la forme cartésienne.
- **Équations cartésiennes → Paramétrisation :**
  - Écrire le système linéaire formé de toutes les équations cartésiennes.
  - Le résoudre (en $x,y,z,\dots$).
  - L'ensemble des solutions est alors la forme paramétique de F.

Exemple 17 Reprenons les deux espaces vectoriels définis plus haut, qui sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^4$.

1. $F = \mathrm{Vect}(X,Y) \subset \mathbb{R}^4$ où $X = (1,2,1,1)$ et $Y = (0,1,1,1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.

2. $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \,\middle|\, x+y+z+t=0,\ x=y\right\} \subset \mathbb{R}^4$. Déterminer une forme paramétrique de G, *i.e.* une écriture en Vect.

2. FAMILLES DE VECTEURS

Notation **Famille/Ensemble ?**

Soit E un ensemble et $x_1, ..., x_n \in E$ avec $n \in \mathbb{N}$. Rappelons les deux notations suivantes :

1. $(x_1, \ldots, x_n)$ désigne le n-uplet $x_1, \ldots, x_n$ donc *a priori*
$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \neq (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n).$$
On parle de *famille*, l'ordre des éléments a une importance.
2. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ désigne l'ensemble formé des éléments $x_1, \ldots, x_n$ donc *a priori*
$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} = \{x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n\}.$$
On parle d'*ensemble*, et dans ce cas l'ordre des éléments n'a aucune importance.

L'objectif de cette section est cette fois-ci d'abstraire la notion de repère du plan *i.e.* la faculté de *caractériser*, et de manière unique, les vecteurs par des coordonnées. Sauf que maintenant nos vecteurs peuvent être des polynômes, des fonctions, des suites *etc.*... Le vocabulaire général pour les espaces vectoriels est plutôt le suivant :

- les repères seront appelés des *bases*,
- et le nombre d'éléments d'un repère sera appelé la *dimension*. Nous allons donc également devoir justifier que toutes les bases ont même cardinal afin que la définition soit bien posée.

2.1. Famille libre

On s'intéresse aux relations linéaires qu'il peut exister entre des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ d'un espace vectoriel E, c'est-à-dire à l'existence de scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifiant :
$$\boxed{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E}. \quad (\star)$$
Évidemment, si l'on choisit $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, la condition $(\star)$ est vérifiée. La question sera de savoir s'il y en a d'autres :

- si l'on peut trouver des valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non toutes nulles vérifiant $(\star)$, on obtient une relation de liaison entre les vecteurs qui permet d'en exprimer un comme combinaison linéaire des autres (on dira que la famille est liée).
- Sinon, s'il n'existe aucune relation non triviale entre les vecteurs de cette famille, on a ce que l'on appelle une *famille libre*.

Cette notion est basée sur celle de colinéarité que vous connaissez bien en géométrie. En effet, on voit que deux $(n = 2)$ vecteurs colinéaires correspondront aux familles **non** libres (que nous appelleront *liées*).

- Par exemple, les vecteurs $u = (2, 2)$ et $v = (1, 1)$ sont colinéaires dans $\mathbb{R}^2$ puisque $v = 2u$.

- Donc : $2\cdot u+(-1)\cdot v=(0,0)$, et on a donc trouvé des valeurs $(\lambda_1=2,\lambda_2=-1)$ non toutes nulles vérifiant $(\star)$.

Définition 4 | Famille libre/liée

- **[Famille finie]** Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que $(x_1,\dots,x_n)$ est une *famille libre* de vecteurs de E, ou que les vecteurs x_1, ..., x_n sont *linéairement indépendants*, si :
$$\forall(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n,\quad \left[\sum_{k=1}^n\lambda_k x_k=0_E\implies \forall k\in[\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k=0\right].$$
Une famille est dite *liée* *(voir la remarque qui suit pour une justification)* si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si :
$$\exists(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n\smallsetminus\{0_{\mathbb{K}^n}\},\quad \sum_{k=1}^n\lambda_k x_k=0_E.$$
- **[Famille quelconque]** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est *libre* dans E si toute sous-famille **finie** est libre. Si ce n'est pas le cas, on dit que la famille est *liée*.

Remarque 4 (Négation de la liberté)

- $(x_1,\dots,x_n)$ est liée si et seulement si :
$$\exists(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n,\quad \left[\sum_{k=1}^n\lambda_k x_k=0_E\quad \underline{\textbf{et}}\quad \exists k\in[\![1\,,\,n]\!],\ \lambda_k\neq 0\right].$$

Note | *On rappelle à toute fin utile que* non $(P\implies Q)\iff(P$ et non $Q)$, *et que la négation d'un « ∀ » est un « ∃ »*

Cela signifie donc qu'il existe une combinaison linéaire nulle (des vecteurs $x_1,\dots,x_n$) dont tous les coefficients ne sont pas nuls.
- Pour $n=2$, (x_1,x_2) est donc liée si et seulement si :
$$\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2,\quad \lambda_1x_1+\lambda_2x_2=0,\quad\text{avec : }\quad \lambda_1\neq0\ \underline{\textbf{ou}}\ \lambda_2\neq0.$$
Cela nous mène tout droit à la définition qui suit.

Définition 5 | Colinéarité (cas $n=2$)

Deux vecteurs (u,v) d'un espace vectoriel E sont dits *colinéaires* si (u,v) est liée, c'est-à-dire si : $\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad u=\lambda v\quad \underline{\textbf{ou}}\quad \exists\mu\in\mathbb{R},\quad v=\mu u$.

Remarque 5 La colinéarité ou non peut souvent se deviner facilement. Par exemple, on pourra écrire que deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont non-colinéaires dès qu'il existe une coordonnée nulle pour l'un, qui ne l'est pas pour l'autre. C'est le cas par exemple de $(1,2,3)$ et $(1,2,0)$ dans $\mathbb{K}^3$.

Dans certains cas, il n'est pas utile de faire un calcul pour décider si une famille est libre ou non :

Proposition 7 | Cas particuliers de familles libres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Si un vecteur de la famille est combinaison linéaire des autres, alors la famille est liée.
- Soit $e\in E$. Alors : (e) est libre $\iff e\neq 0_E$.
- Deux familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ dont $\mathscr{G}$ est obtenue par permutation des vecteurs de $\mathscr{F}$ ont même nature (libre ou liée).

Preuve Notons $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de E.
- Supposons sans restriction que $x_1=0_E$. Alors on a : $\sum_{=1}^n\lambda_ix_i=0_E$ en prenant : $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\left(1,\underbrace{0,\dots,0}_{n-1}\right)\neq 0_{\mathbb{K}^n}$. La famille est donc liée.
- Supposons sans restriction que $x_1=\sum_{k=2}^n\lambda_kx_k$ est donc combinaison linéaire de $x_2,\dots,x_n$, avec $\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$. Alors on a :
$$x_1-\sum_{k=2}^n\lambda_kx_k=0_E\iff\sum_{k=1}^n\mu_kx_k=0_E,$$
en posant $\mu_1=1,\mu_k=-\lambda_k$ pour tout $k\in[\![2\,,\,n]\!]$. Comme $\mu_1\neq0$, la famille est liée.
- $\boxed{\implies}$ Déjà vu par contraposée : si $e=0_E$, alors (e) est liée puisqu'elle contient le vecteur nul.
$\boxed{\impliedby}$ Supposons $e\neq0_E$, et soit $\lambda_1\in K$ tel que $\lambda_1e=0_E$. Comme $e\neq0_E$, on a déjà vu que cela entrainait $\lambda_1=0$. Donc la famille (e) est libre.
- Évident.

Exemple 18 Soient E un espace vectoriel et $(x,y)\in E^2$. Alors :

la famille $\mathscr{F}=\left(x,y,\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x-y}{2}\right)$ est liée.

Méthode Vérifier la liberté/liaison d'une famille

Pour montrer qu'une famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre ou non , on écrit :
$$\text{« Soit }(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n\text{ tel que }\sum_{k=1}^n\lambda_kx_k=0_E.\text{ »}\qquad(\star)$$
Ensuite,
- Si $(\star)$ ne possède que la solution $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(0,\dots,0)$, alors la famille est

libre.

- S'existe une solution $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$, alors la famille est liée.

En général, l'étude de $(\star)$ passe par les arguments ci-après.

- Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{K}_n[X]$: on arrive à la résolution d'un système linéaire.
- Dans $\mathbb{R}^I$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on prend des valeurs particulières pour les variables, ou on fait de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*).

RAPPEL DE LA SIGNIFICATION DES ÉGALITÉS USUELLES

Égalité	Signification
Pour des uplets : $(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n)$	$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad x_i = y_i$
Pour des suites : $(u_n) = (v_n)$	$\forall n, \quad u_n = v_n$
Pour des polynômes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k = \sum_{k=1}^{n} b_k X^k$	$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \quad a_k = b_k$
Pour des fonctions : $f = g$	$\forall x, \quad f(x) = g(x)$

Exemple 19

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants $x_1 = (1,0,2)$, $x_2 = (0,1,1)$ et $x_3 = (1,0,1)$. La famille (x_1,x_2,x_3) est-elle libre ?

2. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants $P_1 = X^2+X+1$, $P_2 = X^2-1$, $P_3 = X$. La famille (P_1,P_2,P_3) est-elle libre ?

3. Montrons que $(\cos,\sin)$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4. Montrons que $(1,(2^n)_n,(3^n)_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   - **[1ère méthode : en évaluant en plusieurs n]**
   - **[2ème méthode : avec des limites]**

Note | *L'exemple précédent se généralise sans difficulté à toute famille de suites géométriques de raisons deux à deux distinctes.*

Attention — Égalité à zéro dans un espace vectoriel de fonctions ou suites

- L'égalité $\lambda\cos+\mu\sin = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, signifie que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \lambda\cos(x)+\mu\sin(x)=0,$$
puisque la fonction $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est la fonction nulle. Le quantificateur « $\forall$ » est ici fondamental pour démontrer la liberté, attention aux oublis ou aux mélanges dans votre rédaction.
- La même remarque s'applique aussi aux suites.

Proposition 8 | Liberté et identification dans les combinaisons linéaires

Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. Alors :
$$(x_1,\dots,x_n) \text{ est libre } \iff \left(\forall(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n},\forall(\mu_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n,\right.$$
$$\left.\left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \implies \forall k\in[\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k=\mu_k\right]\right).$$
En d'autres termes, une famille est libre si et seulement si on peut identifier coefficient par coefficient toute combinaison linéaire de ces vecteurs.

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Choisir simplement $(\mu_k)_{1\leqslant k\leqslant n}=(0)_{1\leqslant k\leqslant n}$. On retrouve alors la définition de famille libre.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $(x_1,\dots,x_n)$ est libre. Soient $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(\mu_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telles que :
$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k,\qquad \text{alors : }\quad \sum_{k=1}^n(\lambda_k-\mu_k)x_k=0.$$
Or, la famille est supposée libre, d'où l'on tire : $\quad\forall k\in[\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k-\mu_k=0.$

Attention — Non-identification pour les familles liées

Cette propriété n'est plus valable si la famille est liée. Posons $x_1=(1,-2)$ et $x_2=(-2,4)$. On a par exemple :
$$2\cdot x_1+x_2=-18\cdot x_1-9\cdot x_2=0\cdot x_1+0\cdot x_2=0_{\mathbb{R}^2}$$
donc le vecteur $0_{\mathbb{R}^2}$ s'écrit de différente façons comme combinaison linéaire des vecteurs x_1 et x_2. On a également :
$$x_1=1\cdot x_1+0\cdot x_2=3\cdot x_1+x_2=\dots$$

Cadre

Dans la suite, nous travaillerons uniquement avec des familles finies, même si l'ensemble des résultats s'adaptent aux familles quelconques en utilisant des sous-familles finies.

Famille échelonnée de polynômes. Passons à un exemple fondamental de famille libre de polynômes, celles où les degrés ont une forme particulière.

Définition 6 | Famille échelonnée de polynômes

Une famille de polynômes est une *famille échelonnée* si les degrés des polynômes sont deux à deux distincts.

Exemple 20 Les familles ci-dessous sont-elles échelonnées ?

1. $(X^2, X-1, 10)$,

2. $\left(X, X(X-1)(X-2), (X+1)^4-X^4\right)$.

(Vérification d'échelonnement) On rappelle que dans le Chapitre (ALG) 10, nous avons décrit les polynômes à l'aide de listes de coefficients rangés dans l'ordre croissant, nous avons également codé une fonction degré. On peut donc facilement tester si une famille de polynômes est échelonnée en codant une telle famille par une liste de listes : cela revient simplement à regarder si la liste des degrés n'a pas de doublon.

```python
def est_echelonnee(F):
    """
    retourne True si F est une famille échelonnée
    """
    L_deg = []
    for P in F:
        deg = degre(P)
        if deg not in L_deg:
            L_deg.append(deg)
        else:
            return False
    return True
>>> F = [[0, 0, 1], [-1, 1], [10]]
>>> est_echelonnee(F)
True
```

On en vient maintenant à la propriété principale de ces familles.

Théorème 1 | Familles échelonnées de polynômes
Toute famille finie de polynômes **non nuls** de degrés échelonnés de $\mathbb{K}[X]$ est libre.

Attention
La réciproque est fausse : il existe des familles libres non échelonnées de polynômes. Pour une contre-exemple, consulter l'Exemple 21 ($2^{\text{ème}}$ exemple).

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur le nombre de polynômes**)*
On montre par récurrence la propriété :

$\mathscr{P}(n)$ «toute famille échelonnée de polynômes non nuls de cardinal $n+1$ est libre».

Initialisation. Montrons $\mathscr{P}(0)$. Soit (P_0) une famille d'un polynôme, avec $P_0 \neq 0$. La famille (P_0) est bien entendu échelonnée, et libre car $P_0 \neq 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Et soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille échelonnée de $n+1$ polynômes non nuls. Quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que : $\deg P_0 < \dots < \deg P_n$. Montrons que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Exemple 21 Les familles ci-dessous sont-elles échelonnées ?

1. La famille $(X^2, X-1, 10)$ est échelonnée, formée de polynômes non nuls, donc est libre.

2. la famille $(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Est-elle échelonnée ?

2.2. Familles génératrices

Définition 7 | Famille génératrice
Soit F un sous-espace vectoriel de E, où E est un espace vectoriel.

- **[Famille finie]** Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs. On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une *famille génératrice* de F, ou que les vecteurs x_1, ..., x_n *en-*

gendrent F, si : $\quad F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Autrement dit, si :

$$\forall x \in F, \quad \exists (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

c'est-à-dire si les éléments de F sont exactement les combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_n$.

Note | *Cela implique notamment que $x_i \in F$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

- **[Famille quelconque]** Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est *génératrice* dans F s'il existe une sous-famille **finie** génératrice de F.

Remarque 6

- Contrairement à la liberté, le caractère générateur ne dépend pas que de la famille de vecteurs mais aussi de l'espace considéré : une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F_1 ne le sera pas forcément d'un autre sous-espace vectoriel F_2.
- Par définition, une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ est toujours génératrice de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Définition 8 | Dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. On dit que F est de *dimension finie* s'il existe une famille génératrice finie de F.

Notation

Lorsqu'un espace vectoriel F est de dimension finie, on note symboliquement :

$$\dim F < \infty.$$

Attention

Nous n'avons pas encore défini ce qu'est la « dimension » d'un espace de dimension finie, seulement la propriété de « dimension finie ». Mais nous verrons plus tard qu'un espace vectoriel de dimension finie possède une « dimension ».

Méthode Vérifier la généricité ou non d'une famille

Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de F est une famille génératrice de F, on doit montrer l'égalité d'**ensembles** éventuelle :

$$F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

On procède donc généralement par double-inclusion, dont l'une est souvent évidente.

$\boxed{\subset}$ « Soit $x \in F$. Alors cherchons λ_1, ..., λ_n tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. [...] On a donc déterminé des λ_i qui conviennent, donc $F \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. ». En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :

- Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: on résout un système linéaire.
- Dans $\mathbb{R}^I$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on fait souvent de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*). On peut aussi se ramener à un système en évaluant en plusieurs x, n *etc.*.

Dans le cas où la famille n'est pas génératrice, alors cette inclusion sera fausse : on trouvera que, pour certains $x \in F$, il n'existe pas de tels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$\boxed{\supset}$ En général, cette inclusion est évidente. Si on a besoin de la justifier, on expliquera que $x_i \in [\![1, n]\!]$ pour tout i, puis comme F est un sous-espace vectoriel, on déduit : $\quad \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset F$.

Exemple 22

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (1,2)$ et $x_3 = (1,3)$. La famille (x_1, x_2, x_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

2. Soit $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donnons une famille génératrice de :

$$F = \{y \in E \mid y' = 2y\}.$$

3. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donnons une famille génératrice de :

$$F = \{(u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n\}.$$

2.3. Base

Nous arrivons à une notion qui généralise les repères que vous connaissez depuis longtemps en géométrie.

Définition 9 | Base
Soit E un espace vectoriel. On appelle *base* de E toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice de E.

Remarque 7 Un espace vectoriel réduit au vecteur nul n'a pas de base (puisque la seule famille de cet espace vectoriel est alors (0_E), qui ne peut être libre).

Rappelons que :

- le caractère générateur garantit l'existence d'une combinaison linéaire,
- le caractère libre garantit l'unicité des coefficients.

Une base est donc une famille dans laquelle tout vecteur de l'espace vectoriel se décompose en une combinaison linéaire de cette famille, et ce de manière unique.

Définition/Proposition 1 | Coordonnées d'un vecteur

- Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de E}$$

$$\iff \forall x \in E, \quad \exists! (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Autrement dit, tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.
- Si $x \in E$, notons $(\lambda_k(x))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que : $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) x_k$. Alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le scalaire $\lambda_k(x)$ s'appelle **la** k-ième coordonnée de x dans la base $(x_1, \dots, x_n)$.

Preuve Il y a quelque chose à montrer dans le premier point uniquement. On procède par double implication.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\mathscr{B} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, donc libre et génératrice. Soit $x \in$ E. Alors puisque $\mathscr{B}$ est génératrice,

$$\exists (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

On souhaite montrer l'unicité, soit donc $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ de sorte que : $x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \underset{\mathscr{B}\text{ libre}}{\Longrightarrow} \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Le caractère générateur est alors immédiat.

En résumé,

LIBRE	$=$	UNICITÉ des coefficients d'une combinaison linéaire
GÉNÉRATRICE	$=$	EXISTENCE des coefficients d'une combinaison linéaire
BASE	$=$	EXISTENCE **et** UNICITÉ des coefficients d'une combinaison linéaire (→ notion de « coordonnées »).

En Mathématiques, l'adjectif *canonique* signifie parfois « le plus simple ». On présente donc quelques exemples de bases fondamentales dans la prochaine proposition, on vérifie sans aucune difficulté que ce sont bien des bases.

Définition/Proposition 2 | Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[x]$
Soient $n, p \geqslant 1$ deux entiers.

- **[Dans $\mathbb{K}^n$]** Notons

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

La famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}^n$.
- **[Dans $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$]** Notons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et $\ell \in [\![1, p]\!]$, $E_{k,\ell}$ la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constituée de zéros partout sauf pour le coefficient en ligne k et colonne ℓ, qui vaut un. La famille $(E_{k,\ell})_{(k,\ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]}$ est une base de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

appelée *base canonique de* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \vdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \quad\uparrow j & \end{array}$$

- **[Dans $\mathbb{K}_n[X]$]** La famille $(X^k)_{0\leqslant k\leqslant n} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}_n[X]$.

Notation

Dans l'un des espaces vectoriels précédents, on notera $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ l'une des bases canoniques précédentes.

Preuve Vérifions que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ où :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

est bien une base de $\mathbb{K}^n$.

- **[Génératrice]**

- **[Liberté]**

Exemple 23 **(Canoniques)**

- **[Uplets]** Dans $\mathbb{R}^3$, la base canonique est $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.
- **[Matrices]** Dans $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, la base canonique est :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  On constate qu'il y a six matrices élémentaires, elles forment une base de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
- **[Polynômes]** Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la base canonique est $(1, X, X^2)$.

Remarque 8

- Pour le moment, montrer qu'une famille est une base consiste en la vérification de la liberté et du caractère générateur (cela fait donc appel à des méthodes déjà connues). On peut également vérifier la Définition/Proposition 1.
- Plus tard, une fois la notion de dimension étudiée, nous verrons que dans certains cas on peu se passer de l'une des deux propriétés.

Exemple 24

1. Montrer que la famille $((1,1),(1,-2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. *(Ici, on utilise la Définition/Proposition 1, puisque l'écriture de tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ en fonction de cette famille semble possible (système))*

2. Montrer que la famille $\left(X^2+X, X^2+1, X+1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. *(Ici, on utilise la Définition/Proposition 1, puisque l'écriture de tout vecteur de $\mathbb{R}_2[X]$ en fonction de cette famille semble possible (système))*

3. On note $E=\left\{y\in\mathscr{C}^2 \mid y''-3y'+2y=0\right\}$. Déterminer une base de E. *(Ici, la seule possibilité pour avancer est de commencer à résoudre l'E.D. : on va donc trouver une famille génératrice puis prouver la liberté)*

4. On note $E=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=-u_{n+1}-u_n\right\}$. Déterminer une base de E. *(Ici, la seule possibilité pour avancer est de commencer à résoudre l'S.R.L.2 : on va donc trouver une famille génératrice puis prouver la liberté)*

2.4. Extraction & Complétion de familles

Il est possible de construire des bases à l'aide de familles libres (en complétant), et de familles génératrices (en extrayant). Nous allons établir deux faits principaux :

1. toute famille libre peut être complétée en une base (de-même, toute famille génératrice peut être diminuée en une base),
2. toutes les bases ont même cardinal ; cet entier commun, nous allons l'appeler la *dimension*.

Proposition 9 | Augmentation d'une famille libre finie

- Soit E un espace vectoriel.

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \mathscr{L}=(\ell_1,\dots,\ell_n) \text{ libre dans E} \\ \textbf{(ii)} & \ell_{n+1}\notin \operatorname{Vect}\mathscr{L} \end{cases} \implies \mathscr{L}'=(\ell_1,\dots,\ell_n,\ell_{n+1}) \text{ libre.}$$

- On peut donc compléter une famille libre en une famille libre, en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des précédents.

Preuve Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{K}$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\ell_k=0 \iff \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\ell_k+\lambda_{n+1}\ell_{n+1}=0.$$

Supposons par l'absurde que $\lambda_{n+1} \neq 0$. Alors $\ell_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right)\ell_k \in \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$ — **Contradiction**. Donc finalement $\lambda_{n+1} = 0$ et l'on tire : $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\ell_k = 0$, mais $(\ell_0, \dots, \ell_n)$ est supposée libre, donc : $\forall k \in [\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k = 0$. On a bien montré au total que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$ d'où la liberté de la famille $\mathscr{L}'$.

Exemple 25 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\mathscr{L} = (\ell_1, \ell_2) = ((2,1,0),(1,-1,0))$. Appliquer le résultat avec $\ell_3 = (2,3,1)$.

Proposition 10 | Diminution d'une famille génératrice finie

- Soit E un espace vectoriel.
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \mathscr{G} = (g_1, \dots, g_{n+1}) \text{ génératrice de E} \\ \textbf{(ii)} & g_{n+1} \in \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_n) \end{cases} \implies \mathscr{G}' = (g_1, \dots, g_n) \text{ génératrice.}$$
On a aussi : $\mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_{n+1}) = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_n)$.
- On peut donc diminuer une famille génératrice en une famille encore génératrice en éliminant des vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres.

Preuve Nous avons déjà vu que si $g_{n+1} \in \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_n)$ alors : $\mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_{n+1})$. Donc si $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_{n+1})$, alors $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_n)$ et la famille $(g_1, \dots, g_n)$ est bien génératrice.

Exemple 26 On considère le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ suivant $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}(g_1, g_2, g_3)$, où $g_1 = (2,1,3)$, $g_2 = (1,0,1)$. On notera $\mathscr{G} = (g_1, g_2, g_3)$. Appliquer le résultat à $g_3 = (1,1,2)$?

Les propriétés précédentes nous apprennent donc que :

- l'on peut augmenter une famille libre finie (en une nouvelle famille libre) en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ceux de la famille.
- D'autre part, on peut diminuer une famille génératrice finie (en une nouvelle famille génératrice) en retirant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

3. DIMENSION & REPRÉSENTATION MATRICIELLE

3.1. Dimension

Le *lemme de* Steinitz, dont la preuve est très technique, permet de comparer le nombre d'éléments d'une famille libre par rapport au nombre d'éléments d'une famille génératrice.

Lemme 1 | de Steinitz

Soient E un espace vectoriel de dimension finie engendrée par une famille $\mathscr{G}$ de $n \in \mathbb{N}^\star$ vecteurs. Alors :
- toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
- Par conséquent, si $\mathscr{L}$ est une famille libre, alors : $\mathrm{Card}\,\mathscr{L} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathscr{G}$.

Preuve
- On démontre par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, la propriété suivante est vraie :

« Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille ayant $n+1$ éléments est liée. »

Initialisation. On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 1$. Soit E un espace vectoriel engendré par un vecteur noté g_1, et soit (x_1, x_2) une famille de E ayant deux éléments. On suppose dans la suite que $x_1 \neq 0, x_0 \neq 0$ (dans le cas contraire, l'un des deux est nul et le résultat évident).
Les vecteurs x_1 et x_2 peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires du vecteur g_1 ; autrement dit, il existe des scalaires λ_1, λ_2 tels que $x_1 = \lambda_1 g_1$ et $x_2 = \lambda_2 g_1$, ce qui donne la relation : $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0_\mathrm{E}$. Puisque $x_2 \neq 0_\mathrm{E}$, on a $\lambda_2 \neq$. La relation $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0_\mathrm{E}$ prouve alors que (x_1, x_2) est liée.

Hérédité. On démontre maintenant que si la propriété est vraie au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$, alors elle vraie au rang n.
Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs notés $g_1, g_2, \dots, g_n$, et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ une famille de E ayant $n+1$ éléments. Tout vecteur x_j, pour $j \in [\![1, n+1]\!]$, est combinaison linéaire de $g_1, g_2, \dots, g_n$, donc il existe des scalaires $\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j$ tels que : $x_j = \lambda_1^j g_1 + \lambda_2^j g_2 + \cdots + \lambda_n^j g_n$. $(\star)$ En particulier, pour $j = n+1$, le vecteur x_{n+1}

s'écrit :

$$x_{n+1} = \lambda_1^{n+1} g_1 + \lambda_2^{n+1} g_2 + \cdots + \lambda_n^{n+1} g_n. \quad (\star\star)$$

- ◇ Si x_{n+1} est nul, c'est terminé, la famille est liée ;
- ◇ sinon, x_{n+1} est non nul, et au moins un des coefficients λ_j^{n+1} est non nul. On suppose, pour alléger l'écriture, que λ_n^{n+1} est non nul (sinon il suffit de changer l'ordre des vecteurs). Formons une nouvelle famille de n vecteurs seulement $(y_1, \dots, y_n)$, de la manière suivante :

$$\forall j \in [\![1\,,\,n]\!], \quad y_j = \lambda_n^{n+1} x_j - \lambda_n^j x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_n^{n+1}\lambda_k^j - \lambda_n^j \lambda_k^{n+1}\right) g_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_n^{n+1}\lambda_k^j - \lambda_n^j \lambda_k^{n+1}\right) g_k + \left(\cancel{\lambda_n^{n+1}\lambda_{n+1}^j} - \cancel{\lambda_n^j\lambda_n^{n+1}}\right) g_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_n^{n+1}\lambda_k^j - \lambda_n^j \lambda_k^{n+1}\right) g_k.$$

Ainsi, la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est une famille de $E' = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_{n-1})$ qui est un espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est liée. Par conséquent, il existe des scalaires non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ tels que :

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_n y_n = 0_E.$$

En remplaçant les y_j par leur expression en fonction des vecteurs x_i, on obtient :

$$\lambda_n^{n+1}\mu_1 x_1 + \lambda_n^{n+1}\mu_2 x_2 + \cdots + \lambda_n^{n+1}\mu_n x_n - (\mu_1\lambda_n^1 + \cdots + \mu_n\lambda_n^n) x_{n+1} = 0_E.$$

Le coefficient λ_n^{n+1} a été supposé non nul et au moins un des scalaires $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ est non nul ; on a donc une combinaison linéaire nulle des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls, ce qui prouve que ces vecteurs forment une famille liée.

- Le plus dur est fait, puisqu'en contraposant nous avons montré précédemment que toute famille libre possède au plus n vecteurs. Donc $\mathrm{Card}\,\mathscr{L} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathscr{G}$.

Définition/Proposition 3 | Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- ◇ si $E \neq \{0_E\}$: toutes les bases de E ont le même cardinal, on l'appelle la *dimension* de E, et est notée $\dim E$.
  ◇ Si $E = \{0_E\}$, on pose comme convention : $\dim(\{0_E\}) = 0$.
- Soient $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors :

$$\mathrm{Card}\,\mathscr{L} \leqslant \dim E \leqslant \mathrm{Card}\,\mathscr{G}.$$

Note | *On savait déjà que $\mathrm{Card}\,\mathscr{L} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathscr{G}$, et finalement entre les deux vient s'intercaler la dimension.*

Preuve

- Montrons que dans le cas $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases ont même nombre d'éléments. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E ayant respectivement n et n' éléments. Alors d'après le Lemme 1 :

$$\begin{cases} \mathscr{B} \text{ libre}, \mathscr{B}' \text{ génératrice} & \Longrightarrow n \leqslant n' \\ \mathscr{B} \text{ génératrice}, \mathscr{B}' \text{ libre} & \Longrightarrow n' \leqslant n \end{cases} \quad \text{donc : } n = n'.$$

- Pour le second point, considérons une base $\mathscr{B}$ de E. En appliquant le lemme avec $\mathscr{L} = \mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{G} = \mathscr{B}$) on déduit que toute famille génératrice (*resp.* libre) a au moins (*resp.* au plus) n éléments. D'où le résultat.

Proposition 11 | Cardinal d'une famille liée/non génératrice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

- Toute famille de cardinal strictement supérieur à n est liée.
- Toute famille de cardinal strictement inférieur à n n'est pas génératrice.

Preuve

- Déjà vu dans le Lemme 1.
- Soit $\mathscr{F}$ une famille telle que $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) < n$. Alors $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice, puisque si elle l'était on aurait $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \geqslant n$ d'après la proposition précédente.

Définition 10 | Droite, Plan & Hyperplan

Soit E un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel F de E est appelé :

- *droite vectorielle* si $\dim F = 1$ c'est-à-dire s'il existe $e \neq 0$ tel que $F = \mathrm{Vect}(e)$.
- *Plan vectoriel* si $\dim F = 2$ c'est-à-dire s'il existe e_1, e_2 non colinéaires tels que $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.
- *Hyperplan* si $\dim E \geqslant 1$ *(en particulier E est de dimension finie)* et $\dim F = \dim E - 1$.

Remarque 9 Si $\dim E = 3$ (par exemple, $\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3$ *etc.*), les hyperplans sont exactement les plans.

Attention Confusion cardinal/dimension

Ne pas confondre les notions de cardinal et de dimension !

- Une famille a un certain cardinal mais pas de dimension,
- et par contre un espace vectoriel (de dimension finie) a une dimension mais est toujours de cardinal infini lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (sauf $\{0\}$).

En revanche, on a toujours que si $\mathscr{B}$ est une base de E : $\dim E = \mathrm{Card}\,\mathscr{B}$.

Exemple 27 (Canoniques)

- **[Uplets]** $\dim \mathbb{K}^n = n$ (notamment $\dim \mathbb{K} = 1$).
- **[Matrices]** $\dim \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$. En effet, il existe np matrices élémentaires dans la base canonique.
- **[Polynômes]** $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$ puisque $\mathrm{Card}(1, X, \dots, X^n) = n + 1$.

Exemple 28 Préciser la dimension des espaces vectoriels de l'Exemple 24.

1.

2.

3.

4.

Exemple 29

1. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$,
$$\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\},$$
est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ donc un espace vectoriel de dimension 2. Pour le prouver, il suffit d'en obtenir une famille génératrice.

2. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$,
$$\mathrm{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}\right\},$$
est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$.

3. Plus généralement, dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, notons
$$\mathrm{F} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E} \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\},$$
avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ de sorte que $a_n \neq 0$. Alors F est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ donc un espace vectoriel de dimension $n - 1$. Pour le prouver, il suffit d'en obtenir une base.

Note — *Notez que si $n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, on retrouve le premier exemple. La démarche précédente fonctionne de la même manière si l'un des a_i (pas forcément le dernier) est non nul.*

4. $\mathrm{F} = \{y \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y' = 2y\}$ est un espace vectoriel de dimension 1. En effet, nous avions montré que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x})$, et de plus $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, donc (e_1) est une base de F, ainsi $\dim \mathrm{F} = 1$. *Plus généralement, c'est le cas de toute équation différentielle linéaire d'ordre 1.*

5. $\mathrm{F} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_n\}$ est un espace vectoriel de dimension 2. *Plus généralement, c'est le cas de toute suite récurrente linéaire d'ordre 2.*

6. On pose $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = 0 = \mathrm{P}(1)\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$, déterminer sa dimension.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n-1$. Est-ce un hyperplan de F ?

Enfin, un résultat fondamental qui nous permet de gagner du temps en pratique : lorsque le nombre d'éléments d'une famille est égal à la dimension de l'espace en question (encore faut-il la connaître, on ne l'utilisera donc que dans ce cas), il suffit de prouver le caractère générateur **OU** libre.

Théorème 2 | Libre $\iff$ Génératrice « parfois »

Soient E un espace vectoriel de **dimension finie** non nulle et $\mathscr{F}$ une famille finie telle que $\operatorname{Card}\mathscr{F} = \dim E$. Alors :

(i) $\mathscr{F}$ est une base de E $\iff$ **(ii)** $\mathscr{F}$ est une famille libre de E

$\iff$ **(iii)** $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

Note — *Et en général, on préfère montrer qu'une famille est libre, c'est souvent plus rapide.*

Preuve Notons $n = \dim E \neq 0$.

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** et **(i)** $\Longrightarrow$ **(iii)** sont évidentes.
- Montrons que **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. Notons $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$, de cardinal $n = \dim E$ et supposée libre. Montrons que $\mathscr{F}$ est génératrice, elle sera alors une base.
  Par l'absurde, supposons que $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice de E, c'est-à-dire que $\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \neq E$. Alors choisissons $x_{n+1} \in E \setminus \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. D'après la Proposition 9, la famille $\mathscr{F}' = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est encore libre, ce qui est contradictoire puisqu'elle est de cardinal $n+1 > n = \dim E$. Ainsi $\mathscr{F}'$ est génératrice.
- Montrons que **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. Notons $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$, de cardinal $n = \dim E$ et supposée génératrice. Montrons que $\mathscr{F}$ est libre, elle sera alors une base.
  Par l'absurde, supposons que $\mathscr{F}$ n'est pas libre, c'est-à-dire que l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres, par exemple $x_n \in \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Alors d'après la Proposition 9, la famille $\mathscr{F}' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ est encore génératrice, ce qui est contradictoire puisqu'elle est de cardinal $n-1 < n = \dim E$. Ainsi $\mathscr{F}'$ est libre.

Méthode Montrer qu'une famille est une base

Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de F est une base de F, deux cas se présentent.

- **[Cas 1 : dim F connue]** C'est le cas favorable. Si pour une raison ou une autre on connait la dimension de F, et que $n = \dim F$, alors on montre que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre **ou** génératrice.
- **[Cas 2 : dim F inconnue]** On montre les deux propriétés à l'aide des méthodes déjà vues.

Exemple 30

1. La famille $\mathscr{F} = ((0,1,2), (1,2,0), (2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\mathscr{F} = \left(1+X, 1+X^2, X+X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Pour $a \in \mathbb{K}$. La famille de polynômes $\mathscr{F} = \left(1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3\right)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

Proposition 12 | Inclusion et dimension

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- $F \subset G \implies \dim(F) \leqslant \dim(G)$.
- $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G) \implies F = G$.

Preuve Soit $\mathscr{B}$ une base de F.

- Supposons $F \subset G$. Alors $\mathscr{B}$ est une famille libre (car c'est une base !) de vecteurs de G (car $F \subset G$). Donc $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) \leqslant \dim(G)$. Comme par définition $\mathrm{Card}(\mathscr{B})$ n'est rien d'autre que la dimension de F, on a bien $\dim(F) \leqslant \dim(G)$.
- Supposons toujours que $F \subset G$, mais également que $\dim(F) = \dim(G)$. Dans ce cas, $\mathscr{B}$ est toujours une famille libre de vecteurs de G, mais qui est cette fois-ci de même cardinal que la dimension de G ($\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(F) = \dim(G)$), c'est donc une base de G (d'après le Théorème 2). En particulier, $\mathscr{B}$ engendre G et $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = F$.

Exemple 31 Retrouver plus rapidement le résultat de l'Exemple 16.

3.2. Représentation matricielle de vecteurs

Les matrices ont pour le moment été étudiées comme des tableaux de nombres (entiers ou réels par exemple, voir complexes). Nous allons voir en quoi elles peuvent être aussi utiles pour étudier les vecteurs, les applications linéaires *etc.* Nous commençons ici ce travail avec les vecteurs et les familles de vecteurs.

Définition 11 | Matrice d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit x un vecteur de E de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathscr{B}$, *i.e.* :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

- On appelle *matrice du vecteur x relativement à la base $\mathscr{B}$* la matrice **colonne** suivante : $$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Note: *Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, l'objet est donc bien défini. Attention cependant au fait que les coordonnées dépendent de l'ordre des vecteurs composant la base*

- Lorsque E dispose d'une base canonique ($\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}^n$, *etc.*), on dit que $\underset{\mathscr{B}^{\mathrm{can}}}{\mathrm{Mat}}(x)$ est la *matrice canoniquement associée à x*.

De manière générale, toutes les notions de matrice qui suivront dépendront du choix d'une base. Nous aurons des moyens simples de passer d'une base à l'autre dans un second temps (*via* les formules de changement de base, qui seront vues en 2ème année).

Exemple 32

1. Considérons $x = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, et munissons $\mathbb{R}^3$ de deux bases : la base canonique $\mathscr{B} = \mathscr{B}^{\mathrm{can}}$ et la base $\mathscr{C} = (a,b,c)$, où $a = (1,1,1)$, $b = (0,1,1)$ et $c = (0,1,-1)$, on admet qu'il s'agit bien d'une base. Alors, on a : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Que vaut $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(x)$?

2. Considérons $P = 1+X+X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, et munissons $\mathbb{R}_2[X]$ de deux bases : la base canonique $\mathscr{B}^{\text{can}}$ et la base $\mathscr{C} = (1, X-1, (X-1)^2)$. Alors, on a :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Que vaut } \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(P) \text{ ?}$$

Exemple 33 **(Un cas spécial)** Soient $n \geqslant 1$ et $E = \mathbb{K}^n$. Que dire de l'application :

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}^{\text{can}}}((x_1, \dots, x_n)) \end{array} \right. ?$$

Et dans le sens inverse ? Peut-on voir toute matrice colonne comme la matrice d'un certain vecteur dans une certaine base ? La réponse est oui.

Proposition 13 | La matrice dans une base caractérise le vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}$. L'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array} \right. \quad \text{est une bijection.}$$

- Ainsi, étant donnée une base $\mathscr{B}$ fixée, il y a une correspondance bijective entre les colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et les vecteurs de E. Et pour tout $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :
  - $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x) + \mu \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$
  - $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \iff x = y$.

Preuve Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- Commençons par montrer que $\varphi \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array} \right.$ est une bijection.
  - Elle est injective : soient $x, y \in E$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors :
  $$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(y).$$
  Donc par définition : $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = y$, et φ est bien injective.
  - Elle est surjective : soit $X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on cherche alors $x \in E$ tel que $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = X$. On vérifie sans peine que $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ convient.
- Soient $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors notons $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}, \mu_i \in \mathbb{K}$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Alors : $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i)\, e_i$. Cette égalité nous dit alors que les coordonnées de $\lambda x + \mu y$ dans la base $\mathscr{B}$ sont les combinaisons linéaires des coordonnées de x et y dans cette même base. Ainsi,

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\lambda x + \mu y) = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 \\ \vdots \\ \lambda\lambda_n + \mu\mu_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \lambda \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) + \mu \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(y).$$

La dernière propriété découle simplement de l'injectivité de φ.

On peut alors considérer la définition ci-après.

Définition 12 | Vecteur associé à une matrice colonne

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}$.

- Pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe un unique vecteur x appelé *vecteur associé à* X *dans* $\mathscr{B}$ tel que : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = X$.
- Lorsque E dispose d'une base canonique ($\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}^n$, *etc.*), on dit que x vérifiant $\underset{\mathscr{B}_{\mathrm{can}}}{\mathrm{Mat}}(x) = X$ est le *vecteur canoniquement associée à* x.

Exemple 34 On reprend l'Exemple 32. Soit $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un vecteur x associé à V dans $\mathscr{B}$ (donc « canoniquement associé ») puis dans $\mathscr{C}$.

2. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associé à V dans $\mathscr{B}$ (donc « canoniquement associé ») puis dans $\mathscr{C}$.

Nous savons représenter des vecteurs à l'aide d'une matrice de coordonnées, on étend sans peine cela à une famille de vecteurs.

Définition 13 | Matrice d'une famille

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit une famille $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E. On appelle *matrice de la famille* $\mathscr{F}$ *relativement à la base* $\mathscr{B}$ la matrice

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x_1) & \dots & \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(x_p\right) \end{array} \right) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Note *Si $p = 1$, $\mathscr{F} = (x_1)$, on retombe sur la définition de matrice d'un vecteur vue précédemment.*

Autrement dit, c'est la matrice où la i-ème colonne est la matrice du i-ème vecteur de la famille.

Exemple 35 (avec des uplets) On reprend l'Exemple 32 item **(1)**. Alors :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C})$ et $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B})$, puis $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C})$. Que conjecturer ?

Exemple 36 **(avec des fonctions)** On note $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On considère $f : x \longmapsto \cos(x+1)$ et $g : x \longmapsto \sin(x-1)$. Montrer que $f, g \in F$ et déterminer $\underset{(\cos,\sin)}{\mathrm{Mat}}((f,g))$. On admet ici que $(\cos, \sin)$ est une base de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exemple 37 **(avec des polynômes)** Nous avons déjà montré que $\mathscr{F} = (X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. On note $P = X^2 + X + 1$ et $Q = X^2 - 1$. Déterminer $\underset{\mathscr{F}}{\mathrm{Mat}}((P,Q))$.

3.3. Rang

Rappelons déjà que nous avons rencontré une première notion de rang dans le cas des matrices : il s'agit du nombre de pivots d'une forme échelonnée. On poursuit les nombreuses définitions de rang avec celle concernant les familles de vecteurs.

Définition 14 | Rang d'une famille de vecteurs
Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille finie d'un espace vectoriel E. On appelle *rang de la famille* $(x_1, \ldots, x_n)$, et on note $\mathrm{Rg}(x_1, \ldots, x_n)$, l'entier défini par :

$$\mathrm{Rg}(x_1, \ldots, x_n) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n).$$

Exemple 38

1. Dans $\mathbb{K}[X]$, on a : $\mathrm{Rg}(1, X, X^2, X^3) = 4$. En effet, on reconnaît la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$, donc $\mathrm{Rg}(1, X, X^2, X^3) = \dim \mathbb{K}_3[X] = 4$.
2. Dans $\mathbb{K}[X]$, on a : $\mathrm{Rg}(0_{\mathbb{K}[X]}, X, 2X, 3X) = 1$, car :
$$\mathrm{Vect}(0_{\mathbb{K}[X]}, X, 2X, 3X) = \mathrm{Vect}(X).$$
Et $\dim \mathrm{Vect}(X) = 1$ puisque $X \neq 0$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, on a : $\mathrm{Rg}((1,1,0),(0,0,1)) = 2$, car les vecteurs $(1,1,0), (0,0,1)$ sont

non-colinéaires donc forment une famille libre qui est aussi une base du Vect.

4. Dans $\mathbb{R}^3$, on a : $\operatorname{Rg}((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)) = 2$, car $(1,1,1) = (1,1,0)+(0,0,1)$, donc
$$\operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1),\cancel{(1,1,1)}) = \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1)).$$
Et $(1,1,0),(0,0,1)$ sont non-colinéaires donc forment une famille libre qui est aussi une base du Vect.

5. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, calculer : $\operatorname{Rg}\left((2^n),(n2^n)\right)$. Notons $F = \operatorname{Vect}\left((2^n),(n2^n)\right)$ et montrons que $\left((2^n),(n2^n)\right)$ est une base de F.

Proposition 14 | Lien rang d'une matrice de famille / rang de la famille

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit une famille $\mathscr{F}$ de p vecteurs de E.

- Alors : $\underbrace{\operatorname{Rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)}_{\text{« nombre de pivots »}} = \underbrace{\operatorname{Rg}(\mathscr{F})}_{\text{« dim du vect »}}.$
- Par conséquent, si $n = p$: $\mathscr{F}$ est une base de E $\iff \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible.

Note — *Le rang d'une famille de vecteurs est donc égal au rang de la matrice de cette famille dans* ***n'importe quelle base*** *$\mathscr{B}$ de E*

Preuve

- Admis.
- Par conséquent, si $n = p$, on a d'après la proposition précédente :
$$\mathscr{F} \text{ est une base de E} \iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = n = \operatorname{Rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right) \iff \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \text{ inversible.}$$

Proposition 15 | Rang et liberté/généricité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit une famille $\mathscr{F}$ de p vecteurs de E. Alors :

- $\mathscr{F}$ est libre $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = p$,
- $\mathscr{F}$ est génératrice $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = n$,
- $\mathscr{F}$ est une base $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = n = p$.

Preuve

- On sait que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. Donc $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. Or $\mathscr{F}$ est une base de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ si et seulement si $p = \operatorname{Card}(\mathscr{F}) = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = \operatorname{Rg}\mathscr{F}$. Finalement $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\operatorname{Card}(\mathscr{F}) = p = \operatorname{Rg}\mathscr{F}$.
- Par définition $\mathscr{F}$ est génératrice de E si et seulement si $E = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. Or, puisque $\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \subset E$, on a d'après la Proposition 12 :
$$\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = E \iff \operatorname{Rg}\mathscr{F} = \dim E = n.$$
- $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de E. Avec ce qui précède : $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = n = p$.

Exemple 39 Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour quels m la famille $((m,1,1),(1,m,1),(0,0,1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Trouver une base d'un Vect. Lorsqu'un sous-espace vectoriel est donné sous forme d'un Vect, il arrive parfois (mais rarement!) que la famille apparaissant dans le Vect ne soit pas libre auquel cas elle ne fournit pas de base. Il faut donc « nettoyer » la famille présente dans le Vect, en cherchant les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres. Sur les deux premiers exemples, les combinaisons linéaires se devinent, sur le troisième nous emploierons une autre méthode qui fonctionne en toute généralité en échelonnant une certaine matrice.

Exemple 40 Notons $u_1 = (1,-5,7)$, $u_2 = (2,6,8)$, $u_3 = (3,1,15)$, $u_4 = (1,11,1)$. Alors (u_1,u_2) est une base de $F = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$, donc $\dim F = 2$.

On a les relations linéaires $u_3 = u_1 + u_2$ et $u_4 = u_2 - u_1$. Ainsi,
$$\operatorname{Vect}(u_1,u_2,\cancel{u_3},\cancel{u_4}) = \operatorname{Vect}(u_1,u_2,u_1+u_2,u_2-u_1) = \operatorname{Vect}(u_1,u_2)$$
en utilisant les propriétés du Vect déjà vues. Ainsi, (u_1,u_2) est une famille libre de F. On vérifie facilement qu'elle est également libre, donc c'est une base de F et

$\dim F = 2.$

Exemple 41 Notons $u_1 = (1,0,2,1), u_2 = (2,1,3,2), u_3 = (1,1,1,1), u_4 = (0,1,-1,0), u_5 = (4,2,6,4)$. Alors (u_1, u_2) est une base de

$$G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5),\ \text{donc}\ \dim G = 2.$$

On a les relations linéaires $u_3 = u_1 + u_2$, $u_4 = u_2 - 2u_1$, $u_5 = u_1 + u_2 + u_3$. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cancel{u_3}, \cancel{u_4}, \cancel{u_5}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

Ainsi, (u_1, u_2) est une famille libre de F. On vérifie facilement qu'elle est également libre, donc c'est une base de F et $\dim F = 2$.

Passons désormais à un exemple moins élémentaire.

Méthode Trouver une base d'un Vect

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E, on souhaite trouver une base de :

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p).$$

- Si $\mathscr{F}$ est clairement libre, on peut conclure.
- Sinon, $\mathscr{F}$ est liée et il existe des relations linéaires entre certains éléments de la famille.
  - Si elles sont évidentes, on peut conclure directement (c'est le cas des exemples précédents).
  - Sinon, on échelonne la matrice : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{B}$ est une base fixée (la plus simple possible, le plus souvent $\mathscr{B} = \mathscr{B}^{\mathbf{can}}$). C'est la matrice de format $n \times p$ où la colonne $j \in [\![1, p]\!]$ contient les coordonnées de u_j. On obtient :

    $$A \overset{L}{\sim} B = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \ldots & C_p \end{array}\right) \quad \text{avec B l'échelonnée-réduite de A.}$$

    Notons $r = \mathrm{Rg}\, B$. Puisque B est échelonnée réduite, des relations linéaires entre les C_i se lisent facilement sur la matrice (plus précisément, les C_i n'étant pas des colonnes pivot s'expriment en fonction des autres, on trouve au total que $n-r$ vecteurs s'expriment en fonction de r vecteurs). De plus, ces relations linéaires sont les mêmes que celles cherchées sur les u_i (c'est une propriété que l'on admet, mais que l'on vérifiera sur le prochain exemple).

Exemple 42 **(dans $\mathbb{R}^n$)** Notons $u_1 = (2,-1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (-1,2,1), u_4 = (1,1,0), u_5 = (0,-1,-1)$. Déterminons une base de $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

1. La matrice à échelonner est donc :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Dans le Chapitre (ALG) 9, nous avions trouvé que l'échelonnée-réduite était :
$$A \overset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac13 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac13 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array}\right). \quad \text{(les pivots sont surlignés)}$$
2. On peut ensuite facilement deviner des relations linéaires entre les colonnes de l'échelonnée-réduite.
$$C_3 = -C_1 + C_2, \quad C_5 = \frac13 C_1 - C_2 + \frac13 C_4.$$
C'est ici que la magie opère : ces relations sont vérifiées aussi sur les u_i, $i \in [\![1,5]\!]$,
$$u_3 = -u_1 + u_2, \quad u_5 = \frac13 u_1 - u_2 + \frac13 u_4\,!$$
3. On peut à présent conclure quant à la dimension.
$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cancel{u_3}, u_4, \cancel{u_5}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_4).$$
Il n'est pas nécessaire de montrer à la main que (u_1, u_2, u_4) est libre car on vient de prouver en échelonnant que c'est une famille de rang 3 (puisque A est de rang 3). En effet,
- *(u_1, u_2, u_4) est génératrice d'après les calculs précédents,*
- *et $\mathrm{Card}(u_1, u_2, u_4) = 3 = \dim F = \mathrm{Rg} A$.*

Donc : $\boxed{\dim F = 3}$, *et (u_1, u_2, u_4) en est une base.*

Exemple 43 **(dans $\mathbb{R}_2[X]$)** Notons $P_1 = 2 - X, P_2 = 1 + X + X^2, P_3 = -1 + 2X + X^2, P_4 = 1 + X, P_5 = -X - X^2$. Déterminons une base de $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$.

1. On cherche alors la matrice de $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ dans la base canonique $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$, on a :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}(\mathscr{F}) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
On retrouve la matrice de l'exemple précédent.
2. Les calculs du précédent exemple fournissent alors les relations linéaires cherchées :
$$P_3 = -P_1 + P_2, \quad P_5 = \frac13 P_1 - P_2 + \frac13 P_4.$$
3. On peut à présent conclure quant à la dimension.
$$\mathrm{Vect}(P_1, P_2, \cancel{P_3}, P_4, \cancel{P_5}) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_4).$$
donc $\boxed{\dim F = 3}$.

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître la définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels :
   - Savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel . . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs . ☐
2. Maitriser la notion de base :
   - Savoir montrer qu'une famille est libre . . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'une famille est génératrice . . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel . . . . . ☐
   - Connaître les bases canoniques des espaces usuels . . . . . ☐
   - Savoir déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . . ☐

Exercice 1 | **Vrai ou Faux ?** Solution En cas de réponse fausse, on donnera un contre-exemple.

1. La famille $f : x \longmapsto x, g : x \longmapsto -x, h : x \longmapsto |x|$ est libre.
2. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
3. Une famille de vecteurs deux à deux non-colinéaires est libre.
4. Si $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont des familles libres de E, alors $(e_1 + f_1, \dots, e_n + f_n)$ est libre.
5. Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est une combinaison linéaire de deux de ces vecteurs.

4.1. Géométrie & Matrices

Exercice 2 | **Être ou ne pas être un espace vectoriel** Solution Les ensembles ci-dessous, sont-ils des espaces vectoriels ? Lorsque cela est possible, on l'exprimera sous forme d'un Vect.

1. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x = y\}$, $E_1' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$, $E_1'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$,
2. $E_2 = (Ox) \cup (Oy)$, $E_2' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$,
3. $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x = 1\}$,
4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$, $E_4' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$,
5. $E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x - y + z = 0\}$,
   $E_5' = \{(a, a-b, a+b, b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
6. $E_6 = \left\{ X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = -2X \right\}$, $E_6' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 3 | **Études de liberté/généricité dans $\mathbb{K}^n$** Solution

1. Les familles suivantes sont-elles libres ?
   1.1) $\mathscr{L}_1 = ((1,1,1),(2,2,2))$,
   1.2) $\mathscr{L}_2 = ((1,0,1),(0,2,2),(3,3,0))$,
   1.3) $\mathscr{L}_3 = ((-1,-2,2),(4,-3,-2),(2,-1,-1))$.
2. Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?
   2.1) $\mathscr{G}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$,
   2.2) $\mathscr{G}_2 = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$.

Exercice 4 | Solution

1. Montrer que : $E = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,0,2)) = \mathrm{Vect}((1,-2,0),(1,1,3))$.
2. Écrire E sous forme d'équation cartésienne.
3. Les sous-espaces vectoriels $G_1 = \mathrm{Vect}((1,2,3),(3,2,1))$ et $G_2 = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(2,4,6))$ sont-ils égaux ?

Exercice 5 | Solution Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathscr{C} = (\underbrace{(1,1,1)}_{u_1}, \underbrace{(2,3,5)}_{u_2}, \underbrace{(3,4,6)}_{u_3}, \underbrace{(1,2,4)}_{u_4})$ et $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{C})$. On note également $\mathscr{B}^{\mathbf{can}} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que la famille $\mathscr{C}$ est liée.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, en donner une base.
3. Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$.
4. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 | **Avec un paramètre** Solution Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $u = (4-m,4,4)$, $v = (3,3-m,6)$ et $w = (3,6,3-m)$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m la famille (u,v,w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7 | Solution Soient les deux ensembles ci-dessous.

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$,
- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et donner une base de F et de G.
2. Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 8 | Solution Montrer que $\mathscr{B} = ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $u = (8,4,2)$ dans $\mathscr{B}$.

Exercice 9 | Commutant d'une matrice Solution On appelle $\mathscr{C}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension.

Exercice 10 | Solution Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad F = \{M(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner une base et sa dimension.
2. On pose $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   2.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n.
   2.2) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad T^n \in F$.
   2.3) La famille (I_3, T, T^2) est-elle une base de F?

4.2. Polynômes

Exercice 11 | Solution Montrer que $(X^3+X^2-X-1, X^3-X^2+1, X^3-X^2+X, X^3+2X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, puis déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

Exercice 12 | Base de Lagrange Solution Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et soit $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On pose :

$$\forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad L_k = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} (X - x_i)}{\prod_{\substack{i\neq 1 \\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)}.$$

Démontrer que $(L_k)_{k=1,\dots,n}$ est une base de E.

Exercice 13 | Solution

1. Donner la dimension et une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :
   $$u_1 = (3,2,1,2),\ u_2 = (2,1,0,1),\ u_3 = (3,1,-1,1),\ u_4 = (0,3,1,1),\ u_5 = (1,0,-1,0).$$
   Préciser une base de F.
2. Même question avec la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3[X]$ engendré par les vecteurs :
   $$P_1 = 2 + X + X^3, \quad P_2 = 3 + 2X + X^2 + 2X, \quad P_3 = 1 - X^2.$$

Exercice 14 | Solution Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in [\![0\,,\,n]\!]$, on pose : $\quad P_i = \sum_{k=0}^{i} X^k$.

1. Préciser P_0, P_1, P_2.
2. Montrer que $\mathscr{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On note $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F})$ et $\underset{\mathscr{F}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}})$.

Exercice 15 | Solution Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on définit $P_1 = -1 + X^2, P_2 = -1 + 5X^2$ et $P_3 = 1 + 2X + 3X^2$. On note alors $\mathscr{C} = (P_1, P_2, P_3)$.

1. Donner la matrice de la famille $\mathscr{C}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Quel est le rang de la famille $\mathscr{C}$? Pourquoi $\mathscr{C}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $P = X$ dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 16 | Solution On note $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note : $\quad P_i = (X-1)^i$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
2. On pose $P = X^3 + X$. Déterminer $\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(P)$ et $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(P)$.
3. On définit $F = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$.
   3.1) Montrer que F est un espace vectoriel.
   3.2) Soit $P \in E$. Montrer : $\quad P \in F \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad P = \lambda(X-1)^3$.
   3.3) Déterminer une base et la dimension de F.

4.3. Suites & Fonctions

Exercice 17 | Être ou ne pas être un espace vectoriel de suites, fonctions, ... Solution Pour chacun des ensembles suivants, indiquer avec justification si c'est un espace vectoriel ou pas, en précisant le corps de base.

1. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 ou nulles en 4.
2. L'ensemble des fonctions f croissantes sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des suites arithmétiques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $r \in \mathbb{R}$, même question avec l'ensemble des suites arithmétiques de raison r.
4. L'ensemble des suites géométriques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\rho \in \mathbb{R}$, même question avec l'ensemble des suites géométriques de raison ρ.
5. L'ensembles des fonctions réelles définies sur $]-1,1[$, continues, positives ou nulles.

Exercice 18 | Solution Soit E l'espace des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$. On définit :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x-1}, \quad f_2 : x \longmapsto \frac{1}{x+1}.$$

1. Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.

2. Montrer que $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

Exercice 19 | Solution Soit $\mathrm{E} = \mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et : $\mathrm{S} = \left\{y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, 2y'' + 2y' + y = 0\right\}$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer S et sa dimension.
3. Soit α fixé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{H}_\alpha = \{f \in \mathrm{S} \mid f(0) = f(\alpha) = 0\}$. Déterminer H_α ainsi que sa dimension.

Exercice 20 | Solution Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et q_1, q_2 deux réels non nuls tels que $|q_1| < |q_2|$. On pose :

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left((q_1^n), (q_2^n)\right).$$

1. Justifier que F est de dimension finie et déterminer sa dimension.
2. Notons $\mathrm{F}_0 = \{(u_n) \in \mathrm{F},\ u_0 = u_1 = 0\}$. Déterminer F_0 ainsi que sa dimension.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) Énoncé

1. $\boxed{\text{Faux}}$. Puisque $f+g=0$, donc la famille est liée.
2. $\boxed{\text{Vrai}}$, c'est une propriété du cours.
3. $\boxed{\text{Faux.}}$ Par exemple, $((1,0),(0,1),(1,1))$, $(1,1)=(1,0)+(0,1)$. Donc cette famille est liée, alors que les vecteurs sont deux à deux non colinéaires.
4. $\boxed{\text{Vrai.}}$ Soient $\lambda_1, \ \dots, \lambda_n$ tels que : $\lambda_1(e_1+f_1)+\cdots+\lambda_n(e_n+f_n)=0$. Alors $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_1 e_1 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. Or, les familles $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ sont libres, donc $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.
5. $\boxed{\text{Faux}}$. $1+X+X^2 \in \mathrm{Vect}(1,X,X^2)$ n'est pas combinaison linéaire de seulement deux vecteurs parmi $1, X, X^2$.

Solution (exercice 2) Énoncé

1. $E_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \mid x=y\right\}$ n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par opposé. En effet, $(1,1)\in E_1$ mais $-(1,1)=(-1,-1)\notin E_1$. L'ensemble E_1' n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ puisqu'il ne contient pas $(0,0)$. L'ensemble E_1'' n'est pas non plus un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, en effet $(1,0)\in E_1''$, $(-1,-3)$ alors que $(1,0)-(-1,-3)=(2,3)\notin E_1''$ car $3>2$.
2. $E_2=(Ox)\cup(Oy)=\mathrm{Vect}(1,0)\cup\mathrm{Vect}(0,1)$. Le vecteur $(1,1)=(1,0)+(0,1)$ n'est pas dans E_2, donc E_2 n'est pas stable par somme, ce n'est donc pas un espace vectoriel, de-même pour E_2' car il ne contient pas $(0,0)$.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas $(0,0)$.
4. $E_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=0\right\}$ n'est pas un espace vectoriel. En effet, le vecteur $(1,1)$ est un élément de E_4, de-même pour $(2,-2)$, mais pas $(2,-2)+2(1,1)=(4,0)$. L'ensemble E_4' est égal à $\{(0,0)\}$ puisque $x^2+y^2 \iff x,y=0,0$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Donc E_4' est un espace vectoriel.
5. $E_5=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0, x-y+z=0\right\}$. Exprimons cet espace sous forme d'un Vect. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :
$$\begin{cases} x+y+z=0\\ x-y+z=0\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases} x+\ \ y+z=0\\ \quad -2y \quad\ =0\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x \quad =-z\\ \quad y=0\end{cases} \iff (x,y,z)=(x,0,-x)=x(1,0,-1).$$
Donc $E_5=\mathrm{Vect}(1,0,-1)$, c'est en particulier un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par définition, $E_5'=\left\{(a,a-b,a+b,b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{a(1,1,1,0)+b(0,-1,1,1) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$. C'est donc un Vect.
6. Notons $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}X=-2X \iff \begin{pmatrix}3&2&3\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases}3x+2y+3z=0\\ x+2y+\ \ z=0=0\\ x+\ \ y+3z\end{cases} \iff (x,y,z)=(0;0;0).$$
Donc $E_6=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. Pour E_6', on observe directement que $E_6'=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. **1.1)** Clairement non, puisque $(2,2,2)=2(1,1,1)$ donc $\boxed{\mathscr{L}_1 \text{ est liée}}$.

   1.2) Soient $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda(1,0,1)+\mu(0,2,2)+\nu(3,3,0)=(0,0,0)$. Alors $\begin{cases}\lambda+3\nu &=0,\\ 2\mu+3\nu &=0,\\ \lambda+2\mu &=0\end{cases}$. En faisant $L_3\to L_3-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3+L_2$, on a alors :
$$\begin{cases}\lambda+3\nu &=0,\\ 2\mu+3\nu &=0,\\ 2\mu-3\nu &=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda+3\nu &=0,\\ 2\mu+3\nu &=0,\\ 4\mu &=0\end{cases}$$
   On déduit alors $\lambda=\mu=\nu=0$, la famille $\boxed{\mathscr{L}_2 \text{ est libre}}$.

   1.3) Soient $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda(-1,-2,2)+\mu(4,-3,-2)+\nu(2,-1,-1)=(0,0,0)$. Alors $\begin{cases}-\lambda+4\mu+2\nu &=0,\\ -2\lambda-3\mu-\nu &=0,\\ 2\lambda-2\mu-\nu &=0\end{cases}$. Faisons les opérations $L_2\leftarrow L_2-2L_1, L_3\leftarrow L_3+2L_1$, on obtient
$$\begin{cases}-\lambda+4\mu+2\nu &=0,\\ -11\mu-5\nu &=0\\ 6\mu+3\nu &=0.\end{cases}$$
   Avec les deux dernières lignes, on obtient $\mu=\nu=0$, puis $\lambda=0$ dans la première ligne. La famille $\boxed{\mathscr{L}_3 \text{ est libre}}$.
2. Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?

   2.1) Ici, $\mathscr{G}_1$ ressemble fortement à la base canonique. En effet, $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}_1)=\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))=\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et que

$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est génératrice (c'est la base canonique), la famille $\boxed{\mathscr{G}_1 \text{ est elle aussi génératrice}}$.

2.2) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors cherchons λ, μ, ν tels que :

$$(x,y,z) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,1) + \nu(1,1,0).$$

D'où le système $\begin{cases} x &= \mu + \nu, \\ y &= \lambda + \nu, \\ z &= \lambda + \mu \end{cases}$. Faisons $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. Donc

$$\begin{cases} x &= \mu + \nu, \\ y &= \lambda + \nu, \\ z &= \mu - \nu \end{cases}.$$

En considérant les deux premières lignes nous avons : $\mu\frac{x+z}{2}, \nu =$ $\nu = \frac{x-z}{2}$. Donc $\lambda = y - \frac{x-z}{2}$. On a donc, pour tout (x,y,z) une solution (λ, μ, ν), donc $\boxed{\text{la famille } \mathscr{G}_2 \text{ est génératrice}}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution (exercice 4) Énoncé Notons $f_1 = (0,1,1), f_2 = (1,0,2)$ et $g_1 = (1,-2,0), g_2 = (1,1,3)$.

1. On souhaite montrer que : $\mathrm{Vect}(f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$.

   $\boxed{\subset}$ $\mathrm{Vect}(g_1, g_2) \subset \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ car on a les relations :
   $g_1 = f_2 - 2f_1, g_2 = f_1 + f_2$.

   $\boxed{\supset}$ $\mathrm{Vect}(f_1, f_2) \subset \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$ car on a les relations
   $f_1 = -\frac{1}{3}g_1 + \frac{1}{3}g_2, f_2 = \frac{1}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_2$.

   Conclusion : $\boxed{E = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,0,2)) = \mathrm{Vect}((1,-2,0),(1,1,3))}$.

2. On choisit par exemple d'utiliser le premier Vect. Alors :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in E &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,2) \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad x = \mu, y = \lambda, z = \lambda + 2\mu \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \mu = x, \lambda = y, \boxed{z = y + 2x} \\ &\iff 2x + y - z = 0. \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{E : z = y + 2x}$. C'est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$.

3. Il faut analyser si comme dans la première question chaque vecteur composant le Vect est combinaison linéaire des autres. Constatons que :

$$(1,2,3) = 0.(1,0,-1) + \frac{1}{2}(2,4,6), \quad (3,2,1) = 2(1,0,-1) + \frac{1}{2}(2,4,6),$$

$$(1,0,-1) = -\frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(3,2,1), \quad (2,4,6) = 2(1,2,3) + 0(3,2,1).$$

   Donc : $\boxed{G_1 = G_2}$.

Solution (exercice 5) Énoncé

1. Il s'agit ici de trouver une relation linéaire entre plusieurs vecteurs. On voit directement que $u_3 = u_1 + u_2$, donc $\mathscr{C}$ est liée.

2. Partons ici sur une technique d'échelonnement de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1\times L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1\times L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2\times L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3\times L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   On trouve bien une matrice de rang 2, donc $\boxed{\dim F = 2}$. *En plus, la forme échelonnée donne des relations linéaires :* $u_3 = u_1 + u_2, u_4 = -u_1 + u_2$. *Donc* $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
   La famille (u_1, u_2) est donc génératrice, de plus de cardinal $2 = \dim F$, donc $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F}$.

3. On a :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in F &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) = \lambda u_1 + \mu u_2 \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x &= \lambda + 2\mu \\ y &= \lambda + 3\mu \\ z &= \lambda + 5\mu \end{cases} \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 3x - 2y &= \lambda \\ y - x &= \mu \\ z &= 3x - 2y + 5(y-x) \end{cases} \\ &\iff -2x + 3y - z = 0. \end{aligned}$$

   $L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

4. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution (exercice 6) Énoncé

Soient λ, μ, ν telles que

$$\lambda(4-m, 4, 4) + \mu(3, 3-m, 6) + \nu(3, 6, 3-m) = 0,$$

on obtient alors le système suivant, que l'on souhaite résoudre en (λ, μ, ν) par la méthode du pivot. Commençons par échanger les lignes 1 et 3 afin d'avoir un pivot indépendant de m en position $(1,1)$.

$$\begin{cases}(4-m)\lambda+3\mu+3\nu &=0,\\ 4\lambda+(3-m)\mu+6\nu &=0,\\ 4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &=0,\end{cases}$$

$$\underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\overset{L}{\sim}}\begin{cases}4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &=0,\\ 4\lambda+(3-m)\mu+6\nu &=0,\\ (4-m)\lambda+3\mu+3\nu &=0,\end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1,\ L_3\leftarrow 4L_3-(4-m)L_1}{\overset{L}{\sim}}\begin{cases}4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &=0,\\ -(m+3)\mu+(m+3)\nu &=0,\\ 6(m-2)\mu+m(7-m)\nu &=0,\end{cases}$$

Deux cas se présentent alors :

- si $m=-3$, alors le système devient
$$\begin{cases}2\lambda+3\mu+3\nu &=0,\\ 6(-5)\mu+10.(-3)\nu &=0,\end{cases}\iff\begin{cases}2\lambda &=0,\\ \mu &=-\nu.\end{cases}$$
Ainsi, le triplet $(0,1,-1)$ est une solution non nulle du système donc la famille n'est pas libre.
- Si $m\neq-3$, alors le système est
$$\begin{cases}4\lambda+(9-m)\mu &=0,\\ \mu &=\nu,\\ (6(m-2)+m(7-m))\mu &=0,\end{cases}$$
mais $6(m-2)+m(7-m)=-m^2+13m-12=-(m-1)(m-12)$. Donc si $m\in\{1,12\}$, on obtient $\begin{cases}4\lambda+(9-m)\mu &=0,\\ \mu &=\nu,\end{cases}$, il existe alors des solutions non nulles puisque $9-m\neq0$. La famille n'est pas libre. En revanche, si $m\neq1,12$, le système devient
$$\begin{cases}4\lambda+(9-m)\mu &=0,\\ \mu &=\nu,\\ \mu &=0,\end{cases}\iff\lambda=\mu=\nu=0.$$
La famille est donc libre dans ce cas.

A-t-on trois vecteurs dans cette famille? $u\neq v$ car $4\neq6$, et $v=w$ si et seulement si $m=-3$. Donc lorsque $m\neq-3$, la famille considérée est de cardinal 3. En conclusion

$$\boxed{(u,v,w)\text{ est une base de }\mathbb{R}^3\text{ si et seulement si }m\neq-3,1,12.}$$

Solution (exercice 7) Énoncé

1. Nous savons, d'après le cours de géométrie, que ce sont des équations cartésiennes d'hyperplans de $\mathbb{R}^3$.

-
$$\begin{aligned}(x,y,z)\in F &\iff y=z\\ &\iff (x,y,z)=(x,y,y)=x(1,0,0)+y(0,1,1).\end{aligned}$$
Ainsi $F=\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,1))$, c'est donc $\boxed{\text{un sous-espace vectoriel de }\mathbb{R}^3}$ et $((1,0,0),(0,1,1))$ en est une famille génératrice. Elle est clairement libre donc c'est une base de F, $\dim F=2$.
-
$$\begin{aligned}(x,y,z)\in G &\iff x+y+2z=0\\ &\iff (x,y,z)=(-y-2z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-2,0,1).\end{aligned}$$
Ainsi $\boxed{G=\mathrm{Vect}((-1,1,0),(-2,0,1))}$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $((-1,1,0),(-2,0,1))$ en est une famille génératrice. Elle est clairement libre donc c'est une base de G, $\dim G=2$.

2. $$\begin{aligned}(x,y,z)\in F\cap G &\iff \begin{cases}x+y+2z &=0,\\ y &=z\end{cases}\\ &\iff x=-3z,y=z\iff (x,y,z)=(-3z,z,z)=z(-3,1,1).\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{F\cap G=\mathrm{Vect}((-3,1,1)).}$ Une base est alors $(-3,1,1)$.

Solution (exercice 8) Énoncé Notons $f_1=(-1,1,1), f_2=(1,-1,1), f_3=(1,1,-1)$. On cherche $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $u=\lambda f_1+\mu f_2+\nu f_3$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases}8 &= -\lambda+\mu+\nu\\ 4 &= \lambda-\mu-+nu\\ 2 &= \lambda+\mu-\nu.\end{cases}$$

On résout ensuite le système en λ,μ,ν, on trouve comme solution $(3;5;6)$. C'est-à-dire : $\boxed{\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(u)=\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}}$.

Solution (exercice 9) Énoncé On peut tout montrer d'un coup, en cherchant à exprimer $\mathscr{C}(A)$ sous forme d'un Vect.

Notons $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}AM=MA &\iff \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}a+c&b+d\\-a+c&-b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b&a+b\\c-d&c+d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} a \quad +c \quad = a-b \\ \quad b \quad +d = a+b \\ -a \quad +c \quad = c-d \\ \quad -b \quad +d = c+d \end{cases}$$
$$\iff b=-c,\ a=d,\ a=d,\ b=-c \iff a=d, b=-c.$$

Donc :
$$\mathscr{C}(\mathrm{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\} = \boxed{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{B})},$$

avec $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{\mathscr{C}(\mathrm{A}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})}$, de dimension 2 car I_2, B sont clairement non colinéaires.

Solution (exercice 10) Énoncé

1. On a clairement par définition que :
$$\mathrm{F} = \left\{ a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:=\mathrm{M}_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=\mathrm{M}_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:=\mathrm{M}_3} \middle| (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \mathrm{Vect}(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3).$$

Les trois matrices $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ sont clairement non colinéaires, donc elles forment une base de F. Donc $\boxed{\dim \mathrm{F} = 3}$, et $\boxed{(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3) \text{ en est une base}}$.

2. On pose $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1) C'est une application typique du binôme de Newton. On écrit que $\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On voit que $\mathrm{N}^2 = 0_{3,3}$,

$\mathrm{ND} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{DN}$, donc les deux matrices commutent. On déduit :
$$\mathrm{T}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k \mathrm{D}^{n-k} = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \mathrm{N}^k \mathrm{D}^{n-k} = \mathrm{D}^n + n\mathrm{N}\mathrm{D}^{n-1}.$$

On obtient alors : $\boxed{\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

2.2) D'après la question précédente, on a : $\boxed{\mathrm{T}^n = \mathrm{M}((-2)^n, 1, n) \in \mathrm{F}}$.

2.3) La famille $(\mathrm{I}_3, \mathrm{T}, \mathrm{T}^2)$ est de cardinal 3, composée de trois éléments de F, donc c'est une base si et seulement si les matrices forment une famille libre. De plus, $\mathrm{T}^2 = \mathrm{M}(4,1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient $\lambda_0,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\lambda_0 \mathrm{I}_3 + \lambda_1 \mathrm{T} + \lambda_2 \mathrm{T}^2 = 0.$$
On déduit alors en traduisant l'égalité coefficient par coefficient :
$$\begin{cases} \lambda_0 - 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0. \end{cases}$$
On trouve après calculs : $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (0;0;0)$. La famille $\boxed{(\mathrm{I}_3, \mathrm{T}, \mathrm{T}^2) \text{ est donc une base de F}}$.

Solution (exercice 11) Énoncé ...

Solution (exercice 12) Énoncé Le point clé est de constater que $\mathrm{L}_k(x_i) = 1$ si $i = k$, 0 sinon. Supposons alors que
$$\lambda_1 \mathrm{L}_1 + \cdots + \lambda_n \mathrm{L}_n = 0.$$
Si on évalue cette égalité en x_k, on trouve $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. La famille est donc libre. C'est une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n, donc c'est une $\boxed{\text{base de E}}$.

Solution (exercice 13) Énoncé

1. Notons $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. On commence par calculer la matrice de la famille dans la base canonique :
$$\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On peut ensuite échelonner-réduire cette famille afin de déterminer la dimension, ainsi qu'une base.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/3 & 1 & 0 & 1/3\\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\times L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 1\times L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - 2\times L_1}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/3 & 1 & 0 & 1/3\\ 0 & -1/3 & -1 & 3 & -2/3\\ 0 & -2/3 & -2 & 1 & -4/3\\ 0 & -1/3 & -1 & 1 & -2/3\end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{(-1/3)} L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/3 & 1 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & 3 & -9 & 2\\ 0 & -2/3 & -2 & 1 & -4/3\\ 0 & -1/3 & -1 & 1 & -2/3\end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2/3\times L_2\\ L_3 \leftarrow L_3 + 2/3\times L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 + 1/3\times L_2}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -9 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{(-5)} L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -9 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 6\times L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 + 9\times L_3\\ L_4 \leftarrow L_4 + 2\times L_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

On constate alors que $\mathrm{Rg}(\mathscr{F}) = 3$, et on tire aussi les relations linéaires : $u_3 = -u_1 + 3u_2$, $u_5 = -u_1 + 2u_2$. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_4),$$

et (u_1, u_2, u_4) est une famille génératrice de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base. Conclusion :

$$\boxed{(u_1, u_2, u_4) \text{ est une base de F.}}$$

2. Constatons que $\underset{P_1}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = u_2$, $\underset{P_2}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = u_1$, $\underset{P_3}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = u_5$. On sait déjà d'après la question précédente que $u_5 = -u_1 + 2u_2$, donc $P_3 = -P_2 + 2P_1$. Donc :

$$\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2).$$

Or P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{(P_1, P_2) \text{ est une base de } \mathrm{Vect}(P_1, P_2)}$. Ainsi, $\boxed{\dim F = 2}$.

Solution (exercice 14) Énoncé

1. Par calculs directs, on a $P_0 = 1, P_1 = 1 + X, P_2 = 1 + X + X^2$.
2. Puisque $\deg P_i = i$ pour tout $i \in [\![0\,,\,n]\!]$, on déduit que $\mathscr{F} = (P_0, \dots, P_n)$ est bien une famille de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ et échelonnée, donc $\mathscr{F}$ est libre, donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ est une base}}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Les P_i sont directement écrits dans la base canonique :

$$\forall i \in [\![0\,,\,n]\!], \quad P_i = \sum_{k=0}^{i} 1 \times X^k + \sum_{k=i+1}^{n} 0 \times X^k.$$

On déduit alors :

$$\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Pour la seconde, il s'agit d'exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction des éléments de $\mathscr{F}$. Soit $i \in [\![1\,,\,n]\!]$:

$$X^0 = P_0, \quad X = (1 + X) - 1 = P_1 - P_0, \quad X^i = P_i - P_{i-1}.$$

On déduit alors :

$$\underset{\mathscr{F}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Solution (exercice 15) Énoncé

1. Par définition, on a : $\boxed{\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = A}$.
2. On peut ensuite échelonner pour en calculer le rang :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{(-1)} L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1\times L_1}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrows L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1\times L_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{5} L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 5\times L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 - 4\times L_3}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{\mathrm{Rg}(\mathscr{C}) = \mathrm{Rg}(A) = 3} = \dim \mathbb{R}_2[X]$, donc $\mathscr{C}$ est génératrice. Mais par ailleurs $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) = 3$, donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$

3. Déterminons les coordonnées du vecteur $P = X$ dans la base $\mathscr{C}$. *Pour le moment, nous devons utiliser une méthode artisanale, il faudra attendre le Chapitre (ALG) 12 afin de proposer une autre méthode plus efficace*

On cherche $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$X = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 \iff X = (-\lambda - \mu + \nu) + (2\nu)X + (\lambda + 5\mu + 3\nu)X^2.$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} -\lambda - \mu + \nu &= 0 \\ 2\nu &= 1 \\ \lambda + 5\mu + 3\nu &= 0. \end{cases}$$

On trouve $(\lambda, \mu, \nu) = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ après calculs. Ainsi, $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

Solution (exercice 16) Énoncé

1. Notons $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$. On a $\operatorname{Card} \mathscr{B} = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, donc il suffit d'établir la liberté. Or, la famille est échelonnée et composée de polynômes non nuls, elle est donc libre. Conclusion : $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

2. On a directement $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}\mathrm{can}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$. On cherche ensuite $(\lambda_0, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que : $\quad X^3 + X = \lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 + \lambda_3(X-1)^3$.
On peut tout développer, mais le plus simple est d'évaluer. En faisant $X = 1$, on obtient $\lambda_0 = 2$. En analysant le coefficient dominant de chaque côté, on déduit : $1 = \lambda_3$. Dérivons ensuite une fois :
$$3X^2 + 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2(X-1) + 3\lambda_3(X-1)^2$$
puis faisons $X = 1$, on trouve alors : $4 = \lambda_1 + 0, \lambda_1 = 4$. Il reste à trouver λ_2, on peut re-dériver puis évaluer encore en 1 :
$$6X = 2\lambda_2 + 6\lambda_3(X-1) \implies \lambda_2 = 3.$$
Au final : $\quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

3. **3.1)** Montrons qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E. On a $0 \in F$, $F \subset E$ et soient $P, Q \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda P + \mu Q \in E$ puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel, et :
$$(\lambda P + \mu Q)'(1) = (\lambda P' + \mu Q')(1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0,$$
$$(\lambda P + \mu Q)''(1) = (\lambda P'' + \mu Q'')(1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0,$$
$$(\lambda P + \mu Q)'''(1) = (\lambda P''' + \mu Q''')(1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0.$$
Donc : $\quad \lambda P + \mu Q \in F$. En résumé : $\quad$ F est un sous-espace vectoriel de E donc $\boxed{\text{F est un espace vectoriel}}$.

3.2) Soit $P \in E$. Alors :
$$\begin{aligned} P \in F &\iff 1 \text{ est racine de multiplicité au moins } 3 \\ &\iff (X-1)^3 \mid P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P = (X-1)^3 Q \\ &\iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad P = \lambda(X-1)^3}. \end{aligned}$$
en passant au degré

3.3) En d'autres termes $F = \operatorname{Vect}((X-1)^3)$, donc comme $(X-1)^3$ est non nul, $\boxed{\dim F = 1}$, c'est une droite vectorielle de E.

Solution (exercice 17) Énoncé

1. $\boxed{\text{Faux}}$, considérons $f : x \longmapsto x - 4$, $g : x \longmapsto x - 1$, alors les deux fonctions appartiennent à l'ensemble considéré, et pourtant $f + g$ ne s'annule ni en 1 ni en 4 ($(f+g)(1) = -3, (f+g)(0) = -5$). L'ensemble n'est donc pas stable par somme, *a fortiori* ce n'est pas un espace vectoriel.

2. $\boxed{\text{Faux}}$. Par exemple g définies précédemment est croissante, et pourtant $-g$ ne l'est pas.

3. - $\boxed{\text{Vrai}}$ dans le premier cas. En effet, notons $r, r' \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite arithmétique de raison r, (u'_n) une suite arithmétique de raison r'. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(u_n + r) + \mu(v_n + r') = \lambda u_n + \mu v_n + (\lambda r + \mu r').$$
Ceci prouve que $(\lambda u_n + \mu v_n)_n$ est encore arithmétique, de raison $\lambda r + \mu r'$.
   - $\boxed{\text{Faux}}$. En revanche, si l'on impose la même raison r pour les deux suites, cela ne fonctionne plus. En effet, la suite $(u_n) = (1 + nr)_n, (v_n) = (nr)_n$ sont arithmétiques de raison r, et pourtant $(u_n) + (v_n) = (1 + n(2r))$ est arithmétique de raison $2r$. L'ensemble n'est pas donc pas stable par somme.

4. Pour les suites géométriques, c'est l'inverse. Si l'on impose la raison, l'ensemble forme un espace vectoriel, et par contre ce n'est pas le cas dans le cas contraire.
   - $\boxed{\text{Faux}}$, si l'on impose pas de raison. En effet, (2^n) est géométrique de raison 2, (1) est géométrique de raison 1. Et pourtant $(2^n + 1)$ n'est pas géométrique car $\left(\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\right)$ n'est pas une suite constante (valeurs en 0 et 1 distinctes par exemple).
   - $\boxed{\text{Vrai}}$. Notons $(u_n), (v_n)$ deux suites géométriques de raison ρ. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda \rho u_n + \mu \rho v_n = \rho(\lambda u_n + \nu v_n).$$
Ceci prouve que $(\lambda u_n + \mu v_n)_n$ est géométrique de raison ρ. L'ensemble des

suites géométriques de raison ρ est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.

5. $\boxed{\text{Faux}}$. En effet, $x \longmapsto x$ est positive continue ou nulle sur $]-1,1[$, mais $x \longmapsto -x$ ne l'est pas. L'ensemble n'est donc pas stable par opposé et n'est *a fortiori* pas un espace vectoriel.

Solution (exercice 18) Énoncé

1. Soient λ_1, λ_2 tels que :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{\lambda_1}{x-1} + \frac{\lambda_2}{x+1} = \frac{\lambda_2(x+1)+\lambda_1(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 0,$$
donc en identifiant les termes en x et constants au numérateur, on déduit
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = 0,$$
d'où l'on tire facilement $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2. Montrons que $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. On cherche λ, μ telles que pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\lambda}{x-1} + \frac{\mu}{x+1} = \frac{\lambda_2(x+1)+\lambda_1(x-1)}{x^2-1},$$
en identifiant les termes en x et constants au numérateur, on trouve que $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}}$ convient.

Solution (exercice 19) Énoncé

1. S est inclus dans E par construction, de plus, $2.0'' + 2.0' + 0 = 0$ donc la fonction nulle est dans $\mathscr{S}$. Soient deux solutions $y_1, y_2 \in \mathscr{S}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} &2(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + 2(\lambda y_1 + \mu y_2)' + (\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= \lambda(2y_1'' + 2y_1' + y_1) + \mu(2y_2'' + 2y_2' + y_2) \quad \textit{linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0. \end{aligned}$$
Donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution et $\boxed{\mathscr{S} \text{ est bien un sous-espace vectoriel de S.}}$

2. Notons (EC) $\quad 2x^2 + 2x + 1 = 0$ l'équation caractéristique associée, qui a pour discriminant $4 - 8 = -4$ et donc pour racines
$$\frac{-2 \pm 2\mathrm{i}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{2}.$$
Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme
$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\mathrm{A}\cos(x/2) + \mathrm{B}\sin(x/2)\right), \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R},$$
autrement dit
$$\boxed{\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(x \longmapsto \mathrm{e}^{-x/2}\cos(x/2), x \longmapsto \mathrm{e}^{-x/2}\sin(x/2))}.$$
Montrons que la famille est libre, soit donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \mathrm{e}^{-x/2}\cos(x/2) + \mu \mathrm{e}^{-x/2}\sin(x/2) = 0,$$
dès lors, en simplifiant par l'exponentielle, on déduit
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda\cos(x/2) + \mu\sin(x/2) = 0.$$
Il reste par exemple à prendre deux valeurs particulières de x :
$$\lambda = 0 \ (x = 0), \quad \nu = 0 \ (x = \pi).$$
Donc la famille proposée est libre et de cardinal 2, donc $\boxed{\dim \mathscr{S} = 2.}$

3. Soit α fixé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{H}_\alpha = \{f \in \mathrm{S}, f(0) = f(\alpha) = 0\}$. Soit $y \in \mathscr{S}$, alors choisissons A, B réels de sorte que $y(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\left(\mathrm{A}\cos(x/2) + \mathrm{B}\sin(x/2)\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$$y \in \mathrm{H}_\alpha \iff y(0) = y(\alpha) = 0,$$
$$\iff \begin{cases} \mathrm{A} &= 0, \\ \mathrm{e}^{-\alpha/2}\mathrm{B}\sin(\alpha/2) &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \mathrm{A} &= 0, \\ \mathrm{B}\sin(\alpha/2) &= 0 \end{cases}$$
Deux cas se présentent alors.
- si $\sin(\alpha/2) = 0$, alors B est quelconque et $\boxed{\mathrm{H}_\alpha = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-x/2}\sin(x/2)\right) \text{ donc } \dim \mathrm{H}_\alpha = 1}$.
- Si $\sin(\alpha/2) \neq 0$, alors $\mathrm{B} = 0$ et $\boxed{\mathrm{H}_\alpha = \{0\} \text{ donc } \dim \mathrm{H}_\alpha = 0}$.

Solution (exercice 20) Énoncé

1. La famille $\left((q_1^n), (q_2^n)\right)$ est une famille génératrice de F donc F est de dimension finie. Montrons qu'elle est libre. Soient λ, μ deux réels, tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda q_1^n + \mu q_2^n = 0.$$
Donc comme $|q_1| < |q_2|$, $\left|\dfrac{q_1}{q_2}\right| < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{q_1}{q_2} = 0$. Donc
$$\lambda\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n + \mu = 0,$$
puis en passant à la limite on obtient $\mu = 0$. On peut ensuite faire $n = 1$ dans l'hypothèse initiale, ce qui livre $\lambda = 0$. Donc la famille considérée est une base, et $\boxed{\dim \mathrm{F} = 2.}$

2. Si $(u_n) \in \mathrm{F}_0$, alors il existe λ, μ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$
La condition $u_0 = u_1 = 0$ donne
$$\lambda 0 + \mu = 0, 0 = \lambda q_1 + \mu q_2.$$
Ou de manière équivalente,
$$0 = \lambda(q_1 - q_2),$$
or $q_1 \neq q_2$ donc $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Donc $\boxed{\mathrm{F}_0 = \{(0)\}, \dim \mathrm{F}_0 = 0.}$