Chapitre (ALG) 11 Espaces vectoriels

L'Algèbre est généreuse, elle donne souvent plus qu'on ne lui demande.

— J. D'Alembert

Résumé & Plan

Nous allons regrouper au sein de la terminologie « espace-vectoriel » tous les ensembles qui sont stables lorsque l'on exerce des combinaisons linéaires. Nous allons ensuite développer des résultats généraux sur ces ensembles, qui se transmettront alors automatiquement à tous les exemples. Vous connaissez déjà de telles ensembles : les vecteurs de la géométrie depuis le collège, les fonctions, les polynômes, les suites ou encore les matrices.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST1, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ainsi, tous les énoncés faisant intervenir $\mathbb{K}$ sont vrais que $\mathbb{K}$ soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Commençons par rappeler des notations importantes, qui nous serviront dans tout

Notation Ensemble des applications

Soient E, F deux ensembles. On notera E^{F} (ou $\mathscr{F}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$) l'ensemble des applications de F dans E.

Exemple 1

- $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (*resp.* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) désigne l'ensemble des suites à valeurs complexes (*resp.* à valeurs réelles).
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Intérêt des raisonnements algébriques. Ce chapitre — ainsi que quelques autres pendant l'année — s'inscrit dans le domaine de l'*Algèbre* en Mathématiques, dont la vocation principale est l'étude d'ensembles munis de lois, et la recherche d'un cadre commun à plusieurs objets mathématiques. Une fois ce cadre dégagé (voir la Définition 1 ci-dessous) nous l'étudierons en détail. Tous les résultats établis dans cette étude se transmettront donc automatiquement aux objets qui vérifient la Définition 1.

Comment mémoriser facilement les définitions ? 🎉 Gardez à l'esprit que toutes les notions qui vont être présentées, quoique abstraites à première vue, sont des généralisations de quelque chose de concret que vous connaissez déjà (vecteurs, repères, coordonnées, ...).

1 STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Commençons par un premier exemple : celui de $\mathbb{R}^2$ (les vecteurs du plan, en géométrie) :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{K}\}.$$

- vous savez additionner deux vecteurs : si $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a :
  $$X + Y = \dots$$
  C'est l'addition « coordonnée par coordonnée », on l'appelle la *loi interne*.
- Vous savez multiplier un vecteur par un scalaire : si $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{K}$, alors on pose :
  $$\lambda X = \dots$$
  C'est la multiplication « coordonnée par coordonnée », on l'appelle la *loi externe*.
- On sait aussi effectuer le produit scalaire, car $\langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$, mais cette opération ne sera pas étudiée dans ce chapitre.

De manière plus générale on sait réaliser ce type d'opérations sur des uplets à plus de coordonnées, des fonctions, des polynômes, des complexes, des suites, *etc.* tous ces ensembles munis de ces lois seront qualifiés d'espaces-vectoriels, dont voici la définition.

1.1 Généralités

Définition 1 | Espace vectoriel

On appelle *espace vectoriel* (ou *espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$) tout triplet $(E, +, \cdot)$ où :

1. $(E, +)$ est un *groupe commutatif* c'est-à-dire :

(i) $+$ est une *loi interne* appelée *addition de* E :
$$+ \left| \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E, \\ (x, y) & \longmapsto & x + y. \end{array} \right.$$

(ii) $+$ est *associative* : $\forall x, y, z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z)$,

(iii) **[Neutre 0_E pour $+$]** $\forall x \in E, \quad x + 0_E = 0_E + x = x$,

(iv) tout élément de E est inversible pour $+$:
$$\forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad x + y = y + x = 0_E.$$
L'élément y inverse de x sera noté $-x$.

(v) La loi $+$ est *commutative, i.e.* $\forall x, y \in E, \quad x + y = y + x$.

2. La loi $\cdot \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$ est appelée *loi externe*. Elle vérifie en outre les règles de calcul suivantes : pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$, on a :

(i) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,

(ii) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

(iii) $(\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$,

(iv) $1x = x$.

De plus,

- les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les *scalaires*, les éléments de E sont les *vecteurs*, $\mathbb{K}$ est appelé le *corps de base*.
- L'élément neutre de E pour la loi $+$ est appelé *vecteur nul*, et on le notera 0_E comme précédemment, ou simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Note | *La loi + transforme donc deux vecteurs en un autre vecteur, alors que · transforme un réel ou complexe et un vecteur en un autre vecteur.*

Attention

Ne surtout pas apprendre cette définition par coeur ! Retenez-en simplement l'idée : un ensemble, deux opérations, et savoir sur quels types d'objets elles s'appliquent.

Remarque 1

- Toutes les propriétés précédentes sont des règles de calcul dans E, et sont comparables aux règles habituelles sur les nombres réels et vecteurs du plan ou de l'espace que vous utilisez depuis longtemps.
- La tradition veut qu'on ne mette pas de flèches sur les vecteurs en algèbre linéaire.
- Vérifier qu'un ensemble donné muni de deux opérations est un espace vectoriel est très fastidieux. Ainsi, on ne vous demandera jamais de prouver qu'un tel ensemble est un espace vectoriel mais plutôt qu'il s'agit d'un « sous-espace vectoriel » d'un espace vectoriel connu (voir une prochaine section). Des espaces vectoriels de référence seront également étudiés.

Attention

Dans un espace vectoriel, vous pouvez multiplier les vecteurs $x \in E$ par des **scalaires** $\lambda \in \mathbb{K}$, **mais pas** multiplier deux vecteurs $x, y \in E$ entre eux, en règle générale. [1]

1. Même si dans certains espaces vectoriels c'est possible, par exemple il est possible de multiplier deux polynômes ou deux matrices compatibles entre elles.

En combinant la stabilité par somme et multiplication par un scalaire, on obtient directement la propriété qui suit.

Proposition 1 | Stabilité d'un espace vectoriel par combinaison linéaire
Soit E un espace vectoriel. Pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{E}.$$

Preuve Puisque E est un espace vectoriel, pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, on a :
$$x_i \in \mathrm{E} \overset{\text{stabilité par multiplication ext.}}{\Longrightarrow} \lambda_i x_i \in \mathrm{E} \overset{\text{stabilité par somme}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \mathrm{E}.$$

PREMIERS EXEMPLES. Donnons sans plus tarder quelques exemples d'espaces vectoriels. La vérification complète des axiomes ne présente aucune difficulté et est laissée au lecteur, seuls quelques-uns seront précisés.

Exemple 2 (Cas de $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ – Uplets) Soient $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n), \mathrm{Y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :
$$\mathrm{X} + \mathrm{Y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \lambda \mathrm{X} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$
Le triplet $(\mathrm{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici le n-uplet nul $0_\mathrm{E} = (0, \dots, 0)$, l'élément opposé pour + de $\mathrm{X} = (x_1, \dots, x_n)$ est $-\mathrm{X} = (-x_1, \dots, -x_n)$ car $\mathrm{X} + (-\mathrm{X}) = 0_\mathrm{E}$.

Exemple 3 (Cas de $\mathrm{E} = \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $n, p \in \mathbb{N}^\star$ – Matrices) Soient $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}, \mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathbb{K}^n$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :
$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \left(a_{i,j} + b_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}, \quad \lambda \mathrm{A} = \left(\lambda a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}.$$
Le triplet $(\mathrm{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici la matrice nulle de format $n \times p$, c'est-à-dire $0_\mathrm{E} = (0)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$, l'élément opposé pour + de $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est $-\mathrm{A} = \left(-a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ car $\mathrm{A} + (-\mathrm{A}) = 0_\mathrm{E}$.

Exemple 4 (Cas de $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^\mathbb{N}$ – Suites) Soient $(u_n), (v_n) \in \mathrm{E}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :
$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n), \quad \lambda (u_n) = (\lambda u_n).$$
Le triplet $(\mathrm{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici la suite nulle $0_\mathrm{E} = (0)$, l'élément opposé pour + de (u_n) est $(-u_n)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + (-u_n) = 0$.

Exemple 5 (Cas des polynômes) Nous avons défini dans le Chapitre (ALG) 10 deux lois $+, .$ sur les polynômes. Le triplet $(\mathrm{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici le polynôme nul, l'élément opposé pour + de P est $-\mathrm{P}$ car $\mathrm{P} + (-\mathrm{P}) = 0$.

Exemple 6 (Cas de $\mathrm{E} = \mathbb{K}^\mathbb{K}$ – Fonctions) Soient $f, g \in \mathrm{E}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit :
$$f + g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x), \end{array} \right. \qquad \lambda f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ x & \longmapsto & \lambda . f(x). \end{array} \right.$$
Le triplet $(\mathrm{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément 0_E est ici la fonction nulle $0_\mathrm{E} : x \in \mathbb{K} \longmapsto 0$, l'élément opposé pour + de f est $-f : x \in \mathbb{K} \longmapsto -f(x)$ car pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f(x) + (-f(x)) = 0$.

RÈGLES DE CALCULS SECONDAIRES. De la définition d'un espace vectoriel découlent directement d'autres propriétés.

Proposition 2 | Autres règles de calcul
Soit E un espace vectoriel. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, on a :

- **[Développement d'une expression]** $\begin{cases} (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x \\ \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \end{cases}$
- **[Multiplication par zéro]** $0_\mathbb{K} x = 0_\mathrm{E}, \quad \lambda \cdot 0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}$,
- **[Multiplication par l'opposé]** $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$,
- **[Équation-produit]** $\lambda \cdot x = 0_\mathrm{E} \iff (\lambda = 0_\mathbb{K}$ <u>**ou**</u> $x = 0_\mathrm{E})$.

Preuve Démontrons l'équivalence pour l'équation-produit.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\lambda \cdot x = 0_\mathrm{E}$.

- **[1er cas]** si $\lambda \neq 0_\mathbb{K}$, alors on peut multiplier l'hypothèse par $\frac{1}{\lambda}$ à gauche :
$$\frac{1}{\lambda}(\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} 0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E} \Longrightarrow x = 0_\mathrm{E}.$$
- **[2ème cas]** $\lambda = 0_\mathbb{K}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Évident par définition d'un espace vectoriel : $0 \cdot x = 0_\mathrm{E}$ et d'autre part $\lambda \cdot 0_\mathrm{E} = 0_\mathrm{E}$.

Maintenant que le cadre est posé, regardons ce que l'on peut faire avec les vecteurs, *i.e.* les éléments d'un espace vectoriel. En combinant les deux lois définies plus haut (additive et scalaire-multiplicative), on arrive directement à la notion de combinaison linéaire présentée ci-après.

Définition 2 | Combinaison linéaire de vecteurs

Soit E un espace vectoriel.

- **[Famille finie]** Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéairev(sur* $\mathbb{K}$*)* des vecteurs x_1, ..., x_n tout vecteur $x \in E$ s'écrivant sous la forme :
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad \text{avec :} \quad \forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_k \in \mathbb{K}.$$
- **[Famille quelconque]** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est un ensemble quelconque. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ toute combinaison linéaire **finie** de ces vecteurs.

Notation

On note généralement :

- $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(x_1, \dots, x_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, ou plus simplement $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté,
- $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(x_i)_{i\in I}$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille quelconque de vecteurs, ou plus simplement $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Méthode (ALG) 11.1 **(Montrer l'appartenance « à un** Vect **»)** Pour montrer que $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$), tels que : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Exemple 7 **(Est-on combinaison linéaire de ?)**

1. **[Dans $\mathbb{R}^2$]** Est-ce que le vecteur $u = (3,3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $a = (1,1)$, $b = (1,0)$ et $c = (0,1)$? Y a-t-il unicité de l'écriture de u comme combinaison linéaire de a, b et c ?

2. **[Dans $\mathbb{R}^3$]** On note $u = (-1,2,2)$, $a = (1,1,0)$, $b = (-2,1,3)$ et $c = (1,0,-1)$. A-t-on $u \in \mathrm{Vect}(a,b,c)$?

3. **[Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$]** On note $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. A-t-on $M \in \mathrm{Vect}(N, O, P)$?

4. **[Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$]** On note $u : x \longmapsto \cos^2 x$, $f : x \longmapsto 1$, $g : x \longmapsto \cos(2x)$. Montrer que $u \in \mathrm{Vect}(f, g)$.

5. **[Dans $\mathbb{R}[X]$]** On note $P = 2X^3 + 2X^2 + 3X + 3$ et $Q = 2X^3 + X^2 + 2X$. Sont-ils des combinaisons linéaires des polynômes $P_1 = X^3 + 1$, $P_2 = X^2 + X + 1$ et $P_3 = X^3 + X$?

Attention **Identification non-systématique des coefficients d'une combinaison linéaire**

On retiendra du premier exemple qu'*a priori* on ne peut pas identifier de manière systématique les coefficients d'une combinaison linéaire :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right) \quad \not\Longrightarrow \quad \left(\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k\right).$$

Note | *Nous appellerons plus tard « famille libre » toute famille où c'est le cas.*

Exemple 8 Toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n est combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^n$, puisqu'il peut être écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où les a_k sont dans $\mathbb{K}$. On peut donc résumer cela en :

$$\mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n) = \mathbb{K}_n[X].$$

SOUS-ESPACES VECTORIELS. La structure de sous-espace vectoriel aura un intérêt pour justifier qu'un ensemble est un espace vectoriel. En effet, nous allons voir que si un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, alors ce sous-ensemble sera aussi un espace vectoriel (et il est plus facile de vérifier la propriété de sous-espace vectoriel que d'espace vectoriel).

Définition 3 | Sous-espace vectoriel

On appelle *sous-espace vectoriel* d'un espace vectoriel E tout ensemble F tel que :

- $F \subset E$,
- $0_E \in F$,
- F est *stable par combinaison linéaire :* $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \ \lambda x + \mu y \in F.$

Voici la proposition principale, qui nous permettra de vérifier facilement que des ensembles sont des espaces vectoriels.

Proposition 3 | Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \text{E est un espace vectoriel} \\ \textbf{(ii)} & \text{F est un sous-espace vectoriel de E} \end{cases} \implies \text{F est un espace vectoriel.}$$

Preuve Simple (mais longue!) vérification des axiomes de la Définition 1.

Note | *De manière plus rigoureuse, il faudrait même noter dans la proposition précédente* $(F, +|_{F\times F}, \cdot|_{\mathbb{K}\times F})$ *au lieu de* $(F, +, .)$*, puisque les ensembles de départ ne sont pas les mêmes pour les deux lois.*

Remarque 2 (Économie de rédaction) Comme déjà souligné, l'énorme intérêt de la notion de sous-espace vectoriel réside dans la proposition précédente : une économie dans la rédaction. En effet, il nous suffira de vérifier qu'une structure est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel du cours (fait que vous avez le droit d'utiliser sans argument supplémentaire, seulement 3 axiomes à vérifier, beaucoup plus rapide que la Définition 1), pour justifier la structure d'espace vectoriel.

Avant de regarder quelques exemples, commençons par montrer une propriété très utile dans la pratique : « les Vect » sont des sous-espaces vectoriels.

Proposition 4 | Un « Vect » est un espace vectoriel.

Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, où I est un ensemble. Alors :

- $\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de E. Plus précisément, c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $(x_i)_{i\in I}$.
- De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :
$$\mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} \text{ est un sous-espace vectoriel de F} \iff \forall i \in I, \quad x_i \in F.$$
En particulier, $\quad \mathrm{Vect}\,(x_i)_{i\in I} \subset F \iff \forall i \in I, \quad x_i \in F.$

Preuve Pour alléger les notations, faisons la preuve dans le cas d'une famille de deux vecteurs. Soient $x_1, x_2 \in E$, montrons que $V = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x_1, x_2.

- ⋄ Montrons que V est un sous-espace vectoriel de E contenant x_1, x_2.

  ⋄ Montrons maintenant que V est le plus petit sous-espace vectoriel vérifiant cette propriété, *i.e.* soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $x_1, x_2 \in F$ alors $\mathrm{Vect}\,(x_1, x_2) \subset F$, puisque toute combinaison linéaire de x_1, x_2 est encore dans F étant donné que F est un espace vectoriel.
- Le dernier point se montre sans difficulté par double implication.

  $\boxed{\implies}$ Évident puisque pour tout $i \in [\![1\,,\,2]\!]$, $x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2) \subset F$ donc $x_i \in F$.

  $\boxed{\impliedby}$ Immédiat car F est un sous-espace vectoriel de E donc stable par combinaison linéaire. Ainsi, si $x_1, x_2 \in F$, $\mathrm{Vect}(x_1, x_2) \subset F$.

Méthode (ALG) 11.2 (Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel) Deux options sont donc possibles (au choix).

1. EST UN SOUS-ESPACE VECTORIEL — Justifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{K}^n$, de polynômes, de fonctions, de suites …) **ou**
2. EST UN Vect — Montrer que l'ensemble s'écrit comme Vect d'une famille.

Méthode (ALG) 11.3 (Montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel) Deux options sont possibles (au choix).

1. MISE EN DÉFAUT DU NEUTRE — c'est-à-dire qu'il ne contient pas le neutre d'un espace vectoriel plus gros.
2. MSE EN DÉFAUT DE LA STABILITÉ — c'est-à-dire on montre qu'il n'est pas stable par combinaison linéaire. Par exemple :
   - deux vecteurs dont la somme n'est pas dans l'espace,
   - un vecteur dont l'opposé n'est pas dans l'espace…

Exemple 9 (dans $\mathbb{K}^n$ — géométrie)

1. Un espace vectoriel E admet toujours comme sous-espaces vectoriels $\{0_E\}$ et E lui-même. On les appelle parfois les *sous-espaces vectoriels triviaux*.
2. L'ensemble $F = \{\lambda(2,3) = (2\lambda, 3\lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(2,3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $(2,3)$. Dessinons cet ensemble.
3. L'ensemble $F = \{\lambda(1,2,0) = (\lambda, 2\lambda, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $(1,2,0)$.
   - **[1ère méthode : avec la définition]**
   - **[2ème méthode : c'est un** Vect**]** C'est cette méthode qu'il faut privilégier. *(Puisque dans ce cas, l'ensemble est déjà donné sous forme de* Vect *!)*
4. L'ensemble $F = \{\lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1) = (\lambda+\mu, 2\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car $F = \mathrm{Vect}((1,2,0),(1,0,1))$.
5. L'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid x = 2z\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$, montrons-le avec la définition.

6. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{K}^4 \,\middle|\, x+y+z+t=0, x-y=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$. Montrons qu'il s'agit d'un Vect.

7. Justifier que $\mathrm{F} = \left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, y = 2x+1\right\}$ n'est pas un espace vectoriel.

8. Justifier que $\mathrm{F} = \left\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 \,\middle|\, y = x^2\right\}$ n'est pas un espace vectoriel.

Exemple 10 **(dans des espaces de matrices)** L'ensemble ci-dessous est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$?

$$\mathrm{F} = \left\{\begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Exemple 11 **(Systèmes homogènes)** Soit le système linéaire homogène à p inconnues et n équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{A}_{1,1}\mathbf{x_1} + \mathrm{A}_{1,2}\mathbf{x_2} + \cdots + \mathrm{A}_{1,p}\mathbf{x_p} & = 0 \\ \mathrm{A}_{2,1}\mathbf{x_1} + \mathrm{A}_{2,2}\mathbf{x_2} + \cdots + \mathrm{A}_{2,p}\mathbf{x_p} & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ \mathrm{A}_{n,1}\mathbf{x_1} + \mathrm{A}_{n,2}\mathbf{x_2} + \cdots + \mathrm{A}_{n,p}\mathbf{x_p} & = 0 \end{array}\right. \tag{S}$$

où $\mathrm{A}_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!]$, écrit aussi matriciellement sous la forme $\mathrm{AX} = 0_{n,1}$ avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ selon le point de vue).

Exemple 12 (dans des espaces de fonctions)

1. Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. L'ensemble $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ des fonctions $\mathscr{C}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$.
   - *l'inclusion $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{I}}$ est évidente car une fonction $\mathscr{C}^n$ est en particulier une fonction,*
   - *la fonction nulle est de classe $\mathscr{C}^n$,*
   - *une combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^n$ est $\mathscr{C}^n$ d'après les propriétés du Chapitre (AN) 6.*
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est un sev de $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n \leqslant p$, $\mathscr{C}^p(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est un sev de $\mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3f(x)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   Note | *On reconnaît ici l'ensemble des fonctions solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.*

   - **[1ère méthode : avec la définition]**

   - **[2ème méthode : c'est un** Vect**]**

4. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R}) \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R}^{+\star},\ f'(x) = 3f(x)^2\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

   Note | *La présence d'un carré vous guide sur la réponse : non.*

   Indication : Constatons que la fonction $g : x \longmapsto -\frac{1}{3x}$ est un élément de F

5. Plus généralement, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle **linéaire homogène** *(homogène, pour que la fonction nulle soit bien une solution)* sur un intervalle I (du premier ou du second ordre) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$.
6. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{F} = \mathscr{P}$ des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont des sous-espaces vectoriels de E. *Nous faisons par exemple la preuve pour les fonctions paires.*

7. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathrm{E} \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 13 **(dans des espaces de suites)**

1. Notons F l'ensemble des suites réelles convergentes, alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. L'ensemble $\mathrm{F} = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- **[1ère méthode : avec la définition]**

- **[2ème méthode : c'est un** Vect**]**

3. Plus généralement, l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence **linéaire** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exemple 14 **(dans des espaces de polynômes)** Soit $n \geqslant 0$.

1. Alors $\mathbb{K}_n[X]$ — l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n — est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. *En effet, par définition d'un polynôme, $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$. L'ensemble s'écrit comme un* Vect*, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.* *En effet, par définition d'un polynôme, $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$. L'ensemble s'écrit comme un* Vect*, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.*
2. Soit $n \geqslant 1$. En revanche $\mathbb{K}_{=n}[X]$ — l'ensemble des polynômes de degré n — n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Pourquoi ? *$\mathbb{K}_{=n}[X]$ ne contient pas le polynôme nul, qui est de degré $-\infty$.* *$\mathbb{K}_{=n}[X]$ ne contient pas le polynôme nul, qui est de degré $-\infty$.*
3. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \leqslant p$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_p[X]$. *Ici, on demande de vérifier que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel non pas de $\mathbb{K}[X]$ mais de $\mathbb{K}_p[X]$. Il faut donc appliquer le dernier point de la Proposition 4. On a $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$, et comme $n \leqslant p$ on a bien :*
$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad X^i \in \mathbb{K}_p[X].$$
Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_p[X]$.
Ici, on demande de vérifier que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel non pas de $\mathbb{K}[X]$ mais de $\mathbb{K}_p[X]$. Il faut donc appliquer le dernier point de la Proposition 4. On a $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$, et comme $n \leqslant p$ on a bien :
$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad X^i \in \mathbb{K}_p[X].$$
Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_p[X]$.

Méthode (ALG) 11.4 **(Inclusion de Vect)** Écrivons la méthode par exemple pour des familles de deux vecteurs. Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ deux familles de vecteurs. Alors,

établir que $\mathrm{Vect}(x_1, x_2) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ revient à *(d'après la Proposition 4)* :

$\boxed{\subset}$ montrer que $\mathrm{Vect}(x_1, x_2) \subset \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, c'est-à-dire :
$$\forall i \in [\![1, 2]\!], \quad x_i \in \mathrm{Vect}(y_1, y_2),$$
En effet, puisque $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ est un espace vectoriel, s'il contient x_1, x_2, alors il contient toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

$\boxed{\supset}$ **et** montrer que $\mathrm{Vect}(y_1, y_2) \subset \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$, c'est-à-dire :
$$\forall i \in [\![1, 2]\!], \quad y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, x_2).$$
En effet, puisque $\mathrm{Vect}(x_1, x_2)$ est un espace vectoriel, s'il contient y_1, y_2, alors il contient toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

On montrera plus tard que l'on peut se passer d'une inclusion en montrant l'égalité des « dimensions ».

Exemple 15 **(Inclusion de Vect (1))** Soient E un espace vectoriel et $(x, y) \in E^2$. Montrer que : $\mathrm{Vect}(x, y) = \mathrm{Vect}(x + y, x - y)$.

$\boxed{\supset}$

$\boxed{\subset}$

Exemple 16 **(Inclusion de Vect (2))** On note $F = \mathrm{Vect}((1, 0, -1), (1, 2, 3))$ et $G = \mathrm{Vect}((1, -2, -5), (2, 2, 2))$.

- A-t-on $F \subset G$?
- A-t-on $G \subset F$?

Passons à quelques propriétés du Vect que nous utiliserons un peu plus tard. Elles sont admises, la preuve ne présentant pas spécialement de difficulté en raisonnant par double-inclusion.

Proposition 5 | Propriétés du Vect

Soit $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.

- Si $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$: $\quad \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n+1}) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, et $i \in [\![1\,,\,n]\!]$:
  $$\mathrm{Vect}(x_1,\dots,\lambda x_i,\dots x_n) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_i,\dots x_n).$$
- Pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$ et $x \in \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$:
  $$\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_i+x,\dots x_n) = \mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_i,\dots x_n).$$

Cette proposition peut être résumée ainsi.

- **On ne change pas un Vect en ajoutant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.**
- **On ne change pas un Vect en multipliant l'un des vecteurs par un scalaire non nul.**

Proposition 6 | Réunion & Intersection

Soit E un espace vectoriel.

- Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E.
- Une réunion de sous-espaces vectoriels de E **n'est en général pas** un sous-espace vectoriel de E.

Preuve

1. Considérons, pour simplifier la rédaction, deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ de E. Montrons que $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Donnons un contre-exemple, d'abord sour forme de dessin.

Cas particulier : modes d'écriture des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. De façon générale, il existe principalement deux types d'écriture des sous-espaces de $\mathbb{K}^n$, que nous avons déjà rencontrées dans des précédents exemples. Vous devez savoir passer de l'une à l'autre. Par exemple, la droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ dirigée par $(1,1)$ peut s'écrire :

- comme un Vect : c'est $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(1,1) = \{(\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. On parle aussi de *forme paramétrique.*
- Ou à l'aide d'une ou plusieurs équations, ici $\mathrm{F} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x\right\}$. On parle de *forme cartésienne*, et $y = x$ s'appelle *l'équation cartésienne* de F.

Note | *La terminologie « paramétrique » / « cartésienne » provient de la géométrie, et a normalement déjà été rencontrée au lycée.*

Nous allons avoir comment faire pour, de manière générale, passer d'une forme à une autre.

Méthode (ALG) 11.5 (Lien entre paramétrisation & équations cartésiennes) Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de E.

- **Paramétrisation → Équations cartésiennes :**
  - Écrire que $(x,y,z,\dots) \in \mathrm{F} \iff \exists \lambda,\mu,\nu\dots$ tel que $(x,y,z,\dots) = \lambda\cdots + \mu\dots$.
  - C'est un système en $\lambda,\mu,\nu\dots$: le résoudre en ces inconnues.
  - Si le système a toujours des solutions peu importe $x,y,z\dots$ alors $\mathrm{F} = \mathbb{K}^n$. Sinon, il y a une ou plusieurs conditions compatibilités : ces équa-

tions donnent alors la forme cartésienne.

- **Équations cartésiennes → Paramétrisation :**
  - Écrire le système linéaire formé de toutes les équations cartésiennes.
  - Le résoudre (en $x, y, z, \ldots$).
  - L'ensemble des solutions est alors la forme paramétique de F.

Exemple 17 Reprenons les deux espaces vectoriels définis plus haut, qui sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^4$.

1. $F = \mathrm{Vect}(X, Y) \subset \mathbb{R}^4$ où $X = (1, 2, 1, 1)$ et $Y = (0, 1, 1, 1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.

2. $G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \,\middle|\, x + y + z + t = 0,\ x = y\right\} \subset \mathbb{R}^4$. Déterminer une forme paramétrique de G, *i.e.* une écriture en Vect.

3. Déterminer $G \cap H$ où $H = \mathrm{Vect}((1, 2, 0, -1))$.

2 FAMILLES DE VECTEURS

Notation **Famille/Ensemble ?**

Soit E un ensemble et $x_1, ..., x_n \in E$ avec $n \in \mathbb{N}$. Rappelons les deux notations suivantes :

1. $(x_1, \ldots, x_n)$ désigne le n-uplet $x_1, \ldots, x_n$ donc *a priori*
$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \neq (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n).$$
On parle de *famille*, l'ordre des éléments a une importance.

2. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ désigne l'ensemble formé des éléments $x_1, \ldots, x_n$ donc *a priori*
$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} = \{x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n\}.$$
On parle d'*ensemble*, et dans ce cas l'ordre des éléments n'a aucune importance.

L'objectif de cette section est cette fois-ci d'abstraire la notion de repère du plan *i.e.* la faculté de *caractériser*, et de manière unique, les vecteurs par des coordonnées. Sauf que maintenant nos vecteurs peuvent être des polynômes, des fonctions, des suites *etc*.... Le vocabulaire général pour les espaces vectoriels est plutôt le suivant :

- les repères seront appelés des *bases*,
- et le nombre d'éléments d'un repère sera appelé la *dimension*. Nous allons donc également devoir justifier que toutes les bases ont même cardinal afin que la définition soit bien posée.

2.1 Famille libre

On s'intéresse aux relations linéaires qu'il peut exister entre des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ d'un espace vectoriel E, c'est-à-dire à l'existence de scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifiant :

$$\boxed{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E}. \qquad (\star)$$

Évidemment, si l'on choisit $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, la condition $(\star)$ est vérifiée. La question sera de savoir s'il y en a d'autres :

- si l'on peut trouver des valeurs de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non toutes nulles vérifiant $(\star)$, on obtient une relation de liaison entre les vecteurs qui permet d'en exprimer un comme combinaison linéaire des autres (on dira que la famille est liée).
- Sinon, s'il n'existe aucune relation non triviale entre les vecteurs de cette famille, on a ce que l'on appelle une *famille libre*.

Cas de deux vecteurs. Cette notion, pour deux vecteurs, est reliée à celle de colinéarité que vous connaissez bien en géométrie, qui s'énonce sans problème pour un espace vectoriel quelconque.

Définition/Proposition 1 | Colinéarité (cas $n = 2$)

Deux vecteurs u, v d'un espace vectoriel E sont dits *colinéaires* si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad u = \lambda v \quad \underline{\textbf{ou}} \quad \exists \mu \in \mathbb{R}, \quad v = \mu u$$
$$\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda u + \mu v = 0_E \quad \underline{\textbf{et}} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Preuve Montrons l'équivalence indiquée dans la définition.

$\boxed{\Longrightarrow}$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Exemple 18

- Justifier que $(1, 2, 3)$ et $(1, 2, 0)$ ne sont pas colinéaires dans $\mathbb{K}^3$.
- Notons $u = (2, 2)$ et $v = (1, 1)$.
  - u, v sont colinéaires car $u = 2v$.
  - De manière équivalente, puisque $1 \cdot u + (-2) \cdot v = (0, 0)$, et on a donc trouvé des valeurs $(\lambda = 1, \mu = -2)$ non toutes nulles telles que $\lambda u + \mu v = (0, 0)$.

Maintenant, pour u, v deux vecteurs, que signifie que u, v ne sont pas colinéaires? Écrivons la négation ci-dessous :

$$\underline{\textbf{non}} \left(\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda u + \mu v = 0_E \quad \underline{\textbf{et}} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\right)$$
$$\iff \quad \dots$$

Cela nous mène tout droit à la définition ci-dessous.

Définition 4 | Liberté (cas $n = 2$)

Soit $(u, v) \in E^2$ deux vecteurs d'un espace vectoriel E.

- On dit que (u, v) est une *famille libre* de vecteurs si :
$$u, v \quad \text{sont non colinéaires}$$
$$\iff \quad \left[\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda u + \mu v = 0_E \implies \lambda = \mu = 0\right].$$
- Dans le cas contraire, la famille (u, v) est dite *liée* ; c'est-à-dire si u, v sont colinéaires.

Exemple 19

- La famille $((1, 2, 3), (1, 2, 0))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (déjà vu).

- En revanche, la famille $((2,2),(1,1))$ ne l'est pas dans $\mathbb{R}^2$.

CAS GÉNÉRAL. La définition précédente s'énonce ainsi dans le cas général.

Définition 5 | Famille libre/liée

- **[Famille finie]** Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que $(x_1,\dots,x_n)$ est une *famille libre* de vecteurs de E, ou que les vecteurs x_1, ..., x_n sont *linéairement indépendants*, si :
$$\forall(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n,\quad \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E \implies \forall k\in[\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k = 0\right].$$
Une famille est dite *liée* *(voir la remarque qui suit pour une justification)* si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si :
$$\exists(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n\smallsetminus\{0_{\mathbb{K}^n}\},\quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E.$$
- **[Famille quelconque]** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est *libre* dans E si toute sous-famille **finie** est libre. Si ce n'est pas le cas, on dit que la famille est *liée*.

Remarque 3 (Négation de la liberté) Une famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée si, et seulement si, :
$$\underline{\text{non}}\left(\forall(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n,\quad \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E \implies \forall k\in[\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k = 0\right]\right)$$
$$\iff \exists(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n,\quad \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E \quad \underline{\text{et}} \quad \exists k\in[\![1\,,\,n]\!],\quad \lambda_k \neq 0\right].$$

Note | *On rappelle à toute fin utile que* $\underline{\text{non}}\,(P \implies Q) \iff (P\ \underline{\text{et}}\ \underline{\text{non}}\ Q)$, *et que la négation d'un « $\forall$ » est un « $\exists$ »*

Ceci peut s'écrire aussi :
$$\exists(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n\smallsetminus\{0_{\mathbb{K}^n}\},\quad \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E.$$
Cela signifie donc qu'il existe une combinaison linéaire nulle (des vecteurs $x_1,\dots,x_n$) dont tous les coefficients ne sont pas nuls.

Méthode (ALG) 11.6 (Vérifier la liberté/liaison d'une famille) Pour montrer qu'une famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre ou non , on écrit :
$$\text{« Soit } (\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{K}^n \text{ tel que } \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0_E.\text{ »}\qquad (\star)$$
Ensuite,
- Si $(\star)$ ne possède que la solution $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (0,\dots,0)$, alors la famille est libre.
- S'existe une solution $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$, alors la famille est liée.

En général, l'étude de $(\star)$ passe par les arguments ci-après.
- Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{K}_n[X]$: on arrive à la résolution d'un système linéaire.
- Dans $\mathbb{R}^I$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on prend des valeurs particulières pour les variables, ou on fait de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*).

RAPPEL DE LA SIGNIFICATION DES ÉGALITÉS USUELLES

Égalité	Signification
Pour des uplets : $(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n)$	$\forall i\in\{1,\dots,n\},\quad x_i = y_i$
Pour des suites : $(u_n) = (v_n)$	$\forall n,\quad u_n = v_n$
Pour des polynômes : $\sum_{k=1}^n a_k X^k = \sum_{k=1}^n b_k X^k$	$\forall k\in\{1,\dots,n\},\quad a_k = b_k$
Pour des fonctions : $f = g$	$\forall x,\quad f(x) = g(x)$

Exemple 20

1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants $x_1 = (1,0,2)$, $x_2 = (0,1,1)$ et $x_3 = (1,0,1)$. Montrer que (x_1,x_2,x_3) est libre.

2. On note $x_4 = (3,-1,3)$. Montrer que (x_1,x_2,x_3,x_4) est liée et donner une relation linéaire entre les vecteurs.

3. On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants $P_1 = X^2+X+1, P_2 = X^2-1, P_3 = X$. La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ?

4. Montrons que $(\cos, \sin)$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5. Montrons que $(1, (2^n)_n, (3^n)_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- **[1ère méthode : en évaluant en plusieurs n]**

- **[2ème méthode : avec des limites]**

Note *L'exemple précédent se généralise sans difficulté à toute famille de suites géométriques de raisons deux à deux distinctes.*

Dans certains cas, il n'est pas utile de faire un calcul pour décider si une famille est libre ou non :

Proposition 7 | Cas particuliers de familles libres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Si un vecteur de la famille est combinaison linéaire des autres, alors la famille est liée.
- Soit $e \in \mathrm{E}$. Alors : (e) est libre $\iff e \neq 0_{\mathrm{E}}$.
- Deux familles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ dont $\mathscr{G}$ est obtenue par permutation des vecteurs de $\mathscr{F}$ ont même nature (libre ou liée).

Preuve

- **[Idées pour trois vecteurs]** Notons (x_1, x_2, x_3) une famille de trois vecteurs de E, et vérifions les deux premiers points dans ce cas.
  - Si $x_1 = 0_{\mathrm{E}}$, alors la famille est liée.
  - Si $x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, alors (x_1, x_2, x_3) est liée.
- **[Cas général]** Notons $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E.
  - Supposons sans restriction que $x_1 = 0_{\mathrm{E}}$. Alors on a : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}}$ en prenant : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}\right) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$. La famille est donc liée.
  - Supposons sans restriction que $x_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k$ est donc combinaison linéaire de $x_2, \dots, x_n$, avec $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors on a :
  $$x_1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k = 0_{\mathrm{E}} \iff \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k = 0_{\mathrm{E}},$$
  en posant $\mu_1 = 1, \mu_k = -\lambda_k$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$. Comme $\mu_1 \neq 0$, la famille est liée.
  - $\boxed{\Longrightarrow}$ Déjà vu par contraposée : si $e = 0_{\mathrm{E}}$, alors (e) est liée puisqu'elle contient le vecteur nul.
  $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $e \neq 0_{\mathrm{E}}$, et soit $\lambda_1 \in \mathrm{K}$ tel que $\lambda_1 e = 0_{\mathrm{E}}$. Comme $e \neq 0_{\mathrm{E}}$, on a déjà vu que cela entrainait $\lambda_1 = 0$. Donc la famille (e) est libre.
  - Évident.

Exemple 21 Soient E un espace vectoriel et $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Alors :

- La famille $\mathscr{F} = (x, 0_{\mathrm{E}}, y)$ est liée.
- La famille $\mathscr{F} = \left(x, y, \frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$ est liée.
- Si (x, y) est libre, alors (y, x) est libre aussi.

Proposition 8 | Liberté et identification dans les combinaisons linéaires

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E. Alors :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est libre} \iff \left(\forall (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}, \forall (\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k \Longrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k\right]\right).$$

En d'autres termes, une famille est libre si, et seulement si, on peut identifier coefficient par coefficient toute combinaison linéaire de ces vecteurs.

Remarque 4 (Liberté et application) Ainsi, une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si, $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{array} \right.$ est injective.

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Choisir simplement $(\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} = (0)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. On retrouve alors la définition de famille libre.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre. Soient $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}, (\mu_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telles que :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k, \quad \text{alors :} \quad \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) x_k = 0.$$

Or, la famille est supposée libre, d'où l'on tire : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k - \mu_k = 0$.

Attention Non-identification pour les familles liées

Cette propriété n'est plus valable si la famille est liée. Posons $x_1 = (1, -2)$ et $x_2 = (-2, 4)$. On a par exemple :

$$2 \cdot x_1 + x_2 = -18 \cdot x_1 - 9 \cdot x_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

donc le vecteur $0_{\mathbb{R}^2}$ s'écrit de différente façons comme combinaison linéaire des vecteurs x_1 et x_2. On a également :

$$x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 3 \cdot x_1 + x_2 = \dots \quad \text{bref, rien ne va!}$$

Cadre

Dans la suite, nous travaillerons uniquement avec des familles finies, même si l'ensemble des résultats s'adaptent aux familles quelconques en utilisant des sous-familles finies.

FAMILLE ÉCHELONNÉE DE POLYNÔMES. Passons à un exemple fondamental de famille libre de polynômes, celles où les degrés ont une forme particulière.

Définition 6 | Famille échelonnée de polynômes
Une famille de polynômes est une *famille échelonnée* si les degrés des polynômes sont deux à deux distincts.

Exemple 22 Les familles ci-dessous sont-elles échelonnées ?

1. $(X^2, X-1, 10)$,

2. $(X, X(X-1)(X-2), (X+1)^4 - X^4)$.

On en vient maintenant à la propriété principale de ces familles.

Théorème 1 | Familles échelonnées de polynômes
Toute famille finie de polynômes **non nuls** de degrés échelonnés de $\mathbb{K}[X]$ est libre.

Attention
La réciproque est fausse : il existe des familles libres non échelonnées de polynômes. Pour une contre-exemple, consulter l'Exemple 23 ($2^{\text{ème}}$ exemple).

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur le nombre de polynômes**)*
On montre par récurrence la propriété :

$\mathscr{P}(n)$ « toute famille échelonnée de polynômes non nuls de cardinal $n+1$ est libre ».

Initialisation. Montrons $\mathscr{P}(0)$. Soit (P_0) une famille d'un polynôme, avec $P_0 \neq 0$. La famille (P_0) est bien entendu échelonnée, et libre car $P_0 \neq 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Et soit $(P_0, \dots, P_{n+1})$ une famille échelonnée de $n+2$ polynômes non nuls. Quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que : $\deg P_0 < \dots < \deg P_n$. Montrons que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Exemple 23 Les familles ci-dessous sont-elles échelonnées ?

1. La famille $(X^2, X-1, 10)$ est échelonnée, formée de polynômes non nuls, donc est libre.

2. la famille $(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2))$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Est-elle échelonnée ?

2.2 Familles génératrices

Définition 7 | Famille génératrice
Soit F un sous-espace vectoriel de E, où E est un espace vectoriel.

- **[Famille finie]** Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs. On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une *famille génératrice* de F, ou que les vecteurs x_1, ..., x_n *engendrent* F, si : $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Autrement dit, si :
$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad \exists (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$
c'est-à-dire si les éléments de F sont exactement les combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$.
Note | *Cela implique notamment que $x_i \in \mathrm{F}$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$.*
- **[Famille quelconque]** Soit $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de vecteurs de F. On dit que $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est *génératrice* dans F s'il existe une sous-famille **finie** génératrice de F.

Remarque 5
- Contrairement à la liberté, le caractère générateur ne dépend pas que de la famille de vecteurs mais aussi de l'espace considéré : une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F_1 ne le sera pas forcément d'un autre sous-espace vectoriel F_2.
- Par définition, une famille de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est toujours génératrice de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Remarque 6 (Généricité et application) Ainsi, une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice si, et seulement si, $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{array} \right.$ est surjective.

Définition 8 | Dimension finie
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. On dit que F est de *dimension finie* s'il existe une famille génératrice finie de F.

Notation
Lorsqu'un espace vectoriel F est de dimension finie, on note symboliquement :
$$\dim \mathrm{F} < \infty.$$

Attention
Nous n'avons pas encore défini ce qu'est la « dimension » d'un espace de dimension finie, seulement la propriété de « dimension finie ». Mais nous verrons plus tard qu'un espace vectoriel de dimension finie possède une « dimension ».

Méthode (ALG) 11.7 (Vérifier la généricité ou non d'une famille) Pour montrer qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de F est une famille génératrice de F, on doit montrer l'égalité d'**ensembles** éventuelle :
$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n).$$
On procède donc généralement par double-inclusion, dont l'une est souvent évidente.
$\boxed{\subset}$ « Soit $x \in \mathrm{F}$. Alors cherchons λ_1, ..., λ_n tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. [...] On a donc déterminé des λ_i qui conviennent, donc $\mathrm{F} \subset \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. ». En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :
- Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: on résout un système linéaire.
- Dans $\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on fait souvent de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*). On peut aussi se ramener à un système en évaluant en plusieurs x, n *etc.*.

Dans le cas où la famille n'est pas génératrice, alors cette inclusion sera fausse : on trouvera que, pour certains $x \in \mathrm{F}$, il n'existe pas de tels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
$\boxed{\supset}$ En général, cette inclusion est évidente. Si on a besoin de la justifier, on expliquera que $x_i \in [\![1\,,\,n]\!]$ pour tout i, puis comme F est un sous-espace vectoriel, on déduit : $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathrm{F}$.

Exemple 24
1. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (1,2)$ et $x_3 = (1,3)$. La famille (x_1, x_2, x_3) est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$?

2. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donnons une famille génératrice de :

$$\mathrm{F} = \{y \in \mathrm{E} \mid y' = 2y\}.$$

3. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donnons une famille génératrice de :

$$\mathrm{F} = \{(u_n) \in \mathrm{E} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 5u_n\}.$$

2.3 Base

Nous arrivons à une notion qui généralise les repères que vous connaissez depuis longtemps en géométrie.

Définition 9 | Base
Soit E un espace vectoriel. On appelle *base* de E toute famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice de E.

Remarque 7 Un espace vectoriel réduit au vecteur nul n'a pas de base (puisque la seule famille de cet espace vectoriel est alors (0_{E}), qui ne peut être libre).

Rappelons que :

- le caractère générateur garantit l'existence d'une combinaison linéaire,
- le caractère libre garantit l'unicité des coefficients.

Une base est donc une famille dans laquelle tout vecteur de l'espace vectoriel se décompose en une combinaison linéaire de cette famille, et ce de manière unique.

Définition/Proposition 2 | Coordonnées d'un vecteur dans une base

- Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de E}$$
$$\iff \forall x \in \mathrm{E}, \quad \exists!\,(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

  Autrement dit, tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

- Si $x \in \mathrm{E}$, notons $(\lambda_k(x))_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que : $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) x_k$. Alors, pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, le scalaire $\lambda_k(x)$ s'appelle **la** k-ième coordonnée de x dans la base $(x_1, \dots, x_n)$.

Preuve Il y a quelque chose à montrer dans le premier point uniquement. On procède par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\mathscr{B} = (x_1, \dots, x_n)$ est une base de E, donc libre et génératrice. Soit $x \in$ E. Alors puisque $\mathscr{B}$ est génératrice,

$$\exists (\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

On souhaite montrer l'unicité, soit donc $(\mu_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ de sorte que : $x = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k$.
Alors :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \underset{\mathscr{B}\text{ libre}}{\Longrightarrow} \forall k \in [\![1\,,\,n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Le caractère générateur est alors immédiat.

En résumé,

LIBRE	$=$	UNICITÉ des coefficients d'une combinaison linéaire
GÉNÉRATRICE	$=$	EXISTENCE des coefficients d'une combinaison linéaire
BASE	$=$	EXISTENCE **et** UNICITÉ des coefficients d'une combinaison linéaire (→ notion de « coordonnées »).

En Mathématiques, l'adjectif *canonique* signifie parfois « le plus simple ». On présente donc quelques exemples de bases fondamentales dans la prochaine proposition, on vérifie sans aucune difficulté que ce sont bien des bases.

Définition/Proposition 3 | Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[x]$

Soient $n, p \geqslant 1$ deux entiers.

- **[Dans $\mathbb{K}^n$]** Notons

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

  La famille $(e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}^n$.
- **[Dans $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$]** Notons pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, et $\ell \in [\![1\,,\,p]\!]$, $E_{k,\ell}$ la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constituée de zéros partout sauf pour le coefficient en ligne k et colonne ℓ, qui vaut un. La famille $(E_{k,\ell})_{(k,\ell)\in[\![1\,,\,n]\!]\times[\![1\,,\,p]\!]}$ est une base de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée *base canonique de* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow j & \end{array}$$

- **[Dans $\mathbb{K}_n[X]$]** La famille $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée *base canonique de* $\mathbb{K}_n[X]$.

Notation

Σ Dans l'un des espaces vectoriels précédents, on notera $\mathscr{B}^{\mathrm{can}}$ l'une des bases canoniques précédentes.

Preuve Vérifions que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ où :

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

est bien une base de $\mathbb{K}^n$.

- **[Génératrice]**
- **[Liberté]**

Exemple 25 (Canoniques)

- **[Uplets]** Dans $\mathbb{R}^3$, la base canonique est $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
- **[Matrices]** Dans $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, la base canonique est :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  On constate qu'il y a six matrices élémentaires, elles forment une base de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
- **[Polynômes]** Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la base canonique est $(1, X, X^2)$.

Remarque 8

- Pour le moment, montrer qu'une famille est une base consiste en la vérification de la liberté et du caractère générateur (cela fait donc appel à des méthodes déjà connues). On peut également vérifier la Définition/Proposition 2.
- Plus tard, une fois la notion de dimension étudiée, nous verrons que dans certains cas on peu se passer de l'une des deux propriétés.

Exemple 26

1. Montrer que la famille $((1, 1), (1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. *(Ici, on utilise la Définition/Proposition 2, puisque l'écriture de tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ en fonction de cette famille semble possible (système))*

-

- Quelles sont les coordonnées de $u = (3, 4)$ dans cette base ?

2. Montrer que la famille $\left(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. *(Ici, on utilise la Définition/Proposition 2, puisque l'écriture de tout vecteur de $\mathbb{R}_2[X]$ en fonction de cette famille semble possible (système))*

-

- Quelles sont les coordonnées de $P = X^2 - 1$ dans cette base ?

3. On note $E = \left\{y \in \mathscr{C}^2 \mid y'' - 3y' + 2y = 0\right\}$. Déterminer une base de E. *(Ici, la seule possibilité pour avancer est de commencer à résoudre l'E.D. : on va donc trouver une famille génératrice puis prouver la liberté)*

4. On note $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n\}$. Déterminer une base de E. *(Ici, la seule possibilité pour avancer est de commencer à résoudre l'S.R.L.2 : on va donc trouver une famille génératrice puis prouver la liberté)*

2.4 Extraction & Complétion de familles

Il est possible de construire des bases à l'aide de familles libres (en complétant), et de familles génératrices (en extrayant). Nous allons établir deux faits principaux :

1. toute famille libre peut être complétée en une base (de-même, toute famille génératrice peut être diminuée en une base),
2. toutes les bases ont même cardinal ; cet entier commun, nous allons l'appeler la *dimension*.

Proposition 9 | Augmentation d'une famille libre finie

- Soit E un espace vectoriel.
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \mathscr{L} = (\ell_1, \dots, \ell_n) \text{ libre dans E} \\ \textbf{(ii)} & \ell_{n+1} \notin \operatorname{Vect} \mathscr{L} \end{cases} \implies \mathscr{L}' = (\ell_1, \dots, \ell_n, \ell_{n+1}) \text{ libre.}$$
- On peut donc compléter une famille libre en une famille libre, en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des précédents.

Preuve Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que :
$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \ell_k = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell_k + \lambda_{n+1} \ell_{n+1} = 0.$$
Supposons par l'absurde que $\lambda_{n+1} \neq 0$. Alors $\ell_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{n+1}}\right) \ell_k \in \operatorname{Vect}(\mathscr{L})$ — **Contradiction**. Donc finalement $\lambda_{n+1} = 0$ et l'on tire : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ell_k = 0$, mais $(\ell_0, \dots, \ell_n)$ est supposée libre, donc : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = 0$. On a bien montré au total que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$ d'où la liberté de la famille $\mathscr{L}'$.

Exemple 27 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $\mathscr{L} = (\ell_1, \ell_2) = ((2,1,0),(1,-1,0))$. Appliquer le résultat avec $\ell_3 = (2,3,1)$.

Proposition 10 | Diminution d'une famille génératrice finie

- Soit E un espace vectoriel.
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & \mathscr{G} = (g_1, \dots, g_{n+1}) \text{ génératrice de E} \\ \textbf{(ii)} & g_{n+1} \in \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_n) \end{cases} \implies \mathscr{G}' = (g_1, \dots, g_n) \text{ génératrice.}$$
On a aussi : $\operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_{n+1}) = \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_n)$.
- On peut donc diminuer une famille génératrice en une famille encore génératrice en éliminant des vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres.

Preuve Nous avons déjà vu que si $g_{n+1} \in \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_n)$ alors : $\operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_n) = \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_{n+1})$. Donc si $E = \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_{n+1})$, alors $E = \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_n)$ et la famille $(g_1, \dots, g_n)$ est bien génératrice.

Exemple 28 On considère le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ suivant $E = \operatorname{Vect}(g_1, g_2, g_3)$, où $g_1 = (2,1,3)$, $g_2 = (1,0,1)$. On notera $\mathscr{G} = (g_1, g_2, g_3)$. Appliquer le résultat à $g_3 = (1,1,2)$?

Les propriétés précédentes nous apprennent donc que :

- l'on peut augmenter une famille libre finie (en une nouvelle famille libre) en ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de ceux de la famille.
- D'autre part, on peut diminuer une famille génératrice finie (en une nouvelle famille génératrice) en retirant un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

3 DIMENSION & REPRÉSENTATION MATRICIELLE

3.1 Dimension

Le *lemme de* STEINITZ, dont la preuve est très technique, permet de comparer le nombre d'éléments d'une famille libre par rapport au nombre d'éléments d'une famille génératrice.

Lemme 1 | de STEINITZ

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de $n \in \mathbb{N}^\star$ vecteurs. Alors :

- toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
- Par conséquent, si $\mathscr{L}$ est une famille libre, alors : $\operatorname{Card}\mathscr{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{G}$.

Preuve

- On démontre par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, la propriété suivante est vraie :

  « Dans un espace vectoriel engendré par n vecteurs, toute famille ayant $n+1$ éléments est liée. »

  Initialisation. On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 1$. Soit E un espace vectoriel engendré par un vecteur noté g_1, et soit (x_1, x_2) une famille de E ayant deux éléments. On suppose dans la suite que $x_1 \neq 0, x_0 \neq 0$ (dans le cas contraire, l'un des deux est nul et le résultat évident).

  Les vecteurs x_1 et x_2 peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires du vecteur g_1 ; autrement dit, il existe des scalaires λ_1, λ_2 tels que $x_1 = \lambda_1 g_1$ et $x_2 = \lambda_2 g_1$, ce qui donne la relation : $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0_E$. Puisque $x_2 \neq 0_E$, on a $\lambda_2 \neq$. La relation $\lambda_2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0_E$ prouve alors que (x_1, x_2) est liée.

  Hérédité. On démontre maintenant que si la propriété est vraie au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$, alors elle vraie au rang n.

  Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs notés $g_1, g_2, \dots, g_n$, et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ une famille de E ayant $n+1$ éléments. Tout vecteur x_j, pour $j \in [\![1\,,\,n+1]\!]$, est combinaison linéaire de $g_1, g_2, \dots, g_n$, donc il existe des scalaires $\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_n^j$ tels que : $x_j = \lambda_1^j g_1 + \lambda_2^j g_2 + \dots + \lambda_n^j g_n. (\star)$ En particulier, pour $j = n+1$, le vecteur x_{n+1} s'écrit :

  $$x_{n+1} = \lambda_1^{n+1} g_1 + \lambda_2^{n+1} g_2 + \dots + \lambda_n^{n+1} g_n. \quad (\star\star)$$

  - ◇ Si x_{n+1} est nul, c'est terminé, la famille est liée ;
  - ◇ sinon, x_{n+1} est non nul, et au moins un des coefficients λ_j^{n+1} est non nul. On suppose, pour alléger l'écriture, que λ_n^{n+1} est non nul (sinon il suffit de changer l'ordre des vecteurs). Formons une nouvelle famille de n vecteurs seulement $(y_1, \dots, y_n)$, de la manière suivante :

    $$\begin{aligned}\forall j \in [\![1\,,\,n]\!], \quad y_j = \lambda_n^{n+1} x_j - \lambda_n^j x_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_n^{n+1}\lambda_k^j - \lambda_n^j \lambda_k^{n+1}\right) g_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_n^{n+1}\lambda_k^j - \lambda_n^j \lambda_k^{n+1}\right) g_k + \left(\cancel{\lambda_n^{n+1}\lambda_{n+1}^j} - \cancel{\lambda_n^j\lambda_n^{n+1}}\right) g_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lambda_n^{n+1}\lambda_k^j - \lambda_n^j \lambda_k^{n+1}\right) g_k.\end{aligned}$$

    Ainsi, la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est une famille de $E' = \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_{n-1})$ qui est un espace vectoriel engendré par $n-1$ vecteurs. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est liée. Par conséquent, il existe des scalaires non tous nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ tels que :

    $$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_n y_n = 0_E.$$

    En remplaçant les y_j par leur expression en fonction des vecteurs x_i, on obtient :

    $$\lambda_n^{n+1}\mu_1 x_1 + \lambda_n^{n+1}\mu_2 x_2 + \dots + \lambda_n^{n+1}\mu_n x_n - (\mu_1\lambda_n^1 + \dots + \mu_n\lambda_n^n) x_{n+1} = 0_E.$$

    Le coefficient λ_n^{n+1} a été supposé non nul et au moins un des scalaires $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ est non nul ; on a donc une combinaison linéaire nulle des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ avec des coefficients qui ne sont pas tous nuls, ce qui prouve que ces vecteurs forment une famille liée.
- Le plus dur est fait, puisqu'en contraposant nous avons montré précédemment que toute famille libre possède au plus n vecteurs. Donc $\operatorname{Card}\mathscr{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{G}$.

Définition/Proposition 4 | Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- ◇ si $E \neq \{0_E\}$: alors E possède des bases toutes de même cardinal. On appelle *dimension* de E, notée $\dim E$, le cardinal commun de ces bases.
  ◇ Si $E = \{0_E\}$, on pose comme convention : $\dim(\{0_E\}) = 0$.
- Soient $\mathscr{L}$ une famille libre et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors :

  $$\operatorname{Card}\mathscr{L} \leqslant \dim E \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{G}.$$

  Note — *On savait déjà que* $\operatorname{Card}\mathscr{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{G}$, *et finalement entre les deux vient s'intercaler la dimension.*

Preuve

- Montrons que dans le cas $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases ont même nombre d'éléments (on admet qu'il en existe). Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E ayant respectivement n et n'

éléments. Alors d'après le Lemme 1 :

$$\begin{cases} \mathscr{B} \text{ libre}, \mathscr{B}' \text{ génératrice} & \Longrightarrow n \leqslant n' \\ \mathscr{B} \text{ génératrice}, \mathscr{B}' \text{ libre} & \Longrightarrow n' \leqslant n \end{cases} \quad \textit{donc :} \quad n = n'.$$

- Pour le second point, considérons une base $\mathscr{B}$ de E. En appliquant le lemme avec $\mathscr{L} = \mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{G} = \mathscr{B}$) on déduit que toute famille génératrice (*resp.* libre) a au moins (*resp.* au plus) n éléments. D'où le résultat.

Proposition 11 | Cardinal d'une famille liée/non génératrice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

- Toute famille de cardinal strictement supérieur à n est liée.
- Toute famille de cardinal strictement inférieur à n n'est pas génératrice.

Preuve

- Déjà vu dans le Lemme 1.
- Soit $\mathscr{F}$ une famille telle que $\operatorname{Card}(\mathscr{F}) < n$. Alors $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice, puisque si elle l'était on aurait $\operatorname{Card}(\mathscr{F}) \geqslant n$ d'après la proposition précédente.

Définition 10 | Droite, Plan & Hyperplan

Soit E un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel F de E est appelé :

- *droite vectorielle* si $\dim F = 1$ c'est-à-dire s'il existe $e \neq 0$ tel que $F = \operatorname{Vect}(e)$.
- *Plan vectoriel* si $\dim F = 2$ c'est-à-dire s'il existe e_1, e_2 non colinéaires tels que $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.
- *Hyperplan* si $\dim E \geqslant 1$ *(en particulier* E *est de dimension finie)* et $\dim F = \dim E - 1$.

Remarque 9 Si $\dim E = 3$ (par exemple, $\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3$ *etc.*), les hyperplans sont exactement les plans.

Attention Confusion cardinal/dimension

Ne pas confondre les notions de cardinal et de dimension !

- Une famille a un certain cardinal mais pas de dimension,
- et par contre un espace vectoriel (de dimension finie) a une dimension mais est toujours de cardinal infini lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (sauf $\{0\}$).

En revanche, on a toujours que si $\mathscr{B}$ est une base de E : $\dim E = \operatorname{Card} \mathscr{B}$.

Exemple 29 (Canoniques)

- **[Uplets]** $\dim \mathbb{K}^n = n$ (notamment $\dim \mathbb{K} = 1$). En effet,
- **[Matrices]** $\dim \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$. En effet, il existe $n \times p$ matrices élémentaires dans la base canonique. Par exemple, rappelons la base canonique de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{K})$:
- **[Polynômes]** $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$ puisque $\operatorname{Card}(1, X, \ldots, X^n) = n + 1$.

Exemple 30 Préciser la dimension des espaces vectoriels de l'Exemple 26.

1\.

2\.

3\.

4\.

Exemple 31

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$,
$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0\right\},$$
est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ donc un espace vectoriel de dimension 2. Pour le prouver, il suffit d'en obtenir une famille génératrice.

2. Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$,

$$\mathrm{F} = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \right\},$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$.

3. Plus généralement, dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, notons

$$\mathrm{F} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{E} \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\},$$

avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ de sorte que $a_1 \neq 0$. Alors F est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ donc un espace vectoriel de dimension $n-1$. Pour le prouver, il suffit d'en obtenir une base.

Note | *Notez que si $n = 3, a_1 = a_2 = a_3 = 1$, on retrouve le premier exemple. La démarche précédente fonctionne de la même manière si l'un des a_i (pas forcément le dernier) est non nul.*

4. $\mathrm{F} = \left\{ y \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, y' = 2y \right\}$ est un espace vectoriel de dimension 1. En effet, nous avions montré que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x})$, et de plus $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$, donc (e_1) est une base de F, ainsi $\dim \mathrm{F} = 1$. *Plus généralement, c'est le cas de toute équation différentielle linéaire d'ordre 1.*

5. $\mathrm{F} = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_n \right\}$ est un espace vectoriel de dimension 2. *Plus généralement, c'est le cas de toute suite récurrente linéaire d'ordre 2.*

6. On pose $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = 0 = \mathrm{P}(1)\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$, déterminer sa dimension.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 2$. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n-1$. Est-ce un hyperplan de F ?

Enfin, un résultat fondamental qui nous permet de gagner du temps en pratique : lorsque le nombre d'éléments d'une famille est égal à la dimension de l'espace en question (encore faut-il la connaître, on ne l'utilisera donc que dans ce cas), il suffit de prouver le caractère générateur **OU** libre.

Théorème 2 | Libre $\iff$ Génératrice « parfois »

Soient E un espace vectoriel de **dimension finie** non nulle et $\mathscr{F}$ une famille finie telle que $\operatorname{Card}\mathscr{F} = \dim E$. Alors :

(i) $\mathscr{F}$ est une base de E $\iff$ **(ii)** $\mathscr{F}$ est une famille libre de E

$\iff$ **(iii)** $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

Note — *Et en général, on préfère montrer qu'une famille est libre, c'est souvent plus rapide.*

Preuve Notons $n = \dim E \neq 0$.

- **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** et **(i)** $\Longrightarrow$ **(iii)** sont évidentes.
- Montrons que **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. Notons $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$, de cardinal $n = \dim E$ et supposée libre. Montrons que $\mathscr{F}$ est génératrice, elle sera alors une base.

  Par l'absurde, supposons que $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice de E, c'est-à-dire que $\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \neq E$. Alors choisissons $x_{n+1} \in E \setminus \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. D'après la Proposition 9, la famille $\mathscr{F}' = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ est encore libre, ce qui est contradictoire puisqu'elle est de cardinal $n+1 > n = \dim E$. Ainsi $\mathscr{F}'$ est génératrice.
- Montrons que **(iii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. Notons $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$, de cardinal $n = \dim E$ et supposée génératrice. Montrons que $\mathscr{F}$ est libre, elle sera alors une base.

  Par l'absurde, supposons que $\mathscr{F}$ n'est pas libre, c'est-à-dire que l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres, par exemple $x_n \in \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Alors d'après la Proposition 9, la famille $\mathscr{F}' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ est encore génératrice, ce qui est contradictoire puisqu'elle est de cardinal $n-1 < n = \dim E$. Ainsi $\mathscr{F}'$ est libre.

Méthode (ALG) 11.8 (Montrer qu'une famille est une base) Pour montrer qu'une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de F est une base de F, deux cas se présentent.

- **[Cas 1 : dim F connue]** C'est le cas favorable. Si pour une raison ou une autre on connait la dimension de F, et que $n = \dim F$, alors on montre que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre **ou** génératrice.
- **[Cas 2 : dim F inconnue]** On montre les deux propriétés à l'aide des méthodes déjà vues.

Exemple 32

1. La famille $\mathscr{F} = ((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\mathscr{F} = \left(1+X, 1+X^2, X+X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Pour $a \in \mathbb{K}$. La famille de polynômes $\mathscr{F} = \left(1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3\right)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.

Proposition 12 | Inclusion et dimension

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

- $F \subset G \implies \dim(F) \leqslant \dim(G)$.
- $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G) \implies F = G$.

Preuve Soit $\mathscr{B}$ une base de F.

- Supposons $F \subset G$. Alors $\mathscr{B}$ est une famille libre (car c'est une base!) de vecteurs de G (car $F \subset G$). Donc $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) \leqslant \dim(G)$. Comme par définition $\mathrm{Card}(\mathscr{B})$ n'est rien d'autre que la dimension de F, on a bien $\dim(F) \leqslant \dim(G)$.
- Supposons toujours que $F \subset G$, mais également que $\dim(F) = \dim(G)$. Dans ce cas, $\mathscr{B}$ est toujours une famille libre de vecteurs de G, mais qui est cette fois-ci de même cardinal que la dimension de G ($\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(F) = \dim(G)$), c'est donc une base de G (d'après le Théorème 2). En particulier, $\mathscr{B}$ engendre G et $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = F$.

Exemple 33 Retrouver plus rapidement le résultat de l'Exemple 16.

Exemple 34 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel. Quelles sont les dimensions possibles de F dans les cas suivants ? Donner alors un exemple de sous-espace vectoriel F qui vaut chaque dimension possible.

1. $E = \mathbb{R}_2[X]$.

2. $E = \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

3.2 Représentation matricielle de vecteurs

Les matrices ont pour le moment été étudiées comme des tableaux de nombres (entiers ou réels par exemple, voir complexes). Nous allons voir en quoi elles peuvent être aussi utiles pour étudier les vecteurs, les applications linéaires *etc.* Nous commençons ici ce travail avec les vecteurs et les familles de vecteurs.

Définition 11 | Matrice d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit x un vecteur de E de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\mathscr{B}$, *i.e.* :

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$$

- On appelle *matrice du vecteur x relativement à la base $\mathscr{B}$* la matrice **colonne** suivante : $$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

  Note : *Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, l'objet est donc bien défini. Attention cependant au fait que les coordonnées dépendent de l'ordre des vecteurs composant la base*

- Lorsque E dispose d'une base canonique ($\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}^n$, *etc.*), on dit que $\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(x)$ est la *matrice canoniquement associée à x*.

De manière générale, toutes les notions de matrice qui suivront dépendront du choix d'une base. Nous aurons des moyens simples de passer d'une base à l'autre dans un second temps (*via* les formules de changement de base, qui seront vues en 2ème année).

Exemple 35

1. Considérons $x = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$, et munissons $\mathbb{R}^3$ de deux bases : la base canonique $\mathscr{B} = \mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ et la base $\mathscr{C} = (a,b,c)$, où $a = (1,1,1)$, $b = (0,1,1)$ et $c = (0,1,-1)$, on admet qu'il s'agit bien d'une base. Alors, on a : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Que vaut $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(x)$?

2. Considérons $P = 1 + X + X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, et munissons $\mathbb{R}_2[X]$ de deux bases : la base canonique $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ et la base $\mathscr{C} = (1, X-1, (X-1)^2)$. Alors, on a :
$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Que vaut } \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(P) \text{ ?}$$

Exemple 36 **(Un cas spécial)** Soient $n \geqslant 1$ et $E = \mathbb{K}^n$. Que dire de l'application :

$$\begin{array}{|ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}\text{can}}((x_1, \dots, x_n)) \end{array} \ ?$$

Et dans le sens inverse ? Peut-on voir toute matrice colonne comme la matrice d'un certain vecteur dans une certaine base ? La réponse est oui.

Proposition 13 | La matrice dans une base caractérise le vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}$. L'application

$$\varphi \begin{array}{|ccc} E & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array} \quad \text{est une bijection.}$$

- Ainsi, étant donnée une base $\mathscr{B}$ fixée, il y a une correspondance bijective entre les colonnes de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et les vecteurs de E. Et pour tout $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :
  - $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) + \mu \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$
  - $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(y) \iff x = y$.

Preuve Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

- Commençons par montrer que $\varphi \begin{array}{|ccc} E & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$ est une bijection.
  - Elle est injective : soient $x, y \in E$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors :
  $$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(y).$$
  Donc par définition : $x = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i = y$, et φ est bien injective.
  - Elle est surjective : soit $X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on cherche alors $x \in E$ tel que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = X$. On vérifie sans peine que $x = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ convient.
- Soient $(x, y) \in E^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors notons $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, y = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{K}, \mu_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1\,,\,n]\!]$. Alors : $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^n (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) e_i$. Cette égalité nous dit alors que les coordonnées de $\lambda x + \mu y$ dans la base $\mathscr{B}$ sont les combinaisons linéaires des coordonnées de x et y dans cette même base. Ainsi,
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda x + \mu y) = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 \\ \vdots \\ \lambda\lambda_n + \mu\mu_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) + \mu \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(y).$$
La dernière propriété découle simplement de l'injectivité de φ.

On peut alors considérer la définition ci-après.

Définition 12 | Vecteur associé à une matrice colonne

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B}$.

- Pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe un unique vecteur x appelé *vecteur associé à* X *dans* $\mathscr{B}$ tel que : $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = X$.
- Lorsque E dispose d'une base canonique ($\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}^n$, *etc.*), on dit que x vérifiant $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}\text{can}}(x) = X$ est le *vecteur canoniquement associée à* x.

Exemple 37 On reprend l'Exemple 35. Soit $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un vecteur x associé à V dans $\mathscr{B}$ (donc « canoniquement associé ») puis dans $\mathscr{C}$.

2. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associé à V dans $\mathscr{B}$ (donc « canoniquement associé ») puis dans $\mathscr{C}$.

Nous savons représenter des vecteurs à l'aide d'une matrice de coordonnées, on étend sans peine cela à une famille de vecteurs.

Définition 13 | Matrice d'une famille
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit une famille $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E. On appelle *matrice de la famille $\mathscr{F}$ relativement à la base $\mathscr{B}$* la matrice

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \left(\begin{array}{c|c|c} \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x_1) & \dots & \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(x_p\right) \end{array} \right) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Note | *Si $p = 1$, $\mathscr{F} = (x_1)$, on retombe sur la définition de matrice d'un vecteur vue précédemment.*

Autrement dit, c'est la matrice où la i-ème colonne est la matrice du i-ème vecteur de la famille.

Exemple 38 (avec des uplets) On reprend l'Exemple 35 item **(1)**. Alors :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C})$ et $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B})$, puis $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) \times \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C})$. Que conjecturer ?

Exemple 39 (avec des fonctions) On note $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On considère $f : x \longmapsto \cos(x+1)$ et $g : x \longmapsto \sin(x-1)$. Montrer que $f, g \in \mathrm{F}$ et déterminer $\underset{(\cos,\sin)}{\mathrm{Mat}}((f,g))$. On admet ici que $(\cos, \sin)$ est une base de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exemple 40 (avec des polynômes) Nous avons déjà montré que $\mathscr{F} = (\mathrm{X}(\mathrm{X}-1), \mathrm{X}(\mathrm{X}-2), (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2))$ est une base de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. On note $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2 - 1$. Déterminer $\underset{\mathscr{F}}{\mathrm{Mat}}((\mathrm{P}, \mathrm{Q}))$.

Et $\dim \operatorname{Vect}(X) = 1$ puisque $X \neq 0$.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, on a : $\operatorname{Rg}((1,1,0),(0,0,1)) = 2$, car les vecteurs $(1,1,0),(0,0,1)$ sont non-colinéaires donc forment une famille libre qui est aussi une base du Vect.

4. Dans $\mathbb{R}^3$, on a : $\operatorname{Rg}((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1)) = 2$, car $(1,1,1) = (1,1,0)+(0,0,1)$, donc
$$\operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1),\cancel{(1,1,1)}) = \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1)).$$
Et $(1,1,0),(0,0,1)$ sont non-colinéaires donc forment une famille libre qui est aussi une base du Vect.

5. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, calculer : $\operatorname{Rg}\big((2^n),(n2^n)\big)$. Notons $F = \operatorname{Vect}\big((2^n),(n2^n)\big)$ et montrons que $\big((2^n),(n2^n)\big)$ est une base de F.

3.3 Rang

Rappelons déjà que nous avons rencontré une première notion de rang dans le cas des matrices : il s'agit du nombre de pivots d'une forme échelonnée. On poursuit les nombreuses définitions de rang avec celle concernant les familles de vecteurs.

Définition 14 | Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1,...,x_n)$ une famille finie d'un espace vectoriel E. On appelle *rang de la famille* $(x_1,\dots,x_n)$, et on note $\operatorname{Rg}(x_1,\dots,x_n)$, l'entier défini par :
$$\operatorname{Rg}(x_1,\dots,x_n) = \dim \operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n).$$

Exemple 41

1. Dans $\mathbb{K}[X]$, on a : $\operatorname{Rg}(1,X,X^2,X^3) = 4$. En effet, on reconnaît la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$, donc $\operatorname{Rg}(1,X,X^2,X^3) = \dim \mathbb{K}_3[X] = 4$.

2. Dans $\mathbb{K}[X]$, on a : $\operatorname{Rg}(0_{\mathbb{K}[X]},X,2X,3X) = 1$, car :
$$\operatorname{Vect}(0_{\mathbb{K}[X]},X,2X,3X) = \operatorname{Vect}(X).$$

Proposition 14 | Rang et liberté/généricité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et une famille $\mathscr{F}$ vecteurs de E. Alors :

- $\mathscr{F}$ est libre $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = \operatorname{Card}\mathscr{F}$,
- $\mathscr{F}$ est génératrice $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = \dim E$,
- $\mathscr{F}$ est une base $\iff \operatorname{Rg}(\mathscr{F}) = \dim E = \operatorname{Card}\mathscr{F}$.

Preuve Notons $n = \dim E$ et $p = \operatorname{Card}\mathscr{F}$. Rappelons que $\operatorname{Rg}\mathscr{F} = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.

- On sait que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. Donc $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. Or $\mathscr{F}$ est une base de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ si et seulement si, la famille $\mathscr{F}$ est de cardinal la dimension de E (conséquence du Théorème 2), donc si $p = \operatorname{Card}(\mathscr{F}) = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = \operatorname{Rg}\mathscr{F}$. Finalement $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\operatorname{Card}(\mathscr{F}) = p = \operatorname{Rg}\mathscr{F}$.
- Par définition $\mathscr{F}$ est génératrice de E si et seulement si $E = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$. Or, puisque $\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \subset E$, on a d'après la Proposition 12 :
$$\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = E \iff \operatorname{Rg}\mathscr{F} = \dim E = n.$$

- $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre et génératrice de E. Avec ce qui précède : $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Rg}(\mathscr{F}) = n = p$.

Exemple 42 Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour quels m la famille $((m,1,1),(1,m,1),(0,0,1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Voici maintenant la propriété qui justifie l'intérêt de représenter les familles par une matrice.

Proposition 15 | Lien rang d'une matrice de famille / rang de la famille

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit une famille $\mathscr{F}$ de p vecteurs de E.

- Alors : $\underbrace{\mathrm{Rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)}_{\text{« nombre de pivots »}} = \underbrace{\mathrm{Rg}\left(\mathscr{F}\right)}_{\text{« dim du vect »}}.$
- Par conséquent, si $n = p$: $\mathscr{F}$ est une base de E $\Longleftrightarrow \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible.

Note — *Le rang d'une famille de vecteurs est donc égal au rang de la matrice de cette famille dans **n'importe quelle base** $\mathscr{B}$ de E. Pour connaitre la nature de cette famille (libre / génératrice / base), il suffira donc de l'échelonner.*

Preuve

- Admis.
- Par conséquent, si $n = p$, on a d'après la proposition précédente :

$$\mathscr{F} \text{ est une base de E} \iff \mathrm{Rg}(\mathscr{F}) = n = \mathrm{Rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right) \iff \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \text{ inversible.}$$

Trouver une base d'un Vect. Lorsqu'un sous-espace vectoriel est donné sous forme d'un Vect, il arrive parfois (mais rarement!) que la famille apparaissant dans le Vect ne soit pas libre auquel cas elle ne fournit pas de base. Il faut donc « nettoyer » la famille présente dans le Vect, en cherchant les vecteurs qui sont combinaison linéaire des autres. Sur les deux premiers exemples, les combinaisons linéaires se devinent, sur le troisième nous emploierons une autre méthode qui fonctionne en toute généralité en échelonnant une certaine matrice.

Exemple 43 Notons $u_1 = (1,-5,7), u_2 = (2,6,8), u_3 = (3,1,15), u_4 = (1,11,1)$. Alors (u_1,u_2) est une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4)$, donc $\dim \mathrm{F} = 2$. *On a les relations linéaires $u_3 = u_1 + u_2$ et $u_4 = u_2 - u_1$. Ainsi,*

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\cancel{u_3},\cancel{u_4}) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_1+u_2,u_2-u_1) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$$

en utilisant les propriétés du Vect *déjà vues. Ainsi, (u_1,u_2) est une famille libre de* F. *On vérifie facilement qu'elle est également libre, donc c'est une base de* F *et* $\dim \mathrm{F} = 2$.

Exemple 44 Notons $u_1 = (1,0,2,1), u_2 = (2,1,3,2), u_3 = (1,1,1,1), u_4 = (0,1,-1,0), u_5 = (4,2,6,4)$. Alors (u_1,u_2) est une base de

$$\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5), \text{ donc } \dim \mathrm{G} = 2.$$

On a les relations linéaires $u_3 = u_1 + u_2$, $u_4 = u_2 - 2u_1$, $u_5 = u_1 + u_2 + u_3$. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}(u_1,u_2,\cancel{u_3},\cancel{u_4},\cancel{u_5}) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2).$$

Ainsi, (u_1,u_2) est une famille libre de F. *On vérifie facilement qu'elle est également libre, donc c'est une base de* F *et* $\dim \mathrm{F} = 2$.

Passons désormais à un exemple moins élémentaire.

Méthode (ALG) 11.9 **(Trouver une base d'un Vect)** Soit $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de E, on souhaite trouver une base de :

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p).$$

- Si $\mathscr{F}$ est clairement libre, on peut conclure.
- Sinon, $\mathscr{F}$ est liée et il existe des relations linéaires entre certains éléments de la famille.
  - ◇ Si elles sont évidentes, on peut conclure directement (c'est le cas des exemples précédents).
  - ◇ Sinon, on échelonne la matrice : $\mathrm{A} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{B}$ est une base fixée (la plus simple possible, le plus souvent $\mathscr{B} = \mathscr{B}^{\mathbf{can}}$). C'est la matrice de format $n \times p$ où la colonne $j \in [\![1,p]\!]$ contient les coordonnées de u_j. On obtient :

$$\mathrm{A} \overset{\mathrm{L}}{\sim} \mathrm{B} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{C}_1 & \dots & \mathrm{C}_p \end{array}\right) \quad \text{avec B l'échelonnée-réduite de A.}$$

Notons $r = \mathrm{Rg}\,\mathrm{B}$. Puisque B est échelonnée réduite, des relations linéaires entre les C_i se lisent facilement sur la matrice (plus précisément, les C_i n'étant pas des colonnes pivot s'expriment en fonction des autres, on trouve au total que $n-r$ vecteurs s'expriment en fonction de r vecteurs). De plus, ces relations linéaires sont les mêmes que celles cherchées sur les u_i (c'est une propriété que l'on admet, mais que l'on vérifiera sur le prochain exemple).

Exemple 45 **(dans $\mathbb{R}^n$)** Notons $u_1 = (2,-1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (-1,2,1), u_4 = (1,1,0), u_5 = (0,-1,-1)$. Déterminons une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)$.

1. La matrice à échelonner est donc :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans le Chapitre (ALG) 8, nous avions trouvé que l'échelonnée-réduite était :

$$\mathrm{A} \overset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\mathrm{C}_1 \,\middle|\, \mathrm{C}_2 \,\middle|\, \mathrm{C}_3 \,\middle|\, \mathrm{C}_4 \,\middle|\, \mathrm{C}_5 \right). \quad \text{(les pivots sont surlignés)}$$

2. On peut ensuite facilement deviner des relations linéaires entre les colonnes de l'échelonnée-réduite. $\mathrm{C}_3 = -\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2, \quad \mathrm{C}_5 = \frac{1}{3}\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_4$.

C'est ici que la magie opère : ces relations sont vérifiées aussi sur les u_i, $i \in [\![1\,,5]\!]$,

$$u_3 = -u_1 + u_2, \quad u_5 = \frac{1}{3}u_1 - u_2 + \frac{1}{3}u_4\,!$$

3. On peut à présent conclure quant à la dimension. $\mathrm{Vect}\,(u_1,u_2,\cancel{u_3},u_4,\cancel{u_5}) = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_4)$.

Il n'est pas nécessaire de montrer à la main que (u_1,u_2,u_4) est libre car on vient de prouver en échelonnant que c'est une famille de rang 3 *(puisque* A *est de rang* 3*). En effet,*

- (u_1,u_2,u_4) *est génératrice d'après les calculs précédents,*
- *et* $\mathrm{Card}(u_1,u_2,u_4) = 3 = \dim \mathrm{F} = \mathrm{Rg}\,\mathrm{A}$.

Donc : $\boxed{\dim \mathrm{F} = 3}$, *et* (u_1,u_2,u_4) *en est une base.*

Exemple 46 **(dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$)** Notons $\mathrm{P}_1 = 2-\mathrm{X}, \mathrm{P}_2 = 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2, \mathrm{P}_3 = -1+2\mathrm{X}+\mathrm{X}^2, \mathrm{P}_4 = 1+\mathrm{X}, \mathrm{P}_5 = -\mathrm{X}-\mathrm{X}^2$. Déterminons une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3,\mathrm{P}_4,\mathrm{P}_5)$.

1. On cherche alors la matrice de $\mathscr{F} = (\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3,\mathrm{P}_4,\mathrm{P}_5)$ dans la base canonique $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$, on a :

$$\underset{\mathscr{B}^{\mathrm{can}}}{\mathrm{Mat}}\,(\mathscr{F}) = \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve la matrice de l'exemple précédent.

2. Les calculs du précédent exemple fournissent alors les relations linéaires cherchées :

$$\mathrm{P}_3 = -\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2, \quad \mathrm{P}_5 = \frac{1}{3}\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 + \frac{1}{3}\mathrm{P}_4.$$

3. On peut à présent conclure quant à la dimension.

$$\mathrm{Vect}\left(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\cancel{\mathrm{P}_3},\mathrm{P}_4,\cancel{\mathrm{P}_5}\right) = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_4).$$

donc $\boxed{\dim \mathrm{F} = 3}$.

FICHE MÉTHODES

Les méthodes du cours sont toutes reprises dans cette section, elles sont parfois complétées par un nouvel exemple.

Méthode (ALG) 11.1 **(Montrer l'appartenance « à un Vect »)** Pour montrer que $x \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, on cherche $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$), tels que : $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Méthode (ALG) 11.2 **(Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel)** Deux options sont donc possibles (au choix).

1. EST UN SOUS-ESPACE VECTORIEL — Justifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{K}^n$, de polynômes, de fonctions, de suites ...) **ou**
2. EST UN Vect — Montrer que l'ensemble s'écrit comme Vect d'une famille.

Méthode (ALG) 11.3 **(Montrer qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel)** Deux options sont possibles (au choix).

1. MISE EN DÉFAUT DU NEUTRE — c'est-à-dire qu'il ne contient pas le neutre d'un espace vectoriel plus gros.
2. MSE EN DÉFAUT DE LA STABILITÉ — c'est-à-dire on montre qu'il n'est pas stable par combinaison linéaire. Par exemple :
   - deux vecteurs dont la somme n'est pas dans l'espace,
   - un vecteur dont l'opposé n'est pas dans l'espace...

Méthode (ALG) 11.4 **(Inclusion de Vect)** Écrivons la méthode par exemple pour des familles de deux vecteurs. Soient $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ deux familles de vecteurs. Alors,

établir que $\text{Vect}(x_1, x_2) = \text{Vect}(y_1, y_2)$ revient à *(d'après la Proposition 4)* :

$\boxed{\subset}$ montrer que $\text{Vect}(x_1, x_2) \subset \text{Vect}(y_1, y_2)$, c'est-à-dire :

$\forall i \in [\![1, 2]\!], \quad x_i \in \text{Vect}(y_1, y_2)$,

En effet, puisque $\text{Vect}(y_1, y_2)$ *est un espace vectoriel, s'il contient* x_1, x_2*, alors il contient toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs.*

$\boxed{\supset}$ **et** montrer que $\text{Vect}(y_1, y_2) \subset \text{Vect}(x_1, x_2)$, c'est-à-dire :

$\forall i \in [\![1, 2]\!], \quad y_i \in \text{Vect}(x_1, x_2)$.

En effet, puisque $\text{Vect}(x_1, x_2)$ *est un espace vectoriel, s'il contient* y_1, y_2*, alors il contient toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs.*
On montrera plus tard que l'on peut se passer d'une inclusion en montrant l'égalité des « dimensions ».

Méthode (ALG) 11.5 **(Lien entre paramétrisation & équations cartésiennes)** Soit $E = \mathbb{K}^n$ et F un sous-espace vectoriel de E.

- **Paramétrisation → Équations cartésiennes :**
  - Écrire que $(x, y, z, \dots) \in F \iff \exists \lambda, \mu, \nu \dots$ tel que $(x, y, z, \dots) = \lambda \cdots + \mu \dots$.
  - C'est un système en $\lambda, \mu, \nu \dots$: le résoudre en ces inconnues.
  - Si le système a toujours des solutions peu importe $x, y, z \dots$ alors $F = \mathbb{K}^n$. Sinon, il y a une ou plusieurs conditions compatibilités : ces équations donnent alors la forme cartésienne.
- **Équations cartésiennes → Paramétrisation :**
  - Écrire le système linéaire formé de toutes les équations cartésiennes.
  - Le résoudre (en $x, y, z, \dots$).
  - L'ensemble des solutions est alors la forme paramétique de F.

Méthode (ALG) 11.6 **(Vérifier la liberté/liaison d'une famille)** Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre ou non , on écrit :

« Soit $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E$. » $\quad (\star)$

Ensuite,

- Si $(\star)$ ne possède que la solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$, alors la famille est libre.
- S'existe une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$, alors la famille est liée.

En général, l'étude de $(\star)$ passe par les arguments ci-après.

- Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{K}_n[X]$: on arrive à la résolution d'un système linéaire.
- Dans $\mathbb{R}^I$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on prend des valeurs particulières pour les variables, ou on fait de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*).

Méthode (ALG) 11.7 **(Vérifier la généricité ou non d'une famille)** Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de F est une famille génératrice de F, on doit montrer l'égalité d'**ensembles** éventuelle :

$F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

On procède donc généralement par double-inclusion, dont l'une est souvent évidente.

$\boxed{\subset}$ « Soit $x \in F$. Alors cherchons λ_1, ..., λ_n tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. [...] On a donc déterminé des λ_i qui conviennent, donc $F \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. ». En général, l'étape [...] consiste en les arguments suivants :

- Dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: on résout un système linéaire.
- Dans $\mathbb{R}^I$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on fait souvent de l'analyse (limites, dérivation, *etc.*). On peut aussi se ramener à un système en évaluant en plusieurs x, n *etc.*.

Dans le cas où la famille n'est pas génératrice, alors cette inclusion sera fausse : on trouvera que, pour certains $x \in F$, il n'existe pas de tels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$\boxed{\supset}$ En général, cette inclusion est évidente. Si on a besoin de la justifier, on expliquera que $x_i \in [\![1, n]\!]$ pour tout i, puis comme F est un sous-espace vectoriel, on déduit : $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset F$.

Méthode (ALG) 11.8 **(Montrer qu'une famille est une base)** Pour montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de F est une base de F, deux cas se présentent.

- **[Cas 1 :** $\dim F$ **connue]** C'est le cas favorable. Si pour une raison ou une autre on connait la dimension de F, et que $n = \dim F$, alors on montre que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre **ou** génératrice.
- **[Cas 2 :** $\dim F$ **inconnue]** On montre les deux propriétés à l'aide des méthodes déjà vues.

Méthode (ALG) 11.9 **(Trouver une base d'un** Vect**)** Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E, on souhaite trouver une base de :

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

- Si $\mathscr{F}$ est clairement libre, on peut conclure.
- Sinon, $\mathscr{F}$ est liée et il existe des relations linéaires entre certains éléments de la famille.
  - Si elles sont évidentes, on peut conclure directement (c'est le cas des exemples précédents).
  - Sinon, on échelonne la matrice : $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{B}$ est une base fixée (la plus simple possible, le plus souvent $\mathscr{B} = \mathscr{B}^{\mathbf{can}}$). C'est la matrice de format $n \times p$ où la colonne $j \in [\![1, p]\!]$ contient les coordonnées de u_j. On obtient :

$$A \overset{L}{\sim} B = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \dots & C_p \end{array} \right) \text{ avec B l'échelonnée-réduite de A.}$$

Notons $r = \mathrm{Rg}\, B$. Puisque B est échelonnée réduite, des relations linéaires entre les C_i se lisent facilement sur la matrice (plus précisément, les C_i n'étant pas des colonnes pivot s'expriment en fonction des autres, on trouve au total que $n - r$ vecteurs s'expriment en fonction de r vecteurs). De plus, ces relations linéaires sont les mêmes que celles cherchées sur les u_i (c'est une propriété que l'on admet, mais que l'on vérifiera sur le prochain exemple).

QUESTIONS DE COURS POSÉES AU CONCOURS AGRO—VÉTO

Question	Réponse	Commentaire
Définition d'une famille libre $(u_1,\dots,u_n)$ de vecteurs dans un espace vectoriel E	$(x_1,\dots,x_n)$ telle que : $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i, \lambda_i = 0$	*Attention aux quantificateurs!*
Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E	$(x_1,\dots,x_n)$ telle que : $\forall x \in E, \exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$	*Attention aux quantificateurs!*
Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel	*i.e.* donner la définition d'une famille libre et d'une famille génératrice finie	*Attention aux quantificateurs!*

4 EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître la définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels :
   - Savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs ☐
2. Maitriser la notion de base :
   - Savoir montrer qu'une famille est libre . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'une famille est génératrice . . . . ☐
   - Savoir montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel . . . . ☐
   - Connaître les bases canoniques des espaces usuels . . . . ☐
   - Savoir déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . ☐

Exercice 1 | Vrai ou Faux? [Solution] En cas de réponse fausse, on donnera un contre-exemple.

1. La famille $f : x \longmapsto x, g : x \longmapsto -x, h : x \longmapsto |x|$ est libre.
2. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
3. Une famille de vecteurs deux à deux non-colinéaires est libre.
4. Si $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ sont des familles libres de E, alors $(e_1+f_1,\dots,e_n+f_n)$ est libre.
5. Tout élément du sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $x_1,\dots,x_n$ est une combinaison linéaire de deux de ces vecteurs.

4.1 Géométrie & Matrices

Exercice 2 | Être ou ne pas être (un espace vectoriel) [Solution] Les ensembles ci-dessous, sont-ils des espaces vectoriels? Lorsque cela est possible, on l'exprimera sous forme d'un Vect.

1. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x = y\}$, $E_1' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$, $E_1'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\}$,
2. $E_2 = (Ox) \cup (Oy)$, $E_2' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$,

3. $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x = 1\}$,

4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$, $E'_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$,

5. $E_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0, x-y+z=0\}$,
$E'_5 = \{(a, a-b, a+b, b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

6. $E_6 = \left\{ X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = -2X \right\}$, $E'_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 3 | Études de liberté/généricité dans $\mathbb{K}^n$ [Solution]

1. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1.1) $\mathscr{L}_1 = ((1,1,1),(2,2,2))$,

1.2) $\mathscr{L}_2 = ((1,0,1),(0,2,2),(3,3,0))$,

1.3) $\mathscr{L}_3 = ((-1,-2,2),(4,-3,-2),(2,-1,-1))$.

2. Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?

2.1) $\mathscr{G}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2))$,

2.2) $\mathscr{G}_2 = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$.

Exercice 4 | [Solution]

1. Montrer que : $E = \mathrm{Vect}((0,1,1),(1,0,2)) = \mathrm{Vect}((1,-2,0),(1,1,3))$.

2. Écrire E sous forme d'équation cartésienne.

3. Les sous-espaces vectoriels $G_1 = \mathrm{Vect}((1,2,3),(3,2,1))$ et $G_2 = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(2,4,6))$ sont-ils égaux?

Exercice 5 | [Solution]

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathscr{C} = (\underbrace{(1,1,1)}_{u_1}, \underbrace{(2,3,5)}_{u_2}, \underbrace{(3,4,6)}_{u_3}, \underbrace{(1,2,4)}_{u_4})$ et $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{C})$. On note également $\mathscr{B}^{\mathbf{can}} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que la famille $\mathscr{C}$ est liée.

2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, en donner une base.

3. Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$.

4. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 | Avec un paramètre [Solution]

Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $u = (4-m, 4, 4)$, $v = (3, 3-m, 6)$ et $w = (3, 6, 3-m)$. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m la famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7 | [Solution]

Soient les deux ensembles ci-dessous.

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$,
- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, et donner une base de F et de G.

2. Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 8 | [Solution]

Montrer que $\mathscr{B} = ((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées de $u = (8,4,2)$ dans $\mathscr{B}$.

Exercice 9 | Commutant [Solution]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$. On note :
$\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$.

1. Déterminer $\mathscr{C}(A)$ si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et si $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, puis $A = I_2$. Justifier qu'il s'agit d'un espace vectoriel de dimension finie, et préciser sa dimension.

2. Montrer que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Montrer que : $2 \leqslant \dim \mathscr{C}(A) \leqslant n^2$.

Exercice 10 | [Solution]

Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad F = \{M(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel, en donner une base et sa dimension.

2. On pose $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n.

2.2) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n \in F$.

2.3) La famille (I_3, T, T^2) est-elle une base de F?

4.2 Polynômes

Exercice 11 | [Solution]

Montrer que $(X^3+X^2-X-1, X^3-X^2+1, X^3-X^2+X, X^3+2X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, puis déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

Exercice 12 | [Solution] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ degré supérieur ou égal à deux. Peut-on avoir $P \in \mathrm{Vect}(1, P')$?

Exercice 13 | [Solution] On note $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X^2) = (X+1)P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14 | Base de Lagrange [Solution] Soit $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et soit $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. On pose :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad L_k = \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X - x_i)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)}.$$

Démontrer que $(L_k)_{k=1,\dots,n}$ est une base de E.

Exercice 15 | [Solution]

1. Donner la dimension et une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :
$$u_1 = (3,2,1,2),\ u_2 = (2,1,0,1),\ u_3 = (3,1,-1,1),\ u_4 = (0,3,1,1),\ u_5 = (1,0,-1,0).$$
Préciser une base de F.
2. Même question avec la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3[X]$ engendré par les vecteurs :
$$P_1 = 2 + X + X^3, \quad P_2 = 3 + 2X + X^2 + 2X, \quad P_3 = 1 - X^2.$$

Exercice 16 | [Solution] Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose : $P_i = \sum_{k=0}^{i} X^k$.

1. Préciser P_0, P_1, P_2.
2. Montrer que $\mathscr{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On note $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F})$ et $\underset{\mathscr{F}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}})$.

Exercice 17 | [Solution] Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on définit $P_1 = -1 + X^2, P_2 = -1 + 5X^2$ et $P_3 = 1 + 2X + 3X^2$. On note alors $\mathscr{C} = (P_1, P_2, P_3)$.

1. Donner la matrice de la famille $\mathscr{C}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Quel est le rang de la famille $\mathscr{C}$? Pourquoi $\mathscr{C}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. Déterminer les coordonnées du vecteur $P = X$ dans la base $\mathscr{C}$.

Exercice 18 | [Solution] On note $\mathscr{B}^{\mathbf{can}}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note : $P_i = (X-1)^i$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
2. On pose $P = X^3 + X$. Déterminer $\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(P)$ et $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(P)$.
3. On définit $F = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$.
   - **3.1)** Montrer que F est un espace vectoriel.
   - **3.2)** Soit $P \in E$. Montrer : $P \in F \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad P = \lambda(X-1)^3$.
   - **3.3)** Déterminer une base et la dimension de F.

4.3 Suites & Fonctions

Exercice 19 | Être ou ne pas être un espace vectoriel de suites, fonctions, ... [Solution] Pour chacun des ensembles suivants, indiquer avec justification si c'est un espace vectoriel ou pas, en précisant le corps de base.

1. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 ou nulles en 4.
2. L'ensemble des fonctions f croissantes sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des suites arithmétiques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $r \in \mathbb{R}$, même question avec l'ensemble des suites arithmétiques de raison r.
4. L'ensemble des suites géométriques de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $\rho \in \mathbb{R}$, même question avec l'ensemble des suites géométriques de raison ρ.
5. L'ensembles des fonctions réelles définies sur $]-1, 1[$, continues, positives ou nulles.

Exercice 20 | [Solution] Soit E l'espace des applications de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$. On définit :
$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x-1}, \quad f_2 : x \longmapsto \frac{1}{x+1}.$$

1. Montrer que la famille (f_1, f_2) est libre.
2. Montrer que $g : x \longmapsto \frac{1}{x^2-1}$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

Exercice 21 | [Solution] Soient $E = \mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et :
$$S = \{y \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid 2y'' + 2y' + y = 0\}.$$

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.

2. Déterminer S et sa dimension.
3. Soit α fixé dans $\mathbb{R}$ et $H_\alpha = \{f \in S \mid f(0) = f(\alpha) = 0\}$. Déterminer H_α ainsi que sa dimension.

Exercice 22 | [Solution] Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et q_1, q_2 deux réels non nuls tels que $|q_1| < |q_2|$. On pose : $F = \mathrm{Vect}\big((q_1^n), (q_2^n)\big)$.

1. Justifier que F est de dimension finie et déterminer sa dimension.
2. Notons $F_0 = \{(u_n) \in F u_0 = u_1 = 0\}$. Déterminer F_0 ainsi que sa dimension.

4.4 Devoir-maison

Exercice 23 | [Solution] Soit m un nombre réel. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants :

$$v_1 = (1,1,m) \quad v_2 = (2, m+1, 2) \quad v_3 = (m,1,1).$$

On note $V_m = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces vecteurs.

1. Pour $m = 1$, calculer la dimension de V_1 et calculer sa forme cartésienne.
2. On revient ici dans le cas général.
   2.1) Donner la matrice M_m de la famille (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   2.2) En déduire la dimension de V_m.
3. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les vecteurs v_1, v_2, v_3 constituent-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
4. Pour $m = 0$, déterminer les coordonnées du vecteur $v = (4,2,1)$ dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 24 | [Solution] Soient a et b deux réels et on rappelle que $\mathbb{R}_1[X]$ est l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 1.

1. On pose $N = \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de N.
2. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. On la note $\mathscr{B}_c$ dans la suite.
3. On suppose dans cette question uniquement que $a \neq b$.
   3.1) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (X - a, X - b)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
   3.2) On note P la matrice de la base $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}_c$, c'est-à-dire $P = \underset{\mathscr{B}_c}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B})$. Donner P.
   3.3) Justifier que P est inversible et donner son inverse.
4. On considère la famille $\mathscr{F} = (P_1, P_2)$ définie par :
   $$P_1 = \frac{a+b}{2} - X, \quad P_2 = ab - \frac{a+b}{2}X$$
   et on note M la matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}_c$.
   4.1) Donner M.
   4.2) Justifier que : M est inversible $\iff a \neq b$.
5. **5.1)** Montrer que : $PNP^{-1} = M$.
   5.2) En déduire les puissances de M.
6. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble :
   $$F = \left\{aI_2 + bM + cM^2 + dM^3 \mid (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$
   6.1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
   6.2) Montrer que les matrices M^2 et M^3 sont des combinaisons linéaires de I_2 et M.
   6.3) Déterminer une base de F.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) [Énoncé]

1. $\boxed{\text{Faux}}$. Puisque $f+g=0$, donc la famille est liée.
2. $\boxed{\text{Vrai}}$, c'est une propriété du cours.
3. $\boxed{\text{Faux.}}$ Par exemple, $((1,0),(0,1),(1,1))$, $(1,1)=(1,0)+(0,1)$. Donc cette famille est liée, alors que les vecteurs sont deux à deux non colinéaires.
4. $\boxed{\text{Vrai.}}$ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que : $\lambda_1(e_1+f_1)+\cdots+\lambda_n(e_n+f_n)=0$. Alors $\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_1 e_1+\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_n f_n=0$. Or, les familles $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ sont libres, donc $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$.
5. $\boxed{\text{Faux}}$. $1+X+X^2\in\mathrm{Vect}(1,X,X^2)$ n'est pas combinaison linéaire de seulement deux vecteurs parmi $1,X,X^2$.

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. $E_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 \mid x=y\}$ n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par opposé. En effet, $(1,1)\in E_1$ mais $-(1,1)=(-1,-1)\notin E_1$. L'ensemble E_1' n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ puisqu'il ne contient pas $(0,0)$. L'ensemble E_1'' n'est pas non plus un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, en effet $(1,0)\in E_1''$, $(-1,-3)$ alors que $(1,0)-(-1,-3)=(2,3)\notin E_1''$ car $3>2$.
2. $E_2=(Ox)\cup(Oy)=\mathrm{Vect}(1,0)\cup\mathrm{Vect}(0,1)$. Le vecteur $(1,1)=(1,0)+(0,1)$ n'est pas dans E_2, donc E_2 n'est pas stable par somme, ce n'est donc pas un espace vectoriel, de-même pour E_2' car il ne contient pas $(0,0)$.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel car il ne contient pas $(0,0)$.
4. $E_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2=0\}$ n'est pas un espace vectoriel. En effet, le vecteur $(1,1)$ est un élément de E_4, de-même pour $(2,-2)$, mais pas $(2,-2)+2(1,1)=(4,0)$. L'ensemble E_4' est égal à $\{(0,0)\}$ puisque $x^2+y^2 \iff x,y=0,0$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Donc E_4' est un espace vectoriel.
5. $E_5=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0, x-y+z=0\}$. Exprimons cet espace sous forme d'un Vect. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :
$$\begin{cases}x+y+z=0\\ x-y+z=0\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases}x+\ \ y+z=0\\ \quad -2y \quad\ =0\end{cases} \iff \begin{cases}x \quad\ =-z\\ \quad y= \quad\ 0\end{cases} \iff (x,y,z)=(x,0,-x)=x(1,0,-1).$$
Donc $E_5=\mathrm{Vect}(1,0,-1)$, c'est en particulier un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par définition, $E_5'=\{(a,a-b,a+b,b) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}=\{a(1,1,1,0)+b(0,-1,1,1) \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$. C'est donc un Vect.
6. Notons $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}X=-2X \iff \begin{pmatrix}3&2&3\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases}3x+2y+3z=0\\ x+2y+\ \ z=0=0\\ x+\ \ y+3z\end{cases} \iff (x,y,z)=(0,0,0).$$
Donc $E_6=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. Pour E_6', on observe directement que $E_6'=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)$.

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1.
 1.1) Clairement non, puisque $(2,2,2)=2(1,1,1)$ donc $\boxed{\mathscr{L}_1 \text{ est liée}}$.

 1.2) Soient $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda(1,0,1)+\mu(0,2,2)+\nu(3,3,0)=(0,0,0)$. Alors $\begin{cases}\lambda+3\nu &=0,\\ 2\mu+3\nu &=0,\\ \lambda+2\mu &=0\end{cases}$. En faisant $L_3\to L_3-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3+L_2$, on a alors :
$$\begin{cases}\lambda+3\nu &=0,\\ 2\mu+3\nu &=0,\\ 2\mu-3\nu &=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda+3\nu &=0,\\ 2\mu+3\nu &=0,\\ 4\mu &=0\end{cases}$$
On déduit alors $\lambda=\mu=\nu=0$, la famille $\boxed{\mathscr{L}_2 \text{ est libre}}$.

 1.3) Soient $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda(-1,-2,2)+\mu(4,-3,-2)+\nu(2,-1,-1)=(0,0,0)$. Alors $\begin{cases}-\lambda+4\mu+2\nu &=0,\\ -2\lambda-3\mu-\nu &=0,\\ 2\lambda-2\mu-\nu &=0\end{cases}$. Faisons les opérations $L_2\leftarrow L_2-2L_1, L_3\leftarrow L_3+2L_1$, on obtient
$$\begin{cases}-\lambda+4\mu+2\nu &=0,\\ -11\mu-5\nu &=0\\ 6\mu+3\nu &=0.\end{cases}$$
Avec les deux dernières lignes, on obtient $\mu=\nu=0$, puis $\lambda=0$ dans la

première ligne. La famille $\boxed{\mathscr{L}_3 \text{ est libre}}$.

2. Les familles suivantes sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?

2.1) Ici, $\mathscr{G}_1$ ressemble fortement à la base canonique. En effet, $\text{Vect}(\mathscr{G}_1) = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,2)) = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et que $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est génératrice (c'est la base canonique), la famille $\boxed{\mathscr{G}_1 \text{ est elle aussi génératrice}}$.

2.2) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors cherchons λ, μ, ν tels que :

$$(x,y,z) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,1) + \nu(1,1,0).$$

D'où le système $\begin{cases} x &= \mu+\nu, \\ y &= \lambda+\nu, \\ z &= \lambda+\mu \end{cases}$. Faisons $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. Donc

$$\begin{cases} x &= \mu+\nu, \\ y &= \lambda+\nu, \\ z &= \mu-\nu \end{cases}.$$

En considérant les deux premières lignes nous avons : $\mu \frac{x+z}{2}, \nu = \nu = \frac{x-z}{2}$. Donc $\lambda = y - \frac{x-z}{2}$. On a donc, pour tout (x,y,z) une solution (λ,μ,ν), donc $\boxed{\text{la famille } \mathscr{G}_2 \text{ est génératrice}}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution (exercice 4)

[Énoncé] Notons $f_1 = (0,1,1), f_2 = (1,0,2)$ et $g_1 = (1,-2,0), g_2 = (1,1,3)$.

1. On souhaite montrer que : $\text{Vect}(f_1,f_2) = \text{Vect}(g_1,g_2)$.

$\boxed{\subset}$ $\text{Vect}(g_1,g_2) \subset \text{Vect}(f_1,f_2)$ car on a les relations :

$g_1 = f_2 - 2f_1, g_2 = f_1 + f_2$.

$\boxed{\supset}$ $\text{Vect}(f_1,f_2) \subset \text{Vect}(g_1,g_2)$ car on a les relations

$f_1 = -\frac{1}{3}g_1 + \frac{1}{3}g_2, f_2 = \frac{1}{3}g_1 + \frac{2}{3}g_2$.

Conclusion : $\boxed{E = \text{Vect}((0,1,1),(1,0,2)) = \text{Vect}((1,-2,0),(1,1,3))}$.

2. On choisit par exemple d'utiliser le premier Vect. Alors :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in E &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) = \lambda(0,1,1) + \mu(1,0,2) \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad x = \mu, y = \lambda, z = \lambda + 2\mu \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \mu = x, \lambda = y, \boxed{z = y + 2x} \\ &\iff 2x + y - z = 0.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E : z = y + 2x}$. C'est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$.

3. Il faut analyser si comme dans la première question chaque vecteur composant le Vect est combinaison linéaire des autres. Constatons que :

$$(1,2,3) = 0.(1,0,-1) + \frac{1}{2}(2,4,6), \quad (3,2,1) = 2(1,0,-1) + \frac{1}{2}(2,4,6),$$

$$(1,0,-1) = -\frac{1}{2}(1,2,3) + \frac{1}{2}(3,2,1), \quad (2,4,6) = 2(1,2,3) + 0(3,2,1).$$

Donc : $\boxed{G_1 = G_2}$.

Solution (exercice 5)

[Énoncé]

1. Il s'agit ici de trouver une relation linéaire entre plusieurs vecteurs. On voit directement que $u_3 = u_1 + u_2$, donc $\mathscr{C}$ est liée.

2. Partons ici sur une technique d'échelonnement de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1\times L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1\times L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2\times L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3\times L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve bien une matrice de rang 2, donc $\boxed{\dim F = 2}$. *En plus, la forme échelonnée donne des relations linéaires :* $u_3 = u_1 + u_2, u_4 = -u_1 + u_2$. *Donc* $F = \text{Vect}(u_1,u_2)$.

La famille (u_1,u_2) est donc génératrice, de plus de cardinal $2 = \dim F$, donc $\boxed{(u_1,u_2) \text{ est une base de } F}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in F &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) = \lambda u_1 + \mu u_2 \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x &= \lambda + 2\mu \\ y &= \lambda + 3\mu \\ z &= \lambda + 5\mu \end{cases} \\ &\iff \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 3x - 2y &= \lambda \\ y - x &= \mu \\ z &= 3x - 2y + 5(y-x) \end{cases} \\ &\iff -2x + 3y - z = 0.\end{aligned}$$

$L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

4. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1,u_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution (exercice 6)

[Énoncé]

Soient λ, μ, ν telles que

$$\lambda(4-m,4,4)+\mu(3,3-m,6)+\nu(3,6,3-m)=0,$$

on obtient alors le système suivant, que l'on souhaite résoudre en (λ,μ,ν) par la méthode du pivot. Commençons par échanger les lignes 1 et 3 afin d'avoir un pivot indépendant de m en position $(1,1)$.

$$\begin{cases} (4-m)\lambda+3\mu+3\nu &= 0, \\ 4\lambda+(3-m)\mu+6\nu &= 0, \\ 4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &= 0, \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\overset{L}{\sim} \begin{cases} 4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &= 0, \\ 4\lambda+(3-m)\mu+6\nu &= 0, \\ (4-m)\lambda+3\mu+3\nu &= 0, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-L_1, \\ L_3 \leftarrow 4L_3-(4-m)L_1 \end{array}$$

$$\overset{L}{\sim} \begin{cases} 4\lambda+6\mu+(3-m)\nu &= 0, \\ -(m+3)\mu+(m+3)\nu &= 0, \\ 6(m-2)\mu+m(7-m)\nu &= 0, \end{cases}$$

Deux cas se présentent alors :

- si $m=-3$, alors le système devient

$$\begin{cases} 2\lambda+3\mu+3\nu &= 0, \\ 6(-5)\mu+10.(-3)\nu &= 0, \end{cases} \iff \begin{cases} 2\lambda &= 0, \\ \mu &= -\nu. \end{cases}$$

  Ainsi, le triplet $(0,1,-1)$ est une solution non nulle du système donc la famille n'est pas libre.

- Si $m \neq -3$, alors le système est

$$\begin{cases} 4\lambda+(9-m)\mu &= 0, \\ \mu &= \nu, \\ (6(m-2)+m(7-m))\mu &= 0, \end{cases}$$

  mais $6(m-2)+m(7-m)=-m^2+13m-12=-(m-1)(m-12)$. Donc si $m \in \{1,12\}$, on obtient $\begin{cases} 4\lambda+(9-m)\mu &= 0, \\ \mu &= \nu, \end{cases}$, il existe alors des solutions non nulles puisque $9-m \neq 0$. La famille n'est pas libre. En revanche, si $m \neq 1,12$, le système devient

$$\begin{cases} 4\lambda+(9-m)\mu &= 0, \\ \mu &= \nu, \\ \mu &= 0, \end{cases} \iff \lambda=\mu=\nu=0.$$

  La famille est donc libre dans ce cas.

A-t-on trois vecteurs dans cette famille ? $u \neq v$ car $4 \neq 6$, et $v=w$ si, et seulement si, $m=-3$. Donc lorsque $m \neq -3$, la famille considérée est de cardinal 3. En conclusion

$$\boxed{(u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ si, et seulement si, } m \neq -3,1,12.}$$

Solution (exercice 7) [Énoncé]

1. Nous savons, d'après le cours de géométrie, que ce sont des équations cartésiennes d'hyperplans de $\mathbb{R}^3$.

   - $$\begin{aligned}(x,y,z)\in F &\iff y=z\\ &\iff (x,y,z)=(x,y,y)=x(1,0,0)+y(0,1,1).\end{aligned}$$
     Ainsi $F=\text{Vect}((1,0,0),(0,1,1))$, c'est donc $\boxed{\text{un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$ et $((1,0,0),(0,1,1))$ en est une famille génératrice. Elle est clairement libre donc c'est une base de F, $\dim F=2$.

   - $$\begin{aligned}(x,y,z)\in G &\iff x+y+2z=0\\ &\iff (x,y,z)=(-y-2z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-2,0,1).\end{aligned}$$
     Ainsi $\boxed{G=\text{Vect}((-1,1,0),(-2,0,1))}$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $((-1,1,0),(-2,0,1))$ en est une famille génératrice. Elle est clairement libre donc c'est une base de G, $\dim G=2$.

2. $$(x,y,z)\in F\cap G \iff \begin{cases} x+y+2z &=0,\\ y&=z\end{cases}$$
   $$\iff x=-3z, y=z \iff (x,y,z)=(-3z,z,z)=z(-3,1,1).$$
   Donc : $\boxed{F\cap G=\text{Vect}((-3,1,1)).}$ Une base est alors $(-3,1,1)$.

Solution (exercice 8) [Énoncé]

Notons $f_1=(-1,1,1), f_2=(1,-1,1), f_3=(1,1,-1)$. On cherche $\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$ tels que $u=\lambda f_1+\mu f_2+\nu f_3$, c'est-à-dire :
$$\begin{cases} 8 &= -\lambda+\mu+\nu\\ 4 &= \lambda-\mu+\nu\\ 2 &= \lambda+\mu-\nu.\end{cases}$$
On résout ensuite le système en λ,μ,ν, on trouve comme solution $(3;5;6)$. C'est-à-dire : $\boxed{\underset{\mathscr{B}}{\text{Mat}}(u)=\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}}$.

Solution (exercice 9) [Énoncé]

1. Dans le premier cas, en cherchant $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, on trouve que $b=0=c$, donc
   $$\mathscr{C}(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$
   Et donc $\boxed{\dim\mathscr{C}(A)=2}$, les deux matrices étant clairement non colinéaires.

   Dans le second cas, $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, on trouve après calculs que :
   $$\mathscr{C}(A)=\text{Vect}\left(I_2,\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right).$$
   Et donc $\boxed{\dim\mathscr{C}(A)=2}$, les deux matrices étant clairement non colinéaires.

   Pour le troisième, puisque toute matrice commute avec l'identité, on a $\mathscr{C}(I_2)=\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, donc c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{C})$, mais de $\boxed{\text{dimension } 4}$.

2. La matrice nulle commute évidemment avec A car $0A=A0=0$, et $\mathscr{C}(A)\subset\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Soient $B_1,B_2\in\mathscr{C}(A)$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, alors montrons que $(\lambda B_1+\mu B_2)A=A(\lambda B_1+\mu B_2)$.
   $$\begin{aligned}(\lambda B_1+\mu B_2)A &= \lambda B_1A+\mu B_2A\\ &= \lambda AB_1+\mu AB_2 \quad B_1,B_2\in\mathscr{C}(A)\\ &= A(\lambda B_1+\mu B_2).\end{aligned}$$
   Donc $\boxed{\mathscr{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).}$

3. On sait que $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\dim\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})=n^2$, donc $\dim\mathscr{C}(A)\leqslant n^2$. Par ailleurs, $I_n, A\in\mathscr{C}(A)$, donc par stabilité
   $$\text{Vect}(I_n,A)\subset\mathscr{C}(A).$$
   Deux cas se présentent :
   - si $A=\lambda I_n$ pour un certain λ, alors $\mathscr{C}(A)=\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ car toutes les matrices commutent avec λI_n et donc le commutant est de dimension n^2.
   - Sinon (I_n,A) est une famille libre, donc $\dim\text{Vect}(A,I_n)=2$ et
     $$2=\dim\text{Vect}(A,I_n)\leqslant\dim\mathscr{C}(A).$$

   Donc $\boxed{2\leqslant\dim\mathscr{C}(A)\leqslant n^2.}$

Solution (exercice 10) [Énoncé]

1. On a clairement par définition que :

$$F = \left\{ a\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{:=M_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{:=M_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{:=M_3} \,\middle|\, (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \right\}$$
$$= \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3).$$

Les trois matrices M_1, M_2, M_3 sont clairement non colinéaires, donc elles forment une base de F. Donc $\boxed{\dim F = 3}$, et $\boxed{(M_1, M_2, M_3) \text{ en est une base}}$.

2. On pose $T = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2.1) C'est une application typique du binôme de Newton. On écrit que $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On voit que $N^2 = 0_{3,3}$, $ND = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = DN$, donc les deux matrices commutent. On déduit :

$$T^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kD^{n-k} = \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}N^kD^{n-k} = D^n + nND^{n-1}.$$

On obtient alors : $\boxed{T^n = \begin{pmatrix}(-2)^n&0&0\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

2.2) D'après la question précédente, on a : $\boxed{T^n = M((-2)^n, 1, n) \in F}$.

2.3) La famille (I_3, T, T^2) est de cardinal 3, composée de trois éléments de F, donc c'est une base si, et seulement si, les matrices forment une famille libre. De plus, $T^2 = M(4,1,2) = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$. Soient $\lambda_0,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda_0 I_3 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 = 0.$$

On déduit alors en traduisant l'égalité coefficient par coefficient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_0 - 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &=& 0\\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 &=& 0\\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &=& 0.\end{array}\right.$$

On trouve après calculs : $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (0;0;0)$. La famille $\boxed{(I_3, T, T^2) \text{ est donc une base de F}}$.

Solution (exercice 11) [Énoncé] ...

Solution (exercice 12) [Énoncé] ...

Solution (exercice 13) [Énoncé]

- $F \subset \mathbb{R}[X]$ par définition.
- Le polynôme nul appartient à F puisque $0 = (X+1)\times 0$.
- Soient $P, Q \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Montrons que $R = \lambda P + \mu Q \in F$. On calcule :
$$\begin{aligned}R(X^2) &= (\lambda P + \mu Q)(X^2) = \lambda P(X^2) + \mu Q(X^2)\\ &\overset{P,Q\in F}{=} \lambda(X+1)P + \mu(X+1)Q = (X+1)(\lambda P + \mu Q)\\ &= (X+1)R.\end{aligned}$$
  Donc : $\boxed{\text{F est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$.

Solution (exercice 14) [Énoncé]

Le point clé est de constater que $L_k(x_i) = 1$ si $i = k$, 0 sinon. Supposons alors que

$$\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0.$$

Si on évalue cette égalité en x_k, on trouve $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![1\,,\,n]\!]$. La famille est donc libre. C'est une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n, donc c'est une $\boxed{\text{base de E}}$.

Solution (exercice 15) [Énoncé]

1. Notons $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. On commence par calculer la matrice de la famille dans la base canonique :

$$M = \underset{\mathscr{F}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = \begin{pmatrix}3&2&3&0&1\\2&1&1&3&0\\1&0&-1&1&-1\\2&1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

On peut ensuite échelonner-réduire cette famille afin de déterminer la dimension, ainsi qu'une base.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow\frac{1}{3}L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/3 & 1 & 0 & 1/3\\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2\times L_1\\ L_3\leftarrow L_3-1\times L_1\\ L_4\leftarrow L_4-2\times L_1}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/3 & 1 & 0 & 1/3\\ 0 & -1/3 & -1 & 3 & -2/3\\ 0 & -2/3 & -2 & 1 & -4/3\\ 0 & -1/3 & -1 & 1 & -2/3\end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow\frac{1}{(-1/3)}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/3 & 1 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & 3 & -9 & 2\\ 0 & -2/3 & -2 & 1 & -4/3\\ 0 & -1/3 & -1 & 1 & -2/3\end{array}\right) \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-2/3\times L_2\\ L_3\leftarrow L_3+2/3\times L_2\\ L_4\leftarrow L_4+1/3\times L_2}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -9 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow\frac{1}{(-5)}L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -9 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-6\times L_3\\ L_2\leftarrow L_2+9\times L_3\\ L_4\leftarrow L_4+2\times L_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

On constate alors que $\mathrm{Rg}(\mathscr{F}) = 3$, et on tire aussi les relations linéaires : $u_3 = -u_1 + 3u_2$, $u_5 = -u_1 + 2u_2$. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_4),$$

et (u_1, u_2, u_4) est une famille génératrice de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base. Conclusion :

$$\boxed{(u_1, u_2, u_4) \text{ est une base de F.}}$$

2. Constatons que $\underset{P_1}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = u_2$, $\underset{P_2}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = u_1$, $\underset{P_3}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = u_5$. On sait déjà d'après la question précédente que $u_5 = -u_1+2u_2$, donc $P_3 = -P_2 + 2P_1$. Donc :

$$\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2).$$

Or P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{(P_1, P_2) \text{ est une base de } \mathrm{Vect}(P_1, P_2)}$. Ainsi, $\boxed{\dim F = 2}$.

Solution (exercice 16) [Énoncé]

1. Par calculs directs, on a $P_0 = 1, P_1 = 1 + X, P_2 = 1 + X + X^2$.

2. Puisque $\deg P_i = i$ pour tout $i \in [\![0\,,\,n]\!]$, on déduit que $\mathscr{F} = (P_0, \dots, P_n)$ est bien une famille de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ et échelonnée, donc $\mathscr{F}$ est libre, donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ est une base}}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Les P_i sont directement écrits dans la base canonique :

$$\forall i \in [\![0\,,\,n]\!], \quad P_i = \sum_{k=0}^{i} 1 \times X^k + \sum_{k=i+1}^{n} 0 \times X^k.$$

On déduit alors :

$$\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Pour la seconde, il s'agit d'exprimer les vecteurs de la base canonique en fonction des éléments de $\mathscr{F}$. Soit $i \in [\![1\,,\,n]\!]$:

$$X^0 = P_0, \quad X = (1 + X) - 1 = P_1 - P_0, \quad X^i = P_i - P_{i-1}.$$

On déduit alors :

$$\underset{\mathscr{F}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}^{\mathbf{can}}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Solution (exercice 17) [Énoncé]

1. Par définition, on a : $\boxed{\underset{\mathscr{B}^{\mathbf{can}}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = A}$.

2. On peut ensuite échelonner pour en calculer le rang :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \underset{L_1\leftarrow\frac{1}{(-1)}L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-1\times L_1}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix} \underset{L_2\leftrightarrows L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \underset{L_1\leftarrow L_1-1\times L_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow\frac{1}{5}L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+5\times L_3\\ L_2\leftarrow L_2-4\times L_3}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{\mathrm{Rg}(\mathscr{C}) = \mathrm{Rg}(A) = 3} = \dim \mathbb{R}_2[X]$, donc $\mathscr{C}$ est génératrice. Mais par ailleurs $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) = 3$, donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X].}$

3. Déterminons les coordonnées du vecteur $P = X$ dans la base $\mathscr{C}$. *Pour le moment, nous devons utiliser une méthode artisanale, il faudra attendre le Chapitre (ALG) 12 afin de proposer une autre méthode plus efficace*

On cherche $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$X = \lambda P_1 + \mu P_2 + \nu P_3 \iff X = (-\lambda - \mu + \nu) + (2\nu)X + (\lambda + 5\mu + 3\nu)X^2.$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} -\lambda - \mu + \nu &= 0 \\ 2\nu &= 1 \\ \lambda + 5\mu + 3\nu &= 0. \end{cases}$$

On trouve $(\lambda, \mu, \nu) = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ après calculs. Ainsi, $\boxed{\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

Solution (exercice 18) [Énoncé]

1. Notons $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$. On a $\mathrm{Card}\,\mathscr{B} = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$, donc il suffit d'établir la liberté. Or, la famille est échelonnée et composée de polynômes non nuls, elle est donc libre. Conclusion : $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_3[X]}$.

2. On a directement $\boxed{\underset{\mathscr{B}^{\mathrm{can}}}{\mathrm{Mat}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$. On cherche ensuite $(\lambda_0, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que : $\quad X^3 + X = \lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X-1)^2 + \lambda_3(X-1)^3$.
On peut tout développer, mais le plus simple est d'évaluer. En faisant $X = 1$, on obtient $\lambda_0 = 2$. En analysant le coefficient dominant de chaque côté, on déduit : $1 = \lambda_3$. Dérivons ensuite une fois :

$$3X^2 + 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2(X-1) + 3\lambda_3(X-1)^2$$

puis faisons $X = 1$, on trouve alors : $4 = \lambda_1 + 0, \lambda_1 = 4$. Il reste à trouver λ_2, on peut re-dériver puis évaluer encore en 1 :

$$6X = 2\lambda_2 + 6\lambda_3(X-1) \implies \lambda_2 = 3.$$

Au final : $\quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(P) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

3. **3.1)** Montrons qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E. On a $0 \in F$, $F \subset E$ et soient $P, Q \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda P + \mu Q \in E$ puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel, et :

$$(\lambda P + \mu Q)'(1) = (\lambda P' + \mu Q')(1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0,$$
$$(\lambda P + \mu Q)''(1) = (\lambda P'' + \mu Q'')(1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0,$$
$$(\lambda P + \mu Q)'''(1) = (\lambda P''' + \mu Q''')(1) = \lambda 0 + \mu 0 = 0.$$

Donc : $\lambda P + \mu Q \in F$. En résumé : F est un sous-espace vectoriel de E donc $\boxed{\text{F est un espace vectoriel}}$.

3.2) Soit $P \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff 1 \text{ est racine de multiplicité au moins } 3 \\ &\iff (X-1)^3 \mid P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P = (X-1)^3 Q \\ &\iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad P = \lambda(X-1)^3}. \end{aligned}$$

en passant au degré

3.3) En d'autres termes $F = \mathrm{Vect}((X-1)^3)$, donc comme $(X-1)^3$ est non nul, $\boxed{\dim F = 1}$, c'est une droite vectorielle de E.

Solution (exercice 19) [Énoncé]

1. $\boxed{\text{Faux}}$, considérons $f : x \longmapsto x - 4$, $g : x \longmapsto x - 1$, alors les deux fonctions appartiennent à l'ensemble considéré, et pourtant $f + g$ ne s'annule ni en 1 ni en 4 ($(f+g)(1) = -3, (f+g)(0) = -5$). L'ensemble n'est donc pas stable par somme, *a fortiori* ce n'est pas un espace vectoriel.

2. $\boxed{\text{Faux}}$. Par exemple g définies précédemment est croissante, et pourtant $-g$ ne l'est pas.

3.
- $\boxed{\text{Vrai}}$ dans le premier cas. En effet, notons $r, r' \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite arithmétique de raison r, (u'_n) une suite arithmétique de raison r'. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda(u_n + r) + \mu(v_n + r') = \lambda u_n + \mu v_n + (\lambda r + \mu r').$$
Ceci prouve que $(\lambda u_n + \mu v_n)_n$ est encore arithmétique, de raison $\lambda r + \mu r'$.
- $\boxed{\text{Faux}}$. En revanche, si l'on impose la même raison r pour les deux suites, cela ne fonctionne plus. En effet, la suite $(u_n) = (1 + nr)_n, (v_n) = (nr)_n$ sont arithmétiques de raison r, et pourtant $(u_n) + (v_n) = (1 + n(2r))$ est arithmétique de raison $2r$. L'ensemble n'est pas donc pas stable par somme.

4. Pour les suites géométriques, c'est l'inverse. Si l'on impose la raison, l'ensemble forme un espace vectoriel, et par contre ce n'est pas le cas dans le cas contraire.
- $\boxed{\text{Faux}}$, si l'on impose pas de raison. En effet, (2^n) est géométrique de raison 2, (1) est géométrique de raison 1. Et pourtant $(2^n + 1)$ n'est pas géométrique car $\left(\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\right)$ n'est pas une suite constante (valeurs en 0 et 1 distinctes par exemple).
- $\boxed{\text{Vrai}}$. Notons $(u_n), (v_n)$ deux suites géométriques de raison ρ. Soient

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} = \lambda \rho u_n + \mu \rho v_n = \rho(\lambda u_n + \nu v_n).$$

Ceci prouve que $(\lambda u_n + \mu v_n)_n$ est géométrique de raison ρ. L'ensemble des suites géométriques de raison ρ est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.

5. $\boxed{\text{Faux}}$. En effet, $x \longmapsto x$ est positive continue ou nulle sur $]-1,1[$, mais $x \longmapsto -x$ ne l'est pas. L'ensemble n'est donc pas stable par opposé et n'est *a fortiori* pas un espace vectoriel.

Solution (exercice 20) [Énoncé]

1. Soient λ_1, λ_2 tels que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{\lambda_1}{x-1} + \frac{\lambda_2}{x+1} = \frac{\lambda_2(x+1) + \lambda_1(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 0,$$

donc en identifiant les termes en x et constants au numérateur, on déduit

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 - \lambda_1 = 0,$$

d'où l'on tire facilement $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

2. Montrons que $g : x \longmapsto \frac{1}{x^2-1}$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. On cherche λ, μ telles que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\lambda}{x-1} + \frac{\mu}{x+1} = \frac{\lambda_2(x+1) + \lambda_1(x-1)}{x^2-1},$$

en identifiant les termes en x et constants au numérateur, on trouve que $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}}$ convient.

Solution (exercice 21) [Énoncé]

1. S est inclus dans E par construction, de plus, $2.0'' + 2.0' + 0 = 0$ donc la fonction nulle est dans $\mathscr{S}$. Soient deux solutions $y_1, y_2 \in \mathscr{S}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &2(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + 2(\lambda y_1 + \mu y_2)' + (\lambda y_1 + \mu y_2) \quad \textit{linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(2y_1'' + 2y_1' + y_1) + \mu(2y_2'' + 2y_2' + y_2) \\ &= \lambda 0 + \mu 0 = 0. \end{aligned}$$

Donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution et $\boxed{\mathscr{S} \text{ est bien un sous-espace vectoriel de S.}}$

2. Notons (EC) $\quad 2x^2 + 2x + 1 = 0$ l'équation caractéristique associée, qui a pour discriminant $4 - 8 = -4$ et donc pour racines

$$\frac{-2 \pm 2i}{4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}.$$

Ainsi, les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto e^{-x/2}\left(A\cos(x/2) + B\sin(x/2)\right), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

autrement dit

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(x \longmapsto e^{-x/2}\cos(x/2), x \longmapsto e^{-x/2}\sin(x/2))}.$$

Montrons que la famille est libre, soit donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{-x/2}\cos(x/2) + \mu e^{-x/2}\sin(x/2) = 0,$$

dès lors, en simplifiant par l'exponentielle, on déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda\cos(x/2) + \mu\sin(x/2) = 0.$$

Il reste par exemple à prendre deux valeurs particulières de x :

$$\lambda = 0 \ (x = 0), \quad \nu = 0 \ (x = \pi).$$

Donc la famille proposée est libre et de cardinal 2, donc $\boxed{\dim \mathscr{S} = 2.}$

3. Soit α fixé dans $\mathbb{R}$ et $H_\alpha = \{f \in S, \quad f(0) = f(\alpha) = 0\}$. Soit $y \in \mathscr{S}$, alors choisissons A, B réels de sorte que $y(x) = e^{-x/2}\left(A\cos(x/2) + B\sin(x/2)\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y \in H_\alpha &\iff y(0) = y(\alpha) = 0, \\ &\iff \begin{cases} A &= 0, \\ e^{-\alpha/2}B\sin(\alpha/2) &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} A &= 0, \\ B\sin(\alpha/2) &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors.

- si $\sin(\alpha/2) = 0$, alors B est quelconque et $\boxed{H_\alpha = \mathrm{Vect}\left(x \longmapsto e^{-x/2}\sin(x/2)\right) \text{ donc } \dim H_\alpha = 1}$.
- Si $\sin(\alpha/2) \neq 0$, alors $B = 0$ et $\boxed{H_\alpha = \{0\} \text{ donc } \dim H_\alpha = 0}$.

Solution (exercice 22) [Énoncé]

1. La famille $\left((q_1^n), (q_2^n)\right)$ est une famille génératrice de F donc F est de dimension finie. Montrons qu'elle est libre. Soient λ, μ deux réels, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda q_1^n + \mu q_2^n = 0.$$

Donc comme $|q_1| < |q_2|$, $\left|\frac{q_1}{q_2}\right| < 1$. Ainsi, $\lim_{n \to \infty} \frac{q_1}{q_2} = 0$. Donc

$$\lambda\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^n + \mu = 0,$$

puis en passant à la limite on obtient $\mu = 0$. On peut ensuite faire $n = 1$ dans l'hypothèse initiale, ce qui livre $\lambda = 0$. Donc la famille considérée est une base, et $\boxed{\dim F = 2.}$

2. Si $(u_n) \in F_0$, alors il existe λ, μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n.$$

La condition $u_0 = u_1 = 0$ donne

$$\lambda 0 + \mu = 0, 0 = \lambda q_1 + \mu q_2.$$

Ou de manière équivalente,

$$0 = \lambda(q_1 - q_2),$$

or $q_1 \neq q_2$ donc $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Donc $\boxed{F_0 = \{(0)\}, \dim F_0 = 0.}$

Solution (exercice 23) Énoncé

1. Lorsque $m = 1$: $v_1 = (1,1,1)$ $v_2 = (2,2,2) = 2v_1$ $v_3 = (1,1,1) = v_1$. Ainsi,

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1), \quad \text{et : } v_1 \neq 0$$

donc : $\dim V_1 = \dim \mathrm{Vect}(v_1)$. Ainsi, $\boxed{\dim V_1 = 2}$. De plus,

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in V_1 &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (x,y,z) = \lambda(1,1,1) + \mu(2,2,2) = (\lambda + 2\mu)(1,1,1) \\
&\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \lambda + 2\mu &= x \\ \lambda + 2\mu &= y \\ \lambda + 2\mu &= z \end{cases} \\
&\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{\iff} \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \lambda + 2\mu &= x \\ 0 &= y - x \\ 0 &= z - x \end{cases} \\
&\iff x = y = z.
\end{aligned}$$

La forme cartésienne de V_1 est donc : $\boxed{V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}}$.

2. On revient ici dans le cas général.

2.1) On a par définition :

$$M_m = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 1 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (1,0,0) \\ (0,1,1) \\ (0,0,1) \end{array}.$$

2.2) On peut échelonner la matrice.

$$M_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 1 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - mL_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 2(1-m) & (1-m)(1+m) \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & (1-m)(3+m) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\boxed{\dim V_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m = -3 \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}}$

3.
- Lorsque $m = 1$, on a déjà vu que (v_1, v_2, v_3) n'est pas une base de V_m (puisque $v_3 = v_1$ donc la famille est clairement liée).
- Lorsque $m = -3$, $v_1 = (1,1,-3), v_2 = (2,-2,2), v_3 = (-3,1,1)$. La famille est (v_1, v_2, v_3) génératrice de V_{-3}, mais ne peut être une base car de cardinal 3 alors que $\dim V_{-3} = 2$.
- Lorsque $m \notin \{-3, 1\}$, dans ce cas (v_1, v_2, v_3) est génératrice de cardinal 3 avec $\dim V_m = 3$. C'est donc une base de V_m.

4. Pour $m = 0$, on cherche λ, μ, ν de sorte que :

$$(4,2,1) = \lambda(1,1,0) + \mu(2,1,2) + \nu(0,1,1) \iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = 4 \\ \lambda + \mu + \nu = 2 \\ 2\mu + \nu = 1 \end{cases}.$$

On trouve après résolution : $\boxed{\lambda = 2, \quad \mu = 1, \quad \nu = -1}$.

Solution (exercice 24) Énoncé

1. On pose $N = \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Notons $O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comme O est diagonale, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad O^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$.

Ainsi : $\boxed{N^k = \begin{pmatrix} \left(\frac{a-b}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \left(\frac{a-b}{2}\right)^k \end{pmatrix}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. $\mathscr{B}_c = (1, X)$.

3. On suppose dans cette question uniquement que $a \neq b$.

3.1) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(X-a) + \mu(X-b) = 0$. En évaluant en $X = a$, on obtient $\mu(a-b) = 0$ et donc $\mu = 0$ car $a \neq b$. En évaluant de-même en $X = b$ on déduit de la même façon que $\lambda = 0$. Ainsi la famille $\mathscr{B}$ est libre, de cardinal $2 = \dim \mathbb{R}_1[X]$ donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X]}$.

3.2) $P = \underset{\mathscr{B}_c}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{B}) = \boxed{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} X-a & X-b \end{array} \\ \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \end{array}}$.

3.3) $\det P = -a + b = b - a \neq 0$, donc P est inversible d'inverse :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}}.$$

4. **4.1)** $M = \underset{\mathscr{B}_c}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \boxed{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \end{array}}$

4.2) On a :

$$\det \mathrm{M} = -\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + ab = -\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+2ab\right)+ab = -\frac{1}{4}\left(a^2+b^2-2ab\right).$$

Donc $\det \mathrm{M} = -\frac{1}{4}(a-b)^2$. Ainsi : $\boxed{\mathrm{M} \quad \text{est inversible} \iff a \neq b.}$

5. **5.1)** On a $\mathrm{P}^1 = \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{PNP}^{-1} &= \frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a-b & -2ab \\ 2 & b+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & ab \\ -1 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\mathrm{M}}.
\end{aligned}$$

5.2) Par récurrence très classique, on justifie que $\mathrm{M} = \mathrm{PN}^k\mathrm{P}^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^k &= \mathrm{P}\begin{pmatrix} \left(\frac{a-b}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k\left(\frac{a-b}{2}\right)^k \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{a-b}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k\left(\frac{a-b}{2}\right)^k \end{pmatrix}\frac{1}{b-a}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^k}{b-a}\begin{pmatrix} -a+(-1)^k b & ab\left(-1+(-1)^k\right) \\ 1-(-1)^k & b-(-1)^k a \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

6. On s'intéresse dans cette question à l'ensemble :

$$\mathrm{F} = \left\{a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{M} + c\mathrm{M}^2 + d\mathrm{M}^3 \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

6.1) Immédiat, puisque $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_2, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2, \mathrm{M}^3\right)$; c'est un sous-espace vectoriel engendré, c'est donc un espace vectoriel.

6.2) Un calcul direct montre que $\boxed{\mathrm{M}^2 = \lambda \mathrm{I}_2 \text{ avec } \lambda = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}$, ce qui justifie que $\mathrm{M}^2 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{M})$.

Donc $\mathrm{M}^3 = \mathrm{M}^2 \times \mathrm{M} = \lambda\mathrm{M}$, et donc $\mathrm{M}^3 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, \mathrm{M})$.

6.3) D'après la question précédente, on a donc :

$$\mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_2, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2, \mathrm{M}^3\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_2, \mathrm{M}\right).$$

De plus, I_2, M étant clairement non colinéaires, la famille $\boxed{(\mathrm{I}_2, \mathrm{M}) \text{ est une base de F}}$.